

137

Ευκλείδης

Μαθηματικό περιοδικό για το

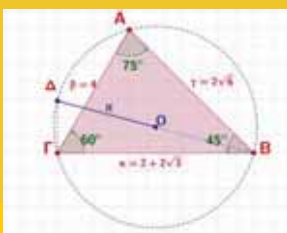
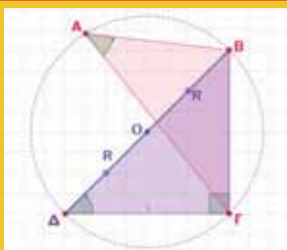
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2025 ευρώ 3



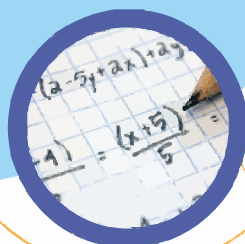
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/98 ΚΕΜΠΛΑΘ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΜΕ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

40^ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

14, 15, 16 Νοεμβρίου 2025
Ξενοδοχείο Du Lac
Ιωάννινα



“Τα μαθηματικά του σήμερα
και η διασύνδεσή τους με τις άλλες επιστήμες”

4 μετάλλια



29th JBMO

Έγινε στη Β.Μακεδονία
25 - 30 Ιουνίου 2025



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

✓ Γενικά άρθρα

Η Γεωμετρία στην καθημερινότητα και η
αμφίδρομη σχέση της με την Τεχνητή Νοημοσύνη
Ζωή-Δήμητρα Δημολιού 1

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Α' Τάξη

Οι ζυγαριές πρέπει να ισορροπούν

Χαρίκλεια Πέτσου 4

Οικοδομικά «υλικά» της Γεωμετρίας

Μαρία Παππά 8

Μεγέθη γωνιών

Χαρίκλεια Πέτσου 10

• Β' Τάξη

Από την πόλη και τους Φορτιστές στα Γραφήματα

Χαρίκλεια Πέτσου 12

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Β' Τάξη

Κανονικά Πολύγωνα και Ορθογώνιο Τριγώνο

Νικόλαος Καρατζήμος 18

• Γ' Τάξη

Δυνάμεις – Ρίζες – Παραγοντοποίηση

Θανάσης Χριστόπουλος 22

Ασκήσεις που λύνονται με γνώσεις Γεωμετρίας

Κωνσταντίνια Σταμάτη 28

Από το τρίγωνο στην Τριγωνομετρία

Βασίλης Γ. Κουγιουμτσιάδης 30

✓ Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών 36

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Χριστόπουλος Π. Παναγιώτης 47

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34

Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:

Μαραγκάκης Στυλιανός

Χριστόπουλος Παναγιώτης

Συντακτική Επιτροπή

Συντονιστές:

Δρούτσας Παναγιώτης

Χριστόπουλος Παναγιώτης

Κουτσούρης Λέων

Διαμαντίδης Δημήτριος

Μέλη:

Αρδαβάνη Καλλιόπη

Βαρβεράκης Ανδρέας

Βασιλοπούλου Ιωάννα

Γαμπή Γερασμούλα

Γεωργιάδου - Καμπουρίδη

Βαρβάρα

Γκιουλέκα Αλεξάνδρα

Γούρνα Σωτηρία

Γρυπάρης Παντελής

Δημολιού Δήμητρα - Ζωή

Ζάγκας Κώστας

Ζιώγας Χρήστος

Καλαμπόκα Αθηνά

Καλδή Φωτεινή

Καμπουράκη Αντωνία - Ειρήνη

Καψή Θέμις

Κεϊσογλου Στέφανος

Κισκύρας Χρίστος

Κουστέρης Χρίστος

Κόσσυβας Γεώργιος

Κοτσακιλάφη Ειρήνη

Κρατημένος Τάσος

Κυράνας Παναγιώτης

Κυριακοπούλου Αθανασία

Κωστοπούλου Καλλιόπη

Λαγός Γεώργιος

Λαγουτάρη Ευαγγελία

Λυμπερόπουλος Γεώργιος

Μαγουλάς Αντώνιος

Μάλλιαρης Χρήστος

Μαρκάτου Γεωργία

Μπερδούσης Γεώργιος

Νικολόπουλος Ιωάννης

Ντόρβας Νικόλαος

Παπαϊωάννου - Κωστίδης

Δημήτριος

Παππά Μαρία

Πατακάκης Ιωάννης

Πούλιου Χριστίνα

Ρίζος Ιωάννης

Ρουσούλη Μαρία

Σαμπάνης Νίκος

Σιούλας Ιωάννης

Σίσκου Μαρία

Σχίζα Κάτια

Τζίφας Νικόλαος

Τριανταφύλλου Ανδρέας

Τσαπακίδης Γεώργιος

Τσιφάκης Χρήστος

Φερεντίνος Σπύρος

Χριστόπουλος Θανάσης

Συνεργάτες:

Κολοβούρη Ευγενία-

Θεοδώρα φοιτήτρια

Κιουμουρτζή Μαρία

Δασκάλα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές μαθήτριες και συνάδελφοι

Πρώτα να σας ευχηθούμε Καλή Σχολική Χρονιά.

Ο Ευκλείδης Α' θα είναι όπως κάθε χρόνο συμπαραστάτης στο έργο σας με
πρωτότυπα θέματα και θέματα διαγωνισμών.

Τη φετινή χρονιά η επιτροπή μας πλαισιώθηκε από πολλούς νέους συναδέλφους.

Νέοι εκπαιδευτικοί από δημόσια και ιδιωτικά σχολεία, φροντιστήρια και
Πανεπιστήμια. Νέα παιδιά με ζήλο για τις επιστήμες και τα Μαθηματικά, με
σύγχρονες σπουδές και γνώσεις στις νέες τεχνολογίες. Θέλουμε το περιοδικό να
είναι ο καλύτερος σύντροφός σας και πολύτιμος βοηθός στο έργο σας.

Αγαπητοί μαθητές επικοινωνήστε μαζί μας για οποιοδήποτε πρόβλημά σας ή
απορία σας.

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054

ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει
στην έκδοση του περιοδικού

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων.

Α' τάξη Μαρία Παππά, Σωτηρία Γουρνά, Ζωή-Δήμητρα Δημολιού

Β' τάξη Θέμις Καψή, Αλεξάνδρα Γκιουλέκα, Αντώνης Μαγουλάς

Γ' τάξη Παντελής Γρυπάρης, Ειρήνη Κοτσακιλάφη, Θανάσης Χριστόπουλος

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της

ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:

printfair

Τηλ.: 2102469799 - 2102401695

Υπεύθυνος Τυπογραφείου:

Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α'». Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)

Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300

2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988

3. EURO BANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138

4. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Η Γεωμετρία στην καθημερινότητα και η αμφίδρομη σχέση της με την Τεχνητή Νοημοσύνη

Ζωή-Δήμητρα Δημολιού

Εισαγωγή

Η γεωμετρία αποτελεί έναν από τους αρχαιότερους κλάδους των μαθηματικών και διδάσκεται



από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου. Ειδικότερα η διδακτέα ύλη της Γεωμετρίας στην Β Γυμνασίου μιλά για βασικές έννοιες όπως τρίγωνα, τετράπλευρα, κανονικά πολύγωνα, τριγωνομετρία. Παράλληλα στον σύγχρονο κόσμο η τεχνητή νοημοσύνη (ΤΝ) έχει κάνει την εμφάνιση της σχεδόν σε κάθε πτυχή της καθημερινότητάς μας, από τις μηχανές αναζήτησης, τα κινητά τηλέφωνα μέχρι και προγράμματα όπως το ChatGPT που συνομιλούν με τον άνθρωπο.

Το ενδιαφέρον παρουσιάζεται στο ότι μεταξύ γεωμετρίας και τεχνητής νοημοσύνης επικρατεί μια αμφίδρομη σχέση. Η γεωμετρία βοηθά την τεχνητή νοημοσύνη να αναπτυχθεί ενώ η δεύτερη βοηθά τον άνθρωπο να κατανοήσει καλύτερα απλές ή και σύνθετες γεωμετρικές έννοιες.

Το αιώνιο ερώτημα των μαθητών.

«Που θα μας χρησιμεύσουν αυτά;», «Θα με ρωτήσει κανείς στον δρόμο τον τύπο του Πυθαγορείου Θεωρήματος;», «Δηλαδή στο μέλλον δεν θα μπορώ να βρω δουλειά αν δεν γνωρίζω πως ορίζεται η εφαπτομένη;». Πόσες φορές άραγε έχουμε ακούσει αυτές, ή παρόμοιες με αυτές, ερωτήσεις μέσα στην τάξη; Πολλές επίσης είναι οι φορές που πιάσαμε τους εαυτούς μας να απαντούν «Θα σου χρειαστούν αργότερα», «Θα το βρεις στην πορεία, πολλές φορές μπροστά σου», όμως είτε το δεχόμαστε είτε όχι «Τα μαθηματικά είναι παντού γύρω μας!».

Η Γεωμετρία της Β' γυμνασίου είναι ίσως το πιο κρίσιμο σημείο όπου ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με έννοιες που συνδέουν τα μαθηματικά με την καθημερινότητα και την λογική σκέψη, χωρίς πολλές φορές να το αντιλαμβάνεται. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, το μήκος κύκλου, τα εμβαδά των σχημάτων, η τριγωνομετρία είναι όλα μέρη της καθημερινότητάς μας. Κι όμως, πολλές φορές η διδασκαλία τους περιορίζεται σε τυφλή εφαρμογή τύπων. Βασικός στόχος, η κάλυψη της διδακτέας ύλης. Αποτέλεσμα; Οι μαθητές όμως μετά την διεξαγωγή διαγωνισμάτων ή την προαγωγή τους σε επόμενη τάξη «ξεχνάνε» οτιδήποτε έχουν διδαχθεί.

Η γεωμετρία ως τρόπος σκέψης.

Πριν ακόμη μιλήσουμε για μαθηματικούς τύπους, αξίζει να θυμίσουμε πως η Γεωμετρία είναι η πρώτη επαφή των μαθητών με ένα δομημένο, αποδεικτικό σύστημα.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα δεν είναι απλώς μια σχέση μεταξύ πλευρών. Είναι η πρώτη φορά που κάποιος έρχεται σε επαφή, στην ακαδημαϊκή του πορεία, με μια απόδειξη που μπορεί να οπτικοποιηθεί, να εξηγηθεί με διαφορετικούς τρόπους, να ικανοποιηθεί γραφικά-σχηματικά.



Η τριγωνομετρία εισάγει στους μαθητές μια καινοτόμα ιδέα. Πως μπορούμε να περιγράψουμε οτιδήποτε γύρω μας με λόγους και πίνακες τιμών. Ξεκινώντας από την κλίση μιας σκάλας και



φτάνοντας έως και την πορεία πτήσης ενός drone.

Τα εμβαδά είναι το πρώτο βήμα για να κατανοήσει κάποιος την έννοια του μέτρου, της μονάδας και του υπολογισμού πραγματικών ποσοτήτων- θεμέλιος λίθος για επιστήμες όπως η φυσική, η χημεία, η τεχνολογία.

Η διδασκαλία λοιπόν αυτών των κεφαλαίων δεν στοχεύουν μόνο στο να λύσει κάποιος σωστά μια άσκηση, αλλά στο να καλλιεργηθεί ένας ορθός τρόπος σκέψης που αποτελείται από

ανάλυση προβλήματος, αναζήτηση κατάλληλων σχέσεων, λογική συνέπεια.

Η συμβολή της τεχνητής νοημοσύνης στην διδασκαλία και στην κατανόηση της Γεωμετρίας στη Β Γυμνασίου.

Η Τεχνητή Νοημοσύνη μπορεί να παίξει βασικό ρόλο στην διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας.

- 1) Χρήση διαδραστικών εφαρμογών. Με την βοήθεια προγραμμάτων που αξιοποιούν την Τεχνητή νοημοσύνη οι μαθητές μπορούν να βλέπουν σε πραγματικό χρόνο πώς αλλάζει ένας κυκλικός δίσκος εάν μεταβληθεί ο όγκος ή η περίμετρός του. Τι αλλαγές μπορεί να υποστεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο έπειτα από μεταβολή στο μήκος των πλευρών του. Έτσι η μάθηση γίνεται πιο «ζωντανή» (visual) και προφανώς πιο ενδιαφέρουσα.
- 2) Προτροπή στην εξατομικευμένη διδασκαλία. Ένα πρόγραμμα τεχνητής νοημοσύνης δίνοντάς του τις κατάλληλες πληροφορίες μπορεί να αντιληφθεί σε ποια σημεία δυσκολεύεται ο μαθητής και να του προσφέρει μεγαλύτερη γκάμα ασκησιολογίου ώστε να εξασκηθεί.
- 3) Αναγνώριση σχημάτων στον πραγματικό κόσμο. Μέσω της αναγνώρισης της εικόνας που διαθέτουν οι εφαρμογές που χρησιμοποιούν το AI (Artificial Intelligence) μπορούν να εντοπιστούν κύκλοι, τρίγωνα, κανονικά πολύγωνα σε καθημερινά σημεία γύρω μας. Μέσα στον χώρο της εργασίας μας, του σχολείου μας ή του αγαπημένου μας αντικειμένου στο δωμάτιο μας. Εκεί μπορούμε να εντοπίσουμε σίγουρα κάποιο κανονικό εξάγωνο, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή κάποιο ισοσκελές τραπέζιο.



- 4) Σύμπραξη εκπαιδευτικού και τεχνητής νοημοσύνης. Η ΤΝ προφανώς και δεν αντικαθιστά τον εκπαιδευτικό παρόλα αυτά στοχεύει στην υποστήριξη του. Παρέχει επιπλέον υλικό, λύνει γρήγορες απορίες και δίνει παραδείγματα προσαρμοσμένα στις ανάγκες κάθε μαθητή.



Η γεωμετρία ως θεμέλιο για την πρόοδο της ΤΝ.

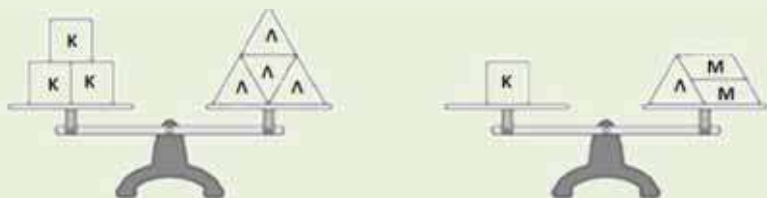
Η σχέση γεωμετρίας και ΤΝ δεν είναι μονόπλευρη. Η ανάπτυξη προγραμμάτων που χρησιμοποιούν τεχνητή νοημοσύνη στηρίχτηκαν κατά πολύ σε βασικούς πυλώνες της γεωμετρίας.

- 1) Αναπαράσταση δεδομένων. Στα μαθηματικά που χρησιμοποιούν οι υπολογιστές τα δεδομένα συχνά τοποθετούνται σε «χώρους» πολλών διαστάσεων. Η ιδέα αυτή προέρχεται καθαρά από τη Γεωμετρία. Για παράδειγμα, ένα πρόγραμμα αναγνώρισης εικόνας – που αναφερθήκαμε και παραπάνω- μπορεί να χρησιμοποιεί γεωμετρικές έννοιες για να καταλάβει αν μια εικόνα αναπαριστά ορθογώνιο τρίγωνο, κύκλο ή τραπέζιο.
- 2) Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης. Για να λειτουργεί σωστά και να επιλέγεται καθημερινά από τους χρήστες, η ΤΝ οφείλει να βρίσκει λύση σε κάθε πρόβλημα. Αυτές οι λύσεις συχνά αναζητούνται μέσω γεωμετρικών μεθόδων, όπως η εύρεση κοντινότερου σημείου σε έναν χώρο ή στο επίπεδο. Αυτό που στην Γεωμετρία της Β' γυμνασίου ονομάζεται απόσταση δύο σημείων.
- 3) Νευρωνικά δίκτυα και γραφήματα. Τα νευρωνικά δίκτυα αποτελούν την βάση προγραμμάτων όπως το ChatGPT. Χρησιμοποιούν γραφήματα που θυμίζουν κατά πολύ γεωμετρικά σχήματα (πολύγωνα στον χώρο και στο επίπεδο).
- 4) Τρισδιάστατη απεικόνιση και ρομποτική. Στην ρομποτική οι γνώσεις γεωμετρίας όπως αυτές του εμβαδού, της περιμέτρου, του όγκου αποτελούν απαραίτητα εργαλεία ώστε να μπορέσει ένα ρομπότ να πάρει αποφάσεις για το πώς θα μετακινηθεί από ένα σημείο σε ένα άλλο. Χωρίς γεωμετρικούς υπολογισμούς δεν θα μπορούσε να υπάρξει αυτόνομη οδήγηση ή ρομποτικά χέρια που να συναρμολογούν αντικείμενα ή να συσκευάζουν τρόφιμα.

Συμπερασματικά η σχέση Γεωμετρίας και Τεχνητής Νοημοσύνης είναι μια σχέση διπλής συνεπαγωγής η οποία ξεκινά με γνώσεις από τις πρώτες τάξεις του γυμνασίου. Οι δύο αυτές έννοιες στόχο έχουν να βοηθούν τον άνθρωπο και να εμπνέουν εκπαιδευτικούς και μαθητές για μια αποτελεσματικότερη και πιο χρήσιμη θέση της επιστήμης των μαθηματικών στην καθημερινότητά μας και στην ακαδημαϊκή μας πορεία.



1. Τα Κ, Λ και Μ είναι βάρη. Και οι δύο ζυγαριές ισορροπούν ακριβώς. Πόσα Μ βάρη χρειάζονται για να ισορροπήσει ένα Λ βάρος;



Λύση

Από την πρώτη ζυγαριά, βλέπουμε ότι 3 βάρη Κ ισορροπούν με 4 βάρη Λ. Αυτό μπορεί να γραφεί ως εξίσωση: $3K=4\Lambda$ (1)

Από τη δεύτερη ζυγαριά, βλέπουμε ότι 1 βάρος Κ ισορροπεί με 1 βάρος Λ και 2 βάρη Μ. Αυτό μπορεί να γραφτεί ως εξίσωση:

$$K=\Lambda+2M$$

$$3K=3\Lambda+6M$$
 (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν ίσα πρώτα μέρη, άρα θα έχουν και ίσα δεύτερα μέρη.

$$\text{Οπότε: } 4\Lambda = 3\Lambda + 6M$$
 (3)

Θέλουμε να βρούμε πόσα βάρη Μ χρειάζονται για να ισορροπήσει ένα βάρος Λ επομένως επιλύουμε την εξίσωση (3) ως προς Λ και έχουμε:

$$4\Lambda - 3\Lambda = 6M$$

$$\Lambda = 6M$$

Επομένως, χρειάζονται 6 βάρη Μ για να ισορροπήσει ένα βάρος Λ.

2. Ο Βασίλης, η Εύα και η Νίκη έχουν ένα χρηματικό ποσό ο καθένας. Ο Βασίλης έχει 72 €. Δίνεται ότι το ποσό του Βασίλη προς το ποσό της Εύας είναι $\frac{6}{5}$. Το ποσό της Νίκης είναι $1\frac{1}{2}$ φορές το ποσό του Βασίλη. Να δείξετε ότι, και οι τρεις συνολικά, έχουν λιγότερα από 250 €.

Λύση

Έστω Β το ποσό του Βασίλη και Ε το ποσό της Εύας. Επειδή ο λόγος του ποσού του Βασίλη προς το ποσό της Εύας είναι $\frac{6}{5}$, έχουμε:

$$\frac{B}{E} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{72}{E} = \frac{6}{5}$$

$$6E = 360$$

$$E = 60 \text{ Άρα η Εύα έχει } 60 \text{ €}.$$

Έστω ότι Ν είναι το ποσό της Νίκης που είναι $1\frac{1}{2}$ φορές το ποσό του Βασίλη. Άρα: $N = 1\frac{1}{2} \cdot 72$
 $= \frac{3}{2} \cdot 72 = \frac{216}{2} = 108 \text{ €}.$

Το συνολικό ποσό που έχουν και οι τρεις μαζί είναι:

$$B + E + N = 72 + 60 + 108 = 240 \text{ €}.$$

Επειδή $240 < 250$, επομένως συνολικά έχουν λιγότερα από 250 €.

- 3. Την ίδια μέρα, η Ελένη αγοράζει ένα αυτοκίνητο για 14.000 € και έναν πίνακα ζωγραφικής για 5.000 €. Η αξία του αυτοκινήτου μειώνεται κατά 35% τον πρώτο χρόνο και στη συνέχεια κατά 10% κάθε χρόνο. Η αξία του πίνακα αυξάνεται κατά 4% κάθε χρόνο. Μετά από πόσα χρόνια ο πίνακας αποκτά μεγαλύτερη αξία από το αυτοκίνητο;**

Λύση

Θα υπολογίσουμε την αξία ανά έτος.

