ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

42η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Δίνεται ότι οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι και ότι το σύστημα

$$mx + 3y = m,$$
$$2x + ny = n,$$

με αγνώστους $x, y \in \mathbb{R}$ δεν έχει λύσεις. Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (m, n).

Λύση
Επειδή $m \neq 0$ έχουμε

$$\begin{Bmatrix} mx + 3y = m \\ 2x + ny = n \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \dfrac{m-3y}{m} \\ x = \dfrac{n-ny}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{n-ny}{2} = \dfrac{m-3y}{m} \\ x = \dfrac{n-ny}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} mn - mny = 2m - 6y \\ x = \dfrac{n-ny}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (6-mn)y = 2m - mn \\ x = \dfrac{n-ny}{2} \end{Bmatrix}.$$

Επειδή από την υπόθεση το σύστημα δεν έχει λύσεις, έπεται ότι η εξίσωση

$$(6-mn)y = 2m - mn \text{ είναι αδύνατη} \Leftrightarrow 6 - mn = 0 \text{ και } m(2-n) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (m,n) = (2,3) \text{ ή } (m,n) = (1,6) \text{ ή } (m,n) = (6,1),$$

αφού οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι.

2ος τρόπος. Αν υποθέσουμε ότι το δοθέν σύστημα έχει λύσεις, τότε θα έχει λύσεις και το σύστημα που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το 2 και τη δεύτερη με το $-m$:

$$\begin{cases} 2mx + 6y = 2m \\ -2mx - mny = -mn \end{cases}$$

Τότε με πρόσθεση κατά μέλη, θα έχει λύση ως προς y και η εξίσωση

$$(6-mn)y = m(2-n).$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το n και τη δεύτερη με το -3 παίρνουμε

$$\begin{cases} nmx + 3ny = mn \\ -6x - 3ny = -3n \end{cases}$$

Τότε με πρόσθεση κατά μέλη, θα έχει λύση ως προς x και η εξίσωση

$$(6-mn)x = n(3-m).$$

Αν $mn \neq 6$, τότε όπως είναι φανερό από τις παραπάνω εξισώσεις το σύστημα έχει λύση, άτοπο. Άρα πρέπει $mn = 6$ και $(m, n) \neq (3,2)$, αφού αλλιώς το σύστημα θα είχε άπειρες το πλήθος λύσεις $(x, y) = (k, 1-k)$, με k πραγματικό αριθμό. Συνεπώς, τα ζητούμενα δυνατά ζεύγη είναι τα $(m, n) = (2, 3), (6, 1)$ και $(1, 6)$.

3ος τρόπος. Με τη μέθοδο των οριζουσών έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & n \end{vmatrix} = mn - 6, D_x = \begin{vmatrix} m & 3 \\ n & n \end{vmatrix} = mn - 3n, \qquad D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ 2 & n \end{vmatrix} = mn - 2m.$$

Το σύστημα δεν έχει λύσεις, αν, και μόνον αν,

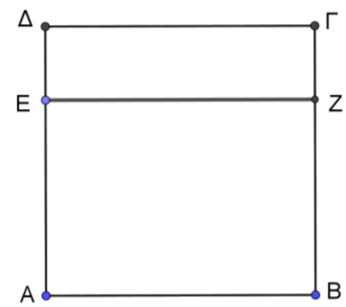
$$D = 0 \text{ και } \left(D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0\right) \Leftrightarrow mn - 6 \text{ και } (n(m-3) \neq 0 \text{ ή } m(n-2) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (m, n) = (2,3) \text{ ή } (m, n) = (1,6) \text{ ή } (m, n) = (6,1),$$

αφού οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι.

