



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
85<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
18 Ιανουαρίου 2025

Οι λύσεις των προβλημάτων

**Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1.** Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$A = ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2),$$

$$B = (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2$$

και να γράψετε τον αριθμό A: B ως δύναμη με βάση το 5.

**Λύση**

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2) \\ &= (-27 + 27 - (-125) - 100) \cdot (9 - 4) \\ &= 25 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 = 5^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2 = (-125 + 100)^4 : (8 - 3)^2 = \\ &= (-25)^4 : (5)^2 = (-5^2)^4 : 5^2 = 5^8 : 5^2 = 5^6 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$A: B = \frac{A}{B} = \frac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}.$$

**Πρόβλημα 2**

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου  $\alpha$  για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$MK\Delta\{\alpha, 50\} + EK\Pi\{\alpha, 90\} = 100.$$

**Σημείωση**

Με  $MK\Delta\{\alpha, \beta\}$  συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων  $\alpha, \beta$ .

Με  $EK\Pi\{\alpha, \beta\}$  συμβολίζουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ακεραίων  $\alpha, \beta$ .

**Λύση**

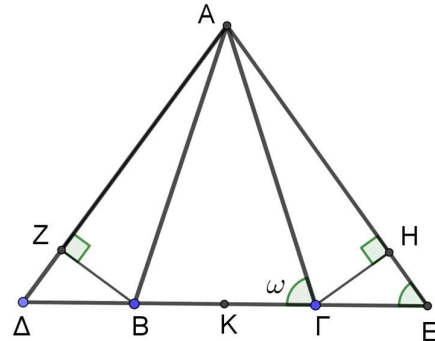
Οι δυνατές τιμές του  $MK\Delta\{\alpha, 50\}$  είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 1 και μικρότερες ή ίσες του 50. Οι δυνατές τιμές του  $EK\Pi\{\alpha, 90\}$  είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 90. Επομένως τα πολλαπλάσια που είναι μεγαλύτερα του 90 αποκλείονται και μοναδική δυνατή τιμή είναι η  $EK\Pi\{\alpha, 90\} = 90$ , οπότε  $MK\Delta\{\alpha, 50\} = 10$ .

Από την ισότητα  $EK\Pi\{\alpha, 90\} = 90$  προκύπτει ότι ο  $\alpha$  πρέπει να είναι διαιρέτης του 90, δηλαδή  $\alpha \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$ .

Από την ισότητα  $MK\Delta\{\alpha, 50\} = 10$  προκύπτει ότι ο  $\alpha$  πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 10. Επομένως οι δυνατές τιμές του  $\alpha$  είναι όλα τα πολλαπλάσια του 10 που είναι ταυτόχρονα και διαιρέτες του 90, δηλαδή  $\alpha \in \{10, 30, 90\}$ .

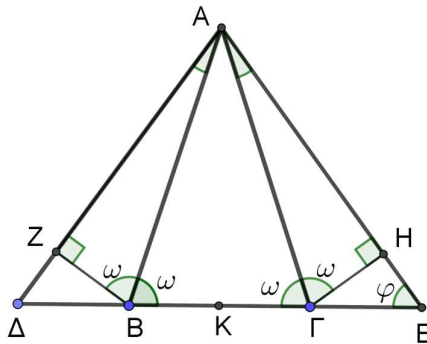
### Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{A\Gamma B} = \omega$ . Τα τρίγωνα  $ABZ$  και  $A\Gamma H$  είναι ορθογώνια με  $\widehat{AZB} = \widehat{A\hat{H}\Gamma} = 90^\circ$  και  $\widehat{ABZ} = \widehat{A\hat{H}\Gamma} = \omega$ . Το σημείο  $K$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Δίνεται ακόμη ότι ισχύει η ισότητα γωνιών:  $\widehat{Z\hat{A}H} = \widehat{A\hat{H}\Gamma}$ .



- (α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\widehat{A\hat{H}\Gamma} = \omega$ .  
 (β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\widehat{A\hat{E}\Delta}$  και να αποδείξετε ότι το σημείο  $K$  είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $\Delta E$ .

### Λύση



- (α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα  $ABZ$  και  $A\Gamma H$  έχουμε ότι:

$$\widehat{Z\hat{A}B} = 90^\circ - \omega = \widehat{\Gamma\hat{A}H}.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε ότι:  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ - 2\omega$ , οπότε

$$\widehat{Z\hat{A}H} = \widehat{Z\hat{A}B} + \widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{A}H} = 90^\circ - \omega + 180^\circ - 2\omega + 90^\circ - \omega = 360^\circ - 4\omega.$$

Τότε έχουμε

$$\widehat{Z\hat{A}H} = \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow 360^\circ - 4\omega = \omega \Leftrightarrow 5\omega = 360^\circ \Leftrightarrow \omega = 72^\circ.$$

- (β) Έστω  $\widehat{A\hat{E}\Delta} = \varphi$ . Στο τρίγωνο  $A\Gamma E$  η γωνία  $\widehat{A\hat{H}\Gamma} = \omega$  είναι εξωτερική, οπότε ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} \widehat{A\hat{H}\Gamma} = \omega &= \varphi + \widehat{\Gamma\hat{A}E} = \varphi + \widehat{\Gamma\hat{A}H} = \varphi + 90^\circ - \omega \\ \Rightarrow \widehat{A\hat{E}\Delta} = \varphi &= 2\omega - 90^\circ \Rightarrow \varphi = 2 \cdot 72^\circ - 90^\circ = 54^\circ. \end{aligned}$$

Ομοίως, βρίσκουμε και ότι  $\widehat{A\hat{\Delta}E} = \widehat{A\hat{\Delta}B} = 2\omega - 90^\circ = 54^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές με  $A\Delta = A E$ .

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  η  $AK$  είναι διάμεσος προς τη βάση, άρα είναι και ύψος, δηλαδή η  $AK$  είναι ύψος και του ισοσκελούς τριγώνου  $A\Delta E$ . Άρα είναι και διάμεσος προς τη βάση  $\Delta E$ , δηλαδή το σημείο  $K$  είναι το μέσο της  $\Delta E$ .