Έτος 1ο

Αυτοκίνητο: Η αξία μειώνεται κατά 35%, οπότε:

$$A_1 = 14000 \cdot (1 - 0,35) = 14000 \cdot 0,65 = 9100 \text{ €}$$

Πίνακας: Η αξία αυξάνεται κατά 4%, οπότε:

$$P_1 = 5000 \cdot (1 + 0,04) = 5000 \cdot 1,04 = 5200 \text{ €}$$

Έτος 2ο

Αυτοκίνητο: Η αξία μειώνεται κατά 10% (από την αξία του προηγούμενου έτους). Οπότε:

$$A_2 = A_1 \cdot (1 - 0,10) = 9100 \cdot 0,90 = 8190 \text{ €}$$

Πίνακας: Η αξία αυξάνεται κατά 4%.

$$\text{Οπότε: } P_2 = P_1 \cdot (1 + 0,04) = 5200 \cdot 1,04 = 5200 \cdot 1,04 = 5408 \text{ €}$$

Έτος 3ο

Αυτοκίνητο: Η αξία μειώνεται κατά 10% (από την αξία του προηγούμενου έτους). Οπότε:

$$A_3 = A_2 \cdot (1 - 0,10) = 8190 \cdot 0,90 = 7371 \text{ €}$$

Πίνακας: Η αξία αυξάνεται κατά 4%.

$$P_3 = P_2 \cdot (1 + 0,04) = 5408 \cdot 1,04 = 5624,32 \text{ €}$$

Έτος 4ο

Αυτοκίνητο: Η αξία μειώνεται κατά 10% (από την αξία του προηγούμενου έτους). Οπότε:

$$A_4 = A_3 \cdot (1 - 0,10) = 7371 \cdot 0,90 = 6633,90 \text{ €}$$

Πίνακας: Η αξία αυξάνεται κατά 4%.

$$P_4 = P_3 \cdot (1 + 0,04) = 5624,32 \cdot 1,04 = 5849,29 \text{ €}$$

Έτος 5ο

Αυτοκίνητο: Η αξία μειώνεται κατά 10% (από την αξία του προηγούμενου έτους). Οπότε:

$$A_5 = A_4 \cdot (1 - 0,10) = 6633,90 \cdot 0,90 = 5970,51 \text{ €}$$

Πίνακας: Η αξία αυξάνεται κατά 4%.

$$P_5 = P_4 \cdot (1 + 0,04) = 5849,29 \cdot 1,04 = 6083,26 \text{ €}$$

Άρα στο τέλος του πέμπτου έτους, η αξία του πίνακα (6083,26 €) είναι μεγαλύτερη από την αξία του αυτοκινήτου (5970,51 €).

Έτος	Υπολογισμός Αξίας Αυτοκινήτου (€)	Αξία Αυτοκινήτου (€)	Υπολογισμός Αξίας Πίνακα (€)	Αξία Πίνακα (€)
1	$14.000 \cdot (1 - 0,35)$	9.100,00	$5.000 \cdot (1 + 0,04)$	5.200,00
2	$9.100 \cdot (1 - 0,10)$	8.190,00	$5.200 \cdot (1 + 0,04)$	5.408,00
3	$8.190 \cdot (1 - 0,10)$	7.371,00	$5.408 \cdot (1 + 0,04)$	5.624,32
4	$7.371 \cdot (1 - 0,10)$	6.633,90	$5.624,32 \cdot (1 + 0,04)$	5.849,29
5	$6.633,90 \cdot (1 - 0,10)$	5.970,51	$5.849,29 \cdot (1 + 0,04)$	6.083,26

4. α) Την περασμένη εβδομάδα, το 73% των εισιτηρίων που πουλήθηκαν σε έναν κινηματογράφο ήταν εισιτήρια ενηλίκων.

Ποιο ποσοστό των εισιτηρίων που πουλήθηκαν δεν ήταν εισιτήρια ενηλίκων;

β) Μερικοί άνθρωποι παρακολούθησαν μια ταινία στον κινηματογράφο. Ο αριθμός των ενηλίκων προς τον αριθμό των παιδιών ήταν $\frac{2}{5}$. Ποιο ποσοστό αυτών των ανθρώπων ήταν ενήλικες;

γ) Την Παρασκευή, 500 άτομα παρακολούθησαν μια ταινία στον κινηματογράφο και το 70% αυτών ήταν παιδιά. Το Σάββατο, 720 άτομα παρακολούθησαν την ταινία στον κινηματογράφο και τα $\frac{5}{8}$ από αυτούς ήταν παιδιά. Ο Νίκος πιστεύει ότι περισσότερα παιδιά παρακολούθησαν την ταινία την Παρασκευή σε σχέση με το Σάββατο.

Έχει δίκιο ο Νίκος; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Για να βρούμε το ποσοστό των εισιτηρίων που δεν ήταν ενηλίκων, αφαιρούμε το ποσοστό των ενηλίκων από το 100%, οπότε έχουμε:

$$100\% - 73\% = 27\%$$

Άρα, το 27% των εισιτηρίων που πουλήθηκαν δεν ήταν εισιτήρια ενηλίκων.

β) Στην ομάδα ανθρώπων που παρακολούθησαν την ταινία, ο λόγος του αριθμού ενηλίκων προς τον αριθμό παιδιών είναι $\frac{2}{5}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε 2 ενήλικες, υπάρχουν 5 παιδιά. Συνολικά μέρη: 2 (ενήλικες) + 5 (παιδιά) = 7 μέρη.

Οπότε, το ποσοστό των ενηλίκων σε αυτή την ομάδα είναι:

$$\frac{2}{7} \cdot 100\% = 0,2857 \cdot 100\% = 28,57\%$$

Επομένως, το 28,57% αυτών των ανθρώπων ήταν ενήλικες.

γ) Ο αριθμός των παιδιών την Παρασκευή είναι $70\% \cdot 500 = 0,70 \cdot 500 = 350$.

Ο αριθμός των παιδιών το Σάββατο είναι $\frac{5}{8} \cdot 720 = 5 \cdot 90 = 450$ παιδιά.

Άρα ο Νίκος δεν έχει δίκιο. Την Παρασκευή παρακολούθησαν την ταινία 350 παιδιά, ενώ το Σάββατο την παρακολούθησαν 450 παιδιά. Επομένως, περισσότερα παιδιά παρακολούθησαν την ταινία το Σάββατο.

5. Σε ένα κουτί υπάρχουν 200 μαρκαδόροι. Από αυτούς, 38 είναι κόκκινοι και 52 μπλε. Οι υπόλοιποι μαρκαδόροι είναι κίτρινοι ή πράσινοι. Υπάρχει ο ίδιος αριθμός κίτρινων μαρκαδόρων με πράσινους. Ποιο είναι το ποσοστό των κίτρινων μαρκαδόρων μέσα στο κουτί;

Λύση

Αριθμός κόκκινων και μπλε μαρκαδόρων είναι $38+52=90$. Ο αριθμός των υπόλοιπων μαρκαδόρων (κίτρινοι και πράσινοι) είναι $200-90=110$.

Έστω K ο αριθμός των κίτρινων μαρκαδόρων και Π ο αριθμός των πράσινων, τότε $K+\Pi=110$.

Δεδομένου ότι $K=\Pi$, έχουμε:

$$K+K=110$$

$$2K=110$$

$K=55$. Άρα, υπάρχουν 55 κίτρινοι μαρκαδόροι.

Ποσοστό κίτρινων μαρκαδόρων: $\frac{\text{Αριθμός κίτρινων μαρκαδόρων}}{\text{Συνολικός αριθμός μαρκαδόρων}} \cdot 100$

$$\left(\frac{55}{200}\right) \cdot 100 = 0,275 \cdot 100 = 27,5\%.$$

Άρα το ποσοστό των μαρκαδόρων στο κουτί που είναι κίτρινοι είναι 27,5%.

- 6. α)** Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών αγόρασε απ' τον προμηθευτή του μία κονσόλα παιχνιδιών και πλήρωσε 342 € συν 20% ΦΠΑ.

Πόσο κόστισε αυτή η κονσόλα στο κατάστημα συμπεριλαμβανομένου του ΦΠΑ;

β) Το κατάστημα διαφημίζει αυτή την κονσόλα λέγοντας ότι, για την αγορά της απαιτείται προκαταβολή του $\frac{1}{4}$ της τιμής πώλησης και το υπόλοιπο σε 6 ισόποσες μηνιαίες δόσεις.

Η Κατερίνα αγόρασε την κονσόλα παιχνιδιών και πλήρωσε την προκαταβολή και 6 ισόποσες μηνιαίες δόσεις των 57 €.

Πόση ήταν η προκαταβολή της Κατερίνας;

Λύση

α) Ποσό ΦΠΑ = $20\% \cdot 342 \text{ €} = 0,20 \cdot 342 \text{ €} = 68,40 \text{ €}$.

Συνολικό κόστος = Αρχικό κόστος + Ποσό ΦΠΑ

$$\text{Συνολικό κόστος} = 342 \text{ €} + 68,40 \text{ €} = 410,40 \text{ €}.$$

Άρα η κονσόλα παιχνιδιών κόστισε στο κατάστημα 410,40 € συμπεριλαμβανομένου του ΦΠΑ.

β) Η Κατερίνα πλήρωσε την προκαταβολή και 6 ισόποσες μηνιαίες δόσεις των 57 € η κάθε μία. Άρα το συνολικό ποσό των μηνιαίων δόσεων είναι $6 \cdot 57 = 342 \text{ €}$.

Αυτό το ποσό αντιστοιχεί στο υπόλοιπο της τιμής μετά την πληρωμή της προκαταβολής.

Αν η προκαταβολή είναι το $\frac{1}{4}$ της τιμής, τότε το υπόλοιπο είναι $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ της τιμής.

Έστω T η συνολική τιμή πώλησης της κονσόλας. Οπότε έχουμε:

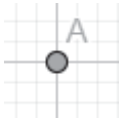
$$\frac{3}{4} \cdot T = 342 \text{ €}$$

$$T = 342 \cdot \frac{4}{3}$$

$T = 456 \text{ €}$. Άρα η συνολική τιμή της κονσόλας είναι 456 €.

Η προκαταβολή είναι $\frac{1}{4}$ της τιμής, δηλαδή $\frac{1}{4} \cdot 456 = 114 \text{ €}$.

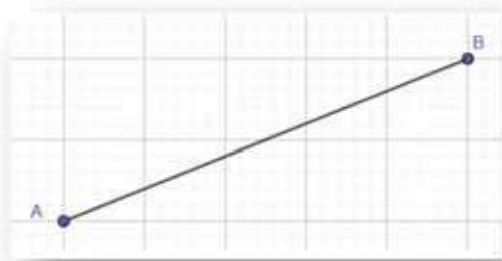
Άρα η προκαταβολή της Κατερίνας ήταν 114 €.



ΣΗΜΕΙΟ

Αν σχεδιάσουμε με την άκρη του μολυβιού μου μία τελεία, έχουμε την έννοια του **σημείου**. Κάθε σημείο το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφαβήτου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Σημεία υπάρχουν παντού γύρω μας όπως τα αστέρια στον ουρανό!

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ
ΤΜΗΜΑ

Μια τεντωμένη κλωστή με άκρα Α και Β μας δίνει μια εικόνα της έννοιας του **ευθύγραμμου τμήματος** ΑΒ. Τα σημεία Α και Β είναι τα **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος. Το ευθύγραμμο τμήμα έχει αρχή και τέλος.

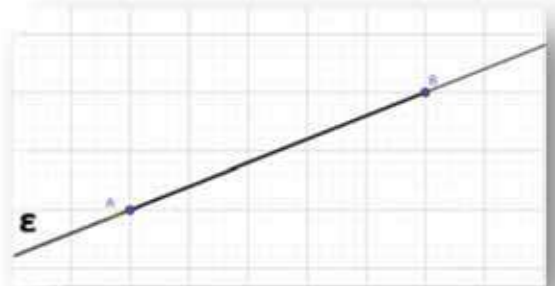
ΕΥΘΕΙΑ

Έστω ότι έχουμε σχεδιάσει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το προεκτείνουμε πέρα από το ένα μόνο άκρο του (π.χ. Β). Προκύπτει ένα νέο σχήμα που έχει **μόνο αρχή** αλλά όχι τέλος και λέγεται **ημιευθεία** Αχ. (Συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα Α, Β, ... και ένα μικρό γράμμα χ, ψ, ...).



ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Έστω ότι έχουμε σχεδιάσει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το προεκτείνουμε απεριόριστα και προς τα 2 άκρα. Προκύπτει ένα νέο σχήμα



που δεν έχει **ούτε αρχή** ούτε τέλος και λέγεται **ευθεία ε**. Δηλαδή, είναι μια γραμμή που την τραβάμε και από τις 2 μεριές.

- Από 1 σημείο πόσες ευθείες λένε να διέρχονται; Μία; Δύο; Τέσσερις; Εκατό; Χίλιες;

Και μία και δύο και χίλιες. Δηλαδή, από ένα σημείο διέρχονται **άπειρες** ευθείες.

- Από 2 σημεία πόσες ευθείες διέρχονται ; Μόνο μία!,

- Ποια σχέση μπορεί να έχουν 2 ευθείες μεταξύ τους ;

Αφενός μπορεί να μην συναντιούνται ποτέ όσο και αν προεκταθούν:



Είναι παράλληλες !

Αφετέρου μπορεί να τέμνονται σε ένα σημείο.

Είναι τεμνόμενες!

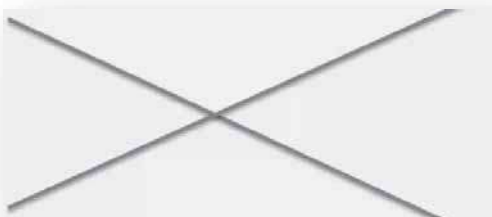
ΕΠΙΠΕΔΟ-ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ

Το **επίπεδο** είναι βασική έννοια της γεωμετρίας που την αντιλαμβανόμαστε ως μία επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζει πλήρως ο κανόνας (χάρακας). Το επίπεδο θεωρούμε ότι επεκτείνεται προς όλες τις κατευθύνσεις και χωρίζει τον χώρο σε δύο ημιχώρους.

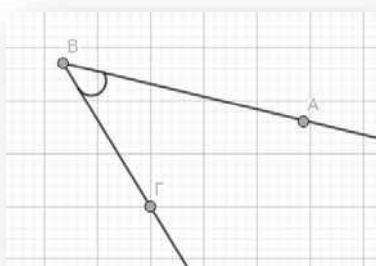
επίπεδο

ημιεπίπεδο

Ημιεπίπεδο ονομάζεται το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου, διχοτομημένου από μία ευθεία, που βρίσκονται στο ένα από τα δύο μέρη του.

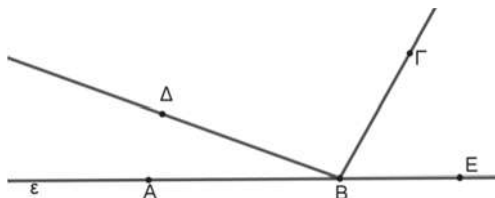


Γωνία λέγεται το μέρος του επιπέδου που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο ημιευθειών με κοινή αρχή μαζί με τις ημιευθείες.



ΓΩΝΙΑ

1. Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία A, B και E είναι σημεία της ευθείας ε, ενώ οι BΓ και BΔ είναι ημιευθείες. Η γωνία ΔBΓ είναι πενταπλάσια από τη γωνία ABΔ, ενώ η γωνία ΓBE είναι τριπλάσια από τη γωνία ABΔ. Να υπολογίσετε το μέγεθος της γωνίας ΔBΓ.



Λύση: Έστω $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = x$, οπότε $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 5x$ και $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{E} = 3x$. Έχουμε:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{D} + \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{E} = 180^\circ$$

$$x + 5x + 3x = 180^\circ$$

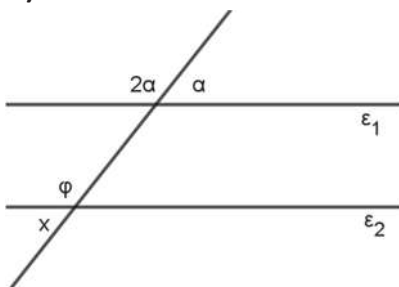
$$9x = 180^\circ$$

$$x = 20^\circ \text{ Το μέγεθος της γωνίας ABE είναι } 20^\circ.$$

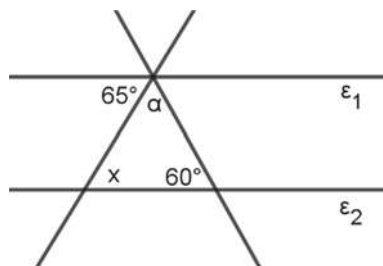
$$\text{Άρα το μέγεθος της γωνίας ΔBΓ είναι } 5 \cdot x = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ.$$

2. Στα παρακάτω σχήματα, οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, φ, x.

α)



β)



Λύση: α) Οι γωνίες α και 2α είναι παραπληρωματικές, άρα:

$$\alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$$3\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$\phi = 2\alpha$ ως εντός, εκτός και επιταυτά, άρα:

$$\phi = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

$x + \phi = 180^\circ$ ως παραπληρωματικές, άρα:

$$x + 120^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 120^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

β) $x = 65^\circ$ ως εντός εναλλάξ.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180° , άρα:

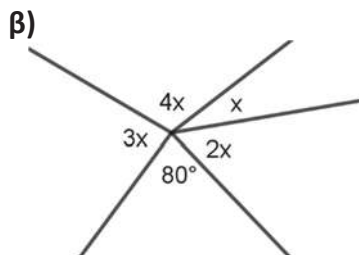
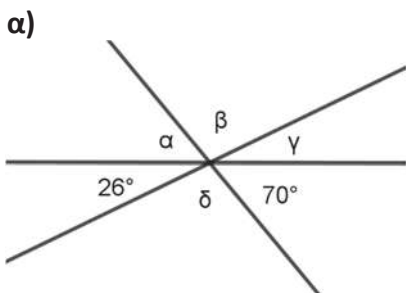
$$\alpha + x + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 65^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ$$

$$\alpha = 55^\circ$$

3. Στο παρακάτω σχήμα α, οι τρεις ευθείες περνούν απ' το ίδιο σημείο, ενώ στο σχήμα β, οι πέντε ημιευθείες έχουν ως αρχή το ίδιο σημείο. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ, δ και χ.



Λύση: α) $\hat{\alpha} = 70^\circ$ ως κατακορυφήν γωνίες.

$\hat{\gamma} = 26^\circ$ ως κατακορυφήν γωνίες.

$\hat{\delta} + 26^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ γιατί έχουν άθροισμα ευθεία γωνία. Άρα $\hat{\delta} = 180^\circ - 26^\circ - 70^\circ$, δηλαδή $\hat{\delta} = 84^\circ$.

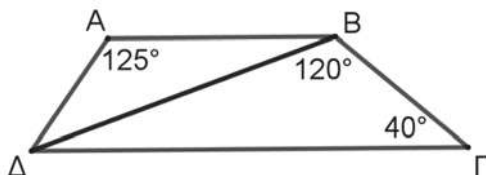
β) $3x + 4x + x + 2x + 80^\circ = 360^\circ$ γιατί έχουν άθροισμα πλήρη γωνία. Οπότε:

$$10x = 360^\circ - 80^\circ$$

$$10x = 280^\circ$$

$$x = 28^\circ$$

4. Στο παρακάτω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ), να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΒ.



Λύση: Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΒΓ είναι:

$$\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B} + \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta} = 180^\circ, \text{ άρα:}$$

$$\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + 40^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 40^\circ - 120^\circ$$

$$\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 20^\circ.$$

Αλλά $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 20^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ//ΔΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ είναι:

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{\Delta}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = 180^\circ$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + 20^\circ + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 180^\circ - 20^\circ - 125^\circ$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 35^\circ$$

1. Η ευθεία ϵ_1 έχει εξίσωση $y = ax - 1$ και διέρχεται από το σημείο $(7, 13)$. Η ευθεία ϵ_2 έχει εξίσωση $5y - 3x = 4$. Ποια από τις δύο ευθείες έχει τη μεγαλύτερη κλίση;

Λύση

Επειδή η ϵ_1 διέρχεται από το σημείο $(7, 13)$, οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Οπότε έχουμε:

$$13 = a \cdot 7 - 1$$

$$7a = 13 + 1$$

$$a = \frac{14}{7}$$

$a = 2$. Άρα η κλίση της ϵ_1 είναι 2.

Για να βρούμε την κλίση της ϵ_2 , θα την επιλύσουμε ως προς y . Οπότε έχουμε:

$$5y - 3x = 4$$

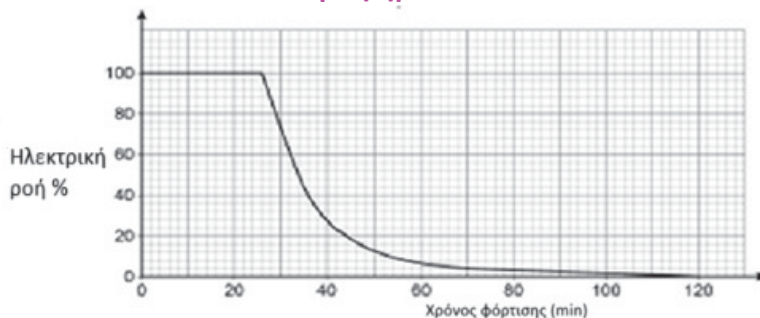
$$5y = 3x + 4$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}. \text{ Άρα η κλίση της } \epsilon_2 \text{ είναι } \frac{3}{5}.$$

Επομένως η κλίση της ϵ_1 είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ϵ_2 .

2. Ένα κινητό τηλέφωνο, όταν είναι άδειο, χρειάζεται 2 ώρες για να φορτίσει. Όταν φορτίζεται, η ηλεκτρική ροή ξεκινά ως πλήρης (100%), συνεχίζει ως πλήρης για ένα χρονικό διάστημα και μειώνεται σταδιακά μέχρι να φορτίσει πλήρως το τηλέφωνο. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω Γράφημα Α.

Γράφημα Α

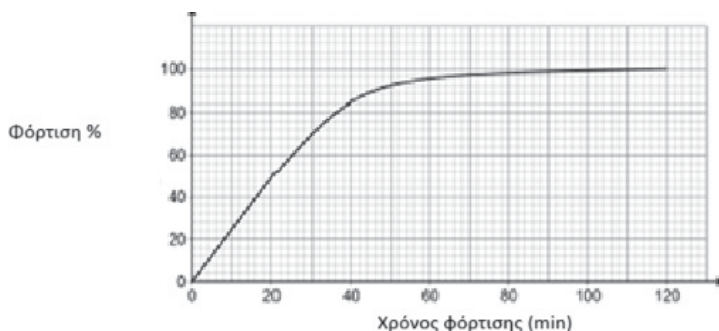


Το Γράφημα Β δείχνει το ποσοστό φόρτισης του τηλεφώνου από τη στιγμή που είναι άδειο, μέχρι τη στιγμή της πλήρους φόρτισης.

Γράφημα Β

Το τηλέφωνο της Χριστίνας είναι άδειο και ξεκινά να το φορτίζει στις 10:00 π.μ.