Πρόβλημα 2

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος υποδιαιρείται με το τμήμα ΕΖ σε δύο ορθογώνια ΑΒΖΕ και ΕΖΓΔ. Δίνεται ότι ΑΕ $>$ ΕΔ. Τα μήκη όλων των πλευρών των δύο ορθογωνίων είναι θετικοί ακέραιοι. Αν η διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων είναι 24, να προσδιορίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Λύση (1ος τρόπος)

Έστω x η πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ και ΑΕ $= y < x$, οπότε ΕΔ $= x - y > 0$, όπου οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε

$$E(\text{ΑΒΖΕ}) = xy \text{ και } E(\text{ΕΖΓΔ}) = x(x-y),$$

οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$xy - x(x-y) = 24 \Leftrightarrow 2xy - x^2 = 24 \Leftrightarrow x(2y - x) = 24.$$

Επειδή ο x είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι και $2y - x > 0 \Leftrightarrow x < 2y$, οπότε έχουμε τον περιορισμό $y < x < 2y$. Επίσης, έχουμε

$$y > 2y - x \Leftrightarrow x > y, \text{που ισχύει.}$$

Συνοψίζοντας έχουμε τους περιορισμούς: $2y - x < y < x < 2y$.
Τότε από την εξίσωση $x(2y - x) = 24$ προκύπτουν οι λύσεις:

- $(x, 2y - x) = (6, 4) \Leftrightarrow x = 6,\ 2y = 10 \Leftrightarrow x = 6,\ y = 5$
- $(x, 2y - x) = (8, 3) \Leftrightarrow x = 8,\ 2y = 11$, απορρίπτεται
- $(x, 2y - x) = (12, 2) \Leftrightarrow x = 12,\ 2y = 14 \Leftrightarrow x = 12,\ y = 7$,
- $(x, 2y - x) = (24, 1) \Leftrightarrow x = 24,\ 2y = 25$, απορρίπτεται

Άρα οι δυνατές τιμές του εμβαδού του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 36 ή 144.

2ος τρόπος. Έστω (ΑΒ) $= x$ και (ΑΕ) $= y < x$, όπου οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε (ΑΒΖΕ) $= xy$ και (ΕΖΓΔ) $= x(x-y) = x^2 - xy$. Δίνεται ότι $y = AE >$ ΕΔ $= x - y$, οπότε

(ΑΒΖΕ) $>$ (ΕΖΓΔ). Έτσι, έχουμε την εξίσωση $xy-(x^2-xy)=24$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$x^2-2xy+24=0.$$

Για να έχει η παραπάνω εξίσωση ακέραιες λύσεις ως προς x, πρέπει η διακρίνουσα της $\Delta = 4y^2-96$ να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή, πρέπει να υπάρχει θετικός ακέραιος z τέτοιος ώστε $4y^2-96=z^2$. Τότε παίρνουμε

$$(2y+z)(2y-z)=96.$$

Τα ζευγάρια (δ_1,δ_2) των διαιρετών του 96 με $\delta_1>\delta_2>0$ και $\delta_1\delta_2=96$ είναι τα $(96,1),(48,2),(32,3),(24,4),(16,6)$, και $(12,8)$. Από αυτά, τα ζευγάρια με άθροισμα πολλαπλάσιο του 4 είναι μόνο το (24,4) και το (12,8). Έτσι, είναι:’

$$2y+z=24 \text{ και } 2y-z=4 \text{ ή } 2y+z=12 \text{ και } 2y-z=8.$$

Η πρώτη περίπτωση δίνει $(y,z)=(7,10)$, και η εξίσωση γίνεται $x^2-14x+24=0$ με λύσεις $x=2$ και $x=12$. Η λύση $x=2$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x>y$, ενώ η δεύτερη γίνεται δεκτή, οπότε το εμβαδό του $ΑΒΓΔ$ είναι ίσο με $12^2=144$ τετραγωνικές μονάδες. Ομοίως, η δεύτερη περίπτωση δίνει $(y,z)=(5,2)$, η εξίσωση γίνεται $x^2-10x+24=0$ με λύσεις $x=4$ και $x=6$, από τις οποίες γίνεται δεκτή μόνο η δεύτερη, αφού πρέπει $x>y$. Τότε το εμβαδό του $ΑΒΓΔ$ είναι ίσο με $6^2=36$ τετραγωνικές μονάδες.