**Πρόβλημα 4.** Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι

$$A = \overline{\alpha\beta\beta\beta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta \quad \text{και} \quad B = \overline{\alpha\beta\beta} = 100\alpha + 10\beta + \beta,$$

με  $\alpha \neq 0, \beta$  ψηφία. Αν ισχύει  $A - B = 4900$ , να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

**Λύση**

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha\beta\beta\beta} - \overline{\alpha\beta\beta} &= 4900 \Leftrightarrow 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta - (100\alpha + 10\beta + \beta) = 4900 \\ &\Leftrightarrow 900\alpha + 100\beta = 4900 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 49 \Leftrightarrow \beta = 49 - 9\alpha. \end{aligned}$$

Επειδή το  $\beta$  είναι ψηφίο, από την ισότητα  $\beta = 49 - 9\alpha$  έπεται ότι το  $\alpha$  δεν μπορεί, να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 5, αλλά ούτε και τιμή μικρότερη του 5. Άρα πρέπει να είναι  $\alpha = 5$ , οπότε  $\beta = 49 - 9\alpha = 4$ .

Θα μπορούσαμε επίσης να εργαστούμε ως εξής: Επειδή  $0 \leq \beta \leq 9$ , έπεται ότι

$$0 \leq 49 - 9\alpha \leq 9 \Leftrightarrow -49 \leq -9\alpha \leq -40 \Leftrightarrow 40 \leq 9\alpha \leq 49 \Leftrightarrow \frac{40}{9} \leq \alpha \leq \frac{49}{9} \Leftrightarrow \alpha = 5,$$

οπότε θα είναι  $\beta = 4$  και  $\overline{\alpha\beta\beta\beta} = 5444$ .

### Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 20 και υπόλοιπο 6.

**Λύση**

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι ψηφία με  $\alpha \neq 0$  που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{aligned} A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma &= 20(\alpha + \beta + \gamma) + 6 \Leftrightarrow \\ 80\alpha - 10\beta - 19\gamma &= 6 \Leftrightarrow 80\alpha - 10\beta = 19\gamma + 6 \\ \Leftrightarrow 10(8\alpha - \beta) &= 19\gamma + 6. \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος  $19\gamma + 6$  είναι πολλαπλάσιο του 10. Αυτό συμβαίνει μόνο για την τιμή  $\gamma = 6$ .

Η τιμή  $\gamma = 6$  μπορεί να προκύψει άμεσα από την εξίσωση  $A = 20(\alpha + \beta + \gamma) + 6$ , από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός A έχει τελευταίο ψηφίο το 6.

Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$10(8\alpha - \beta) = 120 \Leftrightarrow 8\alpha - \beta = 12 \Leftrightarrow 8\alpha - 12 = \beta.$$

Επειδή  $0 \leq \beta \leq 9$ , έχουμε ότι η μοναδική επιτρεπτή τιμή του  $\alpha$  είναι  $\alpha = 2$ , οπότε προκύπτει ότι  $\beta = 4$  και ο ζητούμενος αριθμός είναι ο  $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 246$ .

**Πρόβλημα 2.** Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου  $v$  για τις οποίες ο αριθμός

$$A = \frac{v^2 + 9v + 20}{v^2 + 3v - 4}$$

είναι ακέραιος.

### Λύση

Έχουμε ότι

$$v^2 + 9v + 20 = v^2 + 5v + 4v + 20 = v(v + 5) + 4(v + 5) = (v + 5)(v + 4).$$

$$v^2 + 3v - 4 = v^2 + 4v - v - 4 = v(v + 4) - (v + 4) = (v + 4)(v - 1).$$

Για να ορίζεται ο αριθμός  $A$  πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0, οπότε πρέπει  $(v + 4)(v - 1) \neq 0 \Leftrightarrow v + 4 \neq 0$  και  $v - 1 \neq 0 \Leftrightarrow v \neq -4$  και  $v \neq 1$ .

$$A = \frac{v^2 + 9v + 20}{v^2 + 3v - 4} = \frac{(v + 5)(v + 4)}{(v - 1)(v + 4)} = \frac{v + 5}{v - 1} = \frac{v - 1 + 6}{v - 1} = 1 + \frac{6}{v - 1},$$

οπότε

$$A = 1 + \frac{6}{v - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{v - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow v - 1 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\} \\ \Leftrightarrow v \in \{-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7\}.$$

**Σημείωση.** Μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$A = \frac{v^2 + 9v + 20}{v^2 + 3v - 4} = \frac{v^2 + 3v - 4 + 6v + 24}{v^2 + 3v - 4} = 1 + \frac{6(v + 4)}{(v - 1)(v + 4)} = 1 + \frac{6}{v - 1}.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνονται οι εξισώσεις

$$5(7x - 2a) = 6\left(5x + \frac{b}{6}\right), \quad (E_1)$$

$$3(8y - 6a) = 7\left(3y + \frac{b}{7}\right). \quad (E_2)$$

με άγνωστο το  $x$  και το  $y$ , αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί  $a, b$ , με  $b > 0$  είναι ακέραιοι που θεωρούνται γνωστοί. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του ακέραιου  $b$  για την οποία και οι δύο δεδομένες εξισώσεις έχουν ακέραια λύση.

### Λύση

Για την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$5(7x - 2a) = 6\left(5x + \frac{b}{6}\right) \Leftrightarrow 35x - 10a = 30x + b \\ \Leftrightarrow 5x = 10a + b \Leftrightarrow x = 2a + \frac{b}{5}.$$

Επειδή οι  $a, b$  είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο  $a$ , αν ο θετικός ακέραιος  $b$  είναι θετικό πολλαπλάσιο του 5.

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$3(8y - 6a) = 7\left(3y + \frac{b}{7}\right) \Leftrightarrow 24y - 18a = 21y + b \\ \Leftrightarrow 3y = 18a + b \Leftrightarrow y = 6a + \frac{b}{3}.$$

Επειδή οι  $a, b$  είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο  $a$ , αν ο θετικός ακέραιος  $b$  είναι θετικό πολλαπλάσιο του 3.

Επομένως η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου  $b$  για την οποία έχουν ακέραια λύση και οι δύο δεδομένες εξισώσεις, για κάθε ακέραιο  $a$ , είναι το  $EKP\{5, 3\} = 15$ .

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και σημείο  $Z$  στην προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  τέτοιο, ώστε να ισχύει  $B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot \Gamma\hat{A}Z$  και η ευθεία  $AZ$  να είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας  $A\hat{B}\Gamma$ .