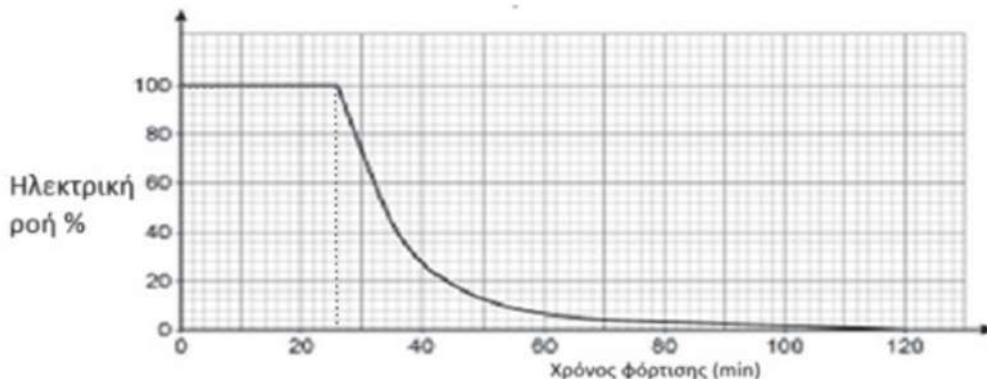
- α) Χρησιμοποιώντας το Γράφημα Α, να βρείτε την ώρα που η ηλεκτρική ροή αρχίζει να μειώνεται.



- β) Χρησιμοποιώντας τα Γραφήματα Α και Β, να βρείτε το ποσοστό φόρτισης του τηλεφώνου όταν η ηλεκτρική ροή είναι 40%.

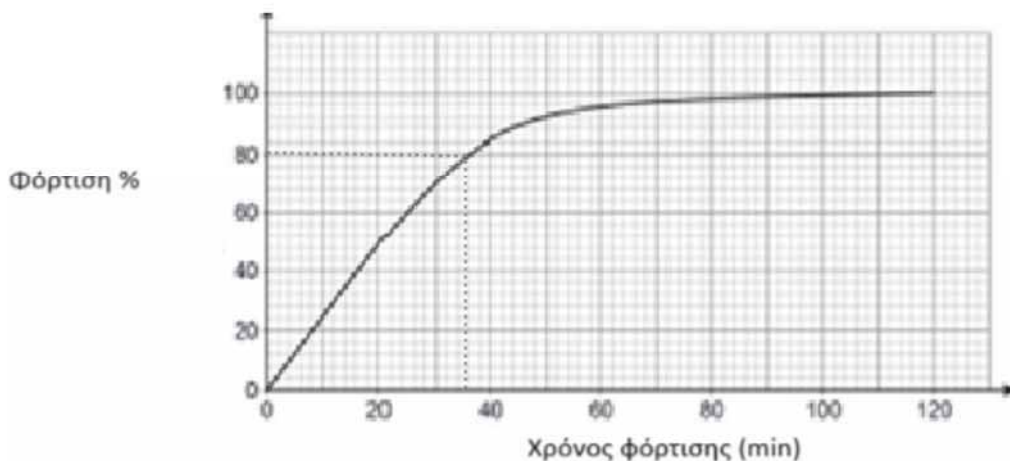
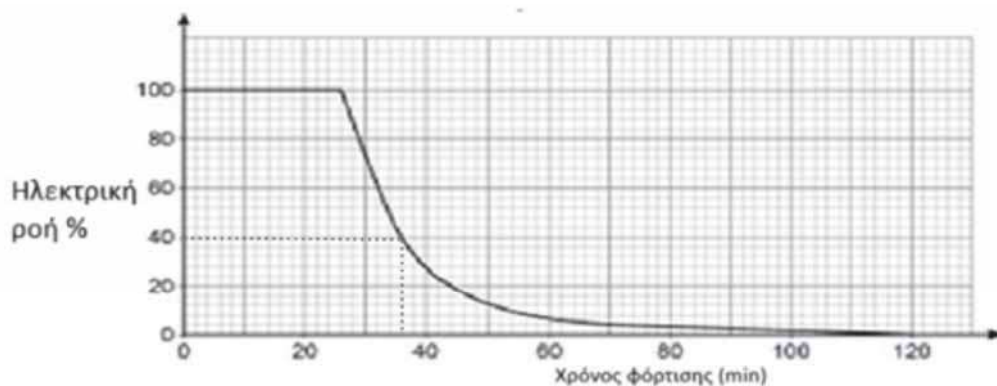
Λύση

α) Παρατηρώντας το Γράφημα Α, η ηλεκτρική ροή αρχίζει να μειώνεται, από το 100%, στα 26 λεπτά χρόνου φόρτισης. Η Χριστίνα ξεκίνησε να φορτίζει το τηλέφωνό της στις 10:00 π.μ. Άρα η μείωση της ροής θα αρχίσει στις 10:26 π.μ.

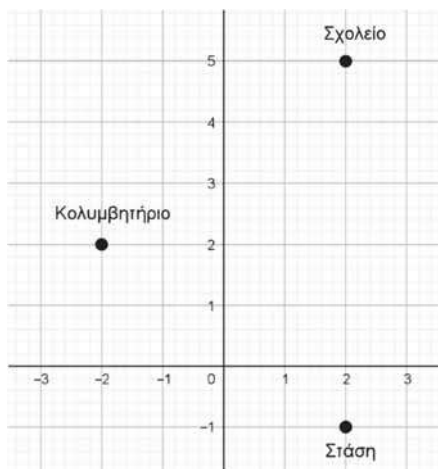


β) Από το Γράφημα Α, βρίσκουμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι 40% μετά από 36 λεπτά από την αρχή της φόρτισης.

Από το Γράφημα Β, βρίσκουμε το ποσοστό φόρτισης (%) που αντιστοιχεί στα 36 λεπτά. Αυτό το ποσοστό φόρτισης είναι 80%.



3. Το παρακάτω σχήμα έχει σχεδιαστεί σε ένα τετράγωνο πλέγμα 1 cm και δείχνει την τοποθεσία ορισμένων σημείων σε μια πόλη.



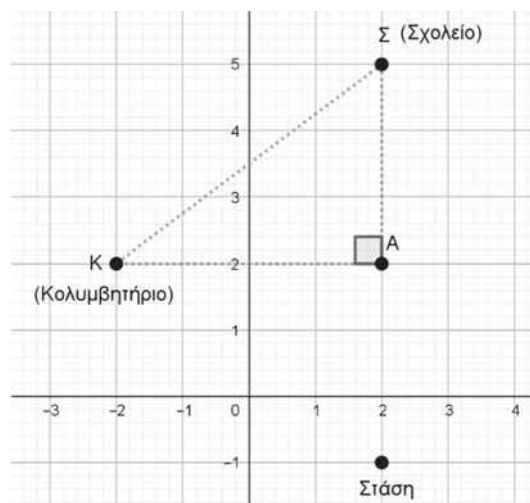
- α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των τριών σημείων της πόλης, που φαίνονται στο σχήμα.
- β) Η κλίμακα είναι 1 cm και αντιπροσωπεύει 50 m. Υπάρχει μια ευθεία διαδρομή από το σχολείο προς τη στάση του λεωφορείου. Πόσο μήκος έχει η πραγματική διαδρομή; Δώστε την απάντησή σας σε μέτρα.
- γ) Να βρείτε σε cm την απόσταση στο σχήμα ανάμεσα στο σχολείο και το κολυμβητήριο.

Λύση

α) Σχολείο(2,5), Στάση(2, -1), Κολυμβητήριο(-2, 2).

β) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η απόσταση από το σχολείο προς τη στάση του λεωφορείου είναι παράλληλη στον κατακόρυφο άξονα και αποτελείται από έξι πλευρές τετραγώνων του πλέγματος. Δηλαδή η απόσταση στο σχήμα είναι 6 cm. Επειδή 1 cm αντιπροσωπεύει στην πραγματικότητα 50 m, η πραγματική διαδρομή είναι $6 \cdot 50 = 300$ m.

γ)



Για να βρούμε την απόσταση ανάμεσα στο σχολείο και το κολυμβητήριο, σχηματίζουμε στο σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΣΚ και εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα. Οπότε έχουμε:

$$\Sigma K^2 = \Lambda \Sigma^2 + \Lambda K^2$$

$$\Sigma K^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Sigma K^2 = 9 + 16$$

$$\Sigma K^2 = 25$$

$$\Sigma K = \sqrt{25}$$

$$\Sigma K = 5 \text{ cm.}$$

4. α) Να συμπληρώσετε τις τιμές των συναρτήσεων $y = 3x$ και $y = -3x$ στους παρακάτω πίνακες.

x	-2	-1	0	1	2
$y=3x$					

x	-2	-1	0	1	2
$y=-3x$					

β) Στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων, να σχεδιάσετε τις γραφικές παράσταση των συναρτήσεων $y = 3x$ και $y = -3x$ για $-2 \leq x \leq 2$.

Λύση

α) Στην $y = 3x$,

για $x=-2$, έχουμε $y = 3 \cdot (-2) = -6$

για $x=-1$, έχουμε $y = 3 \cdot (-1) = -3$

για $x=0$, έχουμε $y = 3 \cdot 0 = 0$

για $x=1$, έχουμε $y = 3 \cdot 1 = 3$

για $x=2$, έχουμε $y = 3 \cdot 2 = 6$

x	-2	-1	0	1	2
$y=3x$	-6	-3	0	3	6

Στην $y = -3x$,

για $x=-2$, έχουμε $y = -3 \cdot (-2) = 6$

για $x=-1$, έχουμε $y = -3 \cdot (-1) = 3$

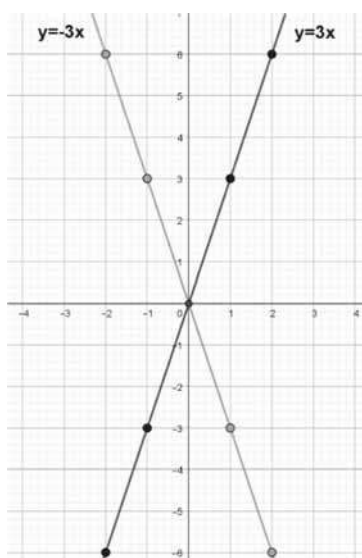
για $x=0$, έχουμε $y = -3 \cdot 0 = 0$

για $x=1$, έχουμε $y = -3 \cdot 1 = -3$

για $x=2$, έχουμε $y = -3 \cdot 2 = -6$

x	-2	-1	0	1	2
$y=-3x$	6	3	0	-3	-6

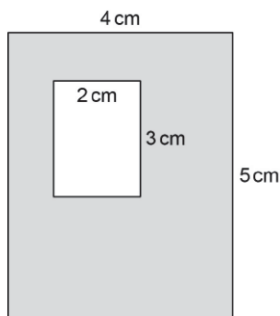
β)



Γεωμετρία - Τριγωνομετρία

1. Το μεγάλο ορθογώνιο έχει κομμένη μια ορθογώνια οπή. Υπολογίστε το ποσοστό του

μεγάλου ορθογωνίου που είναι σκιασμένο.



Λύση

Έστω E_1 το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου και E_2 το εμβαδόν της ορθογώνιας οπής.

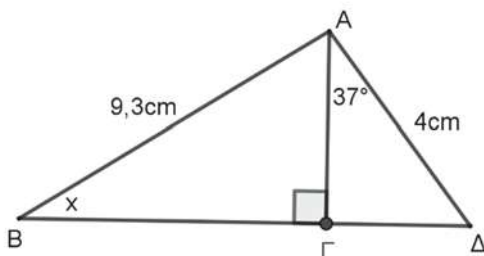
$$E_1 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}^2$$

$$E_2 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{σκιασμένου}} = E_1 - E_2 = 20 - 6 = 14 \text{ cm}^2$$

$$\text{Ποσοστό σκιασμένου: } \frac{14}{20} \cdot 100 = 70\%$$

2. Να υπολογίσετε το μέγεθος της γωνίας x .



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει: $\sin A = \frac{AG}{AD}$

$$\sin 37^\circ = \frac{AG}{4}$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες, που βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου, παρατηρούμε ότι $\sin 37^\circ \approx 0,7986$.

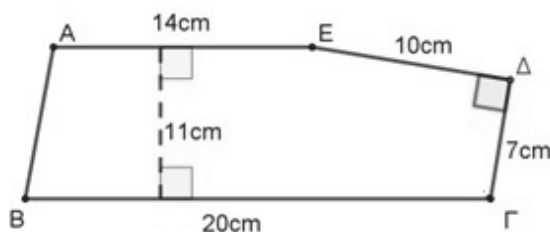
$$\text{Άρα } 0,7986 = \frac{AG}{4}$$

$$AG = 0,7986 \cdot 4 = 3,1944 \approx 3,2 \text{ m}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\sin x = \frac{AG}{AB} = \frac{3,2}{9,3} = 0,344$

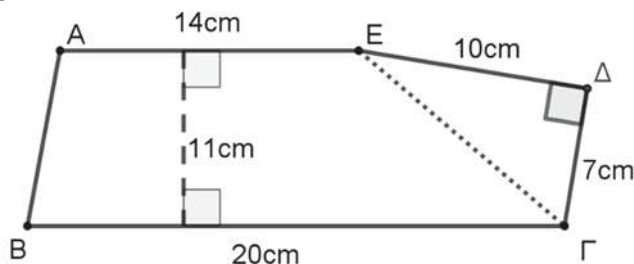
Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε ότι $\sin 20^\circ \approx 0,344$. Άρα $x = 20^\circ$.

3. Δίνεται το παρακάτω πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, με $AE \parallel BG$. Να βρείτε το εμβαδόν του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ.



Λύση

Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ, οπότε το πεντάγωνο χωρίζεται σε ένα τραπέζιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο.



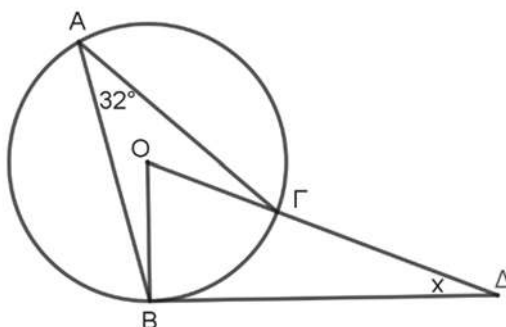
$$E_{ABΓΔΕ} = E_{ABΓΕ} + E_{ΓΔΕ} \quad (1)$$

$$E_{ABΓΕ} = \frac{AE + BΓ}{2} \cdot υ = \frac{14+20}{2} \cdot 11 = 17 \cdot 11 = 187 \text{ cm}^2$$

$$E_{ΓΔΕ} = \frac{\Delta Γ \cdot \Delta Ε}{2} = \frac{7 \cdot 10}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ cm}^2$$

Οπότε αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε $E_{ABΓΔΕ} = 187 + 35 = 222 \text{ cm}^2$.

4. Στο παρακάτω σχήμα, τα Α, Β και Γ είναι σημεία σε έναν κύκλο, με κέντρο το Ο. Η ΒΔ είναι εφαπτομένη στον κύκλο και τα Ο, Γ, Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Να υπολογίσετε τη γωνία x.



Λύση

Η ΒΔ είναι εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο Β, οπότε η ακτίνα ΟΒ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΒΔ. Επομένως, $\widehat{ΟΒΔ} = 90^\circ$.

Η γωνία $\widehat{ΒΟΓ}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της εγγεγραμμένης $\widehat{ΒΑΓ}$.

$$\text{Άρα } \widehat{ΒΟΓ} = 2\widehat{ΒΑΓ} = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ.$$

Το άθροισμα των οξείων γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΟ είναι 90° .

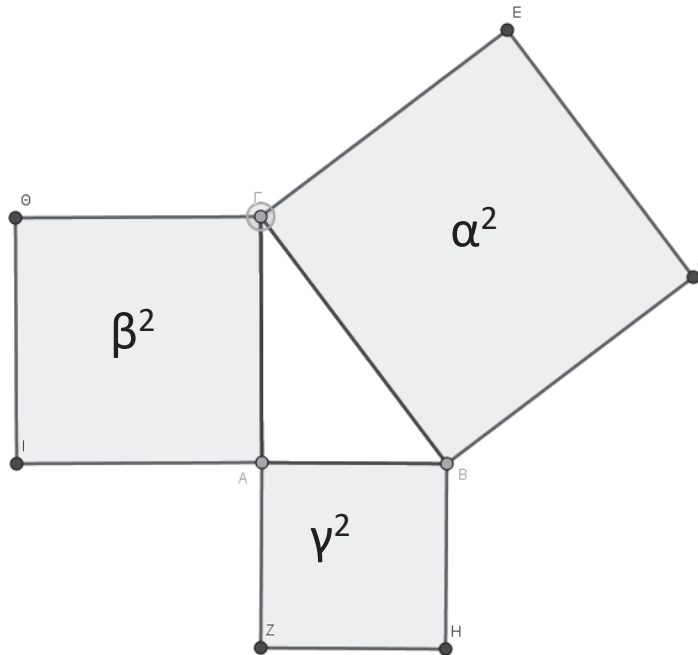
$$\text{Άρα } \widehat{ΒΟΔ} + \widehat{ΒΔΟ} = 90^\circ$$

$$64^\circ + x = 90^\circ$$

$$x = 90^\circ - 64^\circ$$

$$x = 26^\circ \text{ Το μέγεθος της γωνίας } x \text{ είναι } 26^\circ.$$

Όπως είναι γνωστό από το Πυθαγόρειο Θεώρημα: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας». Κατασκευάζουμε λοιπόν τρία τετράγωνα, ένα σε κάθε πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.



Δηλαδή αν $\alpha=5$, $\beta=4$ και $\gamma=3$ τότε $5^2 = 4^2 + 3^2$. Η απόδειξη του πυθαγορείου αφορά σε τετράγωνα το καθένα με πλευρά ίση με τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου που έχουμε. Το ερώτημα είναι: αν αντί για τετράγωνα έχουμε άλλα κανονικά πολύγωνα, ισχύει η παραπάνω ιδιότητα;

Ας δούμε αρχικά την περίπτωση του ισόπλευρου τριγώνου:

Α) κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΝΟΞ με υποτείνουσα ΟΞ=5 και κάθετες πλευρές ΝΞ=4 και ΟΝ=3. Θα υπολογίσουμε τα εμβαδά των ισοπλεύρων τριγώνων ΠΟΞ, ΡΝΞ, ΣΟΝ, που δημιουργούνται από τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Στο τρίγωνο ΠΟΞ, φέρνουμε το ύψος ΠΤ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΞ. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΠΤ έχουμε:

$$\Pi T^2 = O\Pi^2 - O T^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{100 - 25}{4} = \frac{75}{4}$$

Οπότε:

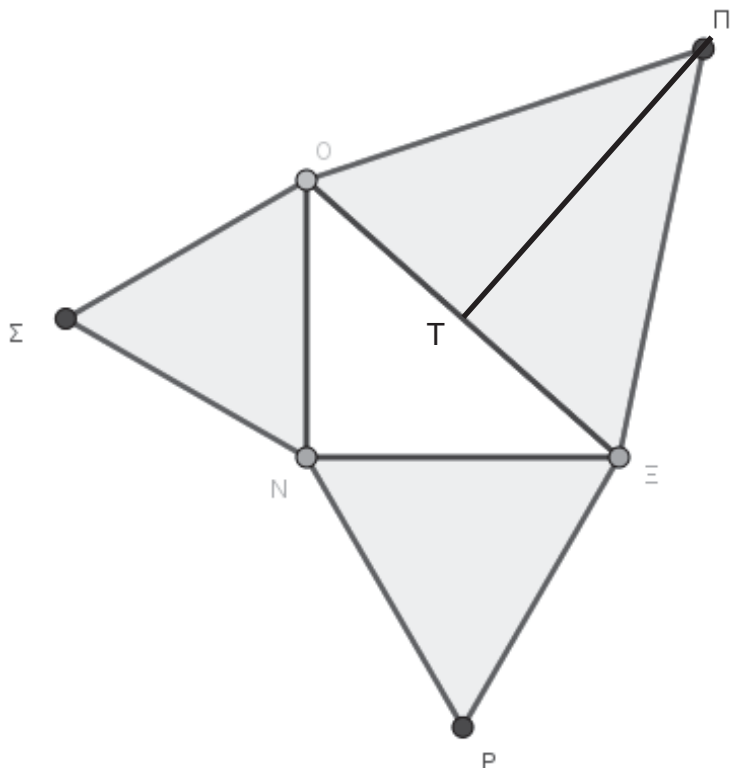
$$\Pi T = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Έτσι το εμβαδό του τριγώνου ΝΟΞ είναι:

$$(NO\Xi) = \frac{\beta \cdot v}{2} = \frac{O\Xi \cdot \Pi T}{2} = \frac{5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τα εμβαδά των άλλων δυο ισοπλεύρων τριγώνων:

$$(NEP) = \frac{16\sqrt{3}}{4} \text{ και } (\Sigma ON) = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$



Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο $NO\Xi$ με υποτείνουσα $O\Xi=5$ και κάθετες πλευρές $N\Xi=4$ και $ON=3$. Θα υπολογίσουμε τα εμβαδά των ισοπλεύρων τριγώνων $PO\Xi$, $P\Nu\Xi$, ΣON , που δημιουργούνται από τις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου. Στο τρίγωνο $PO\Xi$, φέρνουμε το ύψος PT που αντιστοιχεί στη βάση $O\Xi$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Pi T$ έχουμε:

$$\Pi T^2 = O\Pi^2 - OT^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{100 - 25}{4} = \frac{75}{4}$$