Πρόβλημα 3. Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha+\beta=1$, ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}+\alpha\beta\geq\frac{5}{4}.$$

Λύση. (**1ος τρόπος**)
Πολλαπλασιάζοντας με $\alpha\beta>0$, βλέπουμε ότι η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta^2\geq\frac{5}{4}\alpha\beta.$$

Είναι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1-3\alpha\beta$, οπότε η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$1-3\alpha\beta+\alpha^2\beta^2\geq\frac{5}{4}\alpha\beta,$$

η οποία γράφεται

$$4\alpha^2\beta^2-17\alpha\beta+4\geq 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$(4\alpha\beta-1)(\alpha\beta-4)\geq 0.$$

Η τελευταία ισχύει, αφού

$$4\alpha\beta\leq(\alpha+\beta)^2=1,$$

Οπότε $4\alpha\beta-1\leq 0$ και $\alpha\beta\leq\frac{1}{4}<4$.
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

(**2ος τρόπος**) Παρατηρούμε ότι αφού $\alpha+\beta=1$, ισχύει

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\beta}=-3,$$

(η οποία μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους). Έτσι, η δοθείσα ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}\geq 3+\frac{5}{4}=\frac{17}{4}.$$

Την τελευταία μπορούμε να την αποδείξουμε με διάφορους τρόπους:

1. Αφού $(4\alpha\beta-1)^2\geq 0$, είναι $16\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta+1\geq 0$, και $\alpha^2\beta^2+1\geq 8\alpha\beta-15\alpha^2\beta^2$. Διαιρώντας με το $\alpha\beta>0$, παίρνουμε

$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}\geq 8-15\alpha\beta\geq 8-15\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{4},$$

αφού $\alpha\beta\leq\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}=\frac{1}{4}$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

2. Από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου-Γεωμετρικού Μέσου

$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=\left(\alpha\beta+\frac{1}{16\alpha\beta}\right)+\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4\alpha\beta}\geq 2\sqrt{\alpha\beta\cdot\frac{1}{16\alpha\beta}}+\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}=\frac{2}{4}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

3^{ος} τρόπος. Η δοθείσα ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}+\beta+\alpha\beta\geq\frac{5}{4}+1,$$

δηλαδή με την

$$\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta}+\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha}+\alpha\beta\geq\frac{9}{4},$$

η οποία γράφεται

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\alpha\beta\geq\frac{9}{4}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\alpha\beta>0$, η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2\geq\frac{9}{4}\alpha\beta.$$

Επειδή $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\alpha\beta$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$1-2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2\geq\frac{9}{4}\alpha\beta,$$

η οποία γράφεται

$$4\alpha^2\beta^2-17\alpha\beta+4\geq 0\Leftrightarrow(4\alpha\beta-1)(\alpha\beta-4)\geq 0.$$

Η τελευταία ισχύει, αφού

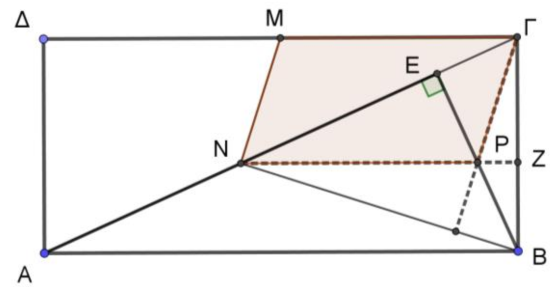
$$4\alpha\beta\leq(\alpha+\beta)^2=1,$$

οπότε $4\alpha\beta-1\leq 0$ και $\alpha\beta\leq\frac{1}{4}<4$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στη διαγώνιο του ΑΓ τέτοιο, ώστε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = 90^{\circ}$. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ και Ν είναι το μέσο του τμήματος ΑΕ, να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M} = 90^{\circ}$.

Λύση (1ος τρόπος)



Από το Ν φέρουμε παράλληλη προς την ευθεία ΓΔ η οποία τέμνει το τμήμα ΒΕ στο σημείο Ρ και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ. Επειδή το Ν είναι το μέσο της πλευράς ΝΕ του τριγώνου ΑΒΕ, έπεται ότι το Ρ είναι το μέσο της πλευράς ΒΕ και

$$\mathrm{NP} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Gamma\mathrm{M}.$$

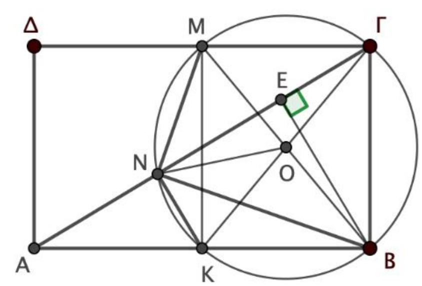
Επειδή $\mathrm{NP} \parallel= \mathrm{M}\Gamma$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΝΡΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε

$$\mathrm{NM} \parallel \mathrm{P}\Gamma.$$

Όμως επειδή $\mathrm{NP} \parallel \mathrm{M}\Gamma$ και $\mathrm{M}\Gamma \perp \mathrm{B}\Gamma$, έπεται ότι $\mathrm{NP} \perp \mathrm{B}\Gamma$.