(α) Να αποδείξετε ότι  $AB = BZ$ .

(β) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

#### Λύση

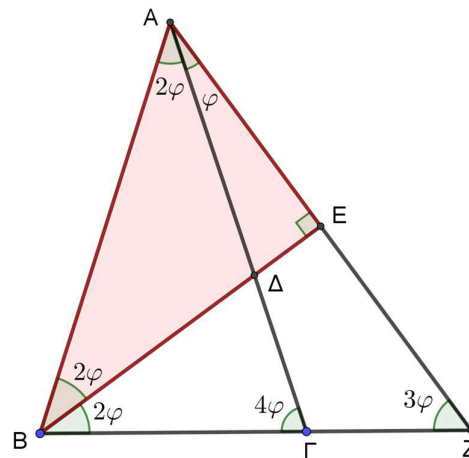
(α) Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{B}\Gamma$  τέμνει την  $AZ$  στο  $E$ . Τότε τα τρίγωνα  $AEB$  και  $ZEB$  είναι ίσα, αφού έχουν

$$A\hat{E}B = Z\hat{E}B = 90^\circ, A\hat{B}E = Z\hat{B}E$$

και η πλευρά  $BE$  είναι κοινή (Γ-Π-Γ). Συνεπώς, το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές με  $AB = BZ$  και  $B\hat{Z}A = B\hat{A}Z$ .

(β) Αν  $\Gamma\hat{A}Z = \varphi$ , τότε  $B\hat{A}\Gamma = 2\varphi$  και

$$\begin{aligned} B\hat{Z}A &= B\hat{A}Z = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}Z \\ &= 2\varphi + \varphi = 3\varphi. \end{aligned}$$



Επιπλέον, έχουμε

$$A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{Z}A + \Gamma\hat{A}Z = 3\varphi + \varphi = 4\varphi,$$

αφού η γωνία  $A\hat{\Gamma}B$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $A\Gamma Z$ . Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε

$$4\varphi + 4\varphi + 2\varphi = 180^\circ,$$

και άρα  $\varphi = 18^\circ$ . Επομένως είναι

$$B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ \text{ και } A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ.$$

### Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$A = \overline{a\beta\gamma} = 100a + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 30 και υπόλοιπο 16.

**Λύση.** Από την υπόθεση έχουμε ότι τα  $a, \beta, \gamma$  είναι ψηφία με  $a \neq 0$  που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{aligned} A = \overline{a\beta\gamma} &= 100a + 10\beta + \gamma = 30(a + \beta + \gamma) + 16 \Leftrightarrow \\ 70a - 20\beta - 29\gamma &= 16 \Leftrightarrow 70a - 20\beta = 29\gamma + 16 \\ \Leftrightarrow 10(7a - 2\beta) &= 29\gamma + 16. \end{aligned}$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο BEZ έχουμε την ισότητα:

$$\omega + 3\varphi = 90^\circ \Leftrightarrow \omega = 90^\circ - 3\varphi \quad (1).$$

Άρα έχουμε:

$$\widehat{A} = 4\varphi \quad \text{και} \quad \widehat{B} = 2\omega = 2(90^\circ - 3\varphi) = 180^\circ - 6\varphi.$$

Από το τρίγωνο AZΓ με εξωτερική γωνία την  $\widehat{AZB} = 3\varphi$  έχουμε την ισότητα:

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{AZB} - \widehat{Z\Gamma A} = 3\varphi - \varphi = 2\varphi.$$

(β) Η ευθεία BK είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AZ, και άρα

$$KA = KZ \quad \text{και} \quad \widehat{KZA} = \widehat{KAZ} = \varphi.$$

Έτσι, έχουμε  $\widehat{KZ} = 2\varphi$  και  $\widehat{ZK} = \widehat{ZA} - \widehat{KZA} = 3\varphi - \varphi = 2\varphi$ , οπότε το τρίγωνο ZΘK είναι ισοσκελές με  $\Theta Z = \Theta K$ .

Όμως έχουμε

$$\widehat{\Theta\Gamma A} = 2\varphi = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Theta\Gamma A},$$

οπότε το τρίγωνο AΘΓ είναι ισοσκελές με  $\Theta\Gamma = \Theta A$ . Άρα έχουμε

$$Z\Gamma = \Theta\Gamma - \Theta Z = \Theta A - \Theta K = AK,$$

(ως διαφορές ίσων τμημάτων).

Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα AKZ και KZΓ είναι ίσα αφού έχουν:

$$KZ \text{ κοινή πλευρά, } AK = KZ \text{ και } \widehat{KZ\Gamma} = 180^\circ - 2\varphi = \widehat{AKZ}, \text{ (}\Pi\text{-}\Gamma\text{-}\Pi\text{)}$$

και άρα  $AZ = K\Gamma$ .

(γ) Αν ισχύει  $\widehat{Z\Gamma K} = 20^\circ$ , τότε  $\varphi = 20^\circ$ , οπότε από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\widehat{A} = 4\varphi = 80^\circ, \quad \widehat{B} = 180^\circ - 6\varphi = 60^\circ \quad \text{και} \quad \widehat{\Gamma} = 2\varphi = 40^\circ.$$

**Πρόβλημα 3.** Να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού η οποία έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες  $\alpha, \beta$  τέτοιες ώστε  $\alpha^2 = 45\beta + 2024\alpha\beta$  και  $\beta^2 = 45\alpha + 2024\alpha\beta$ .