Οπότε:

$$\Pi T = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Έτσι το εμβαδό του τριγώνου $NO\Xi$ είναι:

$$(NO\Xi) = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{O\Xi \cdot \Pi T}{2} = \frac{5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τα εμβαδά των άλλων δυο ισοπλεύρων τριγώνων:

$$(N\epsilon P) = \frac{16\sqrt{3}}{4} \text{ και } (\Sigma ON) = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Παρατηρούμε ότι : $(NO\Xi) = (N\epsilon P) + (\Sigma ON)$, δηλαδή

$$\frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4},$$

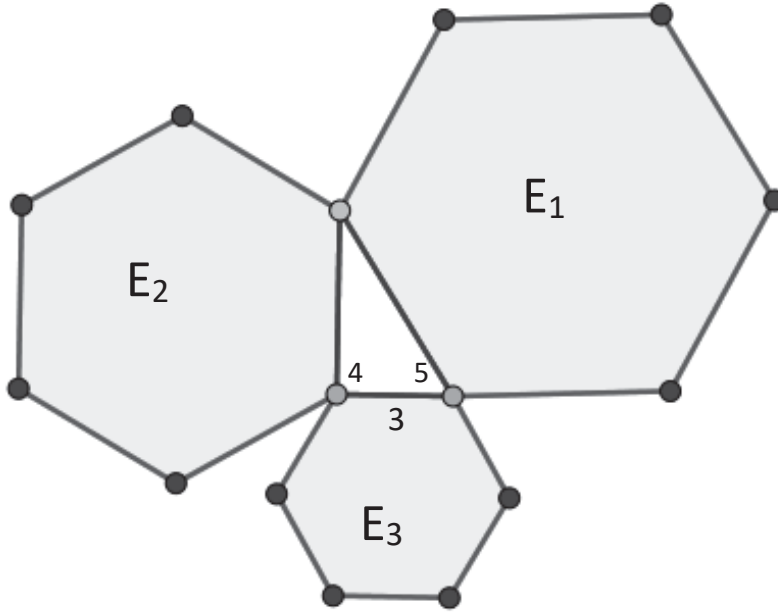
Αυτό βέβαια μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α , β , γ .

$$\alpha^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \beta^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \gamma^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Δηλαδή, **το εμβαδό του ισοπλεύρου τριγώνου που δημιουργείται από τη υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ισοπλεύρων τριγώνων που δημιουργούνται από τις δυο κάθετες πλευρές.**

Αντίστοιχο συμπέρασμα ισχύει και για το κανονικό εξάγωνο, αφού ένα κανονικό εξάγωνο αποτελείται από 6 ισόπλευρα τρίγωνα, οπότε το εμβαδό του θα είναι 6 φορές το εμβαδό του

ισόπλευρου τριγώνου. Χρησιμοποιούμε τους ίδιους αριθμούς ($\alpha=5$, $\beta=4$, $\gamma=3$) και έχουμε ότι:



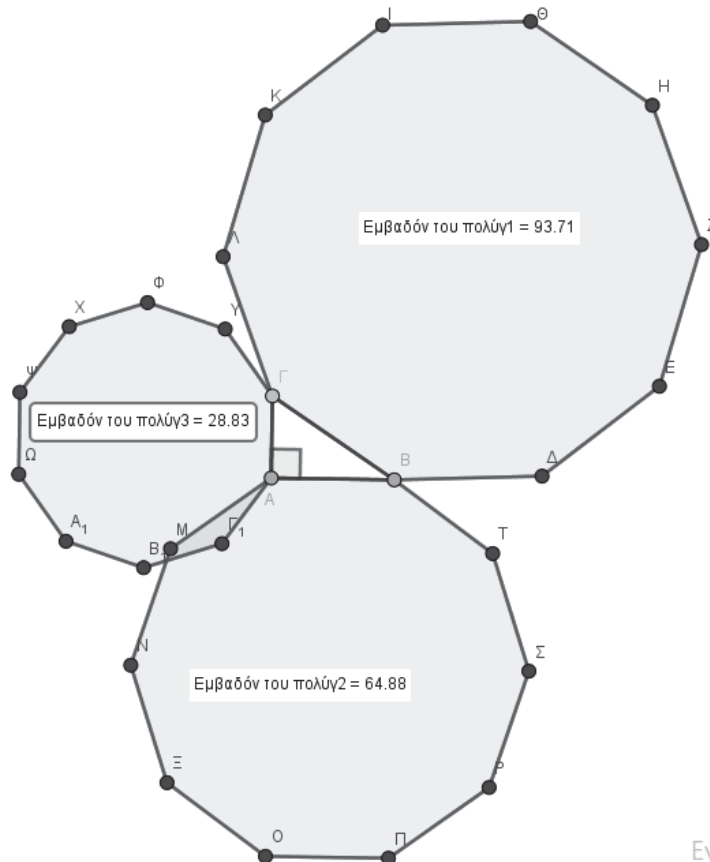
$$E_1 = 6 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4}, E_2 = 6 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} \text{ και } E_3 = 6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ και γενικά:}$$

Δηλαδή:

$$E_1 = E_2 + E_3$$

Δηλαδή, Το εμβαδό του κανονικού εξαγώνου που δημιουργείται από τη υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των κανονικών εξαγώνων που δημιουργούνται από τις δυο κάθετες πλευρές του.

Αντίστοιχο συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο. Μπορούμε παράδειγμα, χρησιμοποιώντας το GeoGebra να το εφαρμόσουμε με ένα κανονικό δεκάγωνο.



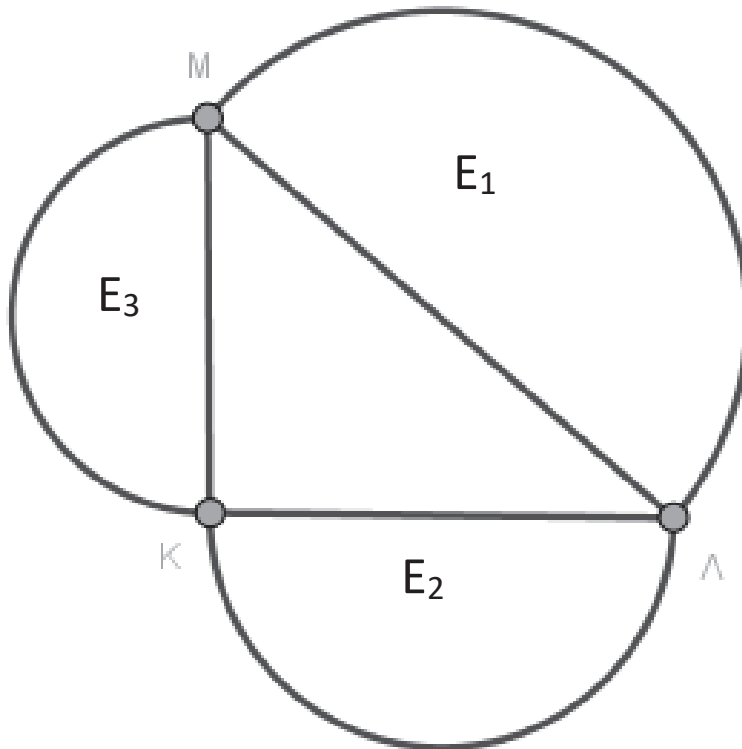
Εν:

Πράγματι $28,83+64,88=93,71$.

Δηλαδή, Το εμβαδό του κανονικού πολυγώνου που δημιουργείται από τη υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των κανονικών πολυγώνων ίσου πλήθους πλευρών που δημιουργούνται από τις δυο κάθετες πλευρές του.

Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει αν κατασκευάσουμε κύκλους ή ημικύκλια.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση του ημικυκλίου.



Έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ με πλευρές ΜΛ=α, ΚΛ=β και ΜΚ=γ.

Με διαμέτρους τις πλευρές α, β, γ φέρνουμε αντίστοιχα ημικύκλια.

Το εμβαδό κάθε ημικυκλίου είναι:

$$E_1 = \pi \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4}, \quad E_2 = \pi \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi\beta^2}{4}, \quad E_3 = \pi \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi\gamma^2}{4}$$

Επειδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

$$E_1 = E_2 + E_3.$$

Δηλαδή, Το εμβαδό του ημικυκλίου που δημιουργείται από τη υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ημικυκλίων που δημιουργούνται από τις δυο κάθετες πλευρές του.

Τα σύνολα αριθμών είναι:

1. Οι **φυσικοί** αριθμοί, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. Οι **ακέραιοι** αριθμοί $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
3. Οι **ρητοί** αριθμοί $\mathbb{Q} = \{\text{κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα με ακέραιους όρους}\}$ ποιοι είναι όμως αυτοί;

i) προφανώς, όλα τα κλάσματα με ακέραιους όρους : $\frac{8}{13}$

ii) Όλοι οι ακέραιοι : $-7 = \frac{-7}{1}$

iii) Οι δεκαδικοί που τερματίζονται πχ. $5,23 = \frac{523}{100}$

iv) Οι δεκαδικοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που επαναλαμβάνονται –από κάποια θέση και μετά. (περιοδικοί) πχ.

$$0,727272\dots = \frac{72}{99}$$

4. Οι **πραγματικοί** αριθμοί $\mathbb{R}$

i) Οι ρητοί και

ii) Οι Άρρητοι (όχι ρητοί) δηλαδή αυτοί που στη δεκαδική τους μορφή, έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται. (Από κάποια θέση τουλάχιστον και μετά).

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ

1. Πρόσθεση (με τελεστή +) Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης λέγεται άθροισμα. Δηλαδή **$a+b = \text{άθροισμα}$** , ενώ οι **a, b** λέγονται **προσθετέοι** ή όροι του αθροίσματος.
2. Αφαίρεση (με τελεστή -) το αποτέλεσμα της αφαίρεσης λέγεται διαφορά. δηλαδή **$a-b = \text{διαφορά}$** , ενώ ο **a** λέγεται **μειωτέος** και ο **b** , **αφαιρετέος**, ή όροι της διαφοράς.
3. Πολλαπλασιασμός (με τελεστή $\cdot$) το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού λέγεται γινόμενο. Δηλαδή **$a \cdot b = \text{γινόμενο}$** , ενώ οι **$a, b$** λέγονται **παράγοντες**.
4. Διαίρεση (με τελεστή $:$) το αποτέλεσμα της διαίρεσης λέγεται πηλίκο. δηλαδή **$a:b = \text{πηλίκο}$** , ενώ το **a** λέγεται **διαιρετέος**, και το **b** , **διαιρέτης**.

επίσης το πηλίκο δύο αριθμών a/b λέγεται **λόγος** του a προς b . Τον όρο τον χρησιμοποιούμε σε κάθε διαίρεση μετρήσεως, δηλαδή σε κάθε διαίρεση δύο ομοειδών ποσοτήτων οπότε το αποτέλεσμα είναι καθαρός αριθμός που φανερώνει τη **σύγκριση** τους πχ. $\frac{8cm}{4cm} = \frac{2}{1} = 2$

Στο σύνολο των ακεραίων έχει αναπτυχθεί ένας πολύ σημαντικός κλάδος των μαθηματικών γνωστός ως «**θεωρία αριθμών**»

Ειδικά για το σύνολο των θετικών ακεραίων που δεν είναι άλλο από το

N* (οι φυσικοί χωρίς το μηδέν)

- Οι θετικοί ακέραιοι χωρίζονται ως προς το υπόλοιπο που αφήνουν όταν διαιρούνται με το 2, σε άρτιους(ζυγούς) όταν δεν αφήνουν υπόλοιπο και περιττούς(μονούς) όταν αφήνουν υπόλοιπο 1. Επομένως **ζυγός=2·κ** ενώ **μονός= 2·κ+1** όπου κ, ακέραιος.
- Οι θετικοί ακέραιοι χωρίζονται ως προς το πλήθος των διαιρετών σε πρώτους, αυτοί που διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους και σε σύνθετους, όταν έχουν επιπλέον διαιρέτη.

Σχόλιο_1: Ο μικρότερος από τους πρώτους αριθμούς είναι ο 2, που επίσης είναι μοναδικός ζυγός που είναι πρώτος.

Σχόλιο_2: όλοι οι ακέραιοι γράφονται (αναλύονται) κατά μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο πρώτων.

Απλές παρατηρήσεις.

- μονός + μονός=ζυγός, ζυγός+ζυγός=ζυγός
- μονός+ζυγός= μονός
- με βάση αυτή την παρατήρηση μπορείς να απαντήσεις αν υπάρχει τετραψήφιος αριθμός με όλα τα ψηφία του μονούς, που να έχουν άθροισμα 21;

Απάντηση: δεν υπάρχει. Ανά 2 τα ψηφία δίνουν άθροισμα ζυγό, οπότε 2 ζυγοί δίνουν τελικό άθροισμα ζυγό.

Απλές εφαρμογές στον ορισμό και στις ιδιότητες των δυνάμεων

- $\alpha^7 : \alpha^4 = \alpha^{7-4} = \alpha^3$
- $5 \cdot 5^3 = 5^1 \cdot 5^3 = 5^{1+3} = 5^4$
- $(3^{1821} \cdot 5^{2000})^0 = 1$
- $(18 - 2^4 - 2)^0 = 0^0 \rightarrow \text{δεν ορίζεται}$
- $\frac{x^2 y^{-3}}{z^{-4}} = \frac{x^2 z^4}{y^3}$
- $(2\alpha^4 \cdot \beta^{-2})^{-3} = 2^{-3} \cdot \alpha^{-12} \cdot \beta^6 = \frac{\beta^6}{8\alpha^{12}}$
- $25^5 \cdot 8^4 = (5^2)^5 \cdot (2^3)^4 = 5^{10} \cdot 2^{12} = 5^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^2 = (5 \cdot 2)^{10} \cdot 2^2 = 4 \cdot 10^{10}$

$$\left(\frac{9}{25}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^7 = \left(\frac{3}{5}\right)^8 \left(\frac{3}{5}\right)^{-7} = \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$$

Τετραγωνική ρίζα

- Αν α θετικός, τότε ορίζουμε σαν τετραγωνική ρίζα του α, το θετικό αριθμό θ, που το τετράγωνό του ισούται με α. Τετραγωνική ρίζα του μηδέν ορίζουμε το μηδέν.

Δηλαδή αν $a \geq 0$, $\sqrt{a} = \theta \Leftrightarrow \theta \geq 0$ και $\theta^2 = a$. Ισχύουν:

- $\sqrt{a^2} = |a|$ στην περίπτωση αυτή $a \in \mathbb{R}$ αφού το υπόρριζο είναι $a^2 \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = a$ στην περίπτωση αυτή πρέπει $a \geq 0$ αφού το υπόρριζο είναι α
- $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta}$

$$\bullet \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

απλές εφαρμογές των παραπάνω

$$1. \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$2. \sqrt{(x-2)^2} = x-2 \quad (\text{εδώ η ισότητα ορίζεται για υπόρριζο } \geq 0, \text{δηλαδή για } x-2 \geq 0 \text{ ή } x \geq 2)$$

$$3. \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$4. \sqrt{128} = \sqrt{2^7} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{2} = 2^3 \sqrt{2}$$

$$5. \sqrt{0,0016} = \sqrt{\frac{16}{10000}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{10000}} = \frac{4}{100} = 0,04$$

$$6. \sqrt{10\sqrt{20\sqrt{22+\sqrt{9}}}} = \sqrt{10\sqrt{20\sqrt{22+3}}} = \sqrt{10\sqrt{20 \cdot 5}} = \sqrt{10 \cdot 10} = 10$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$8. \text{Σύγκριση: } 5 + 2\sqrt{3} \geq 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \geq 3 \quad \text{οι όροι της ανισότητας είναι μη αρνητικοί, οπότε υψώνουμε στο τετράγωνο κατά μέλη } (2\sqrt{3})^2 \geq 3^2 \Leftrightarrow 12 \geq 9$$

➤ **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ** = ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΑΛΗΘΕΥΟΥΝ ΓΙΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ (ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{τετράγωνο αθροίσματος}) = (\text{τέλειο τετράγωνο})$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\text{τετράγωνο διαφοράς}) = (\text{τέλειο τετράγωνο})$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (\text{κύβος αθροίσματος}) = (\text{τέλειος κύβος})$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (\text{κύβος διαφοράς}) = (\text{τέλειος κύβος})$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad (\text{άθροισμα επί διαφορά} = \text{διαφορά τετραγώνων})$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \quad , \text{ διαφορά κύβων}$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \quad , \text{ άθροισμα κύβων}$$

Παραγοντοποίηση

➤ **παραγοντοποίηση** = (παράγοντες ποιώ, δηλαδή φτιάχνω παράγοντες άρα μετατρέπω ένα άθροισμα ή μια διαφορά σε γινόμενο

Για την παραγοντοποίηση θα χρειαστούμε τις ταυτότητες, αλλά από το δεύτερο μέλος προς το πρώτο (δηλαδή από την ανοιγμένη στην παραγοντοποιημένη μορφή). Ειδικότερα τις

$$\begin{aligned} &\rightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad , \text{ διαφορά τετραγώνων} \\ &\rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \quad , \text{ διαφορά κύβων} \\ &\rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \quad , \text{ άθροισμα κύβων} \end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση παράστασης με δύο (2) όρους

Βήμα 1° : Εξετάζουμε προσεκτικά αν οι δύο όροι έχουν κοινό παράγοντα (προσοχή ! και από τους αριθμούς και από τα «γράμματα») αν ναι γράφουμε τον κοινό παράγοντα και ανοίγουμε παρένθεση μέσα στην οποία γράφουμε «ότι απομένει» από τους δύο όρους. (δηλαδή το πηλίκο κάθε όρου δια του κοινού παράγοντα)

Παράδειγμα: $6a^3b - 4a^2b^2\gamma = 2a^2b(3a - 2b\gamma)$

Σχόλιο 1° : Αν ένας όρος βγαίνει ολόκληρος σαν κοινός, τότε στη θέση του μένει μονάδα. παράδειγμα $a\beta + a = a(\beta + 1)$.

Σχόλιο 2° : Αν δούμε δύο αντίθετες παραστάσεις, δηλαδή $a - \beta$ και $\beta - a$ ή $a + \beta$ και $-a - \beta$ τότε αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημο μπροστά από μια από αυτές και θα γίνουν ίδιες, για να βγουν στη συνέχεια σαν κοινός παράγων. [αν είναι υψωμένη σε ζυγό εκθέτη μπορεί γίνεται η αλλαγή χωρίς πρόβλημα, δηλαδή $(\beta - a) = -(a - \beta)$, ενώ $(\beta - a)^2 = (a - \beta)^2$]

Παράδειγμα: $a(x - 2y) + \beta(2y - x) = a(x - 2y) - \beta(x - 2y) = (x - 2y)(a - \beta)$

Βήμα 2° : Εξετάζουμε αν οι 2 όροι είναι ή μπορούν να γίνουν διαφορά τετραγώνων

Δηλαδή αν έχουμε την ταυτότητα: $a^2 - \beta^2$ οπότε γίνεται $(a - \beta)(a + \beta)$

Παράδειγμα 1° : $4x^2 - (x - 3)^2 = (2x)^2 - (x - 3)^2 = [2x - (x - 3)][2x + (x - 3)] = (2x - x + 3)(2x + x - 3) = (x + 3)(3x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$

Παράδειγμα 2° : $20x - 45xy^2 = 5x(4 - 9y^2) = 5x[2^2 - (3y)^2] = 5x(2 - 3y)(2 + 3y)$

Σχόλιο 3° : Αν δούμε παρενθέσεις και τίποτα από τα παραπάνω δεν γίνεται , τότε «ανοίγουμε» την παράσταση και αρχίζουμε από την αρχή έχοντας πιθανόν περισσότερους όρους. δηλαδή όταν δούμε «μισό-παραγοντοποιημένη» παράσταση υπάρχουν δύο ενδεχόμενα, **ή να συνεχίζει πάνω στον ίδιο «δρόμο» ή αυτή να μην οδηγεί σε παραγοντοποίηση οπότε «γυρίζουμε πίσω» με άνοιγμα των παρενθέσεων.**

Παράδειγμα 1° : $a(x - 2\beta) + x^2 - 4\beta^2 = a(x - 2\beta) + (x - 2\beta)(x + 2\beta) = (x - 2\beta)(a + x + 2\beta)$ εδώ η παρένθεση που υπήρχε βοηθούσε να συνεχίσουμε.

Παράδειγμα 2° : $a(x - 2\beta) + 3a\beta = ax - 2a\beta + 3a\beta = ax + a\beta = a(x + \beta)$ εδώ η παρένθεση δεν οδηγούσε σε παραγοντοποίηση.

Θα συναντήσετε πολλές παραστάσεις με δύο όρους που δεν παραγοντοποιούνται πχ. $x^2 + 1$, $x^2 + y^2$ (πιθανά τα αθροίσματα τετραγώνων)

Παραδείγματα

i) $x^2 - xy = x(x - y)$

ii) $3a\beta^2 - 3a = 3a(\beta^2 - 1) = 3a(\beta - 1)(\beta + 1)$

iii) $2x^3y - 8xy^3 = 2xy(x^2 - 4y^2) = 2xy[x^2 - (2y)^2] = 2xy(x - 2y)(x + 2y)$

iv) $5(a + \beta)^2 - 20 = 5[(a + \beta)^2 - 2^2] = 5(a + \beta - 2)(a + \beta + 2)$

v) $(2x - 3y)^2 - (x + y)^2 = [(2x - 3y) - (x + y)][(2x - 3y) + (x + y)] = (x - 4y)(3x - 2y)$

Παραγοντοποίηση παράστασης με τέσσερις (4) όρους

Βήμα 1° : Εξετάζουμε προσεκτικά αν όλοι οι όροι έχουν κοινό παράγοντα

Βήμα 2° : Εξετάζουμε αν οι 4 όροι είναι ή μπορούν να γίνουν **τέλειος κύβος**

Δηλαδή αν έχουμε: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ οπότε γίνεται $(a+b)^3$

(ή αν έχουμε $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ οπότε γίνεται $(a-b)^3$)

Βήμα 3° :(το πιο συνηθισμένο) **Χωρίζουμε σε 2 ομάδες των 2 όρων κάθε μια και βγάζουμε κοινό παράγοντα κατά ομάδα, με στόχο οι δυο παρενθέσεις που θα προκύψουν να είναι ίδιες.** Αν δεν είναι ίδιες τότε δοκιμάζω άλλο συνδυασμό και αν αποτύχουμε και με τους τρεις συνδυασμούς τότε εξετάζουμε το 4° βήμα.