Επομένως στο τρίγωνο ΝΒΓ τα ΒΕ και ΝΖ είναι ύψη του που τέμνονται στο Ρ το οποίο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΝΒΓ. Άρα θα είναι και $\Gamma\mathrm{P} \perp \mathrm{NB}$ και αφού $\mathrm{MN} \parallel \mathrm{P}\Gamma$, έπεται ότι: $\mathrm{MN} \perp \mathrm{NB}$ Άρα είναι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M} = 90^{\mathrm{o}}$.

2ος τρόπος.



Έστω Κ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΚΒΓΜ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, και άρα οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγώνιών του, τότε

$$\mathrm{OK} = \mathrm{OB} = \mathrm{O}\Gamma = \mathrm{OM}.$$

Επίσης, αφού το τμήμα ΚΝ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΒ του τριγώνου ΑΕΒ, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά, δηλ. την ΒΕ. Συνεπώς, $\mathrm{KN} \perp \mathrm{N}\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΚΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΚΓ. Τότε, όμως, είναι

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OK} = \mathrm{O}\Gamma.$$

Άρα το σημείο Ο ισαπέχει από τα σημεία Κ, Β, Γ, Μ, και Ν, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε κύκλο ω με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΓ. Τότε, όμως, είναι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M}$, αφού οι γωνίες αυτές βαίνουν στο ίδιο τόξο του ω. Συνεπώς, $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M} = 90^{\circ}$.

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η εξίσωση

$$x^4+5x^3+mx^2+5nx+4=0, \text{όπου } m,n \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

έχει δύο απλές πραγματικές λύσεις με άθροισμα -5. Να προσδιορίσετε την τιμή των m,n και όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Λύση

Έστω $\rho_1<\rho_2$ οι δύο πραγματικές λύσεις της δεδομένης εξίσωσης με $\rho_1+\rho_2=-5$ και $\rho_1\rho_2=b$. Τότε το πολυώνυμο

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)=x^2-(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1\rho_2=x^2+5x+b$$

είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $x^4+5x^3+mx^2+5nx+4$, οπότε έχουμε την ισότητα πολυωνύμων

$$x^4+5x^3+mx^2+5nx+4=(x^2+5x+b)(x^2+cx+d),$$

με $b,c,d\in\mathbb{R}$, $25-4b>0$ και $c^2-4d<0$ και m,n θετικοί ακέραιοι. Επομένως, έχουμε την ισότητα πολυωνύμων

$$x^4+5x^3+mx^2+5nx+4=x^4+(c+5)x^3+(b+d+5c)x^2+(bc+5d)x+bd,$$

$$\Leftrightarrow c+5=5, b+d+5c=m, bc+5d=5n, bd=4,$$
$$\Leftrightarrow c=0, \quad b+d=m, \quad d=n, \quad bd=4.$$

Επειδή $d=n$ θετικός ακέραιος, από την ισότητα $b+d=m$, όπου m θετικός ακέραιος, έπεται ότι και ο $b=m-n$ είναι θετικός ακέραιος, αφού $bd=4>0$, οπότε έχουμε:

$$n(m-n)=4 \Leftrightarrow (n,m-n)\in\{(1,4),(4,1),(2,2)\} \Leftrightarrow$$
$$(m,n)\in\{(5,1),(5,4),(4,2)\}.$$

Για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης έχουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν $(m,n)=(5,1)$ τότε $b=4, d=1$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+5x+4)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-4 \text{ ή } x=i \text{ ή } x=-i.$$

(β) Αν $(m,n)=(5,4)$, τότε $b=1$, $d=4$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+5x+1)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2} \text{ ή } x=2i \text{ ή } x=-2i.$$

(γ) Αν $(m,n)=(4,2)$, τότε $b=2$, $d=2$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+5x+2)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2} \text{ ή } x=\sqrt{2}\,i \text{ ή } x=-\sqrt{2}\,i.$$

2ος τρόπος. Έστω $P(x)=x^4+5x^3+mx^2+5nx+4$ και έστω b το γινόμενο των δύο πραγματικών ριζών του P(x). Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x)$: (x^2+5x+b) είναι

$$P(x)=(x^2+5x+b)(x^2+m-b)+(5b-5m+5n)x+b^2-bm+4.$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης, αφού έχει δύο πραγματικές ρίζες (αυτές του τριωνύμου x^2+5x+b, είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Αυτό ισχύει αν, και μόνο αν,

$$b = m - n \qquad \text{και} \qquad b^2 - bm + 4 = 0.$$

Έτσι, $m = b + n$, ενώ με αντικατάσταση της πρώτης σχέσης στη δεύτερη παίρνουμε $bn = 4$. Αφού ο b είναι θετικός ακέραιος, παίρνουμε τις τριάδες $(b, m, n) = (1,5,4), (2,4,2)$, και $(4,5,1)$. Η εύρεση των ριζών γίνεται όπως στον πρώτο τρόπο.

Σχόλιο. Οι σχέσεις $b = m - n$ και $bn = 4$ προκύπτουν και από τους τύπους Vieta για τις ρίζες του $P(x)$. Πράγματι, το άθροισμα των ριζών $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ του $P(x)$ είναι ίσο

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = -5,$$

οπότε το $P(x)$ έχει δύο ρίζες ρ_3, ρ_4 οι οποίες είναι συζυγείς μη πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα μηδέν. Άρα είναι της μορφής $\rho_3 = ai$ και $\rho_4 = -ai$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Από την $P(ai) - P(-ai) = 0$, παίρνουμε $10ia^3 - 10ian = 0$, και αφού $\alpha \neq 0$, έπεται ότι $n = a^2$. Επιπλέον, από Vieta, είναι

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = 4,$$

η οποία δίνει $bn = ba^2 = 4$. Και πάλι από Vieta, έχουμε

$$\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 = m.$$

Αφού

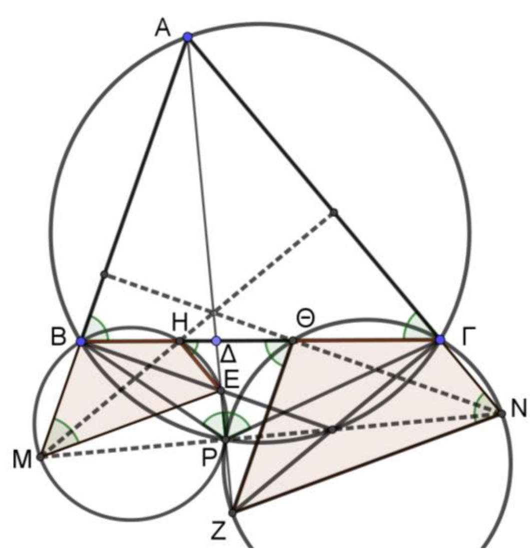
$$\rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 = (\rho_1 + \rho_2)(\rho_3 + \rho_4) = -5 \cdot 0 = 0,$$

$\rho_1\rho_2 = b$, και $\rho_3\rho_4 = a^2 = n$, παίρνουμε $b + n = m$.

Πρόβλημα 2

Έστω ΑΒΓ οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο και έστω Δ ένα σημείο της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ στην ευθεία ΑΔ τέτοια, ώστε ΕΒ ⊥ ΑΒ και ΖΓ ⊥ ΑΓ, και τα σημεία Η και Θ στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΕΗ ∥ ΑΓ και ΖΘ ∥ ΑΒ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΗΕ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ (Μ ≠ Β), και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΘΖ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν (Ν ≠ Γ). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΜΗ, ΝΘ και ΑΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση



Παρατηρούμε ότι από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΜΒΗΕ προκύπτει η ισότητα

$$\mathrm{M}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{E} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{E} = 90^0,$$

οπότε από την παραλληλία ΕΗ ∥ ΑΓ προκύπτει ότι ΜΗ ⊥ ΑΓ. Ομοίως προκύπτει και η σχέση ΝΘ ⊥ ΑΒ, οπότε οι ευθείες ΜΗ και ΝΘ ορίζουν δύο ύψη του τριγώνου ΑΜΝ. Επομένως για τη λύση του προβλήματος, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΔ ⊥ ΜΝ.

Έστω Ρ το σημείο τομής της ευθείας ΑΔ με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ. Από τη σχέση ΖΘ ∥ ΑΒ και τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΒΜΕΗ και ΖΝΓΘ έχουμε:

$$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{E} = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\Gamma = \mathrm{H}\widehat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{P}}\mathrm{A}.$$

Επομένως το τετράπλευρο ΒΜΡΕ είναι εγγράψιμο, οπότε το σημείο Ρ ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΗΕ. Άρα είναι

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{P}}\mathrm{M} = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{P}}\mathrm{M} = 180^o - \mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 180^o - 90^o = 90^o$$

και συνεπώς ΑΡ ⊥ ΜΡ.
Ομοίως, από τη σχέση ΕΗ ∥ ΑΓ και τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΒΜΕΗ και ΖΝΓΘ έχουμε:

$$\Gamma\widehat{\mathrm{P}}\mathrm{A} = \Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\widehat{\Theta}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\widehat{\mathrm{N}}\Gamma.$$

Επομένως το τετράπλευρο ΡΖΝΓ είναι εγγράψιμο, οπότε το σημείο Ρ ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΓΘΖ. Άρα είναι

$$\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{P}}\mathrm{N} = \mathrm{Z}\widehat{\Gamma}\mathrm{N} = 90^o$$

και συνεπώς ΑΡ ⊥ ΡΝ.
Από τις σχέσεις ΑΡ ⊥ ΜΡ και ΑΡ ⊥ ΡΝ προκύπτει ότι τα σημεία Μ, Ρ, Ν είναι συνευθειακά και ότι ΑΔ ⊥ ΜΝ.

Πρόβλημα 3
Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, για τις οποίες ισχύει:
$$f(x+2y) + f(2x-y) = 5f(x) + 5f(y),$$
για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$.

Λύση
Με $x = y = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f(0) = 0$.
Με $x \in \mathbb{Q}^*$, $y = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(x) + f(2x) = 5f(x) + 5f(0) \Rightarrow f(2x) = 4f(x) \Rightarrow f(2x) = 2^2 f(x)$$

Με $x = y \in \mathbb{Q}^*$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(3x) + f(x) = 10f(x) \Rightarrow \ f(3x) = 9\, f(x) = 3^2\, f(x).$$

Επιπλέον, με $x = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(2y) + f(-y) = 5f(y) \Rightarrow f(-y) = 5f(y) - 4f(y) \Rightarrow f(-y) = f(y),$$

για κάθε $y \in \mathbb{Q}^*$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι άρτια.
Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή.
Αν υποθέσουμε ότι $f(kx) = k^2 f(x), k = 1,2, \dots, 2n-1 \in \mathbb{N}^*$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε:

- Από τη δεδομένη σχέση με $y = 0$ και το nx αντί του x, λαμβάνουμε:
  $$f(2nx) + f(nx) = \ 5f(nx) + 5f(0) \Rightarrow f(2nx) = 4f(nx) = 4n^2 f(x)$$
- Από τη δεδομένη σχέση με $y = nx$ λαμβάνουμε
  $$f(x+2nx) + f(2x-nx) = \ 5f(x) + 5f(nx)$$
  $$\xRightarrow{f\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha} f\big((2n+1)x\big) + f\big((n-2)x\big) = 5f(x) + 5f(nx)$$
  $$\Rightarrow f\big((2n+1)x\big) = 5f(x) + 5n^2 f(x) - (n-2)^2 f(x)$$
  $$\Rightarrow f\big((2n+1)x\big) = (5n^2 - n^2 + 4n - 4 + 5)f(x)$$

$$\Rightarrow f\big((2n+1)x\big) = (2n+1)^2 f(x).$$

Άρα έχουμε $f(nx) = n^2 f(x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{Q}$, οπότε για $x = 1$ λαμβάνουμε

$$f(n) = n^2 f(1), n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = an^2, a = f(1), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Θεωρούμε τώρα το τυχόν $x = \frac{p}{q} > 0$, με $p, q \in \mathbb{N}^*$. Τότε έχουμε:

$$q^2 f(x) = f(qx) = f(p) = p^2 f(1) \Rightarrow f(x) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 f(1),$$

οπότε τελικά, λόγω της αρτιότητας της συνάρτησης f έχουμε

$$f(x) = ax^2, a = f(1), \qquad x \in \mathbb{Q}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2, a = f(1)$ ικανοποιούν τη δεδομένη συνθήκη.

2ος τρόπος. Παρατηρούμε ότι με $y = 0$, η δοθείσα εξίσωση δίνει

$$f(2x) = 4f(x) + 5f(0) \qquad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Η (1) με $x = 0$ δίνει $f(0) = 0$, οπότε γράφεται

$$f(2x) = 4f(x), \qquad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Από την (2) παίρνουμε $f(4x) = 4f(2x) = 16f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, και από την αρχική με $x = y$ παίρνουμε $f(3x) = 10f(x) - f(x) = 9f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Θα αποδείξουμε με επαγωγή επί του n ότι για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ ισχύει

$$f(nx) = n^2 f(x) \qquad (3)$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Από τις παραπάνω σχέσεις, η (3) ισχύει για $n = 0, 1, 2, 3$, και 4. Έστω ότι η (3) ισχύει για κάθε $n = 1, 2, \ldots, k$, για κάποιο $k \geq 4$. Τότε

$$f\big((k+1)x\big) = f((k-3)x + 4x) = 5f((k-3)x) + 5f(2x) - f(2(k-3)x - 2x).$$

Από την (2) με $(k-4)x$ στη θέση του x, και την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$f(2(k-3)x - 2x) = f(2(k-4)x) = 4f\big((k-4)x\big) = 4(k-4)^2 f(x).$$

Έτσι,

$$f\big((k+1)x\big) = 5(k-3)^2 f(x) + 20f(x) - 4(k-4)^2 f(x) = (k+1)^2 f(x),$$

αφού

$$5(k-3)^2 + 20 - 4(k-4)^2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

δηλ. η (3) ισχύει και για $n = k + 1$, οπότε η επαγωγή ολοκληρώθηκε.
Αν $x = \frac{n}{m} > 0$ θετικός ρητός, τότε

$$m^2 f(x) = f(mx) = f(n) = n^2 f(1),$$

οπότε $f(x) = f(1)x^2$. Με $x = 0$ και $y = x$ στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε

$$f(2x) + f(-x) = 5f(x),$$

οπότε $f(x) = f(-x)$, και άρα $f(x) = f(1)x^2$για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 4
Να αποδείξετε ότι, για κάθε ακέραιο y, ο αριθμός $y^2 + 108$ δεν είναι τέλειος κύβος ακεραίου.

Λύση.
Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$y^2 + 108 = x^3 \qquad (1)$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Η (1) γράφεται

$$y^2 + 100 = x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4),$$

με $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$. Αν ο x είναι περιττός, τότε

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \equiv 3 \ (mod\ 4)$$

οπότε υπάρχει πρώτος αριθμός $p \equiv 3(mod\ 4)$ με $y^2 \equiv -100(mod\ p)$. Τότε, όμως, το -1 θα είναι τετραγωνικό υπόλοιπο $mod\ p$, και άρα $p \equiv 1(mod\ 4)$, άτοπο.
Άρα ο x είναι άρτιος, οπότε το ίδιο ισχύει και για τον y. Έστω $x = 2m$, και $y = 2n$, για κάποιους ακέραιους m, n. Τότε η εξίσωση (1) γράφεται

$$n^2 = 2m^3 - 27.$$

Προφανώς ο n είναι περιττός. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο m είναι άρτιος. Τότε $m^3 \equiv 0(mod\ 8)$, οπότε

$$n^2 = 2m^3 - 27 \equiv -3(mod\ 8),$$

άτοπο.

- Ο m είναι περιττός. Τότε $2m^3 \equiv 2(mod\ 4)$ και

$$n^2 = 2m^3 - 27 \equiv -25 \equiv -1 \equiv 3(mod\ 4),$$

άτοπο.
Συνεπώς, δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε $y^2 + 108 = x^3$.