**Λύση.** Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες  $\alpha, \beta$  είναι η

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των αριθμών  $\alpha, \beta$ . Αφαιρώντας τις δύο δοθείσες σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε

$$\alpha^2 - \beta^2 = 45(\beta - \alpha),$$

οπότε

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = -45(\alpha - \beta),$$

και αφού  $\alpha \neq \beta$ , παίρνουμε

$$\alpha + \beta = -45.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο δοθείσες σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 45(\alpha + \beta) + 4048\alpha\beta.$$

Είναι

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-45)^2 - 2\alpha\beta = 2025 - 2\alpha\beta,$$

οπότε παίρνουμε

$$2025 - 2\alpha\beta = 45 \cdot (-45) + 4048\alpha\beta,$$

η οποία δίνει

$$\alpha\beta = 1.$$

Συνεπώς, μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  είναι η

$$x^2 + 45x + 1 = 0.$$

**Πρόβλημα 4.** Οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της διαφοράς  $\alpha - \beta$ .

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)** Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \\ &(\alpha - \beta)^3 - 1^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha - \beta - 1)((\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta) + 1) + 3\alpha\beta(\alpha - \beta - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha - \beta - 1)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha - 2\beta + 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + 1)^2 + (\beta - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 &\Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.&\end{aligned}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος.** Έστω  $x = \alpha - \beta$ , οπότε θέτοντας  $\alpha = x + \beta$  στην  $\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta - 1 = 0$  παίρνουμε

$$(x + \beta)^3 - \beta^3 - 3(x + \beta)\beta - 1 = 0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει

$$x^3 + 3\beta^2x + 3\beta x^2 - 3\beta x - 3\beta^2 - 1 = 0.$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το  $x - 1$  παίρνουμε

$$(x - 1)(x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1) = 0,$$

οπότε

$$x = 1 \text{ ή } x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$  είναι ίση με

$$\Delta = (3\beta + 1)^2 - 4(3\beta^2 + 1) = -3\beta^2 + 6\beta - 3 = -3(\beta - 1)^2.$$

Άρα το τριώνυμο  $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$  μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta = 1 \text{ και } x = -\frac{3\beta + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της διαφοράς  $x = \alpha - \beta$  είναι το 1 και το -2.



**3ος τρόπος.** Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενό τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 + (-\beta)^3 + (-1)^3 = 3\alpha(-\beta)(-1) \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.$$

### B' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Δίνεται η εξίσωση

$$|2x + 2| - |2x - 8| = a \quad (\text{E})$$

με άγνωστο το  $x \in \mathbb{R}$  και  $a \in \mathbb{R}$  παράμετρο.

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου  $a$ :

(α) Αν η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις.

(β) Αν η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση.

**Λύση (1ος τρόπος)**

Θα αναζητήσουμε λύσεις της εξίσωσης σε διάφορα διαστήματα που θα προκύψουν από την αλλαγή προσήμου των παραστάσεων  $2x + 2$  και  $2x - 8$  που βρίσκονται στην εξίσωση με την απόλυτη τιμή τους. Επειδή

$$2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1, \quad 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ και } 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1, \\ 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x < 4, \quad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ και } 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 4,$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α)  $x \leq -1$ . Τότε

$$(E) \Leftrightarrow -2x - 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a + 10,$$

η οποία έχει απειρία λύσεων, δηλαδή κάθε  $x \leq -1$ , αν  $a = -10$ , ενώ είναι αδύνατη για  $a \neq -10$ .

(β)  $-1 < x < 4$ . Τότε

$$(E) \Leftrightarrow 2x + 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 4 \cdot x = a + 6 \Leftrightarrow x = \frac{a + 6}{4},$$

δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση για κάθε  $a$  τέτοιο ώστε

$$-1 < x = \frac{a + 6}{4} < 4 \Leftrightarrow -4 < a + 6 < 16 \Leftrightarrow -10 < a < 10.$$

(γ)  $x \geq 4$ . Τότε

$$(E) \Leftrightarrow 2x + 2 - (2x - 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a - 10,$$

η οποία έχει απειρία λύσεων, δηλαδή κάθε  $x \geq 4$ , αν  $a = 10$ , ενώ είναι αδύνατη για  $a \neq 10$ .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε:

Αν η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις, τότε  $a = -10$  ή  $a = 10$ .

Αν η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση, τότε  $-10 < a < 10$ .

**(2ος τρόπος) Γραφική επίλυση**

Παρατηρούμε ότι  $|2x + 2| = 2|x + 1|$  και  $|2x - 8| = 2|x - 4|$ , οπότε η (E) γράφεται ισοδύναμα

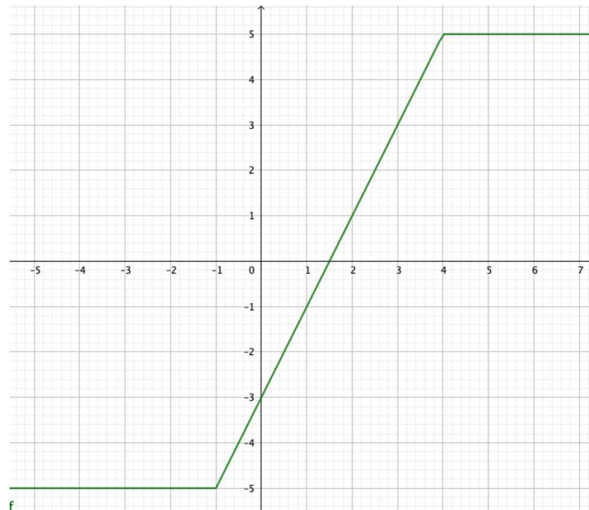
$$|x + 1| - |x - 4| = \frac{a}{2}.$$

Έχουμε, λοιπόν, τις περιπτώσεις

- $x < -1$ . Τότε  $|x + 1| = -x - 1$ , και  $|x - 4| = -x + 4$ , οπότε
- $|x + 1| - |x - 4| = (-x - 1) - (-x + 4) = -x - 1 + x - 4 = -5$ .
- $-1 \leq x < 4$ . Τότε  $|x + 1| = x + 1$ , και  $|x - 4| = -x + 4$ , οπότε
- $|x + 1| - |x - 4| = (x + 1) - (-x + 4) = x + 1 + x - 4 = 2x - 3$ .
- $4 \leq x$ . Τότε  $|x + 1| = x + 1$ , και  $|x - 4| = x - 4$ , οπότε
- $|x + 1| - |x - 4| = (x + 1) - (x - 4) = 5$ .

Η γραφική παράσταση της  $y = |x + 1| - |x - 4|$  είναι η παρακάτω:

- (i) Η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις, αν, και μόνο αν, η οριζόντια ευθεία  $y = \frac{\alpha}{2}$  τέμνει την  $y = |x + 1| - |x - 4|$  σε άπειρα το πλήθος σημεία. Από την παραπάνω γραφική παράσταση, αυτό συμβαίνει για την  $y = 5$  η οποία προκύπτει όταν  $\alpha = 10$ , και την  $y = -5$  για  $\alpha = -10$ , και μόνο για αυτές.



- (ii) Η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν η οριζόντια ευθεία  $y = \frac{\alpha}{2}$  τέμνει την  $y = |x + 1| - |x - 4|$  σε ακριβώς ένα σημείο. Αυτό συμβαίνει, αν, και μόνο αν,  $-5 < \frac{\alpha}{2} < 5$ , δηλαδή, αν, και μόνο αν,  $-10 < \alpha < 10$ .

**Πρόβλημα 2.** Δίνεται ότι οι αριθμοί  $\mu, \nu$  είναι θετικοί ακέραιοι και ότι οι αριθμοί

$$\frac{3\mu - 1}{\nu} \quad \text{και} \quad \frac{2\nu - 1}{\mu}$$

είναι θετικοί ακέραιοι. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του ζεύγους  $(\mu, \nu)$ .

**Λύση**

Έστω ότι  $\frac{3\mu-1}{\nu} = \kappa$  και  $\frac{2\nu-1}{\mu} = \lambda$ , όπου  $\kappa, \lambda$  θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι

$$3\mu - 1 = \kappa\nu \text{ και } 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow$$

$$6\mu - 2 = 2\kappa\nu \text{ και } 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow$$

$$6\mu - 2 = \kappa(\lambda\mu + 1) \Rightarrow (6 - \kappa\lambda)\mu = \kappa + 2 \Rightarrow \mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda}.$$

Επειδή ο  $\mu$  είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι  $6 - \kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda < 6$ .

Επομένως είναι  $\kappa, \lambda$  θετικοί ακέραιοι και

$$0 < \kappa\lambda < 6, \quad \mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda} \text{ και } \nu = \frac{3\mu - 1}{\kappa}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa\lambda = 1 \Rightarrow \kappa = \lambda = 1 \Rightarrow \mu = \frac{3}{5}$ , μη δεκτή τιμή
- $\kappa\lambda = 2 \Rightarrow \kappa = 2, \lambda = 1$  ή  $\kappa = 1, \lambda = 2 \Rightarrow (\mu, \nu) = (1, 1)$  ή  $(\mu, \nu) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ . μη δεκτή
- $\kappa\lambda = 3 \Rightarrow \kappa = 3, \lambda = 1$  ή  $\kappa = 1, \lambda = 3 \Rightarrow (\mu, \nu) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ , μη δεκτή ή  $(\mu, \nu) = (1, 2)$ .
- $\kappa\lambda = 4 \Rightarrow \kappa = 2, \lambda = 2$  ή  $\kappa = 4, \lambda = 1$  ή  $\kappa = 1, \lambda = 4$   
 $\Rightarrow (\mu, \nu) =$ , μη δεκτή, ή  $(\mu, \nu) = (3, 2)$  ή  $(\mu, \nu) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ , μη δεκτή.
- $\kappa\lambda = 5 \Rightarrow \kappa = 5, \lambda = 1$  ή  $\kappa = 1, \lambda = 5 \Rightarrow (\mu, \nu) = (7, 4)$  ή  $(\mu, \nu) = (3, 8)$

Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους  $(\mu, \nu)$  είναι:

$$(\mu, \nu) \in \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (7, 4), (3, 8)\}.$$

**2ος τρόπος.** Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1.  $\nu \leq \mu$ . Τότε  $0 < \frac{2\nu-1}{\mu} < \frac{2\nu}{\mu} \leq 2$ , οπότε αναγκαστικά  $\frac{2\nu-1}{\mu} = 1$ , και άρα  $2\nu - 1 = \mu$ .

Τότε ο αριθμός  $\frac{3\mu-1}{\nu} = \frac{3(2\nu-1)-1}{\nu} = 6 - \frac{4}{\nu}$  είναι ακέραιος, αν, και μόνο αν,  $\nu = 1, 2$  ή  $4$ .

Αφού  $\mu = 2\nu - 1$ , παίρνουμε  $\mu = 1, 3$  ή  $7$ , αντίστοιχα, οπότε  $\frac{2\nu-1}{\mu} = 1$ , για τα ζεύγη  $(\mu, \nu) = (1, 1), (3, 2)$ , και  $(7, 4)$ .

2.  $\mu < \nu$ . Τότε  $0 < \frac{3\mu-1}{\nu} < \frac{3\mu}{\nu} < 3$ , οπότε  $\frac{3\mu-1}{\nu} = 1$  ή  $2$ , και άρα  $3\mu - 1 = \nu$  ή  $3\mu - 1 = 2\nu$ . Εξετάζουμε τις υποπεριπτώσεις:

- $3\mu - 1 = \nu$ . Τότε  $\frac{2\nu-1}{\mu} = \frac{6\mu-3}{\mu} = 6 - \frac{3}{\mu}$ , οπότε  $\mu = 1$  και  $\nu = 2$  ή  $\mu = 3$  και  $\nu = 8$  που προφανώς γίνονται δεκτές.
- $3\mu - 1 = 2\nu$ . Τότε  $\frac{2\nu-1}{\mu} = \frac{3\mu-2}{\mu} = 3 - \frac{2}{\mu}$ , οπότε  $\mu = 1$  ή  $\mu = 2$  που δεν δίνουν ακέραιες λύσεις για τον  $\nu$  με  $\nu > \mu$ .

Συνεπώς, οι λύσεις είναι τα εξής πέντε ζεύγη  $(\mu, \nu) = (1, 1), (3, 2), (7, 4), (1, 2)$  και  $(3, 8)$ .

**Πρόβλημα 3.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma > B\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  στην προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  προς το  $\Gamma$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = AB$  και  $B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot \Gamma\hat{A}\Delta$ . Έστω σημείο  $E$  στην πλευρά  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E = \Gamma\Delta$  και έστω  $H$  το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος  $BE$  με το ύψος  $AZ$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΗ είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ.

(γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.

**Λύση**

(α) Θέτουμε  $\widehat{\Gamma\Delta A} = \varphi$ , οπότε θα είναι  $\widehat{A} = 2\varphi$ . Θέτουμε επίσης  $\widehat{\Gamma\Delta E} = \omega = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$  (αφού  $\Gamma\Delta E$  ισοσκελές τρίγωνο από υπόθεση). Τότε θα είναι  $\widehat{\Gamma} = 2\omega$  (ως εξωτερική στο τρίγωνο  $\Gamma\Delta E$ ) και  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 2\omega$ .

Θέτουμε επίσης  $\widehat{A\hat{D}E} = \theta$ .

Επειδή η γωνία  $\widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $A\hat{E}\Delta$  έχουμε την ισότητα:

$$\omega = \varphi + \theta. \quad (1)$$

Επειδή  $B\Delta = AB$  το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές με

$$\widehat{B\Delta A} = \widehat{B\hat{A}A} \Rightarrow 3\varphi = \omega + \theta. \quad (2)$$

Από το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \varphi + 2\omega = 90^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\omega = \varphi + \theta = 3\varphi - \theta \Rightarrow \varphi = \theta \quad (4)$$

οπότε από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$\omega = 2\varphi \text{ και } 5\varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 18^\circ, \theta = 18^\circ, \omega = 36^\circ \text{ και } \widehat{A} = 36^\circ, \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 72^\circ.$$

(β) Από την ισότητα  $\varphi = \theta$  προκύπτει ότι  $EA = ED$  και αφού  $B\Delta = AB$ , έπεται ότι η ευθεία  $BE$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $AD$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Delta$ . Επομένως το σημείο  $H$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AB\Delta$ , οπότε  $\Delta H \perp AB$ .

(γ) Επιπλέον η ευθεία  $BE$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{B}$ , οπότε  $\widehat{\Delta\hat{B}E} = \omega = 36^\circ = \widehat{E\hat{D}B}$ , οπότε  $EB = ED$  και αφού  $EA = ED$ , έπεται ότι το σημείο  $E$  είναι το περίκεντρο του τριγώνου  $AB\Delta$ .

**2ος τρόπος.**

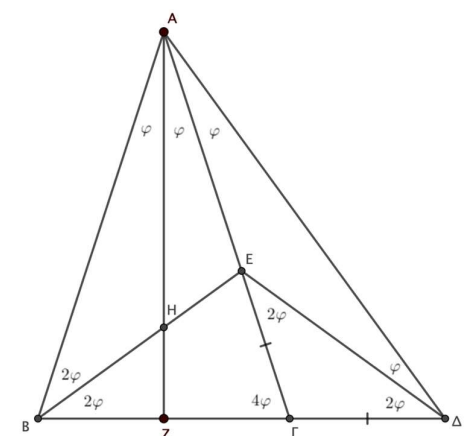
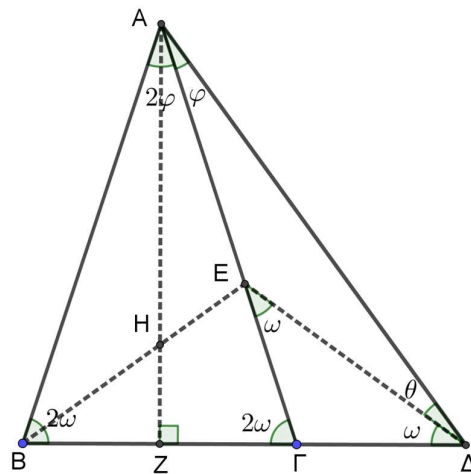
Έστω  $\varphi = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ . Αφού το ύψος στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, και αφού  $B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{A}\Gamma$ , έχουμε

$$B\hat{A}Z = Z\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma = \varphi.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι  $B\hat{\Delta}A = B\hat{A}\Delta = 3\varphi$ , οπότε η γωνία  $B\hat{\Gamma}A$  ως εξωτερική στο τρίγωνο  $A\hat{\Gamma}\Delta$  είναι ίση με

$$B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{\Delta}A = \varphi + 3\varphi = 4\varphi.$$

Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου  $BA\Gamma$ , βρίσκουμε



$$\frac{180^\circ - 2\varphi}{2} = \widehat{B\Gamma A} = 4\varphi$$

και άρα  $\varphi = 18^\circ$ . Εύκολα βρίσκουμε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ :

$$\widehat{A} = 2\varphi = 36^\circ, \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 4\varphi = 72^\circ.$$

Επιπλέον, αφού η γωνία  $\widehat{B\Gamma A}$  είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο  $E\Gamma\Delta$ , παίρνουμε  $\widehat{E\Delta\Gamma} = \frac{\widehat{B\Gamma A}}{2} = 2\varphi$ , και άρα

$$\widehat{E\Delta A} = \widehat{\Gamma\Delta A} - \widehat{E\Delta\Gamma} = 3\varphi - 2\varphi = \varphi = \widehat{\Delta A E}.$$

Έτσι, το τρίγωνο  $A\epsilon\Delta$  είναι ισοσκελές με  $A\epsilon = \epsilon\Delta$ . Αφού  $AB = B\Delta$ , η ευθεία  $BE$  είναι η μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Delta$ , οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Delta$ , η  $BE$  διχοτομεί την γωνία  $\widehat{A\beta\Delta}$ , δίνοντας

$$\widehat{A\beta E} = \widehat{E\beta\Gamma} = \frac{\widehat{A\beta\Delta}}{2} = \frac{\widehat{B\Gamma A}}{2} = 2\varphi.$$

Συνεπώς, από τα ισοσκελή τρίγωνα  $A\epsilon B$ ,  $B\epsilon\Delta$  και  $A\epsilon\Delta$  παίρνουμε  $A\epsilon = B\epsilon = \epsilon\Delta$ , δηλ. το  $E$  είναι το περίκεντρο του  $AB\Delta$ .

Τέλος, αφού  $AZ \perp B\Delta$  και  $BE \perp A\Delta$ , το σημείο  $H$  είναι το ορθόκεντρο του  $AB\Delta$ , οπότε  $\Delta H \perp AB$ .

**Πρόβλημα 4.** Οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αθροίσματος  $\alpha + \beta$ .

**Λύση, (1ος τρόπος)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8 &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta = 8 \Leftrightarrow \\ (\alpha + \beta)^3 - 2^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha + \beta - 2)((\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta) + 4) - 3\alpha\beta(\alpha + \beta - 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha + \beta - 2)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha + \beta - 2 = 0 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 &\Leftrightarrow \\ \alpha + \beta = 2 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta + 4\alpha + 4\beta + 8 &\Leftrightarrow \\ \alpha + \beta = 2 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + 2)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ \alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha = \beta = -2 &\Leftrightarrow \\ \alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha + \beta = -4. & \end{aligned}$$

**2ος τρόπος.** Έστω  $x = \alpha + \beta$ , οπότε θέτοντας  $a = x - \beta$  στην  $\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta - 8 = 0$  παίρνουμε

$$(x - \beta)^3 + \beta^3 + 6(x - \beta)\beta - 8 = 0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει

$$x^3 - 3\beta x^2 + 3\beta^2 x + 6\beta x - 6\beta^2 - 8 = 0.$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το  $x - 2$  παίρνουμε

$$(x - 2)(x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4) = 0,$$

οπότε

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4$  είναι ίση με

$$\Delta = (3\beta - 2)^2 - 4(3\beta^2 + 4) = -3\beta^2 - 12\beta - 12 = -3(\beta + 2)^2.$$

Άρα το τριώνυμο  $x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4$  μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta = -2 \quad \text{και} \quad x = \frac{3\beta - 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές του αθροίσματος  $x = \alpha + \beta$  είναι το 2 και το  $-4$ .

**3ος τρόπος.** Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενό τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta &= 8 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + (-2)^3 = 3\alpha\beta(-2) \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta - 2 &= 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha + \beta = -4. \end{aligned}$$

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Δίνεται η εξίσωση

$$||2x - 4| - a| = 8 \quad (\text{E})$$

με άγνωστο το  $x$  και  $a \in \mathbb{R}$  παράμετρο. Αν η εξίσωση (E) έχει τρεις λύσεις στο  $\mathbb{R}$ , να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου  $a$  και τις τρεις λύσεις της εξίσωσης.

**Λύση.** Έχουμε

$$\begin{aligned} ||2x - 4| - a| = 8 &\Leftrightarrow |2x - 4| - a = 8 \quad \text{ή} \quad |2x - 4| - a = -8 \Leftrightarrow \\ |2x - 4| &= a + 8 \quad (\text{E}_1) \quad \text{ή} \quad |2x - 4| = a - 8 \quad (\text{E}_2) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (E<sub>1</sub>) είναι αδύνατη για  $a < -8$ , έχει μοναδική λύση  $x = 2$  για  $a = -8$  και έχει δύο λύσεις για  $a > -8$ , οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned} |2x - 4| = a + 8 &\Leftrightarrow 2x - 4 = a + 8 \quad \text{ή} \quad 2x - 4 = -a - 8 \\ \Leftrightarrow 2x &= a + 12 \quad \text{ή} \quad 2x = -a - 4 \Leftrightarrow x = \frac{a + 12}{2} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{a + 4}{2}. \end{aligned}$$

Η εξίσωση (E<sub>2</sub>) είναι αδύνατη για  $a < 8$ , έχει μοναδική λύση  $x = 2$  για  $a = 8$  και έχει δύο λύσεις για  $a > 8$ .

Επομένως η εξίσωση (E) μπορεί να έχει τρεις λύσεις στο  $\mathbb{R}$ , μόνον όταν  $a = 8$ . Τότε η εξίσωση (E) έχει τη λύση  $x = 2$  από την εξίσωση (E<sub>2</sub>) και άλλες δύο λύσεις από την εξίσωση (E<sub>1</sub>), οι οποίες είναι:

$$x = \frac{a + 12}{2} = 10 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{a + 4}{2} = -6.$$

**Πρόβλημα 2**

Θεωρούμε την ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών  $(\alpha_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  με  $\alpha_1 = 1$  και

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1},$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ . Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$$\Sigma = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{2024} \alpha_{2025}.$$

**Λύση**

Έχουμε ότι:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n} = 1 + \frac{1}{\alpha_n} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n} = 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα η ακολουθία  $\frac{1}{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}^*$  είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 1, οπότε

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1} + (n - 1) = 1 + n - 1 = n \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Επιπλέον, από την ισότητα έχουμε

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1} \Rightarrow \alpha_n \alpha_{n+1} = \alpha_n - \alpha_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*,$$

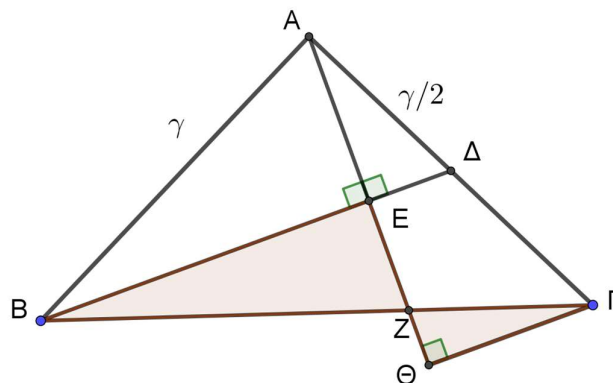
οπότε θα είναι

$$\begin{aligned} \Sigma &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{2024} \alpha_{2025} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + (\alpha_{2024} - \alpha_{2025}) \\ &= \alpha_1 - \alpha_{2025} = 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}. \end{aligned}$$

**Σημείωση.** Η υπόθεση ότι  $\alpha_n > 0$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ , αν δεν δίνεται, μπορεί να προκύψει εύκολα με επαγωγή.

**Πρόβλημα 3.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$ . Αν το  $Z$  είναι σημείο στην πλευρά  $B\Gamma$  τέτοιο, ώστε η ευθεία  $AZ$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $B\Delta$  και να ισχύει  $BZ = 2 \cdot Z\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$ .

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**



Έστω  $AB = A\Gamma = \gamma$ , οπότε  $A\Delta = \frac{\gamma}{2}$ .

Φέρουμε από το σημείο  $\Gamma$  την κάθετη προς την ευθεία  $AZ$  που την τέμνει, έστω στο σημείο  $\Theta$ . Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $BEZ$  και  $\Gamma\Theta Z$  είναι όμοια, οπότε

$$\frac{BE}{\Gamma\Theta} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = 2 \Rightarrow BE = 2 \cdot \Gamma\Theta \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΘΓ το τμήμα ΕΔ είναι μεσοπαράλληλο, οπότε

$$\Gamma\Theta = 2 \cdot \Delta E \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$BE = 4 \cdot \Delta E \quad (3)$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ έχουμε:

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = AD^2 - \Delta E^2 \Leftrightarrow \gamma^2 - 16 \cdot \Delta E^2 = \frac{\gamma^2}{4} - \Delta E^2 \Leftrightarrow \Delta E^2 = \frac{\gamma^2}{20}.$$

Άρα είναι

$$\Delta E = \frac{\gamma\sqrt{5}}{10}, \quad BE = \frac{4\gamma\sqrt{5}}{10} \quad \text{και} \quad B\Delta = BE + E\Delta = \frac{\gamma\sqrt{5}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$AB^2 + AD^2 = \gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{5\gamma^2}{4} = B\Delta^2,$$

οπότε από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει ότι  $\widehat{B\Delta A} = 90^\circ$ , οπότε είναι και  $\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$ .

#### Δεύτερη λύση

Έστω Ο το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με  $O(0,0)$ ,  $A(0,2\alpha)$ ,  $B(-6\beta,0)$  και  $\Gamma(6\beta,0)$ . Τότε είναι  $Z(2\beta,0)$  και  $\Delta(3\beta,\alpha)$ . Από εδώ μπορούμε να προχωρήσουμε με δύο τρόπους:

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος: Διανυσματική λύση

Αφού  $\overrightarrow{AZ} \perp \overrightarrow{B\Delta}$ , είναι  $\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = 0$ . Είναι  $\overrightarrow{AZ} = (2\beta, -2\alpha)$  και  $\overrightarrow{B\Delta} = (9\beta, \alpha)$  οπότε

$$0 = \overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = 2\beta \cdot 9\beta + (-2\alpha) \cdot \alpha = 2(9\beta^2 - \alpha^2),$$

και άρα  $9\beta^2 - \alpha^2 = 0$ . Επίσης,  $\overrightarrow{AB} = (-6\beta, -2\alpha)$  και  $\overrightarrow{A\Delta} = (3\beta, -\alpha)$  με

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = -6\beta \cdot 3\beta + (-2\alpha) \cdot (-\alpha) = -2(9\beta^2 - \alpha^2) = 0.$$

Συνεπώς  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Delta}$ , και άρα  $\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$ .

#### 3<sup>ος</sup> τρόπος: Λύση με Αναλυτική γεωμετρία.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΖ είναι

$$\lambda_{AZ} = \frac{0 - 2\alpha}{2\beta - 0} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας ΒΔ είναι

$$\lambda_{B\Delta} = \frac{\alpha - 0}{3\beta - (-6\beta)} = \frac{\alpha}{9\beta}.$$

Αφού  $AZ \perp B\Delta$ , είναι  $\lambda_{AZ} \cdot \lambda_{B\Delta} = -1$ , οπότε παίρνουμε



$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{9\beta} = -1,$$

δηλ.  $\alpha^2 = 9\beta^2$ .

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{2\alpha - 0}{0 - (-6\beta)} = \frac{\alpha}{3\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας AD είναι

$$\lambda_{AD} = \frac{\alpha - 2\alpha}{3\beta - 0} = -\frac{\alpha}{3\beta},$$

με το γινόμενο τους να είναι

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{AD} = \frac{\alpha}{3\beta} \cdot \left(-\frac{\alpha}{3\beta}\right) = -\frac{\alpha^2}{9\beta^2} = -1.$$

Συνεπώς  $AB \perp AD$ , και άρα  $\widehat{B\hat{A}D} = 90^\circ$ .

**Πρόβλημα 4.** Έστω  $P(x)$  πολώνυμο με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε  $P(1) = 9$  και  $P(9) = 1481$ . Να βρεθεί η τιμή του  $P(10)$ .

**Λύση**

Έστω

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

όπου  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με  $a_n > 0$ . Αφού

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = P(1) = 9,$$

έπεται ότι  $0 \leq a_i \leq 9$  για κάθε  $0 \leq i \leq n$ . Επίσης, είναι

$$1481 = P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots + a_1 9 + a_0,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός  $1481 - a_0 = 164 \cdot 9 + (5 - a_0)$  διαιρείται με το 9, με  $-4 \leq 5 - a_0 \leq 5$ , αφού το  $a_0$  είναι ψηφίο. Άρα είναι  $a_0 = 5$ , οπότε

$$164 = a_n 9^{n-1} + a_{n-1} 9^{n-2} + \dots + a_1,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός  $164 - a_1 = 18 \cdot 9 + (2 - a_1)$  διαιρείται με το 9, με  $-7 \leq 2 - a_1 \leq 2$ , αφού το  $a_1$  είναι ψηφίο. Άρα  $a_1 = 2$ , οπότε

$$18 = a_n 9^{n-2} + \dots + a_2.$$

Αφού  $a_2 < 18$ , έπεται ότι  $n - 2 > 0$ , δηλ.  $n > 2$ . Αν  $n \geq 4$ , τότε

$$18 \geq a_n 9^{n-2} \geq 9^{n-2} \geq 9^2 = 81 > 18,$$

άτοπο. Άρα  $n = 3$ , οπότε

$$18 = a_3 9 + a_2$$

με  $0 \leq a_2 + a_3 \leq P(1) - a_0 - a_1 = 9 - 5 - 2 = 2$ . Αφού το 9 διαιρεί το  $a_2 = 18 - 9a_3$  έπεται ότι  $a_2 = 0$  και άρα  $a_3 = 2$ .

Συνεπώς,  $P(x) = 2x^3 + 2x + 5$ , οπότε  $P(10) = 2025$ .

**Σχόλιο.** Με διαδοχικές Ευκλείδειες διαιρέσεις με το 9, έχουμε

$$1481 = 164 \cdot 9 + 5, \quad 164 = 18 \cdot 9 + 2, \quad \text{και} \quad 18 = 2 \cdot 9 + 0.$$

Έτσι, είναι  $164 = (2 \cdot 9) \cdot 9 + 2 = 2 \cdot 9^2 + 2$ , και παίρνουμε την ισότητα

$$1481 = (2 \cdot 9^2 + 2) \cdot 9 + 5 = 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 + 5,$$

η οποία μας δίνει την *μοναδική* παράσταση του 1481 στο σύστημα αρίθμησης με βάση το 9. Ουσιαστικά στην παραπάνω λύση αποδεικνύουμε την μοναδικότητα αυτή.