Βήμα 4° : Εξετάζουμε αν οι τρεις όροι αποτελούν **τέλειο τετράγωνο** και δημιουργούν με τον τέταρτο **διαφορά τετραγώνων**.

Παράδειγμα $a^2+2ab+b^2-\gamma^2 = (a+b)^2-\gamma^2 = (a+b-\gamma)(a+b+\gamma)$

Παραδείγματα

$$1. \quad 5\kappa^3 - 30\kappa^2 + 120\kappa - 40 = 5(\kappa^3 + 6\kappa^2 + 24\kappa - 8) = 5(\kappa^3 + 3 \cdot 2\kappa^2 + 3 \cdot 2^2\kappa - 2^3) \\ = 5(\kappa - 2)^3 \quad (\text{Βήμα 1° και 2°})$$

$$2. \quad 3\kappa^3 + 6\kappa - \kappa^2\lambda - 2\lambda = (3\kappa^3 + 6\kappa) + (-\kappa^2\lambda - 2\lambda) = 3\kappa(\kappa^2 + 2) - \lambda(\kappa^2 + 2) = \\ (\kappa^2 + 2)(3\kappa - \lambda) \quad (\text{Βήμα 3°})$$

$$3. \quad x^2 - y^2 + 2y - 1 = (\text{εδώ δεν υπάρχει κοινός παράγων, δεν είναι τέλειος κύβος και κάθε συνδυασμός χωρισμού σε ομάδες δεν δίνει ίδια παρένθεση, οπότε εξετάζουμε το 4° βήμα}) \\ = x^2 - (y^2 - 2y + 1) = x^2 - (y - 1)^2 = [x - (y - 1)][x + (y - 1)] = (x - y + 1)(x + y - 1)$$

- Περίπου έτσι σκεπτόμαστε και για τους 6 ή 8 όρους

Παραγοντοποίηση παράστασης με τρεις (3) όρους

Βήμα 1° : Εξετάζουμε προσεκτικά αν όλοι οι όροι έχουν κοινό παράγοντα

Βήμα 2° : Εξετάζουμε αν οι 3 όροι είναι ή μπορούν να γίνουν **τέλειο τετράγωνο**

Δηλαδή αν έχουμε $a^2+2ab+b^2$ οπότε γίνεται $(a+b)^2$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Βήμα 3° : **διάσπαση ενός όρου, οπότε γίνονται 4 όροι** → δεξ παραγοντοποίηση 4 όρων.

Βήμα 4° : **τριώνυμο** (3 τρόποι: 1^{ος} με διάσπαση όρου, 2^{ος} με εύρεση ριζών, 3^{ος} με γινόμενο και άθροισμα δύο αριθμών)

Παραδείγματα:

$$1. \quad 20\kappa^2 + 60\kappa + 45 = 5(4\kappa^2 + 12\kappa + 9) = 5(2\kappa + 3)^2$$

$$2. \quad a^2 - 3ab + 2b^2 = (\text{διάσπαση όρου}) = a^2 - 2ab - ab + 2b^2 = a(a - 2b) - b(a - 2b) = (a - 2b)(a - b)$$

$$3. \quad x^2 - 7x + 10 = (\text{διάσπαση όρου}) = x^2 - 2x - 5x + 10 = x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5)$$

και φυσικά τίποτα δεν είναι μονόδρομος... να δύο διαφορετικοί τρόποι για να παραγοντοποιήσουμε την ίδια παράσταση:

- $x^2 - 3y^2 + 2xy = x^2 - y^2 - 2y^2 + 2xy = (x-y)(x+y) + 2y(x-y) = (x-y)(x+3y)$
- $x^2 - 3y^2 + 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4y^2 = (x+y)^2 - (2y)^2 = (x+y-2y)(x+y+2y) = (x-y)(x+3y)$

Και μια ... «τρελή» παραγοντοποίηση

$$\begin{aligned} \alpha(\beta^2 - \gamma^2) + \beta(\gamma^2 - \alpha^2) + \gamma(\alpha^2 - \beta^2) &= \alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 - \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^2 - \gamma\beta^2 = \\ (\text{προσθέτω και αφαιρώ το } \alpha\beta\gamma) &= \alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 - \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^2 - \gamma\beta^2 + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = \\ \alpha\beta^2 - \alpha\beta\gamma - \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 - \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha\gamma^2 &= \alpha\beta(\beta - \gamma) - \beta\gamma(\beta - \gamma) - \alpha^2(\beta - \gamma) + \alpha\gamma(\beta - \gamma) = \\ (\beta - \gamma)(\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha^2 + \alpha\gamma) &= (\beta - \gamma)[\beta(\alpha - \gamma) - \alpha(\alpha - \gamma)] = (\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)(\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

Γενικές Ασκήσεις Παραγοντοποίησης

1. $2a^3 - 18a = 2a(a^2 - 9) = 2a(a^2 - 3^2) = 2a(a-3)(a+3).$
2. $5x^4\omega - 80y^4\omega = 5\omega(x^4 - 16y^4) = 5\omega[(x^2)^2 - (4y^2)^2] = 5\omega(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2) = 5\omega(x-2y)(x+2y)(x^2 + 4y^2).$
3. $(x^2 - 2)^2 - (3x - 2)^2 = [(x^2 - 2) - (3x - 2)][(x^2 - 2) + (3x - 2)] = [x^2 - 3x][x^2 + 3x - 4] = x(x-3)(x^2 + 4x - x - 4) = x(x-3)[x(x+4) - (x+4)] = x(x-3)(x+4)(x-1).$
4. $2a^3 - 18a^2 + 28a = 2a(a^2 - 9a + 14) = 2a(a^2 - 7a - 2a + 14) = 2a[a(a-7) - 2(a-7)] = 2a(a-7)(a-2).$
5. $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = x^4 - (25x^2 - 60x + 36) = (x^2)^2 - (5x - 6)^2 = [(x^2) - (5x - 6)][(x^2) + (5x - 6)] = (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x - 6) = (x^2 - 3x - 2x + 6)(x^2 + 6x - x - 6) = (x-3)(x-2)(x+6)(x-1).$
6. $3a^3 - a - 2 = 3a^3 - a - 3 + 1 = 3(a^3 - 1) - (a - 1) = 3(a-1)(a^2 + a + 1) - (a-1) = (a-1)(3a^2 + 3a + 2).$ (το $3a^2 + 3a + 2$ δεν παραγοντοποιείται άλλο γιατί είναι τριώνυμο με $\Delta = -15 < 0$)
7. $x^3 - 2x^2 + x - ax^2 + 2ax - a = x(x^2 - 2x + 1) - a(x^2 - 2x + 1) = (x^2 - 2x + 1)(x - a) = (x-1)^2(x-a).$
8. $3x^2 + 2xy - y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2 - 2y^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)(x-y) = (x+y) \cdot [(x+y) + 2(x-y)] = (x+y)(3x-y).$
9. $(x^2 - 4)^2 - 4(x+2)^2 = [(x-2)(x+2)]^2 - 4(x+2)^2 = (x-2)^2(x+2)^2 - 4(x+2)^2 = (x+2)^2[(x-2)^2 - 4] = (x+2)^2[(x-2)^2 - 4] = (x+2)^2[(x-2)-2][(x-2)+2] = (x+2)^2(x-4)x.$
10. $16x^4 + 7x^2 + 1 = (4x^2)^2 + 8x^2 + 1 - x^2 = (4x^2 + 1)^2 - x^2 = (4x^2 - x + 1)(4x^2 + x + 1)$

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και μια ακτίνα του OA . Η μεσοκάθετος της ακτίνας OA τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{BO\Gamma}$.

Λύση

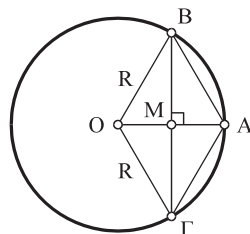
Φέρνουμε τις AB και $A\Gamma$. Επειδή τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, θα είναι:

$$BO = BA \text{ και } \Gamma O = \Gamma A$$

Άρα: $BA = BO = R = OA$ και $\Gamma A = \Gamma O = R = OA$

Τα τρίγωνα λοιπόν OAB και OAG είναι ισόπλευρα. Άρα:

$$\widehat{BO\Gamma} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$



1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος AD προς την υποτείνουσα $B\Gamma$, η διχοτόμος AE της γωνίας $\widehat{A}$ και η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$, που τέμνει την AD στο Z . Να αποδειχθεί ότι:
- α) $\Gamma Z \perp AE$, β) $EZ \parallel AB$.

Λύση

α) Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές της $\widehat{B}$. Έτσι έχουμε:

$$2\omega = 2\varphi \Leftrightarrow \omega = \varphi \quad (1)$$

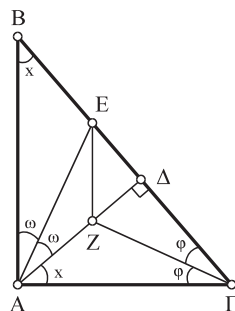
Όμοια είναι: $\widehat{B} = \widehat{A\Gamma} = x$

Από το τρίγωνο ADB παίρνουμε:

$$x + 2\omega = 90^\circ \Leftrightarrow x + \omega + \omega = 90^\circ \Leftrightarrow x + \omega + \varphi = 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{E\Gamma A} + \widehat{Z\Gamma A} = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma Z \perp AE$$

β) Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $A\Gamma E$ οι AD και ΓZ είναι οι ευθείες δύο υψών. Έτσι το Z είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε ισχύει $EZ \perp A\Gamma$. Επειδή ισχύει και $BA \perp A\Gamma$, θα είναι τελικά $EZ \parallel AB$.



2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AD . Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$ στο E . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$, να αποδειχθεί ότι:

α) το τρίγωνο MAE είναι ισοσκελές, β) $EM \parallel B\Gamma$.

Λύση

α) Επειδή $AD \perp B\Gamma$, οι γωνίες $\widehat{B\Delta A}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες, ως συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{B}$.

Άρα: $\widehat{E\Gamma A} + \widehat{E\Gamma A} = (\varphi + \omega) + \varphi = 2\varphi + \omega = \widehat{B\Delta A} + \widehat{A\Gamma} = 90^\circ$

Το τρίγωνο λοιπόν $A\Gamma E$ είναι ορθογώνιο στο E και επειδή η EM είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, θα είναι:

$$EM = \frac{A\Gamma}{2} = MA$$

Άρα το τρίγωνο ΜΑΕ είναι ισοσκελές.

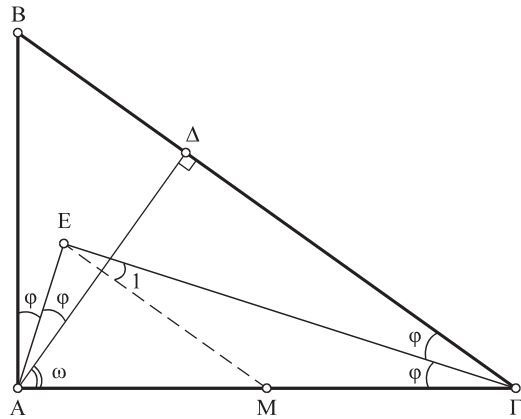
β) Αφού $EM = \frac{AG}{2} = MG$, το τρίγωνο

ΜΕΓ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$\hat{M}\hat{E}\hat{G} = \hat{M}\hat{G}\hat{E} = \hat{E}\hat{G}\hat{B} = \varphi$$

Από την ισότητα $\hat{M}\hat{E}\hat{G} = \hat{E}\hat{G}\hat{B}$ προκύπτει ότι $EM \parallel BG$.

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 45^\circ$ και $\hat{G} = 30^\circ$, φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = 30^\circ$.



Λύση

Φέρουμε $BN \perp AG$. Τότε: $BN = \frac{BG}{2} = BM$

και έτσι το τρίγωνο BMN είναι ισόπλευρο.

Επειδή $\hat{B} = 105^\circ$ και $\hat{N}\hat{B}\hat{M} = 60^\circ$, είναι:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{N} = 45^\circ = \hat{A}$$

Άρα $NA = NB = NM$.

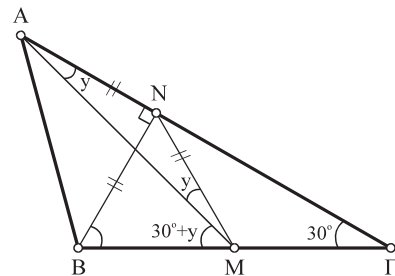
Το τρίγωνο λοιπόν ΝΑΜ είναι ισοσκελές και επειδή:

$$\hat{A}\hat{M}\hat{B} = \hat{M}\hat{A}\hat{G} + \hat{M}\hat{G}\hat{A} = 30^\circ + y$$

έχουμε:

$$\hat{N}\hat{M}\hat{B} = 60^\circ \Leftrightarrow y + (30^\circ + y) = 60^\circ \Leftrightarrow y = 15^\circ$$

Αφού $\hat{M}\hat{A}\hat{G} = y = 15^\circ$ και $\hat{A} = 45^\circ$, είναι $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = 30^\circ$.



3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΑΕ και τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι $\hat{E}\hat{A}\hat{D} = \hat{E}\hat{A}\hat{M}$.

Λύση

Όταν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα, τότε μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι:

$$\hat{G} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} \text{ και } \hat{B} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{G}$$

Είναι λοιπόν $\hat{G} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \varphi$, οπότε:

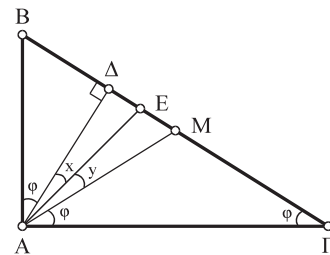
$$\bullet \quad x = \hat{E}\hat{A}\hat{B} - \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} - \varphi = 45^\circ - \varphi \quad (1)$$

$$\bullet \quad y = \hat{E}\hat{A}\hat{G} - \hat{M}\hat{A}\hat{G} = \frac{\hat{A}}{2} - \hat{M}\hat{A}\hat{G} = 45^\circ - \hat{M}\hat{A}\hat{G} \quad (2)$$

Όμως, στο ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος ΑΜ προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της. Επομένως $MA = MG$, οπότε $\hat{M}\hat{A}\hat{G} = \hat{G} = \varphi$.

Έτσι από τη σχέση (2) παίρνουμε ότι $y = 45^\circ - \varphi \quad (3)$.

Άρα οι σχέσεις (1) και (3) δίνουν $x = y$, δηλαδή $\hat{E}\hat{A}\hat{D} = \hat{E}\hat{A}\hat{M}$.



Άσκηση 1^η :

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, τα μήκη των πλευρών του οποίου είναι $\alpha = 4\sqrt{3}$, $\beta = 4\sqrt{2}$, $\gamma = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$

1.1. Να δείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$

1.2. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου

Λύση

1.1. Για το $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ έχουμε διαδοχικά πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το $\sqrt{3}+1$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{\cancel{2} \cdot (\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}} = \sqrt{3} + 1$$

1.2. Από τον νόμο των συνημιτόνων $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A$, λύνοντας ως προς $\sin A$ έχουμε

$$\text{διαδοχικά: } \sin A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})} \quad \text{ή}$$

$$\sin A = \frac{(4)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 - (4)^2 (\sqrt{3})^2}{8 \cdot \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2})} \quad \text{ή}$$

$$\sin A = \frac{16 \cdot 2 + 24 + 8 \cdot \sqrt{12} + 8 - 16 \cdot 3}{8 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{32 + 24 + 8 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} + 8 - 48}{16 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{16 + 16\sqrt{3}}{16 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)}$$

$$\sin A = \frac{\cancel{16} \cdot (1 + \sqrt{3})}{\cancel{16} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 60^\circ}$$

$$\sin B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})} \quad \text{ή}$$

$$\sin B = \frac{48 + 24 + 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} + 8 - 32}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{48 + 8\sqrt{12}}{16 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)} \quad \text{ή}$$

$$\sin B = \frac{48 + 8 \cdot 2\sqrt{3}}{16 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{\cancel{16} \cdot (3 + \sqrt{3})}{\cancel{16} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}$$

$$\sin B = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \cdot (\cancel{\sqrt{3}} + 1)}{\cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\cancel{\sqrt{3}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 45^\circ}$$

Επομένως αφού το άθροισμα των (μέτρων) των γωνιών κάθε τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με 180° , θα έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 45^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = 75^\circ}$

Σημείωση: Από εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

$$75^\circ, \text{ ως εξής } \sin \Gamma = \frac{a^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{(4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{48 + 32 - (24 + 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} + 8)}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{80 - 32 - 16 \cdot \sqrt{3}}{32 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{48 - 16 \cdot \sqrt{3}}{32 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{16(3 - \sqrt{3})}{32 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{16 \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{16 \cdot 2 \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Από την βασική τριγωνομετρική ταυτότητα έχουμε τώρα ότι $\eta\mu^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1$ έτσι

$$\eta\mu^2 75^\circ = 1 - \sin^2 75^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = 1 - \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4^2} \quad \text{ή}$$

$$\eta\mu^2 75^\circ = 1 - \frac{(\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{16} = 1 - \frac{8 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{16} = \frac{16 - (8 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2})}{16}$$

$$\eta\mu^2 75^\circ = \frac{16 - 8 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{16} = \frac{8 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{16} = \frac{6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + 2}{16}$$

$$\eta\mu^2 75^\circ = \frac{(\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{16} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{4^2}$$

$$\eta\mu^2 75^\circ = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\eta\mu^2 75^\circ} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2} \Rightarrow |\eta\mu 75^\circ| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{όμως } \eta\mu 75^\circ > 0 \Rightarrow \boxed{\eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\varepsilon\phi 75^\circ = \frac{\eta\mu 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{3} - 1)} = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)}$$

$$\varepsilon\phi 75^\circ = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Άσκηση 2^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, και τα μήκη των πλευρών του οποίου είναι

$$\alpha = 2, \beta = \sqrt{2}, \text{ και } \gamma = \sqrt{3} + 1$$

2.1. Να βρείτε το $\sin A$ και τη γωνία $\hat{A}$,

2.2. Να βρείτε το $\sin B$ και τη γωνία $\hat{B}$ και στη συνέχεια την γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.

2.3. Να βρείτε το $\sin 75^\circ$ και το $\sin 105^\circ$

Λύση

2.1. Από τον νόμο των συνημιτόνων $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$, λύνοντας ως προς $\cos A$ έχουμε

$$\text{διαδοχικά: } \cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} \quad \text{ή}$$

$$\cos A = \frac{2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 - 4}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} \quad \text{ή}$$

$$\cos A = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{(1+\sqrt{3})}}{\cancel{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 45^\circ}$$

Όμοια για την γωνία B

$$\cos B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{4 + \sqrt{3}^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 - 2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} \quad \text{ή}$$

$$\cos B = \frac{4 + 3 + 2 \cdot \sqrt{3} + 1 - 2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{6 + 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{\cancel{2} \cdot (3 + \sqrt{3})}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3} \cdot \cancel{(\sqrt{3}+1)}}{2 \cdot \cancel{(\sqrt{3}+1)}} \quad \text{ή}$$

$$\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 30^\circ}.$$

Επομένως αφού το άθροισμα των (μέτρων) των γωνιών κάθε τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με 180° ,

$$\text{θα έχουμε } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + 30^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 75^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = 105^\circ}$$

Σημείωση: Από εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

$$105^\circ, \text{ ως εξής } \cos \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{(2)^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{4 + 2 - [(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2]}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\cos 105^\circ = \frac{6 - [3 + 2 \cdot \sqrt{3} + 1]}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 - 4 - 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\cancel{2} \cdot (1 - \sqrt{3})}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\cos 105^\circ = \frac{(1 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

(Σχόλιο: Είναι προφανές ότι οι γωνίες $75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$, άρα θα έχουν αντίθετα συνημίτονα ,

έτσι είχαμε βρει στην προηγούμενη άσκηση ότι $\boxed{\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ και τώρα βρήκαμε

$$\boxed{\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}. \text{ Στη συνέχεια όπως και στην προηγούμενη από την βασική}$$

τριγωνομετρική ταυτότητα μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sin 105^\circ$

$$\sin^2 105^\circ + \cos^2 105^\circ = 1 \Leftrightarrow \boxed{\sin^2 105^\circ = 1 - \cos^2 105^\circ} \quad \text{ή}$$

Γνωρίζουμε από τη Θεωρία ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο

$$\text{έτσι } 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow \eta\mu 105^\circ = \eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{\eta\mu 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

και στη συνέχεια από την γνωστή σχέση

$$\begin{aligned} \epsilon\phi 105^\circ &= \frac{\eta\mu 105^\circ}{\sigma\upsilon\nu 105^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot (1 - \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)}{(1 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})} \\ \epsilon\phi 105^\circ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{-2} = -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 3^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο ισχύει ότι: $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ ενώ $\gamma = 2\sqrt{6}$. Αν επιπλέον

$$\text{δίνεται ότι: } \eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

3.1. Να βρείτε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.

3.2. Να βρείτε τις πλευρές α και β τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

3.3. Να βρείτε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

3.4. Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ του τριγώνου καθώς και τα μήκη των ΓΔ, ΒΔ

3.5. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

3.1. Αφού το άθροισμα των (μέτρων) των γωνιών κάθε τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με 180° , θα

$$\text{έχουμε } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 75^\circ + 45^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = 60^\circ}$$

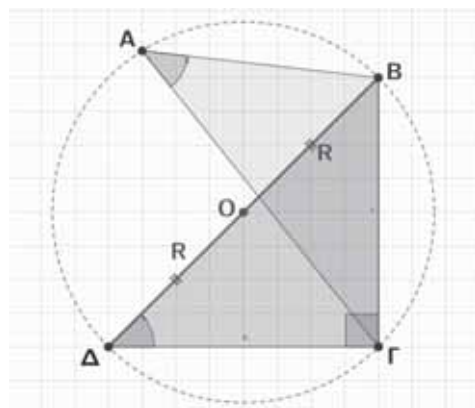
$$3.2. \text{ Από τον Νόμο των ημιτόνων έχουμε } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}. \text{ Έτσι } \frac{\alpha}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 60^\circ}$$

$$\text{Επομένως } \frac{\gamma}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \beta = 4 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\beta = 4}$$

$$\frac{\gamma}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\alpha}{\eta\mu 75^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \Rightarrow \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3})$$

$$\boxed{\alpha = 2 + 2\sqrt{3}}$$

3.3. Αν θεωρήσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (Ο, R) του τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ και φέρουμε την διάμετρο του, ΒΔ, τότε προφανώς η γωνίες $\hat{A} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} = \hat{\Delta} = \widehat{B\hat{\Delta}\Gamma}$ αφού είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (Ο, R) οι οποίες βαίνουν (αντιστοιχούν) στο ίδιο τόξο $\widehat{B\Gamma}$. Όμως το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο στο $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ αφού η γωνία $\hat{\Gamma} = \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο η οποία βαίνει στο ημικύκλιο ΒΑΔ, επομένως



$$\eta\mu A = \eta\mu \Delta = \frac{\text{απεναντι καθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{\alpha}{2R}$$

$$\text{επομένως } \boxed{\eta\mu A = \frac{\alpha}{2R}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R}$$

Επομένως ο νόμος των ημιτόνων (συμπληρώνεται) ως εξής

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R}, \quad \text{όπου } R \text{ του}$$

περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Έτσι

$$\frac{\alpha}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 60^\circ} = 2R \Rightarrow$$

$$\cancel{2}R = \frac{\cancel{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{2 \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{R = 2\sqrt{2}}$$

3.4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ

$\hat{\Delta} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και αναγκαστικά $\hat{A}_1 = 30^\circ$ επομένως

$$\eta\mu \Gamma = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 60^\circ = \frac{A\Delta}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A\Delta}{4} \Rightarrow$$

$$A\Delta = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A\Delta = 2\sqrt{3}}$$

$$\eta\mu A_1 = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \eta\mu 30^\circ = \frac{\Gamma\Delta}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{4} \Rightarrow \Gamma\Delta = 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\Gamma\Delta = 2}$$

Προφανώς το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα $A\Delta = B\Delta = 2\sqrt{3}$

$$3.5. E = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot (B\Gamma) \cdot (A\Delta) = \frac{1}{2} (2 + 2\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}, E = (1 + \sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 6 = 2(\sqrt{3} + 3) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 4^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, για τα μήκη των πλευρών του οποίου ισχύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω σχέσεις: $-\sqrt{2} \cdot \beta + 2\gamma = 2$, $\sqrt{6} \cdot \beta - 3(\sqrt{3} - 1) \cdot \gamma = 0$, και $\alpha + \beta = \sqrt{6} + 2$

όπου $\alpha = B\Gamma = (B\Gamma)$, $\beta = A\Gamma = (A\Gamma)$ και $\gamma = AB = (AB)$. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και

$$4.1. \text{Να δείξετε ότι } \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$4.2. \text{Να λύσετε το σύστημα: } \left. \begin{array}{l} -\sqrt{2} \cdot \beta + 2 \cdot \gamma = 2 \\ \sqrt{6} \cdot \beta - 3(\sqrt{3} - 1) \cdot \gamma = 0 \end{array} \right\} \text{ και να βρείτε τα μήκη των πλευρών}$$

β και γ του τριγώνου.

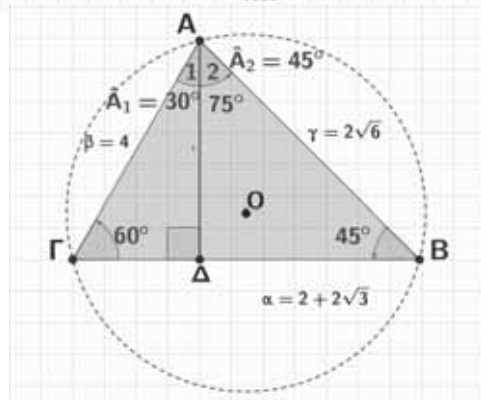
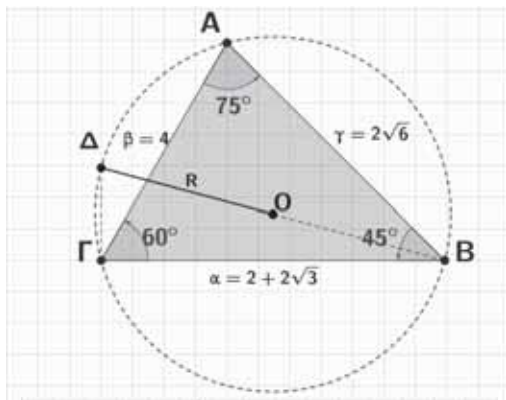
$$4.3. \text{Αν } \gamma = \sqrt{3} + 1 \text{ και } \beta = \sqrt{6} \text{ να δείξετε ότι } \alpha = 2$$

4.4. Στη συνέχεια να βρείτε το $\sin A$ και τη γωνία $\hat{A}$, το $\sin B$ και τη γωνία $\hat{B}$ και τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.

$$4.5. \text{Να βρείτε το } \sin 75^\circ \text{ και το } \sin 105^\circ$$

Λύση

$$4.1. \text{Έχει γίνει στο 1.1. } \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$$



4.2. Με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \cdot \beta + 2 \cdot \gamma &= 2 \end{aligned} \right\} \cdot \sqrt{3} \quad \left. \begin{aligned} \sqrt{6} \cdot \beta - 3(\sqrt{3}-1) \cdot \gamma &= 0 \\ \sqrt{6} \cdot \beta - 3(\sqrt{3}-1) \cdot \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot 1 \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ 0 \cdot \beta + 2\sqrt{3} \cdot \gamma - 3(\sqrt{3}-1) \cdot \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ 0 \cdot \beta + 2\sqrt{3} \cdot \gamma - 3(\sqrt{3}-1) \cdot \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ (2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3) \cdot \gamma &= 2\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ (3 - \sqrt{3}) \cdot \gamma &= 2\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2\sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ (\sqrt{3}^2 - \sqrt{3}) \cdot \gamma &= 2\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2\sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2\sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ (\sqrt{3}-1) \cdot \gamma &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2\sqrt{3} \cdot \gamma &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ \gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1) &= 2 \cdot \sqrt{3} \\ \gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -\sqrt{6} \cdot \beta + 6 + 2\sqrt{3} &= 2\sqrt{3} \\ \gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sqrt{6} \cdot \beta &= 6 \\ \gamma &= \sqrt{3}+1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{6} \\ \gamma &= \sqrt{3}+1 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

4.4. Έχουμε από υπόθεση ότι $\alpha + \beta = \sqrt{6} + 2$ και $\beta = \sqrt{6}$ άρα $\alpha = 2$

$\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{6}$ και $\gamma = \sqrt{3} + 1$

$$\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3}+1)}$$

$$\text{συν}A = \frac{2(3+\sqrt{3})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{συν}A = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}45^\circ \Rightarrow \boxed{A = 45^\circ}$$

Όμοια για την γωνία $\hat{B}$

$$\text{συν}B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{4 + 4 + 2\sqrt{3} + 1 - 6}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} \quad \text{ή}$$

$$\text{συν}B = \frac{4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 6}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2 \cdot (1 + \sqrt{3})}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \text{συν}B = \frac{1}{2} = \text{συν}60^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 60^\circ}.$$

Επομένως αφού το άθροισμα των (μέτρων) των γωνιών κάθε τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με 180° ,

θα έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = 75^\circ}$

4.5. Το $\text{συν}75^\circ$ και το $\text{συν}105^\circ$, έχουν βρεθεί στα προηγούμενα.



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

5 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Οι αριθμοί p, q είναι πρώτοι θετικοί ακέραιοι και ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος. Αν ο a διαιρεί το γινόμενο pq και ισχύει ότι $a > p$ και $a > q$, να αποδείξετε ότι: $a = pq$.
(β) Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (p, q) πρώτων θετικών ακέραιων p, q για τα οποία ο αριθμός $p^2 + 3pq + q^2$ ισούται με τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

(α) Επειδή οι αριθμοί p, q είναι πρώτοι θετικοί ακέραιοι, οι θετικοί διαιρέτες του γινομένου pq ανήκουν στο σύνολο $\{1, p, q, pq\}$. Επειδή ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος διαιρέτης του pq και $a > p > 1$, $a > q$, έπεται ότι $a = pq$.

(β) Έστω ότι $p^2 + 3pq + q^2 = n^2$, για κάποιο θετικό ακέραιο n . Τότε έχουμε

$$p^2 + 3pq + q^2 = n^2 \Leftrightarrow pq = n^2 - (p + q)^2 \Leftrightarrow pq = (n - p - q)(n + p + q).$$

Επειδή p, q πρώτοι και $n + p + q > p$, $n + p + q > q$, λόγω του (α) έπεται ότι:

$$n + p + q = pq \text{ και } n - p - q = 1,$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$pq - 1 = 2p + 2q \Leftrightarrow (p - 2)(q - 2) = 5 \Leftrightarrow$$

$$p - 2 = 1, q - 2 = 5 \text{ ή } p - 2 = 5, q - 2 = 1 \Leftrightarrow (p, q) = (3, 7) \text{ ή } (p, q) = (7, 3).$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $\Delta A = \Delta\Gamma = B\Gamma$. Οι ευθείες $B\Gamma$ και ΔA τέμνονται στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι: $\Delta\Gamma + \Delta E = 2 \cdot \Gamma E$.

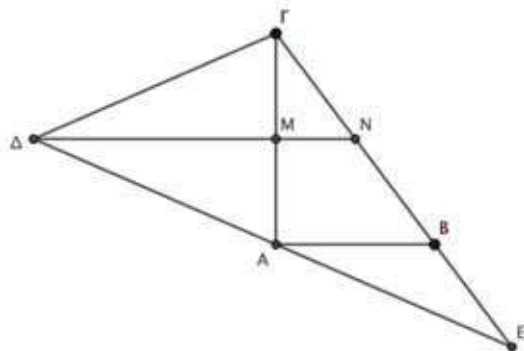
Λύση (1ος τρόπος) Έστω ότι η ευθεία η οποία διέρχεται από το Δ και είναι παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο M και την $B\Gamma$ στο N . Τότε το ΔM είναι το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση $A\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $\Delta A\Gamma$, οπότε είναι και διάμεσος. Έτσι, η ευθεία MN διέρχεται από το μέσο M της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην πλευρά AB . Άρα θα διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Δηλαδή, το N είναι το μέσο της $B\Gamma$, και άρα $\Delta A = B\Gamma = 2 \cdot NB$.

Από το θεώρημα Θαλή στο τρίγωνο ΔNE για τις παράλληλες ευθείες $DN \parallel AB$ παίρνουμε

$$\frac{AE}{BE} = \frac{\Delta A}{NB} = \frac{2 \cdot NB}{NB} = 2.$$

Είναι

$$\Delta\Gamma + \Delta E = \Delta\Gamma + (\Delta A + AE) = 2 \cdot B\Gamma + AE,$$



και

$$2 \cdot \Gamma\text{E} = 2 \cdot (\text{B}\Gamma + \text{B}\text{E}) = 2 \cdot \text{B}\Gamma + 2 \cdot \text{B}\text{E}.$$

Άρα $\Delta\Gamma + \Delta\text{E} = 2 \cdot \Gamma\text{E}$, αν, και μόνο αν, $\text{A}\text{E} = 2\text{B}\text{E}$, το οποίο αποδείξαμε παραπάνω.

(2^{ος} τρόπος)

Έστω $\omega = \widehat{\text{B}\hat{\text{A}}\text{E}}$ και $\varphi = \widehat{\text{A}\hat{\text{B}}\Gamma}$.

Τότε $\widehat{\Delta\Gamma\text{A}} = \widehat{\Delta\hat{\text{A}}\Gamma} = 90^\circ - \omega$ και $\widehat{\Delta} = 2\omega$. Από τον Νόμο

των ημιτόνων στο τρίγωνο $\text{A}\Delta\Gamma$ έχουμε

$$\frac{\eta\mu 2\omega}{\text{A}\Gamma} = \frac{\eta\mu(90^\circ - \omega)}{\text{A}\Delta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\text{A}\Delta},$$

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $\text{A}\text{B}\Gamma$ παίρνουμε

$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{A}\Gamma}{\text{B}\Gamma} = \frac{\text{A}\Gamma}{\text{A}\Delta} = \frac{\eta\mu 2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = 2\eta\mu\omega.$$

Από τον Νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ABE παίρνουμε

$$\frac{\eta\mu\omega}{\text{B}\text{E}} = \frac{\eta\mu(180^\circ - \varphi)}{\text{A}\text{E}} = \frac{\eta\mu\varphi}{\text{A}\text{E}},$$

οπότε

$$\frac{\text{A}\text{E}}{\text{B}\text{E}} = \frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega} = \frac{2\eta\mu\omega}{\eta\mu\omega} = 2.$$

Είναι

$$\Delta\Gamma + \Delta\text{E} = \Delta\Gamma + (\Delta\text{A} + \text{A}\text{E}) = 2 \cdot \text{B}\Gamma + \text{A}\text{E},$$

και

$$2 \cdot \Gamma\text{E} = 2 \cdot (\text{B}\Gamma + \text{B}\text{E}) = 2 \cdot \text{B}\Gamma + 2 \cdot \text{B}\text{E}.$$

Άρα $\Delta\Gamma + \Delta\text{E} = 2 \cdot \Gamma\text{E}$, αν και μόνο αν $\text{A}\text{E} = 2 \cdot \text{B}\text{E}$, το οποίο αποδείξαμε παραπάνω.

(3^{ος} τρόπος) (α) Θεωρούμε το μέσο Z της υποτείνουσας

$\text{B}\Gamma$. Τότε η AZ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα και

ισχύει ότι:

$$\text{A}\text{Z} = \text{Z}\Gamma = \frac{\text{B}\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}. \quad (1)$$

Επειδή επιπλέον $\Delta\text{A} = \Delta\Gamma$, έπεται ότι η ευθεία ΔZ είναι η

μεσοκάθετη της πλευράς $\text{A}\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου

$\text{A}\Gamma\Delta$. Επομένως είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta\hat{\text{A}}\Gamma}$,

όπως και της γωνίας $\widehat{\text{E}\hat{\Delta}\Gamma}$. Από το θεώρημα της διχοτόμου στο τρίγωνο $\text{E}\Delta\Gamma$ λαμβάνουμε

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\text{Z}} = \frac{\Delta\text{E}}{\text{Z}\text{E}} \Rightarrow \frac{2 \cdot \Gamma\text{Z}}{\Gamma\text{Z}} = \frac{\Delta\text{E}}{\text{Z}\text{E}} \Rightarrow 2 = \frac{\Delta\text{E}}{\text{Z}\text{E}} \Rightarrow \Delta\text{E} = 2 \cdot \text{Z}\text{E} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\Delta\Gamma + \Delta\text{E} = 2 \cdot \Gamma\text{Z} + 2 \cdot \text{Z}\text{E} = 2 \cdot (\Gamma\text{Z} + \text{Z}\text{E}) = 2 \cdot \Gamma\text{E}.$$

Πρόβλημα 3. Αν α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 + \alpha^2\beta} + \frac{\beta^3 + \gamma^3}{\beta^3 + \beta^2\gamma} + \frac{\gamma^3 + \alpha^3}{\gamma^3 + \gamma^2\alpha} \geq 3.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Με απλοποίηση ο πρώτος όρος του πρώτου μέλους γράφεται:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 + \alpha^2\beta} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^2(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2.$$

Ομοίως προκύπτουν και οι ισότητες

$$\frac{\beta^3 + \gamma^3}{\beta^3 + \beta^2\gamma} = 1 - \frac{\gamma}{\beta} + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2, \quad \frac{\gamma^3 + \alpha^3}{\gamma^3 + \gamma^2\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{\gamma} + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2.$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$1 - \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 1 - \frac{\gamma}{\beta} + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 + 1 - \frac{\alpha}{\gamma} + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 \geq 3 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\gamma} \geq 0.$$

Αν θέσουμε $x = \frac{\beta}{\alpha}$, $y = \frac{\gamma}{\beta}$, $z = \frac{\alpha}{\gamma}$, τότε $x, y, z > 0$ με $xyz = 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(x^2 + 1) + (y^2 + 1) + (z^2 + 1) \geq x + y + z + 3,$$

η οποία έπεται από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου – Γεωμετρικού Μέσου:

$$(x^2 + 1) + (y^2 + 1) + (z^2 + 1) \geq 2(x + y + z) \geq (x + y + z) + 3\sqrt{xyz} = x + y + z + 3.$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $x = y = z$, δηλαδή, αν, και μόνο αν, $\alpha = \beta = \gamma$.

(2ος τρόπος). Αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$, αφού
 $x^3 + y^3 - xy(x + y) = x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)^2(x + y) \geq 0$,

οπότε
$$\frac{x^3 + y^3}{x^3 + x^2y} \geq \frac{xy(x + y)}{x^2(x + y)} = \frac{y}{x},$$

με την ισότητα να ισχύει, αν και μόνο αν, $x = y$. Έτσι έχουμε

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 + \alpha^2\beta} + \frac{\beta^3 + \gamma^3}{\beta^3 + \beta^2\gamma} + \frac{\gamma^3 + \alpha^3}{\gamma^3 + \gamma^2\alpha} \geq \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} \geq 3\sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma}} = 3,$$

Από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου-Γεωμετρικού Μέσου. Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $\alpha = \beta = \gamma$.

Πρόβλημα 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο κ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για οποιοδήποτε υποσύνολο Σ του $\{1, 2, \dots, 2024\}$ με κ το πλήθος στοιχεία, υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία α, β του Σ τέτοια, ώστε ο αριθμός $\alpha\beta + 1$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση. Αρχικά παρατηρούμε ότι ισχύει $\alpha\beta + 1 = v^2$, αν, και μόνο αν,

$$\alpha\beta = v^2 - 1 = (v - 1)(v + 1).$$

Αρκεί, λοιπόν, να έχουμε $\{\alpha, \beta\} = \{v - 1, v + 1\}$, δηλ. αρκεί οι α, β να διαφέρουν κατά δύο. Θα δείξουμε, λοιπόν, ότι $\kappa = 1013$. Πράγματι, θεωρούμε τα 1012 ζευγάρια

$$(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 8), (9, 11), (10, 12) \dots, (2021, 2023), (2022, 2024),$$

που αποτελούνται είτε από δύο διαδοχικούς περιττούς αριθμούς είτε από δύο διαδοχικούς άρτιους ακέραιους που ανήκουν στο $\{1, 2, \dots, 2024\}$. Αν ένα υποσύνολο Σ του $\{1, 2, \dots, 2024\}$ έχει 1013 στοιχεία, τότε από την αρχή της περιστροφωλίας, το Σ θα περιέχει κάποιο ζεύγος α, β τέτοια ώστε $\{\alpha, \beta\} = \{v - 1, v + 1\}$ για κάποιο θετικό ακέραιο v και το συμπέρασμα έπεται από την αρχική μας παρατήρηση:

$$\alpha\beta + 1 = (v - 1)(v + 1) + 1 = v^2.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να βρούμε ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, 2024\}$ με 1012 το πλήθος στοιχεία για το οποίο να μην ισχύει το συμπέρασμα. Πράγματι, ένα τέτοιο σύνολο είναι το $\Sigma = \{1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots, 2021, 2022\}$, το οποίο αποτελείται από όλους τους ακέραιους αριθμούς που ανήκουν στο $\{1, 2, \dots, 2024\}$ και αφήνουν υπόλοιπο 1 ή 2 κατά τη διαίρεση τους με το 4. Αν α, β είναι δύο στοιχεία του Σ , τότε ο αριθμός $\alpha\beta + 1$ αφήνει υπόλοιπο $2(mod 4)$ ή $3(mod 4)$ ή $5(mod 8)$, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.



29^η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ

(Στρούγκα, Βόρεια Μακεδονία)

Η 29^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (για μαθητές έως και 15,5 ετών) πραγματοποιήθηκε στο διάστημα 24–29 Ιουνίου στην πόλη Στρούγκα της Βόρειας Μακεδονίας. Συνολικά συμμετείχαν 135 μαθητές από τις 11 Βαλκανικές χώρες-μέλη της διοργάνωσης, από 12 φιλοξενούμενες χώρες της Ασίας και της υπόλοιπης Ευρώπης και από μία δεύτερη ομάδα της διοργανώτριας χώρας.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία με επιλογή κατόπιν διαγωνισμών, απέστειλε Ελληνική ομάδα 6 μαθητών που κατέκτησε ένα αργυρό και τρία χάλκινα μετάλλια, κατατασσόμενη στην 6^η θέση μεταξύ των βαλκανικών χωρών και στη 13^η θέση στο σύνολο των αποστολών.

Οι μαθητές της ομάδας μας, όλοι μαθητές της Γ' Γυμνασίου, ήταν οι:

Κανελλόπουλος Πέτρος	Γυμνάσιο Κάτω Αχαΐας	αργυρό μετάλλιο
Καβουσιανός Ιωάννης	Πρότυπο Γυμνάσιο Ζωσιμαίας Σχολής Ιωαννίνων	χάλκινο μετάλλιο
Καψωμενάκης Νικόλαος	Πρότυπο Γυμνάσιο Αναβρύτων	χάλκινο μετάλλιο
Μακρή Στεφανία-Δήμητρα	Γυμνάσιο Ιτέας Καρδίτσας	χάλκινο μετάλλιο
Κατσουλάκης Ιωάννης	Εκπαιδευτήρια «Ο Πλάτων»	συμμετοχή
Κρητικός Σπυρίδων	Μουσικό Σχολείο Λευκάδας	συμμετοχή

Την ομάδα συνόδεψε ως αρχηγός ο Δημήτριος Κοντοκώστας, Αναπληρωτής Καθηγητής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, ο οποίος επιμελήθηκε και τις λύσεις που ακολουθούν, και ως υπαρχηγός ο μαθηματικός Ελευθέριος Μάστορης. Στην προετοιμασία της ομάδας μας με μαθήματα εξ αποστάσεως συμμετείχαν οι Δημήτριος Κοντοκώστας, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, Δημήτριος Διαμαντίδης, Ελευθέριος Μάστορης και η αείμνηστη Αγγελική Βλάχου.



Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Τουρκία). Για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c να αποδείξετε ότι

$$\frac{(a^2 + bc)^2}{b + c} + \frac{(b^2 + ca)^2}{c + a} + \frac{(c^2 + ab)^2}{a + b} \geq \frac{2abc(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}.$$

Απόδειξη. Από ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + bc)^2}{b + c} + \frac{(b^2 + ca)^2}{c + a} + \frac{(c^2 + ab)^2}{a + b} &\geq \frac{4a^2bc}{b + c} + \frac{4b^2ca}{c + a} + \frac{4c^2ac}{a + b} \\ &= 4abc \left[\frac{a^2}{a(b + c)} + \frac{b^2}{b(c + a)} + \frac{c^2}{c(a + b)} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

και από ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\left[\frac{a^2}{a(b + c)} + \frac{b^2}{b(c + a)} + \frac{c^2}{c(a + b)} \right] [a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)] \geq (a + b + c)^2$$

οπότε :

$$\frac{a^2}{a(b + c)} + \frac{b^2}{b(c + a)} + \frac{c^2}{c(a + b)} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2(ab + bc + ca)} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει αμέσως το ζητούμενο. □

Πρόβλημα 2. (Σερβία) Βρείτε όλους τους αριθμούς της μορφής
20252025...2025

(όπου το 2025 εμφανίζεται μία ή περισσότερες φορές) οι οποίοι είναι τέλεια τετράγωνα θετικών ακεραίων.

Απόδειξη. Ο αριθμός $2025 = 45^2$ είναι μία λύση και μάλιστα θα αποδείξουμε ότι αποτελεί τη μοναδική.

Πράγματι, για τον $a = 20252025 \dots 2025$, όπου το 2025 εμφανίζεται $n \geq 1$ φορές είναι:

$$a = 2025(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4(n-1)}) = 45^2(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4(n-1)}).$$

Έτσι ο a είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου ακριβώς όταν :

$$1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4(n-1)} = x^2$$

για κάποιον φυσικό αριθμό $x \geq 1$. Ισοδυνάμως, όταν :

$$(10^4 - 1)(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4(n-1)}) = (10^4 - 1)x^2$$

δηλαδή όταν :

$$\begin{aligned} 10^{4n} - 1 &= 9999x^2 \Leftrightarrow (10^{2n} - 1)(10^{2n} + 1) = 11 \cdot 101 \cdot (3x)^2 \\ &\Leftrightarrow (10^n - 1)(10^n + 1)(10^{2n} + 1) = 11 \cdot 101 \cdot (3x)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Η σχέση (1) συνεπάγεται ότι οι πρώτοι 11, 101 είναι διαιρέτες κάποιων από τους αριθμούς $10^n - 1$, $10^n + 1$, $10^{2n} + 1$.

Όμως τετριμμένα προκύπτει ότι

$$\text{ΜΚΔ}(10^n - 1, 10^n + 1) = 1, \text{ΜΚΔ}(10^n - 1, 10^{2n} + 1) = 1 \text{ και } \text{ΜΚΔ}(10^n + 1, 10^{2n} + 1) = 1.$$

Για παράδειγμα, έχουμε

$$\text{ΜΚΔ}(10^n - 1, 10^n + 1) = \text{ΜΚΔ}(10^n - 1, (10^n + 1) - (10^n - 1)) = \text{ΜΚΔ}(10^n - 1, 2) = 1.$$

Επομένως, η σχέση (1) δίνει ότι οι 11, 101 είναι διαιρέτες συνολικά το πολύ δύο από τους αριθμούς $10^n - 1$, $10^n + 1$, $10^{2n} + 1$, οπότε ένας τουλάχιστον από τους τρεις αυτούς φυσικούς αριθμούς δεν διαιρείται από τους 11, 101 και καθώς είναι πρώτος προς τους άλλους δύο, προκύπτει και πάλι από την (1) ότι αυτός οφείλει να είναι τέλειο τετράγωνο.

Όμως η εξίσωση $10^m + 1 = y^2$ δεν έχει λύσεις στους ακραίους, αφού π.χ. μόντουλο 3 δίνει $2 \equiv y^2 \pmod{3}$, που είναι αδύνατη καθώς το 2 δεν αποτελεί τετραγωνικό κατάλοιπο. Συνεπώς οι $10^n + 1$, $10^{2n} + 1$ δεν αποτελούν τέλεια τετράγωνα, και απομένει να λύσουμε την εξίσωση $10^n - 1 = y^2$:

Δουλεύοντας μόντουλο 4 η εξίσωση $10^n - 1 = y^2$ για $n > 1$ δίνει $0 - 1 \equiv y^2 \pmod{4}$ δηλαδή $3 \equiv y^2 \pmod{4}$, που είναι αδύνατο τόσο για περιττούς $y = 2k + 1$, όσο και άρτιους $y = 2k$. Για $n = 1$, η εξίσωση δίνει $y = 3$ και τότε η (1) έχει μοναδική λύση την $(n, x) = (1, 1)$ που σημαίνει πως ο μόνος φυσικός της απαιτούμενης μορφής είναι ο $2025 = 45^2$, όπως ισχυριστήκαμε. $\square$

Πρόβλημα 3. (Αλβανία) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $\angle A = 90^\circ$. Έστω D το ίχνος του ύψους από το A στη BC και E το μέσο του DC . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABD τέμνει την AE ξανά στο F . Έστω X το σημείο τομής των ευθειών AB και DF . Να αποδείξετε ότι: $XD = XC$.

Απόδειξη. (1ος τρόπος) Ας ονομάσουμε Y το σημείο τομής της DF με τη μεσοκάθετο του τμήματος DC . Φυσικά είναι $YD = YC$ και θα έχουμε αποδείξει το ζητούμενο, αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι το Y είναι το σημείο X .

Καθώς το Y ανήκει ήδη στην DF , απομένει να αποδείξουμε ότι ανήκει και στην AB , ισοδυνάμως ότι $\angle YAC = 90^\circ$. Πράγματι:

Το κέντρο του κύκλου (A, B, F) ανήκει στο AB (καθώς $\angle BDA = 90^\circ$), οπότε καθώς η ακτίνα του ως το A είναι κάθετη στην AC , ο κύκλος θα εφάπτεται στην AC , άρα $\angle CAF = \angle ADF$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης) $= \angle DYE$ (αφού $AD \parallel YE$ ως αμφοτέρως κάθετες στην BC). Οπότε, αν ονομάσουμε M το κοινό σημείο των AC , EY , το τετράπλευρο $AFMY$ είναι εγγράψιμο, από όπου $\angle YFM = \angle YAM = \angle YAC$.

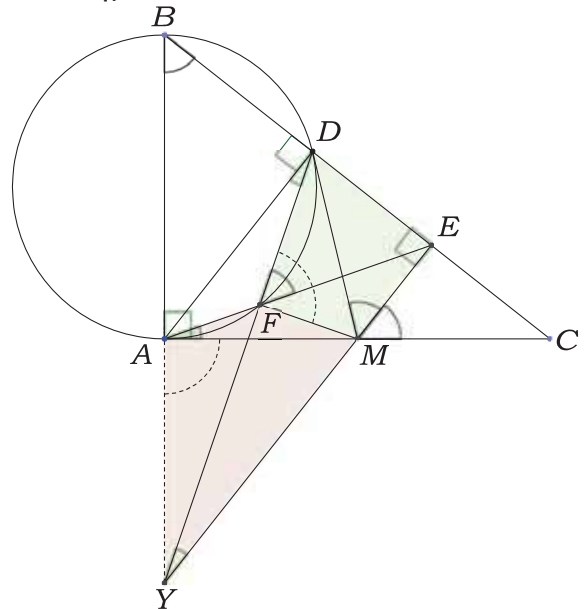
Θα έχουμε τελειώσει λοιπόν, αν αποδείξουμε πως $\angle YFM = 90^\circ$, δηλαδή

ισοδυνάμως ότι $\angle DFM = 90^\circ$, ή ισοδυνάμως ότι το τετράπλευρο $DFME$ είναι εγγράψιμο (αφού έχει την απέναντι γωνία MED ίση με 90°). Ισοδυνάμως ότι $\angle DFE = \angle DME$. Αυτό όντως ισχύει:

Από το εγγεγραμμένο $ABDF$ έχουμε $\angle DFE = \angle B$, ενώ από το ισοσκελές DMC (το M βρίσκεται στη μεσοκάθετο του DC) έχουμε $\angle DME = \angle EMC$ και από το ορθογώνιο MEC έχουμε $\angle EMC = 90^\circ - \angle C = \angle B$, άρα $\angle DFE = \angle DME$ όπως ζητείται.

(2ος τρόπος) Ας είναι M το κοινό σημείο της AC με τη μεσοκάθετο του DC .

Όπως και στον 1ο τρόπο, το τετράπλευρο $DFME$ είναι εγγράψιμο. Επίσης το $BAME$ είναι εγγράψιμο, αφού $\angle BAM = \angle BEM = 90^\circ$. Ανά δύο οι τρεις κύκλοι των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων $DFME$, $BAME$, $BAFD$ έχουν ριζικούς άξονες τις ευθείες AB , DF , EM των κοινών χορδών τους, οπότε οι ευθείες αυτές συντρέχουν στο ριζικό κέντρο των κύκλων. Αυτό είναι το X ως τομή των AB , DF , άρα το X ανήκει και στη μεσοκάθετο EM του τμήματος DC από όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. $\square$



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4. (Βουλγαρία) Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Τοποθετούμε τους ακέραιους από το 1 έως το n στα κελιά ενός $n \times n$ πίνακα (έναν ακέραιο σε κάθε κελί) ώστε καθένας τους να εμφανίζεται ακριβώς μία φορά σε κάθε γραμμή και ακριβώς μία φορά σε κάθε στήλη. Έστω r_i το πλήθος των ζευγαριών (a, b) των αριθμών στην i γραμμή ($1 \leq i \leq n$) για τα οποία $a > b$, όπου το a βρίσκεται αριστερά του b (όχι αναγκαστικά ακριβώς δίπλα του). Κι έστω c_j το πλήθος των ζευγαριών (a, b) των αριθμών στην j στήλη ($1 \leq j \leq n$) για τα οποία $a > b$, όπου το a βρίσκεται πάνω από το b (όχι αναγκαστικά ακριβώς από πάνω του). Βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $r_1 + r_2 + \dots + r_n + c_1 + c_2 + \dots + c_n$.

Σημείωση: Στον $n \times n$ πίνακα αριθμούμε τις γραμμές από το 1 ως το n από πάνω προς τα κάτω και τις στήλες από το 1 ως το n από αριστερά προς τα δεξιά.

Απόδειξη. Για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό m μεταξύ των $1, 2, \dots, n$, υπάρχουν ακριβώς $m - 1$ μικρότεροι από αυτόν στο ίδιο σύνολο $1, 2, \dots, n$. Επίσης, αν σε κάποια γραμμή ο m βρίσκεται στη θέση i , τότε υπάρχουν μετά από αυτόν ακριβώς $n - i$ κελιά. Συνεπώς στη γραμμή αυτή το πλήθος των ζευγαριών m, m' με $m > m'$ και το m αριστερά από τον m' είναι το πολύ $m - 1$ και επίσης το πολύ $n - i$. Συνεπώς στο άθροισμα $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ η συνεισφορά του m για τη γραμμή αυτή είναι μικρότερη ή ίση του $\min\{m - 1, n - i\}$.

Όμως από εκφώνηση ο m εμφανίζεται σε όλες τις θέσεις $i = 1, 2, \dots, n$ στις n σε πλήθος γραμμές του πίνακα, οπότε στο άθροισμα $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ η συνεισφορά του m για όλες τις γραμμές είναι μικρότερη ή ίση του

$$\sum_{i=1}^n \min\{m - 1, n - i\}.$$

Το ίδιο ακριβώς σκεπτικό εφαρμόζεται και για τις στήλες με αποτέλεσμα στο άθροισμα $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ η συνεισφορά του m για όλες τις στήλες να είναι και πάλι μικρότερη ή ίση του

$$\sum_{i=1}^n \min\{m - 1, n - i\}.$$

Άρα η συνολική συνεισφορά του m στο άθροισμα $r_1 + r_2 + \dots + r_n + c_1 + c_2 + \dots + c_n$ είναι μικρότερη ή ίση του

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \min\{m - 1, n - i\} &= 2 \sum_{i=n-m+1}^n (n - i) + 2 \sum_{i=0}^{n-m} (m - 1) \\ &= 2 \sum_{i=0}^{m-1} i + 2(n - m)(m - 1) = m(m - 1) + 2(n - m)(m - 1) \\ &= (2n - m)(m - 1). \end{aligned}$$

Επομένως η συνεισφορά όλων των $m = 1, 2, \dots, n$ είναι μικρότερη ή ίση του

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n (2n - m)(m - 1) &= (2n - 1) \sum_{m=1}^n m \sum_{m=1}^n m^2 - \sum_{m=1}^n 2n \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2} - 2n^2 = \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{3}. \end{aligned}$$

Για την τιμή $\frac{n(n - 1)(2n - 1)}{3}$, βλέπουμε για παράδειγμα τον πίνακα:

n	$n-1$	$n-2$	$\dots$	2	1
$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\dots$	1	n
$n-2$	$n-3$	$n-4$	$\dots$	n	$n-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	1	n	$\dots$	4	3
1	n	$n-1$	$\dots$	3	2

με στοιχεία της $n - i + 1$ γραμμής τα $i, i - 1, \dots, n, n - 1, \dots, i + 1$. Περιέχει καθέναν από τους φυσικούς $1, 2, \dots, n$ ακριβώς μια φορά σε κάθε γραμμή και ακριβώς μια φορά σε κάθε στήλη και επιπλέον για το οποιοδήποτε στοιχείο m του πίνακα που εμφανίζεται σε κάποια θέση i μιας γραμμής ή μιας στήλης, υπάρχουν ακριβώς $\min\{m - 1, n - i\}$ μικρότεροι του φυσικοί αριθμοί στην ίδια γραμμή δεξιά του ή στην ίδια στήλη από κάτω του, αντιστοίχως, όπως απαιτείται.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 136Α

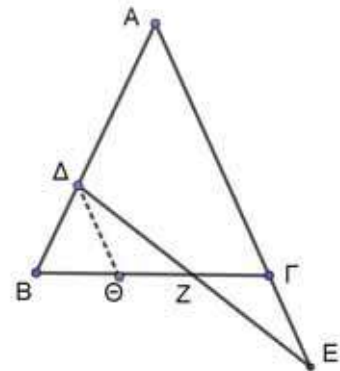
Γ68. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ πάνω στην πλευρά AB και σημείο E στην προέκταση της πλευράς $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ έτσι, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Το ευθύγραμμο τμήμα DE τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι $DZ = ZE$.

Λύση

Φέρουμε από το σημείο Δ παράλληλη προς την ευθεία $A\Gamma$ η οποία τέμνει τη βάση $B\Gamma$ στο σημείο Θ . Από την παραλληλία $\Delta\Theta \parallel A\Gamma$ προκύπτει η ισότητα γωνιών: $\Delta\hat{\Theta}B = A\hat{\Gamma}B$ και αφού $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$, έπεται ότι $\Delta\hat{\Theta}B = A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}\Theta$.

Επομένως το τρίγωνο $B\Delta\Theta$ είναι ισοσκελές με $\Delta\Theta = B\Delta$ και αφού από την υπόθεση είναι $B\Delta = \Gamma E$, έπεται ότι: $\Delta\Theta = \Gamma E$.

Επειδή έχουμε $\Delta\Theta = \Gamma E$ και $\Delta\Theta \parallel \Gamma E$, έπεται ότι το τετράπλευρο $\Delta\Theta E\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλαδή $DZ = ZE$.



Σχήμα 1

Γ69. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Θεωρούμε σημείο Z πάνω στο ύψος $B\Delta$ και σημείο Θ στην προέκταση του ΓE προς το μέρος του E έτσι ώστε $BZ = A\Gamma$ και $\Gamma\Theta = AB$. Να αποδείξετε ότι: $AZ \perp A\Theta$.

Λύση

Από την υπόθεση τα τρίγωνα ABZ και $A\Gamma\Theta$ έχουν δύο πλευρές τους ίσες, δηλαδή $BZ = A\Gamma$ και $\Gamma\Theta = AB$.

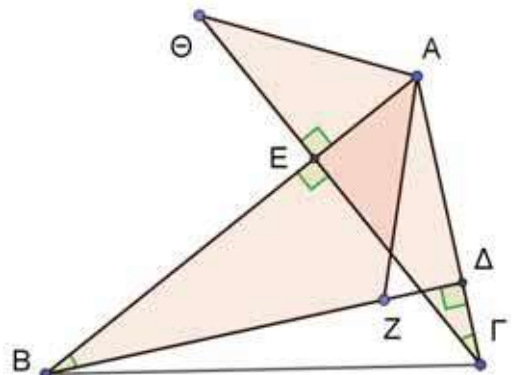
Επιπλέον έχουν και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, αφού

$$A\hat{B}Z = 90^\circ - B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Theta.$$

Επομένως από το κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π - Γ - Π) έπεται ότι τα τρίγωνα ABZ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα, οπότε $B\hat{A}Z = \Gamma\hat{\Theta}A$. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \Theta\hat{A}Z &= \Theta\hat{A}E + B\hat{A}Z = \Theta\hat{A}E + \Gamma\hat{\Theta}A \\ &= 180^\circ - A\hat{E}\Theta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Επομένως, $AZ \perp A\Theta$.



Σχήμα 2

Γ70. Στο ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία Δ και E βρίσκονται πάνω στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα, έτσι ώστε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE να τέμνονται στο σημείο P και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta P E$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma P$. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{P}E$.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε την ισότητα των εμβαδών

$$(A\Delta P E) = (B\Gamma P),$$

από την οποία με πρόσθεση και στα δύο μέλη της του $(P\Delta\Gamma)$ προκύπτει η ισότητα:

$$(A\hat{E}\Gamma) = (B\Delta\Gamma).$$

Επειδή τα τρίγωνα $A\hat{E}\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ έχουν ίσες τις πλευρές $A\Gamma = B\Gamma$, έπεται ότι θα έχουν ίσα και τα ύψη τους, έστω EZ και $\Delta\Theta$, που αντιστοιχούν στις πλευρές αυτές, δηλαδή $EZ = \Delta\Theta$.

Τότε, τα ορθογώνια τρίγωνα $A\hat{E}Z$ και $\Delta\hat{\Gamma}\Theta$ ($\hat{Z} = \hat{\Theta} = 90^\circ$), έχουν τις κάθετες πλευρές EZ και $\Delta\Theta$ ίσες και επιπλέον

$$E\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}\Theta = 60^\circ.$$

Άρα είναι ίσα, οπότε θα είναι και $AE = \Delta\Gamma$.

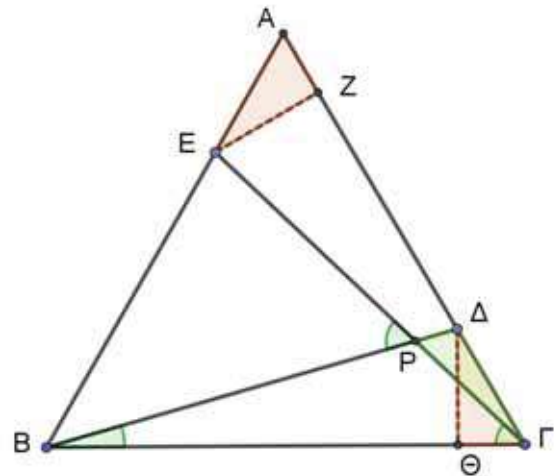
Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $A\hat{E}\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ έχουν:

$$A\Gamma = B\Gamma, AE = \Delta\Gamma \text{ και } E\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B = 60^\circ,$$

οπότε είναι ίσα.

Άρα θα έχουν και $A\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{B}\Gamma$, οπότε έχουμε:

$$B\hat{P}E = P\hat{B}\Gamma + P\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}B = 60^\circ.$$



Σχήμα 3

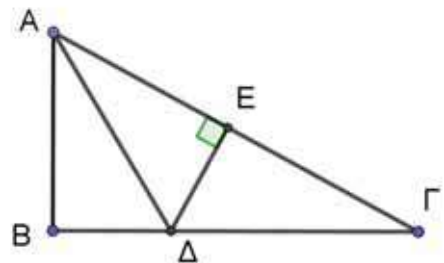
Γ71. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma = 2 \cdot AB$ και $\hat{A} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι: $AB \perp B\Gamma$.

Λύση

Για να δημιουργήσουμε γωνία ίση με τη γωνία $\hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$. Τότε έχουμε $\Delta\hat{A}E = \frac{1}{2} \cdot \hat{A} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = \Delta\Gamma$. Επομένως το ύψος του ΔE προς την πλευρά $A\Gamma$ είναι και διάμεσος, δηλαδή έχουμε:

$$AE = E\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = AB.$$

Τότε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ έχουν την $A\Delta$ κοινή πλευρά, $AB = AE$ και $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος. Άρα είναι ίσα, οπότε $A\hat{B}\Delta = A\hat{E}\Delta = 90^\circ$, δηλαδή $AB \perp B\Gamma$.



Σχήμα 4

Γ72. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$, $B\hat{A}\Delta = 60^\circ$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

$$B\Gamma + \Gamma\Delta = A\Gamma.$$

Λύση

Με βάση το τμήμα ΓΔ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΓΔΕ, (σχήμα 5). Τότε, επειδή

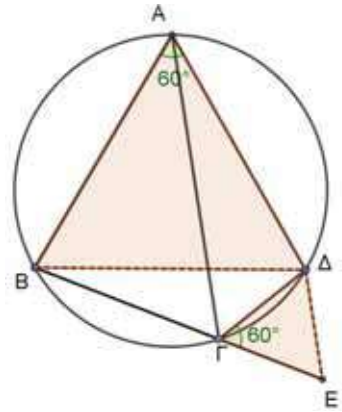
$$\widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{\Delta\Gamma E} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

τα σημεία Β, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΔΓ έχουν:

1. $BD = AD$, γιατί το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, αφού $AB = AD$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
2. $\Gamma\Delta = DE$, αφού το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισόπλευρο.
3. $\widehat{B\Delta E} = \widehat{B\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta E} = \widehat{B\Delta\Gamma} + 60^\circ = \widehat{A\Delta\Gamma}$

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν $BE = AG \Rightarrow BG + GE = AG \Rightarrow BG + \Gamma\Delta = AG$.



Σχήμα 5

Γ73. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = 80^\circ$. Παίρνουμε σημείο Ρ πάνω στην πλευρά ΑΒ έτσι ώστε $\widehat{B\Gamma P} = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι $AP = BG$.

Λύση

Με βάση το τμήμα ΑΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΚ, (σχήμα 6).

Τότε θα είναι $AG = AB = AK$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΓΚ είναι ισοσκελές. Επίσης, έχουμε:

$$\widehat{P\hat{A}\Gamma} = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$$

$$\widehat{\Gamma\hat{A}K} = \widehat{B\hat{A}K} - \widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ,$$

$$\widehat{A\hat{K}\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ.$$

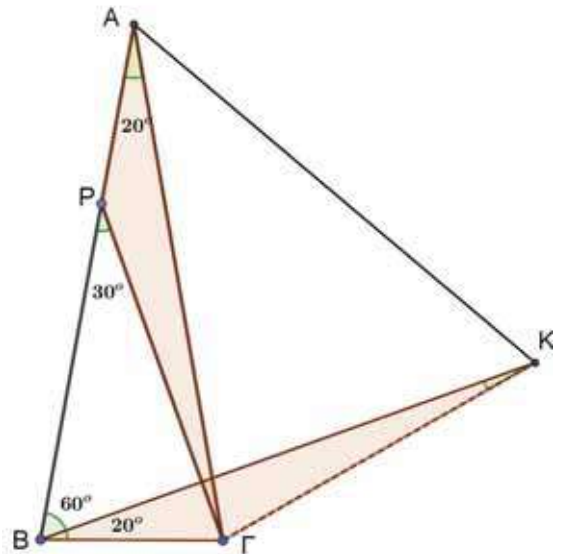
$$\widehat{P\hat{\Gamma}B} = 180^\circ - \widehat{P\hat{B}\Gamma} - \widehat{B\hat{P}\Gamma}$$

$$= 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$$

Επομένως, για τα τρίγωνα ΑΡΓ και ΒΓΚ έχουμε:

1. $AG = AB = BK$
2. $\widehat{B\hat{K}\Gamma} = \widehat{P\hat{A}\Gamma}$, αφού έχουμε:
 $\widehat{B\hat{K}\Gamma} = \widehat{A\hat{B}\Gamma} - \widehat{A\hat{B}K} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \widehat{P\hat{A}\Gamma}$.
3. $\widehat{B\hat{K}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}P}$, αφού έχουμε:
 $\widehat{B\hat{K}\Gamma} = \widehat{A\hat{K}\Gamma} - \widehat{A\hat{K}B} = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$,
 $\widehat{A\hat{\Gamma}P} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} - \widehat{P\hat{\Gamma}B} = 80^\circ - 70^\circ = 10^\circ$.

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ- Π - Γ), τα τρίγωνα ΑΡΓ και ΒΓΚ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $B\Gamma = AP$.



Σχήμα 6

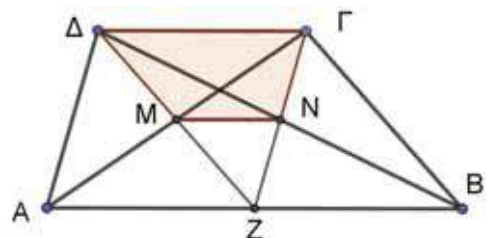
Γ74. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = 2 \cdot \Gamma\Delta$. Έστω Μ και Ν τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, αντίστοιχα. Έστω P_1 η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ και P_2 η περίμετρος του τετραπλεύρου ΓΔΜΝ. Να αποδείξετε ότι $P_1 = 2 \cdot P_2$.

Λύση

Επειδή $AB = 2 \cdot \Gamma\Delta$, αν Ζ είναι το μέσο πλευράς ΑΒ, τότε $AZ = ZB = \Gamma\Delta$, οπότε

$$AZ \parallel \Gamma\Delta \text{ και } ZB \parallel \Gamma\Delta.$$

Επομένως τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ και ΒΖΔΓ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε οι διαγώνιοί τους διχοτομούνται, δηλαδή το Μ είναι το μέσο της



Σχήμα 7

διαγωνίου ΑΓ και του τμήματος ΔΖ, ενώ το Ν είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ και του τμήματος ΓΖ.

Επομένως, έχουμε:

$$ΒΓ = ΖΔ = 2 \cdot ΔΜ \text{ και } ΔΑ = ΖΓ = 2 \cdot ΓΝ.$$

Επιπλέον, για το τμήμα ΜΝ που συνδέει τα μέσα των δύο διαγωνίων έχουμε:

$$2 \cdot ΜΝ = ΑΒ - ΓΔ = 2 \cdot ΓΔ - ΓΔ = ΓΔ.$$

Επομένως έχουμε:

$$P_1 = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 2 \cdot ΓΔ + 2 \cdot ΔΜ + 2 \cdot ΜΝ + 2 \cdot ΝΓ = 2 \cdot P_2.$$

Ασκήσεις για λύση

Γ68. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 80^\circ$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: ΑΙ = ΒΓ.

N54. Οι αριθμοί α, β, γ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε οι αριθμοί

$$\mu = \frac{5\alpha + 6\beta + 7\gamma + 6}{4\alpha + 3\beta + 2\gamma + 3} \text{ και } \nu = \frac{\alpha + 2\beta + 3\gamma + 5}{3\alpha + \beta + 2\gamma + 5}$$

να είναι και οι δύο ακέραιοι.

(1) Να αποδείξετε ότι: $\mu \geq 2$.

(2) Να βρείτε την τιμή των μ και ν .

N55. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α, β που ικανοποιούν τις ισότητες:

$$\frac{\alpha}{(\alpha, \beta)} = \beta + \frac{48 \cdot (\alpha, \beta)}{[\alpha, \beta]} \text{ και } \frac{\beta}{(\alpha, \beta)} = \alpha - \frac{312 \cdot (\alpha, \beta)}{[\alpha, \beta]},$$

όπου $(\alpha, \beta) = ΜΚΔ\{\alpha, \beta\}$ και $[\alpha, \beta] = ΕΚΠ\{\alpha, \beta\}$.

N56. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$2^\alpha - 2^\beta - 2^\gamma = 1023.$$

N57. (i) Να αποδείξετε ότι οι θετικοί ακέραιοι $12\nu + 13$ και $13\nu + 14$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, για κάθε φυσικό αριθμό ν .

(ii) Να προσδιορίσετε τον αριθμό των ζευγών φυσικών αριθμών (α, β) για τους οποίους υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{12\nu + 13}{13\nu + 14} \text{ και } 17\alpha + 19\beta < 2024.$$

Δ18. Στο εργαστήριο της Φυσικής οι εγγεγραμμένοι φοιτητές και φοιτήτριες μοιράζονται σε ομάδες που αποτελούνται από τρία αγόρια και ένα κορίτσι. Μία ημέρα απουσίαζαν δύο κορίτσια και ένα αγόρι, οπότε τα παιδιά ανακατανεμήθηκαν σε ομάδες που αποτελούντο από τέσσερα αγόρια και ένα κορίτσι. Να βρείτε πόσοι φοιτητές και πόσες φοιτήτριες είχαν κάνει εγγραφή στο εργαστήριο Φυσικής.



Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

«Δεν με νοιάζει τόσο ν' αποδείξω, όσο το ν' ανακαλύψω» **Eüler**

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Δεν ξέρω αν θα μπορούσαμε να συνεννοηθούμε χωρίς τους αριθμούς και όπως έλεγε ο Φιλόλαος «όλα τα πράγματα που μπορούν να γίνουν γνωστά έχουν από έναν αριθμό, γιατί είναι αδύνατο να συλλάβουμε ή να γνωρίσουμε οτιδήποτε χωρίς αριθμό». Ιδιαίτερα θέλουμε τους αριθμούς όταν δεν έχουμε άλλη εικόνα για ορισμένα πράγματα όπως π.χ. το δημόσιο χρέος είναι 300 δισεκατομμύρια Ευρώ. Πόσα να είναι αυτά; Τι όγκο θα έχει ο σωρός σε κέρματα του ενός Ευρώ; Ή η Γη απέχει από τον ήλιο 150 εκατομμύρια χιλιόμετρα πόσο μακριά σε σχέση με γνωστές μας αποστάσεις να είναι; Ή πως μπορούμε να αντιληφθούμε τις διαστάσεις των σωματιδίων της ύλης; Ο Αρχιμήδης τον 3^ο π.Χ. αιώνα στο έργο του **Ψαμμίτης** υπολόγισε την ποσότητα των κόκκων της άμμου που θα μπορούσε να περιέχει το Σύμπαν και βρήκε τον αριθμό **10⁶⁴** (με σημερινή γραφή). Τον 20^ο αιώνα οι Kanser και Newman στο βιβλίο «Mathematics and the Imagination» αναφέρουν τον αριθμό **googol**. Ένα **googol** αντιστοιχεί σε μία μονάδα, ακολουθούμενη από 100 μηδενικά. Ο όρος καθιερώθηκε από τον Μίλτον Σιρόττα (Milton Sirotta) το 1938 και εκφράζει τον αριθμό **10¹⁰⁰**. Η μηχανή αναζήτησης **Google** είναι ένα λογοπαίγνιο του googol και συμβολίζει το όραμα της εταιρείας να δώσει άπειρο αριθμό πληροφοριών στο Internet αφού το **10¹⁰⁰** αν και δεν είναι άπειρο για τους μαθηματικούς, ξεπερνά τα όρια του πραγματικού κόσμου, δηλαδή καθετί που θα μπορούσε να μετρηθεί στο Σύμπαν.

Βέβαια οι μαθηματικοί, από την αρχαιότητα, είχαν βάλει τους αριθμούς σε κατηγορίες ανάλογα με τις ιδιότητες τους. Έτσι έχουμε τους μονούς, τους ζυγούς, τους πρώτους, τους φίλους, κλπ.. Ας δούμε ποιοι αριθμοί είναι φίλοι.

➤ **Φίλοι** αριθμοί είναι ζεύγη θετικών ακεραίων αριθμών στα οποία ο καθένας από αυτούς ισούται με το άθροισμα των γνήσιων (εκτός του εαυτού του) διαιρετών του άλλου.

Παράδειγμα: το ζεύγος των αριθμών **220** και **284** είναι φίλοι διότι:

Οι γνήσιοι διαιρέτες του 220 είναι: 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110

και το άθροισμά τους $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$.

Αντίστοιχα οι γνήσιοι διαιρέτες του 284 είναι οι: 1,2,4,71,142

και το άθροισμά τους $1+2+4+71+142 = 220$

Τους αριθμούς 220 και 284 ότι είναι **φίλοι** είχαν ανακαλύψει οι Πυθαγόρειοι και μάλιστα πίστευαν ότι αντιπροσωπεύουν την παντοτινή φιλία. Μάλιστα στο Μεσαίωνα πουλούσαν φυλακτά που είχαν χαραγμένους αυτούς τους αριθμούς γιατί πίστευαν ότι έχουν μαγικές ιδιότητες. Στην « **Γένεση** » αναφέρεται ότι ο Ιακώβ έδωσε 220 κατσίκια στον Ησαύ. για να του εκφράσει τη φιλία του. Οι φιλίες είναι δύσκολες, γι' αυτό δεν θα βρείτε εύκολα φίλους αριθμούς. Ο Euler δημοσίευσε κατάλογο με 62 ζευγάρια φίλων αριθμών. Αλλά το 1866 ο δεκαεξάχρονος Ιταλός, ο μουσικός Παγκανίνι ανακάλυψε το ζεύγος 1.184 και 1.210 το είχαν παραβλέψει.

Υπάρχουν και «**τετράγωνες φιλίες**». Λέγετε ότι κάποια μέρα το δεκαέξι είπε στο δεκατρία: **Θέλω να πιστεύω ότι μας συνδέει παιδική φιλία.**

Το δεκατρία του απάντησε: **Ναι φίλε μου, η φιλία μας είναι τετράγωνη.**

Πράγματι είναι **τετράγωνοι φίλοι** αριθμοί, γιατί το $16^2 = 256$ έχει $2+5+6=13$ και το $13^2 = 169$ έχει $1+6+9=16$.

➤ **Τεχνητή νοημοσύνη.** Είμαστε στον 21^ο αιώνα, στην εποχή της **τεχνητής νοημοσύνης**, που πλέον έχει μπει για τα καλά στη ζωή μας και είναι ένας σπουδαίος δάσκαλος και φίλος. Με την τεχνητή νοημοσύνη μπορούμε να συζητάμε, να ρωτάμε για πληροφορίες, να ρωτάμε τη «γνώμη» έχει για διάφορα θέματα. Μόνο μπάλα δεν μπορούμε να παίξουμε, όμως ξέρει να μας πει πως παίζονται τα παιχνίδια. Ξέρει τα πάντα και συζητάει τα πάντα.

Οι Αρχαίοι διατύπωναν τα προβλήματα έτσι ώστε να είναι ευχάριστα και να τραβούν το ενδιαφέρον. Με τέτοια προβλήματα και προβλήματα πρακτικής αριθμητικής ήταν η ασχολία των Αρχαίων Ελλήνων και των Αιγυπτίων. Αυτά τα προβλήματα-Γρίφοι, όπως τα λέμε σήμερα, τραβούσαν και τραβούν το ενδιαφέρον όλων των ανθρώπων.

Τώρα που όλοι μιλούν για την τεχνητή νοημοσύνη είπα και εγώ να ρωτήσω τι «γνώμη» έχει το ChatGPT για τους Γρίφους.

Του είπα: Πιστεύω ότι οι Γρίφοι βοηθούν στη διδασκαλία γιατί τραβούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Συμφωνείς;

Μου απάντησε το ChatGPT:

- ❖ Ναι, συμφωνώ απόλυτα! Οι γρίφοι είναι ένα εξαιρετικό εργαλείο στη διδασκαλία γιατί:
- ✓ **Τραβούν την προσοχή των μαθητών** – Οι προκλήσεις και τα αινίγματα τους κάνουν πιο δραστήριους και εμπλεκόμενους.
- ✓ **Ενισχύουν την κριτική σκέψη** – Οι μαθητές πρέπει να αναλύσουν δεδομένα, να βρουν μοτίβα και να συνδυάσουν πληροφορίες.
- ✓ **Καλλιεργούν τη δημιουργικότητα** – Πολλές φορές χρειάζεται να σκεφτούν «έξω από το κουτί» για να βρουν τη λύση.
- ✓ **Ενισχύουν τη συνεργασία** – Αν εργάζονται σε ομάδες, προάγουν τη συζήτηση και την ομαδική δουλειά.
- ✓ **Κάνουν τη μάθηση πιο διασκεδαστική** – Όταν οι μαθητές διασκεδάζουν, θυμούνται καλύτερα τις πληροφορίες.

Έχεις στο μυαλό σου κάποια συγκεκριμένη περίπτωση όπου θα ήθελες να χρησιμοποιήσεις γρίφους στη διδασκαλία;

Του απάντησα: Ναι, όταν βλέπω ότι υπάρχει κούραση στο μάθημα και οι μαθητές δυσκολεύονται να παρακολουθήσουν τη διδασκαλία μια μικρή διακοπή με γρίφους είναι ένα καλό διάλειμμα.

Το ChatGPT μου είπε: Πολύ ωραία ιδέα! Οι μικρές παύσεις με γρίφους μπορούν να λειτουργήσουν σαν «**νοητικά διαλείμματα**» που ανανεώνουν το ενδιαφέρον των μαθητών και τους βοηθούν να συγκεντρωθούν καλύτερα στη συνέχεια.

Να μερικοί τρόποι να ενσωματώσεις τους γρίφους στη διδασκαλία:

Γρίφος Έναρξης – Ξεκίνα το μάθημα με έναν σχετικό γρίφο για να προσελκύσεις το ενδιαφέρον.

Γρίφος Διαλείμματος – Μετά από 20-30 λεπτά, κάνε μια σύντομη παύση και δώσε έναν διασκεδαστικό γρίφο.

Γρίφος-Επανάληψη – Χρησιμοποίησε έναν γρίφο που συνδέεται με το μάθημα για να βοηθήσεις τους μαθητές να ανακαλέσουν γνώσεις.

Γρίφοι Ανταμοιβής – Μπορείς να δώσεις έναν γρίφο ως πρόκληση και να επιβραβεύσεις όσους τον λύσουν σωστά.

Θες να σου προτείνω μερικούς γρίφους που ταιριάζουν στην ηλικία ή στο μάθημα που διδάσκεις;

Απάντηση: ΝΑΙ, για παιδιά του Γυμνασίου.

Το ChatGPT μου έδωσε 6 γρίφους-αινίγματα.

Γρίφος 1. Ένας αγρότης έχει 3 σακιά με πατάτες. Αν προσθέσει ένα ακόμα, θα έχει 2. Πώς γίνεται αυτό;

Γρίφος 2. Είμαι κάτι που μπορεί να σπάσει, χωρίς να με αγγίξει κανείς. Τι είμαι;

Γρίφος 3. Όσο περισσότερα αφαιρείς, τόσο μεγαλώνω. Τι είμαι;

Γρίφος 4. Έχω το σύμβολο H_2O , αλλά δεν είμαι νερό. Τι είμαι;

Γρίφος 5. Ποια πόλη έχει το ίδιο όνομα αν την πεις ανάποδα;

Γρίφος 6. Όσο πιο πολύ έχεις από μένα, τόσο λιγότερο βλέπεις. Τι είμαι;

Γ Ρ Ι Φ Ο Ι

Ας δούμε μερικούς ακόμα

Τα 10 κουδούνια: Σε μια καινούργια πολυκατοικία με δέκα διαμερίσματα θέλεις να βρεις το κουδούνι που χτυπάει στο δικό σου διαμέρισμα. Πως θα το βρεις μόνος σου;

Ο αριθμός: Ο Πέτρος αναζητά τους αριθμούς α και β , γνωρίζει ότι ο λόγος $\alpha/\beta=9$ και το άθροισμά τους $\alpha+\beta=1110$. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

Η αυλή του σχολείου: Το υπουργείο είπε, στις αυλές των σχολείων να γίνουν κήποι. Ένα σχολείο είχε ορθογώνια αυλή, έκανε κήπο 52 τετ. μέτρων με 4 μέτρα από το μήκος της αυλής. Η αυλή που έμεινε τώρα είναι τετράγωνη ποιο είναι το εμβαδό της;



Η ΓΗ: Ο Γρηγόρης και η Σοφία είναι φίλοι, κάθονται και βλέπουν τηλεόραση. Λέει η Σοφία ξέρεις πόσα χιλιόμετρα κάναμε όση ώρα βλέπαμε τηλεόραση; Γρηγόρης: Τρελή είσαι δεν κουνηθήκαμε από τον καναπέ. Τι να εννοούσε η Σοφία;

Τα μήλα: Ένας παραγωγός στη Λαϊκή αγορά πουλούσε μήλα 1€ το κιλό. Τα είχε συσκευασμένα ανά 3 ή 5 κιλά. Όταν αγόραζες τα 5 κιλά έδινε και ένα κιλό δώρο. Έδωσε το σύνολο των μήλων που είχε, 240 κιλά, και εισέπραξε 210€. Πόσοι πελάτες πήραν 5 κιλά και πόσοι 3 κιλά.



Ένας άλλος τρόπος πολλαπλασιασμού: Πολλαπλασιάζουμε π.χ. τους αριθμούς : 23×20

A: Διαιρώ με 2 και γράφω το ακέραιο μέρος

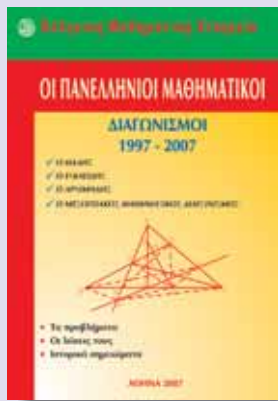
B: Διπλασιάζω

A	B	Για το $A*B$ Προσθέτω
23	20	20
11	40	+40
5	80	+80
2	160	+320
1	320	Σύνολο 460

Για να έχω το γινόμενο προσθέτω τους αριθμούς της στήλης B που αντιστοιχούν στους περιττούς αριθμούς της στήλης A. Δοκίμασε με όποιους άλλους αριθμούς θέλεις.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

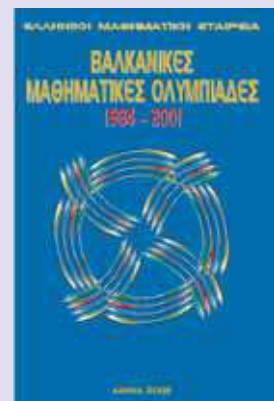
Ολυμπιάδες



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Προσφορές

Διαγωνισμοί



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Βιβλία της ΕΜΕ



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 20€

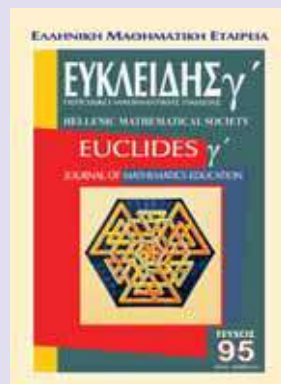


Τιμή βιβλίου: 15€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr