

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

ΓΕΓΟΝΟΤΑ

137

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β' ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2025 ευρώ 3,5

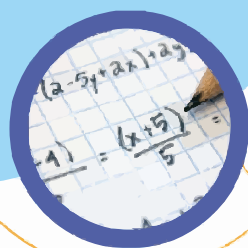
Πανελλήνιο Συνέδριο
Μαθηματικών στα Ιωάννινα



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΜΕ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

40^ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

14, 15, 16 Νοεμβρίου 2025
Ξενοδοχείο Du Lac
Ιωάννινα



“Τα μαθηματικά του σήμερα
και η διασύνδεσή τους με τις άλλες επιστήμες”



ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1009/06 ΚΕΜΓΛΘ.

4 μετάλλια

29th JBMO

Έγινε στη Β.Μακεδονία
25 - 30 Ιουνίου 2025

5 μετάλλια

66th IMO

Έγινε στην Αυστραλία
10-20 Ιουλίου 2025



5 μετάλλια

42th BMO

Έγινε στη Βοσνία - Ερζεγοβίνη
25 - 30 Απριλίου 2025



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 137 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2025 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Η πορεία των Μαθηματικών στα Ιωάννινα και την Ήπειρο	1
Τα Μαθηματικά του Αρχαίου Θεάτρου της Δωδώνης	5
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μαθηματικές Ολυμπιάδες,	9
Homo Mathematicus,	27

Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Πραγματικοί Αριθμοί	33
Γεωμετρία: Ασκήσεις	37

Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Τριγωνομετρία	41
Γεωμετρία: Ασκήσεις	45
Αναλυτική Γεωμετρία: Από τα διανύσματα μέχρι την ευθεία	51

Γ΄ Τάξη

Ανάλυση: Ασκήσεις	55
-------------------------	----

Γενικά Θέματα

Ο Ευκλείδης προτείνει... ..	63
Το Βήμα του Ευκλείδη: Ταυτότητα του Euler	67
Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες	73
Τα Μαθηματικά μας Διακεδάζουν	78
Αναπτύσσοντας τον Εγκέφαλο: Πώς τα Μαθηματικά ενισχύουν τις γνωστικές δεξιότητες και τις ψυχικές ικανότητες	79

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

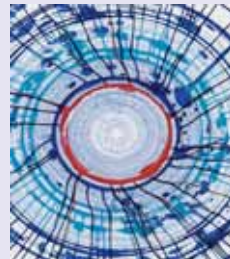
Θαλής:	Νοέμβριος	2025
Ευκλείδης:	Ιανουάριος	2026
Αρχιμήδης:	Φεβρουάριος	2026

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
... να πούμε
κάθε τι καλό

σε ότι προσπαθούμε ...
σε ότι ονειρευόμαστε ...

... με θετικές σκέψεις
και ελπίδες...



Έκθεση του Damien Hirst
Μουσείο Albertina - Βιέννη
Οκτώβριος 2025

Καλή
σχολική χρονιά

**Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού**

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις περισσότερες. Σε επόμενη τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά απρόοπτα, της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται όλο και πιο δύσκολη ...
Σας ευχαριστούμε για την κατανόηση και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄ Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτσος],
Β΄ Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουριδής, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄ Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδής]

$$[2000+25] = [5 \cdot 20^2 + 5^2] = 2025$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής**
βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης

Φελλούρης Ανάργυρος

Διευθυντής:

Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:

Ζώτος Ευάγγελος

Υπεύθυνοι για το Δ.Σ

Αντωνόπουλος Νίκος
Αργύρη Παναγιώτα
Αργυράκης Δημήτρης
Βακαλόπουλος Κώστας
Τσιφάκης Χρήστος

Επιτροπή Έκδοσης

Αργυράκης Δημήτρης
Βακαλόπουλος Κώστας
Λουριδής Γιάννης
Τσίτσος Χρήστος
Τσιφάκης Χρήστος
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Συντακτική Επιτροπή

Κουτσούρης Λέων	Πανατζή Αφροδίτη
Κωστοπούλου Καλλιόπη	Σίσκου Μαρία
Λαζαρίδης Χρήστος	Σκοτίδας Σωτήριος
Λουμπανιδιά Αγγελική	Στεφανής Παναγιώτης
Λουριδής Γιάννης	Ταπεινός Νικόλαος
Λουριδής Σωτήρης	Τζελέπης Αλκιβιάδης
Λυγάτσικας Ζήνων	Τουρναβίτης Στέργιος
Μαλαφέκας Θανάσης	Τσακίρτζης Στέλιος
Μανιατοπούλου Αμαλία	Τσίτσος Χρήστος
Μαυρογιαννίδης Λεωνίδας	Τσιφάκης Χρήστος
Μήλιος Γιώργος	Τσόπelas Ιωάννης
Μπαλτασιάνης Βενέδικτος	Τσουλουχάς Χάρης
Μπερσίμης Φραγκίσκος	Τυρλής Ιωάννης
Μπρίνος Παναγιώτης	Χριστόπουλος Θανάσης
Μπρούζος Στέλιος	Χριστόπουλος Παναγιώτης
Μώκος Χρήστος	
Ντόρβας Νικόλαος	
Ντρίζος Δημήτριος	

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται
και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- **Οι συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη «Γιοα του Ευκλείδη Β΄». Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

Με κατάθεση του αντίτιμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EURO BANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Εκτύπωση: rintfair Τηλ.: 2102469799 -2102401695 Υπεύθυνος τυπογραφείου: Α. Κρέτσης

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

Η πορεία των Μαθηματικών στα Ιωάννινα και την Ήπειρο

Ευαγγελία Τάτση – Ελένη Μπόλιαρη

Τα Ιωάννινα και γενικότερα η Ήπειρος συνδέονται άρρηκτα με την εξέλιξη των Μαθηματικών στον Ελληνικό χώρο ειδικά μετά την περίοδο της Τουρκοκρατίας. Η δε Ήπειρος υπήρξε ιδιαίτερα **σημαντικό πνευματικό κέντρο**, με σπουδαίους λόγιους και μαθηματικούς που συνέβαλαν στην προώθηση των επιστημών. Ειδικότερα, τα Ιωάννινα φιλοξένησαν μερικές από τις πιο φημισμένες σχολές του κράτους όπως:

- Η Σχολή Επισκοπείου (17ος αιώνας)
- Η Μαρουτσαία Σχολή (1742-1797)
- Η Καπλάνειος Σχολή (1805-1820)
- Η Ζωσιμαία Σχολή (μεταγενέστερα)

Στις σχολές αυτές διδάσκονταν ανώτερα Μαθηματικά, Γεωμετρία και Άλγεβρα, εισάγοντας δυτικές επιστημονικές ιδέες στον ελλαδικό χώρο, μέσω μεταφράσεων και διδασκαλιών.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

Μεθόδιος Ανθρακίτης (1660–1736)



Ο Μεθόδιος Ανθρακίτης (1660–1736) ήταν ένας Έλληνας ιερέας, θεολόγος, δάσκαλος και μαθηματικός, με σπουδαίο ρόλο στην πρώιμη Νεοελληνική περίοδο του Διαφωτισμού. Γεννήθηκε στο χωριό Καμινιά του Ανατολικού Ζαγορίου Ιωαννίνων —το οποίο μετονομάστηκε αργότερα σε "Ανθρακίτης" προς τιμήν του— και σπούδασε στη σχολή Εμμανουήλ Γκιούμα των Ιωαννίνων με δάσκαλο τον Γεώργιο Σουγδουρή. Το 1697, ως ιερομόναχος, μετέβη στη Βενετία, όπου διδάχθηκε Φιλοσοφία, Μαθηματικά, Γεωμετρία και Αστρονομία. Κατά την παραμονή του εκεί υπηρέτησε ως εφημέριος στον Ορθόδοξο Ναό του Αγίου Γεωργίου και εργάστηκε ως διορθωτής στον εκδοτικό οίκο των Γλυκήδων, ερχόμενος σε άμεση επαφή με την ευρωπαϊκή επιστημονική σκέψη και τα μαθηματικά εγχειρίδια της εποχής. Το 1708, προσκεκλημένος από τον Γεώργιο Καστριώτη, ανέλαβε τη διεύθυνση της Εκκλησιαστικής Σχολής στην Καστοριά, όπου δίδαξε για πρώτη φορά μοντέρνα ευρωπαϊκή φιλοσοφία και Μαθηματικά. Λίγο αργότερα έγινε

διευθυντής της Σχολής Κυρίτζη, όπου η διδασκαλία των Μαθηματικών έλαβε νέα διάσταση. Ο Ανθρακίτης υπήρξε πρωτοπόρος. Εισηγήε για πρώτη φορά στην ελληνική εκπαίδευση την Άλγεβρα και τις εξισώσεις με μεταβλητές, διδάσκοντας μεθόδους επίλυσης όπως η ολοκλήρωση τετραγώνου και οι τύποι για τα τριώνυμα. Παραδοσιακά, η μαθηματική εκπαίδευση βασιζόταν σε γεωμετρικές κατασκευές. Ο Ανθρακίτης άλλαξε αυτήν την παράδοση, χρησιμοποιώντας αλγεβρική γλώσσα και αριθμητική λογική, σε ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές μάθαιναν πλέον να σκέφτονται Μαθηματικά και όχι απλώς να απομνημονεύουν. Παράλληλα, δίδαξε σφαιρική γεωμετρία, με εφαρμογές στην αστρονομία, εισάγοντας πολύπλοκες σχέσεις όπως ο νόμος του συνημιτόνου για σφαιρικά τρίγωνα:

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) + \eta\mu(\beta) \cdot \eta\mu(\gamma) \cdot \sin(A)$$

Αυτή η εξίσωση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό πλευρών και γωνιών σε σφαιρικά τρίγωνα, δηλαδή τρίγωνα που "ζωγραφίζονται", ουσιαστικά πάνω σε μια σφαίρα — χρήσιμη στην αστρονομία και τη ναυσιπλοΐα. Ακόμη πιο προχωρημένος για την εποχή του, δίδαξε δεκαδικούς λογαρίθμους,

Η λογαριθμική ταυτότητα του πολλαπλασιασμού: $\log(\alpha \cdot \beta) = \log(\alpha) + \log(\beta)$

Μια θεμελιώδης ιδιότητα των λογαρίθμων που επιτρέπει την απλοποίηση πολλαπλασιασμών μέσω πρόσθεσης — ένα από τα εργαλεία που εισήγαγε πρώιμα ο Ανθρακίτης στη διδασκαλία των Μαθηματικών, με στόχο να απλοποιούνται οι υπολογισμοί, πρακτική που τότε μόλις είχε διαδοθεί στη Δύση. Ο Ανθρακίτης ήταν ο πρώτος που μετέφερε τέτοια εργαλεία στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Το πιο ριζοσπαστικό ίσως στοιχείο του έργου του υπήρξε η παιδαγωγική του αντίληψη: δίδασκε τα Μαθηματικά στη **δημοτική γλώσσα**, και όχι στην αρχαϊζουσα, θεωρώντας πως μόνο κατ' αυτόν τον τρόπο η γνώση θα γινόταν κτήμα του λαού. Η προσέγγισή του αυτή, συνδυασμένη με την υιοθέτηση δυτικών φιλοσοφικών ρευμάτων (κυρίως του ορθολογισμού και του καρτεσιανισμού), προκάλεσε την καχυποψία της Εκκλησίας. Το **1723** κατηγορήθηκε για **αιρετικές διδασκαλίες**,

αναγκάστηκε να ανασκευάσει τις απόψεις του και να **καταστρέψει** τα συγγράμματά του —γεγονός που εξηγεί γιατί δεν σώζεται πλήρες έργο του σήμερα. Ωστόσο, συνέχισε να διδάσκει.

Από το 1725 μέχρι την κοίμησή του το 1736 διετέλεσε διευθυντής στη Σχολή Επιφάνειας στα Ιωάννινα. Εκεί, με προσοχή πλέον, συνέχισε να μεταδίδει τις μαθηματικές του γνώσεις. Ανάμεσα στους σπουδαιότερους μαθητές του ήταν ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, που συνέχισε το έργο του.

Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος (1694 – 1760):



Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος ήταν Έλληνας κληρικός, δάσκαλος και μορφωμένος από τα Ιωάννινα, γνωστός για την προσφορά του στα Μαθηματικά και την εκπαίδευση. Γεννήθηκε σε οικογένεια με εκπαιδευτική παράδοση και ήταν μαθητής του Μεθόδιου Ανθρακίτη. Ξεκίνησε ως διδάσκαλος στις σχολές του Επιφανίου Ηγούμενου. Από το 1720 μέχρι το 1723 δίδαξε στη Σχολή Γκιούμα στην Ιωάννινα, και αργότερα ανέλαβε τη θέση σχολάρχη διατηρώντας αυτή μέχρι τον θάνατό του. Η Σχολή Γκιούμα, γνωστή επίσης ως η Μπαλαναία Σχολή ήταν σημαντικό κέντρο μάθησης κατά την περίοδο Νεοελληνικού Διαφωτισμού. Συγκεκριμένα, ασχολούνταν τόσο με την Αριθμητική και τα προβλήματα αναλογίας, πρόσθεσης και αφαίρεσης, όσο και με τη λογική, ενώ η πρακτική αριθμητική στην καθημερινή ζωή – σύμφωνα με την **παράδοση των αρχαίων** – έπαιζε σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία

του. Ο Δ. Σπινάκης, ως ιστορικός, επισημαίνει πως δίδασκε και στοιχειώδη άλγεβρα, μέσα από ένα συντηρητικό πλάνο που δεν απέδιδε πλήρως την αλγεβρική συμβολική μορφή. Η αλληλογραφία που διατηρούσε με τον Κ. Στάικο και τη Βασίλειο Πουλοπούλου φαίνεται να συνέβαλε στην τροφοδότηση του έργου του με ανύπαρκτα ή αδημοσίευτα κείμενα, τα οποία φυλάσσονταν στο αρχείο της **Εταιρείας Ηπειρωτικών Μελετών** – ενός θεσμού που είχε αναδυθεί για να προσφέρει πνευματικά διαμάντια στην περιοχή. Σύμφωνα με τον Κ. Στάικο, υπάρχουν ενδείξεις πως, εγκαίρως, είχαν γίνει προσπάθειες να εμπλουτιστεί η εκπαιδευτική κληρονομιά της Ηπείρου, θέτοντας γερά θεμέλια γεωμετρικής και αριθμητικής σκέψης στον ελληνικό χώρο και καλλιεργώντας το έδαφος για την ανάπτυξη μιας εθνικής επιστημονικής συνείδησης. Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος έγραψε έργα μαθηματικών όπως **"Οδός Μαθηματική"**, που ήταν πρώτο εγχειρίδιο Μαθηματικών στην ελληνική γλώσσα κατά Οθωμανικής περιόδου.

Το αρχείο «Οδός Μαθηματικής» μιλάει για την πορεία της περιοχής στα Μαθηματικά, τονίζοντας τη σημασία και τη διάδοση των θεωρημάτων σε αυτήν.

Γίνεται ειδική αναφορά στην ανάπτυξη των θεωρημάτων, όπως αυτά δείχνουν από διάφορους φιλοσόφους και μαθηματικούς της παλιάς εποχής, καθώς και στη σύνδεση των μαθηματικών με άλλες σφαίρες, όπως η φιλοσοφία και οι επιστήμες.

Επίσης, υπογραμμίζεται ότι τα μαθηματικά ήταν μια δύσκολη και πολύπλοκη τέχνη που χρειάζεται καλή λογική και κριτική σκέψη κάτι που την κάνει ακατανόητη για ορισμένους μη μυημένους. Επισημοποιείται επιπλέον πως τα Μαθηματικά βοηθούν στην καλλιέργεια της σκέψης αλλά και στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων προάγοντας έτσι τη γνωστική λειτουργία στην Ήπειρο. Άρα ουσιαστικά η πορεία της Ηπείρου στα Μαθηματικά είναι μια πορεία συνεχούς εξέλιξης κατά την οποία τα Μαθηματικά δεν έβλεπαν μόνο ως θεωρητικές έννοιες, αλλά υιοθετήθηκε και στην πράξη, δίνοντας έμφαση τόσο στις μαθητείες όσο και στην εφαρμογή τους σε διάφορους τομείς της ζωής και της επιστήμης.

Παρουσιάζονται αρκετές αναφορές σχετικά με την εξέλιξη της γεωμετρίας και της άλγεβρας στην Ήπειρο μετά το 1700, συγκεκριμένα:

1. Κείμενα που αναφέρονται σε γνωστούς μαθηματικούς από την Ήπειρο και την ευρύτερη ελληνική επικράτεια από τον 18ο αιώνα και έπειτα, οι οποίοι ασχολήθηκαν με την άλγεβρα και τη γεωμετρία, καθώς και τη σχέση αυτών των επιστημών με την φιλοσοφία του Πλάτωνα. Εστιάζεται, ειδικότερα, στα έργα του **Ερμότιμου** και του **Θεόφιλου** που αναφέρονται σε ζητήματα γεωμετρίας και Μαθηματικά της **Ακαδημίας του Πλάτωνα**.

2. Παρουσιάζεται η σύνθεση και ανάλυση μαθηματικών και γεωμετρικών βιβλίων που ασχολούνται με γεωμετρικές απόψεις των απλών σωμάτων και άλλες γεωμετρικές προκλήσεις.

3. Αφιερωμένο στην περιοχή των Ιωαννίνων, υπάρχει αναφορά στο μαθηματικό Μεθόδιο Ανθρακίτη, ένας σημαντικός χαρακτήρας στα Μαθηματικά και τη γενική εκπαίδευση της περιοχής, ο οποίος φαίνεται ότι συνέβαλε σημαντικά στη διάδοση των μαθηματικών γνώσεων, συμπεριλαμβανομένης της γεωμετρίας και της άλγεβρας, τον 18ο αιώνα.

Αθανάσιος Ψαλίδας (1767-1829):

Ο Αθανάσιος Ψαλίδας γεννήθηκε στα Ιωάννινα το 1767. Φοίτησε στην πόλη του, που ήταν τότε ένα από τα μεγαλύτερα κέντρα εκπαίδευσης του ελληνικού κόσμου, μέχρι που το 1785 που έφυγε για σπουδές στη Ρωσία και την Βιέννη που παρακολουθούσε μία ποικιλία μαθημάτων όπως Μαθηματικά, Φυσική, Φιλοσοφία και Γλωσσολογία. Όσο ζούσε στην Βιέννη έγραψε και μετέφρασε μία μεγάλη ποικιλία έργων σχετικά με τις φυσικές επιστήμες τα οποία όμως έμειναν ανέκδοτα. Το 1796 επέστρεψε στην Ελλάδα, αντί να δεχτεί την πρόταση για διδασκαλία στην Ουγγαρία, όπου και διηύθυνε για 25 χρόνια τη Μαρουτσαία σχολή που μετονομάστηκε, ως γνωστή έως σήμερα, **Καπλάνειος**. Έτσι, εκσυγχρόνισε την εκπαίδευση στα Ιωάννινα.



Ως διευθυντής εισήγαγε Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, νέες Γλώσσες και δίδαξε πολλές ευρωπαϊκές επιστημονικές ιδέες. Με αυτόν τον τρόπο, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη διάδοση των μαθηματικών στα Ιωάννινα, εισάγοντας σύγχρονες μαθηματικές μεθόδους, επηρεασμένος από δυτικά ευρωπαϊκά ρεύματα. Συγκεκριμένα, οδήγησε τους μαθητές στη χρήση του **Καρτεσιανού συστήματος** συντεταγμένων, χρησιμοποίησε πειραματικές μεθόδους και μαθηματική ανάλυση για να εξηγήσει φυσικά φαινόμενα. Επιπρόσθετα, ασχολήθηκε με την Άλγεβρα υψηλότερης τάξης, προάγοντας τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων (δηλαδή τη χρήση συμβόλων και μεταβλητών στις εξισώσεις). Ο Αθανάσιος Ψαλίδας δίδαξε, επιπρόσθετα, μεθόδους επίλυσης **πολυωνυμικών εξισώσεων**, εστιάζοντας ιδιαίτερα

στην ολοκλήρωση τετραγώνου, μια τεχνική κατά την οποία μια δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ μετασχηματίζεται στη μορφή $(x + d)^2 = e$, διευκολύνοντας την επίλυση της εξίσωσης με γεωμετρική σκέψη. Επιπλέον, χρησιμοποιούσε τον τύπο επίλυσης τριωνύμου (διακρίνουσα):

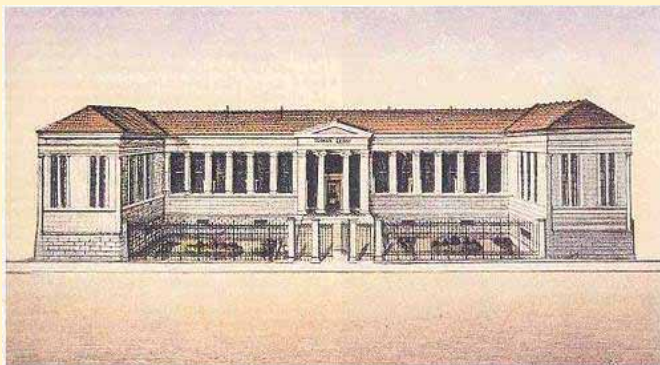
$$X = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$

ο οποίος ήταν πολύ χρήσιμος για την επίλυση κάθε δευτεροβάθμιας εξίσωσης με μια συγκεκριμένη συνοχή. Δίδασκε επίσης βασικές γεωμετρικές έννοιες, όπως το θεώρημα του Πυθαγόρα, δηλαδή η σχέση $a^2 + b^2 = c^2$ για τρίγωνα με γωνίες ίσες με 90 μοίρες, καθώς και τις ιδιότητες των σχημάτων όπως τα ορθογώνια και τα τραπέζια, βοηθώντας κατά αυτό τον τρόπο στην καλύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ θεωρίας και εφαρμογής των μαθηματικών. Ο Ψαλίδας δεν περιοριζόταν μόνο σε θεωρητικές γνώσεις, αλλά έδινε έμφαση και στην εφαρμογή των Μαθηματικών σε πραγματικά προβλήματα που αφορούσαν τη **φύση** αλλά και την **τεχνολογία**.

Χαρακτηρίζονταν από κάποιους «αρχιδιδάσκαλος των Ιωαννίνων», καθώς δεν φημιζόταν μονάχα για τις μαθηματικές του ικανότητες. Εγκατέλειψε τα Ιωάννινα το 1820 λόγω των πολιτικών εντάσεων. Πριν το τέλος της ζωής του, εξέφρασε την επιθυμία του να επιστρέψει στην πατρίδα του και διορίστηκε διευθυντής του Ελληνικού Λυκείου της Λευκάδας.

Παναγιώτης Δεβέκος (19ος αιώνας):

ο Παναγιώτης Δεβέκος δίδαξε Μαθηματικά στην Ζωσιμαία Σχολή Ιωαννίνων από το 1951 μέχρι το



1972. Τα λόγια του Νίκου Μπλέτσου αποτυπώνουν τον χαρακτήρα, το ήθος και την επίδρασή του στους μαθητές του. Συγκεκριμένα, αναφέρεται σε έναν **αγαπητό** και **αφοσιωμένο δάσκαλο**, που γνώρισε επιτυχία ως διευθυντής του σχολείου για κάποιο διάστημα, ενώ έγινε γνωστός για την ειλικρίνειά του, την καθαρότητα του και την ευθύτητά του απέναντι στους μαθητές του. Η σύνδεσή του με τους μαθητές του ήταν τόσο ειλικρινής, που την ημέρα της αποφοίτησής τους έζησε με βαθιά συγκίνηση, κλαίγοντας

μαζί τους για αυτή την απώλεια. Ήταν πάντα έτοιμος να βοηθήσει, όπως όταν ανέθετε στους μαθητές του τη διανομή των φυλλαδίων της **Μαθηματικής Εταιρείας**. Έκανε εντύπωση με την αξιοσημείωτη συμπεριφορά του, ενώ το **ροζ Opel** που απέκτησε το 1961 έγινε θρυλικό ανάμεσα στους μαθητές του. Η παιδαγωγική του προσέγγιση ήταν αυστηρή αλλά ενέπνεε τους μαθητές του να προχωρήσουν μπροστά, όπως φάνηκε όταν, σε ένα δύσκολο διαγώνισμα τριγωνομετρίας, έδωσε μια

διαφωτιστική αλλά καθοριστική συμβουλή σε έναν από τους μαθητές του που είχε «κολλήσει». Ο Παναγιώτης Δεβέκος, εστίασε ιδιαίτερα στη διδασκαλία της Τριγωνομετρίας, μεταδίδοντας στους μαθητές του τόσο τη θεωρία όσο και τη γεωμετρική της εφαρμογή. Έδινε έμφαση στον θεμελιώδη τριγωνομετρικό τύπο: $\eta\mu^2(\chi) + \sigma\upsilon\nu^2(\chi) = 1$, ο οποίος αποτελεί τη βάση της τριγωνομετρίας και περιγράφει τη σχέση των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με τη μονάδα κύκλο. Ιδιαίτερα προοδευτικός για την εποχή του, προσέφερε έναν απλό τρόπο για την **κατανόηση** των στοιχείων του **διαφορικού λογισμού**, όπως τον ορισμό της παραγώγου ως το **ρυθμό μεταβολής**, βοηθώντας έτσι τους μαθητές να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν σωστά τα Μαθηματικά. Με αυτόν τον τρόπο συνέδεσε τη **θεωρία των Μαθηματικών με την πράξη**, κερδίζοντας το σεβασμό και την ευχαρίστηση των μαθητών. Όταν ήθελε να βοηθήσει, πάντα υποστήριζε ηθικά τις αρχές στην εκπαίδευση. Ο Δεβέκος θα μείνει αξέχαστος χάρη στο δικό του έντιμο χαρακτήρα, αφήνοντας έναν διάδοχο της γνώσης στις καρδιές των μαθητών του. Απεβίωσε το 1995 λόγω ασθένειας.

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ της πορείας των Μαθηματικών στην Ήπειρο

- ◆ **περ.1660:** Γέννηση του Μεθόδιου Ανθρακίτη
- ◆ **1694:** Γεννιέται ο Βασίλης Μπαλάνος, σημαντικός δάσκαλος και μαθηματικός της εποχής, ο οποίος συνέβαλε στη διάδοση των μαθηματικών στην ευρύτερη περιοχή και έγραψε το πρώτο εγχειρίδιο.
- ◆ **περ.1749:** Θανάτωσε το σώμα του ο Μέθοδος Ανθρακίτης
- ◆ **1767:** Γεννήθηκε ο Αθανάσιος Ψαλίδας, ένας από τους πιο επιδραστικούς διανοούμενους της Ήπειρος.
- ◆ **1797:** Ο Ψαλίδας αναλαμβάνει τη διεύθυνση της Καπλανείου Σχολής στα Ιωάννινα και πραγματοποιεί σημαντικές αλλαγές, παρουσιάζοντας ένα φυσικό και ένα χημικό εργαστήριο.
- ◆ Τα Ιωάννινα γίνονται κέντρο εκπαίδευσης για τα Βαλκάνια.
- ◆ **1828:** Ίδρυση της Ζωσιμαίας Σχολής. 1829: Απεβίωσε ο Αθανάσιος Ψαλίδας, ο οποίος αφήνει πλούσια εκπαιδευτική κληρονομιά.
- ◆ **1890:** Ενίσχυση της ήδη ενεργής μαθηματικής δράσης στη Ζωσιμαία Σχολή.
- ◆ **1920-1950:** Οι μαθηματικοί της Ζωσιμαίας Σχολής άσκησαν τεράστια επίδραση στην κοινωνία της Ηπείρου.
- ◆ Παναγιώτης Δεβέκος – Μαθηματικός και διευθυντής στη Ζωσιμαία Σχολή.
- ◆ **1970-1990:** Δημιουργία μαθηματικών κύκλων και ερευνητικής δραστηριότητας.
- ◆ **2000+:** Ενίσχυση της μαθηματικής έρευνας από το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
- ◆ **2020+ –** Σύγχρονοι μαθηματικοί της Ηπείρου διαπρέπουν στην Ελλάδα και το εξωτερικό.



Βιβλιογραφία:

Καραλής, Ι. (2004). Η μαθηματική παιδεία στα Ιωάννινα του 20ού αιώνα. Ιστορική Βιβλιοθήκη Ηπείρου.

Σπινάκης, Δ. (1980). Η συμβολή του Μπαλάνου Βασιλόπουλου στη Μαθηματική Παιδεία των Ιωαννίνων. Ιωάννινα: Ιστορικά Τετράδια.

Στάικος, Κ. (2006). Ελληνικός Διαφωτισμός και Παιδεία: Λόγιοι και Σχολές. Αθήνα: ΜΙΕΤ.

Εκδοτική Αθηνών. (1997). Ήπειρος: 4000 χρόνια ελληνικής ιστορίας και πολιτισμού. Αθήνα: Εκδοτική Αθηνών.

Αρχείο Ζωσιμαίας Σχολής Ιωαννίνων – Διδακτικά Αναλυτικά Προγράμματα 1951–1972.

Δικτυογραφία: Βικιπαίδεια – Αθανάσιος Ψαλίδας:
https://el.wikipedia.org/wiki/Αθανάσιος_Ψαλίδας

Βικιπαίδεια – Μεθόδιος Ανθρακίτης:
https://el.wikipedia.org/wiki/Μεθόδιος_Ανθρακίτης

Βικιπαίδεια – Μπαλάνος Βασιλόπουλος:
https://el.wikipedia.org/wiki/Μπαλάνος_Βασιλόπουλος

Πανεπιστήμιο Κρήτης – Ιστορία των Μαθηματικών στην Ελλάδα:
<http://history.math.uoc.gr/el/node/30>

Ζωσιμαία Σχολή – Παναγιώτης Δεβέκος:
<https://zosimaia.gr/o-μαθηματικός-παναγιώτης-δεβέκος-του>

Google Drive (Οδός Μαθηματικής):
<https://drive.google.com/file/d/1agkzKJtNoI9obFwcUS2mPd9iSzsGyOH5/view?ts=67e14f87>

Τα Μαθηματικά του αρχαίου θεάτρου της Δωδώνης

Μαρία Παπαγεωργίου– Πρότυπο Γυμνάσιο Ζωσιμαίας Σχολής Ιωαννίνων

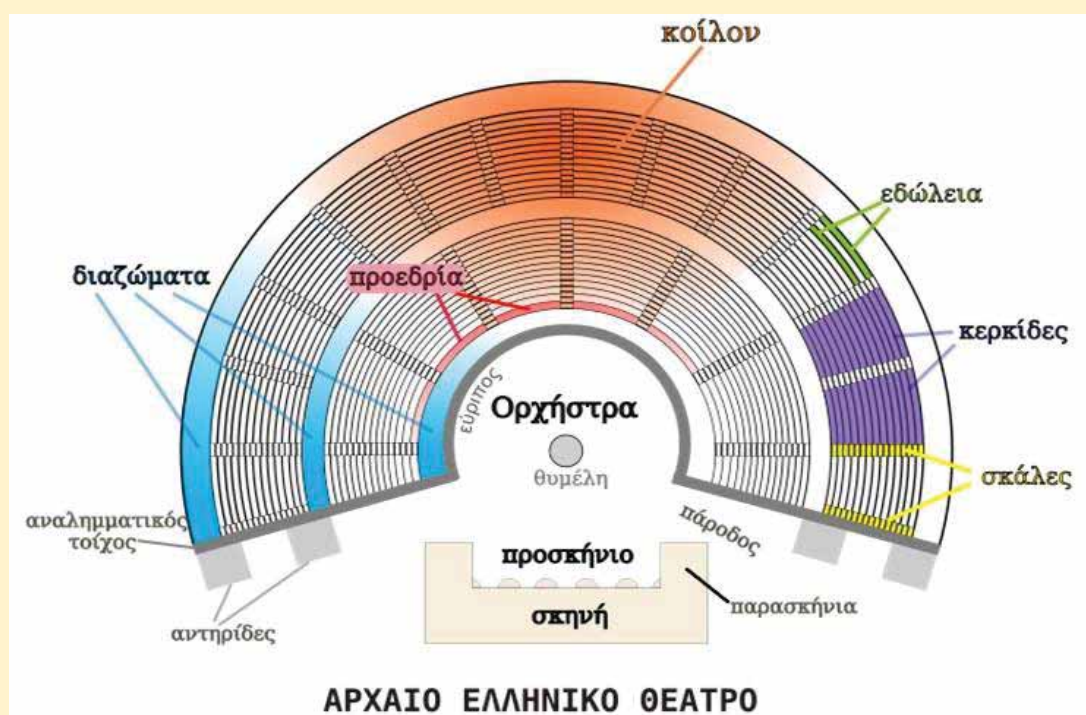
Το θέατρο της Δωδώνης είναι από τα μεγαλύτερα και καλύτερα **σωζόμενα** αρχαία ελληνικά θέατρα, με



χωρητικότητα περίπου **18.000 θεατών** (άνω διάμετρος του κοίλου 135 μέτρα). Αποτελούσε αναπόσπαστο τμήμα του ιερού της Δωδώνης και για τον επισκέπτη, που έφθανε από το νότο, ήταν το εμφανέστερο μνημείο, που δέσποζε στον χώρο.

Στην παρακάτω εικόνα καταγράφονται τα μέρη του

αρχαίου Ελληνικού θεάτρου.



Το θέατρο της Δωδώνης κατασκευάστηκε τον 3ο π.Χ. αιώνα από τον Βασιλέα της Ηπείρου Πύρρο. Πρόκειται για μια κατασκευή μεγάλου μεγέθους, συγκρίσιμη με αυτή του αρχαίου θεάτρου της Επιδαύρου. Το τεράστιο κοίλο του θεάτρου διαμορφώθηκε σε **φυσική κοιλότητα** στους πρόποδες του όρους Τόμαρος, στο δυτικό άκρο της λοφοσειράς, με νότιο προσανατολισμό. Επειδή ήταν μεγαλύτερο σε διαστάσεις, δημιουργήθηκε **επίχωση**, την οποία συγκρατούσαν **αναλημματικοί** τοίχοι, ενισχυμένοι με έξι πύργους, που προσδίδουν στην πρόσοψη του θεάτρου μνημειακό χαρακτήρα. Οι δύο πλησιέστεροι προς την ορχήστρα πύργοι ήταν μεγαλύτεροι από τους άλλους, καθώς χρησίμευαν και ως κλίμακες για την ανάβαση των θεατών στην άνω ζώνη του κοίλου.

Το κοίλο

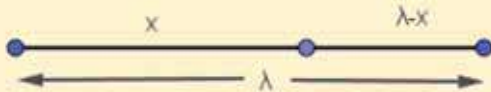
Το σχήμα του το δίνει ο βασικός κύκλος, δηλαδή η εξωτερική λίθινη ζώνη της κυκλικής ορχήστρας, που περιβάλλει έναν ημικυκλικό περίπου οχετό. Η διάμετρος του βασικού κύκλου είναι 22 μέτρα περίπου, ενώ οι λοιπές καμπύλες των εδωλίων και των διαδρόμων είναι ομόκεντρες προς τον βασικό κύκλο. Το κοίλο χωριζόταν με τέσσερις οριζόντιους διαδρόμους σε τρία τμήματα (19 σειρές εδωλίων το κάτω, 15 το μεσαίο και 21 το επάνω, συνολικά 55 σειρές καθισμάτων εκτός από την προεδρία) και με δέκα ακτινωτές κλίμακες σε εννέα κερκίδες, με την **κεντρική κερκίδα στον άξονα** του θεάτρου. Το ανώτερο τμήμα είχε ενδιάμεσες κλίμακες και 18 κερκίδες. Η κατώτερη σειρά εδωλίων, η **λεγόμενη προεδρία**, είχε λίθινα καθίσματα και προοριζόταν για τα επίσημα ή τιμώμενα πρόσωπα (τα εδώλια των δύο πρώτων σειρών μαζί με αυτά της προεδρίας δε σώζονται εξαιτίας της **μετατροπής** του θεάτρου σε **αρένα** στα τέλη του 1^{ου} π.Χ. αιώνα).



Κάτοψη του θεάτρου. Πρόκειται για αρχιτεκτονικό σχέδιο του αρχαίου θεάτρου της Δωδώνης, η φωτογραφία του οποίου έχει δημοσιευθεί σε σύγγραμμα περιηγητών του 1830.

Η κατασκευή των διαζωμάτων του αρχαίου θεάτρου της Δωδώνης δείχνει πως οι αρχαίοι Έλληνες έδιναν μεγάλη σημασία στην αρμονία και την τελειότητα! Πράγματι οι σειρές των εδωλίων στα διαζώματα είναι μοιρασμένες με τέτοιο τρόπο που το αποτέλεσμα να είναι ιδανικά ωραίο και ευχάριστο στο μάτι. Οι αριθμοί **21, 34=15+19, 55=21+34**, αποτελούν διαδοχικούς όρους της ακέραιας ακολουθίας *Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, **21, 34, 55, 89, 144 ...**, που όπως είναι γνωστό έχει άμεση σχέση με τη *χρυσή αναλογία*. Ο λόγος των διαδοχικών όρων της ακολουθίας *Fibonacci* $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$ προσεγγίζει τον χρυσό αριθμό ϕ .

Ας υπολογίσουμε τους λόγους $\frac{55}{19+15} = 1,617 \approx 1,618 \dots$ και αντίστοιχα $\frac{19+15}{21} = 1,619 \approx 1,618 \dots$ Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο;



Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

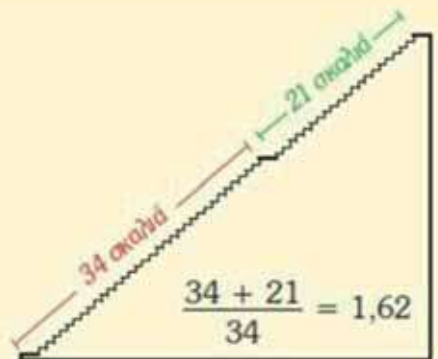
«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα λ σε δύο άνισα μέρη, ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».

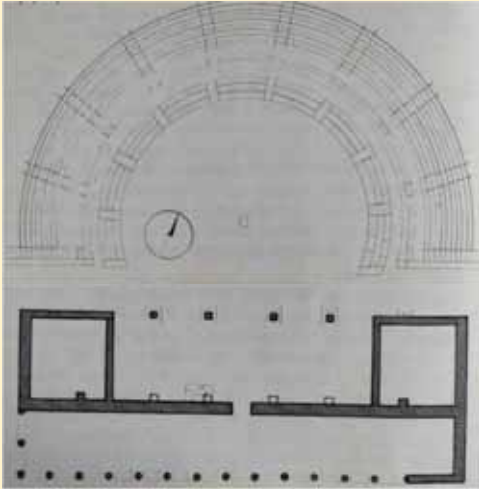
Η λύση του ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής εξίσωσης

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda-x} \text{ και ο λόγος } \frac{\lambda}{x} \text{ είναι ίσος με } \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618 \dots$$

Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής**, συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα ϕ προς τιμή του περίφημου γλύπτη Φειδία, που θεωρείται ο κορυφαίος αντιπρόσωπος της αρμονίας στην τέχνη.

Από την αρχαιότητα είχε διαπιστωθεί ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.

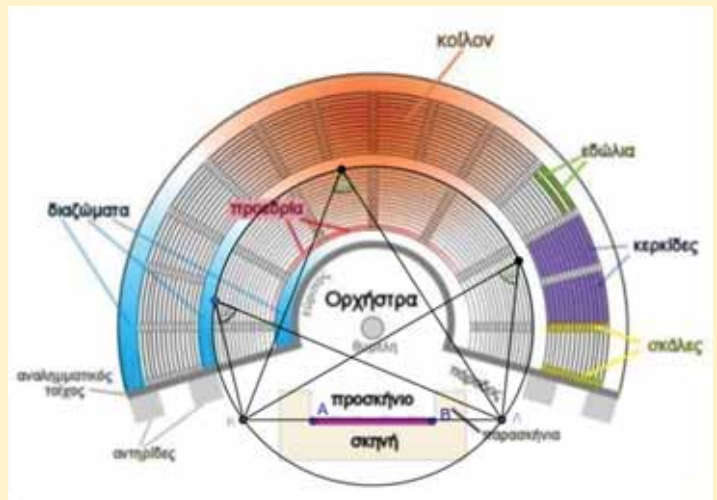




Κάτοψη της σκηνής στις αρχές του 3^{ου} π.Χ. αιώνα
εξαφανίζονταν στο σπηλαιώδες υπέδαφος.

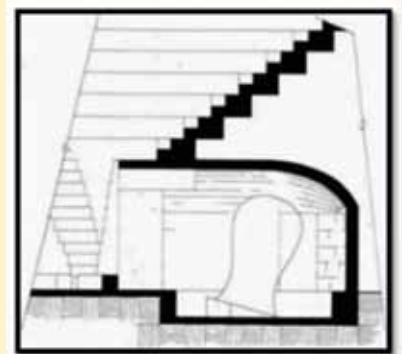
Οπτική

Τα αρχαία θέατρα γενικά, άρα και το αρχαίο θέατρο της Δωδώνης, ήταν σχεδιασμένα με έναν τρόπο έτσι **ώστε όλοι οι θεατές** από όποια θέση κι αν βρίσκονταν να έχουν μια **καθαρή οπτική**. Λέγεται ότι, οι θεατές που κάθονταν στο ίδιο διάζωμα έβλεπαν τη σκηνή με την ίδια γωνία. Πράγματι, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, τα σημεία που βλέπουν τη χορδή ΚΛ υπό την ίδια γωνία ω , είναι ομοκυκλικά και γνωρίζουμε ότι οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.



Ακουστική

Η σημασία της ακουστικής έπαιξε καθοριστικό ρόλο στον σχεδιασμό των αρχαίων θεάτρων, γι' αυτό τα χαρακτηρίζει η ακουστική τελειότητα. Η εφαρμογή των μαθηματικών του Πυθαγόρα στην αρχιτεκτονική **και οι αρχές της γεωμετρίας** στον σχεδιασμό τους επέτρεπε στον ήχο να γίνεται αντιληπτός με καθαρότητα και στις τελευταίες κερκίδες. Η ηχητική των αρχαίων θεάτρων που θαυμάζουμε σήμερα εξασφαλιζόταν με τα αντηχούντα αγγεία που βρίσκονταν κάτω από τις κερκίδες του κοίλου του θεάτρου και ενίσχυαν τη φωνή δημιουργώντας ένα είδος μεγάφωνου, βελτιστοποιώντας έτσι την τελική ακουστική ποιότητα της παράστασης. Τα αντηχούντα αγγεία (μεγάλα χάλκινα δοχεία) τοποθετούνταν σύμφωνα με έναν μαθηματικό υπολογισμό σε κόγχες κάτω από τα σκαλιά του κοίλου, διηρημένα σε αγγεία τέταρτης, πέμπτης, όγδοης και διπλής όγδοης, σύμφωνα με τις **αντηχήσεις** τους στις διάφορες νότες ενώ «κουρδίζονταν» πάνω στο γένος που θα εκτελούνταν το θεατρικό θέμα. Ήταν μελετημένα ώστε, όταν ο τόνος της φωνής των ηθοποιών, εναρμονιζόταν με καθένα από τα αγγεία αυτά, προκαλούσε την αντήχηση τους, γινόταν πιο δυνατή, πιο καθαρή, ο ήχος ενισχυόταν και μεταφερόταν σε όλο τον χώρο χωρίς απώλειες.



Ανακατασκευή μιας κοιλότητας με ένα χάλκινο αγγείο .



Μετά την καταστροφή του **ιερού της Δωδώνης** από τους Αιτωλούς, **το 219 π.Χ.**, το θέατρο ανακατασκευάστηκε. Το προσκήνιο έγινε λίθινο και μπροστά από τα παρασκήνια προστέθηκαν δύο μικρότερα δωμάτια, στην εξωτερική πλευρά των οποίων κτίστηκαν δύο μνημειακά πρόπυλα με ιωνικούς ημικίονες. Με τη μορφή αυτή διατηρήθηκε το θέατρο ως το 167 π.Χ., όταν η Μακεδονία και η Ήπειρος καταλήφθηκαν από τους Ρωμαίους (Αιμίλιος Πάυλος) και το ιερό καταστράφηκε πάλι. Η σκηνή του θεάτρου πυρπολήθηκε και ανοικοδομήθηκε με την ανασύσταση του Κοινού των Ηπειρωτών το 148 π.Χ. Στη θέση των κίωνων, που βρίσκονταν μεταξύ των παρασκηνίων, κτίστηκαν πλέον τοίχοι με ασβέστη και λιθάρια. Η κανονική μορφή του θεάτρου, όμως, δεν διατηρήθηκε για πολύ, αφού στα χρόνια του Αυγούστου, τον **1ο αιώνα π.Χ.**, το μνημείο διαμορφώθηκε σε αρένα. Αφαιρέθηκαν οι πρώτες σειρές εδωλίων και κτίστηκε ένας τοίχος ύψους 2,80 μ. για την προστασία των θεατών από τα άγρια ζώα, ενώ η ορχήστρα και η σκηνή καλύφθηκαν με επιχώσεις ύψους 0,50 μ. Η αρένα έφθανε μέχρι τη σκηνή και είχε ωοειδές σχήμα. Σε δύο τριγωνικά δωμάτια, που σχηματίστηκαν από τον τοίχο προστασίας και τον τοίχο της σκηνής, φυλάσσονταν τα άγρια ζώα. Το θέατρο διατηρήθηκε με αυτή τη μορφή έως τα τέλη του 4ου αιώνα μ.Χ., οπότε και σταμάτησε να λειτουργεί. Ο τοίχος που υψώθηκε στη θέση των πρώτων καθισμάτων για την προστασία των θεατών υπάρχει ακόμα και σήμερα. Το μνημείο ανασκάφηκε αρχικά από τον αρχαιολόγο Κ. Καραπάνο, το 1875-1878. Αργότερα, ερεύνησαν το χώρο ο καθηγητής αρχαιολογίας Δ. Ευαγγελίδης με τον Σ. Δάκαρη (1929-1932), οι οποίοι συνέχισαν την ανασκαφική τους δραστηριότητα μετά το Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, συμβάλλοντας και στην αναστήλωση του θεάτρου.

Πηγές:

- <https://www.dodoni.gr/to-theatro>
- <http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-aggregatedcontent-8526-5857>
- https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2196/Mathimatika_B-Gymnasiou_html-empl/indexB3_1.html
- https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2212/Mathimatika_G-Gymnasiou_html-empl/indexA2_4.html
- <https://cityculture.gr/to-mistiko-tis-akoustikis-ton-archeon-theatron/>
- <https://www.e-synews.gr/2023/03/22/to-thayma-tis-akoystikis-ton-archaion-ellinikon-theatron/>
- ΔΩΔΩΝΗ Σ. Ι. ΔΑΚΑΡΗ – Εκδόσεις: Συλλόγου Πνευματικής Κινήσεως «ΑΡΧΑΙΑ ΔΩΔΩΝΗ»

Εικόνες:

<https://www.mixanitouxronou.gr/wp-content/uploads/2020/04/dodoni-theater.jpg>

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cb/Ancient_greek_theater_greek.svg/1280px-Ancient_greek_theater_greek.svg.png

Από Leftezi - Έργο αυτού που το ανεβάζει, CC BY 3.0,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4098616>

<https://travelogues.gr/files/fullsize/fe684dab0d875102ae76e42e136af73d.jpg>

https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2212/Mathimatika_G-Gymnasiou_html-empl/images/imgA1_338.jpg

ΔΩΔΩΝΗ Σ. Ι. ΔΑΚΑΡΗ – Εκδόσεις: Συλλόγου Πνευματικής Κινήσεως «ΑΡΧΑΙΑ ΔΩΔΩΝΗ» σελ.60

από <https://www.slideshare.net/slideshow/ss-45209628/45209628>

<https://www.dodoni.gr/images/arxaia-dodoni/theatro.jpg>



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

5 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P(x^2) + x^3 = x^2P(x) + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. Τότε είναι $\deg P(x) = n$ και $\deg P(x^2) = 2n$, οπότε για την εύρεση του βαθμού του πολυωνύμου του πρώτου μέλους της δεδομένης ισότητας διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $2n < 3$. Τότε θα είναι $n = 0$ ή $n = 1$.

- Αν $n = 0$, τότε $P(x) = c \in \mathbb{R}$, σταθερό πολυώνυμο τέτοιο ώστε $c + x^3 = cx^2 + 1$, που είναι αδύνατο.

- Αν $n = 1$, τότε $P(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, έτσι ώστε

$$ax^2 + b + x^3 = x^2(ax + b) + 1 \Leftrightarrow (1 - a)x^3 + (a - b)x^2 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ 1 - a = 0, a - b = 0, b - 1 = 0 \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Άρα είναι $P(x) = x + 1$.

(β) $2n > 3$. Τότε πρέπει $\deg(P(x^2) + x^3) = \deg(x^2P(x) + 1) \Leftrightarrow 2n = n + 2 \Leftrightarrow n = 2$, οπότε $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$ax^4 + bx^2 + c + x^3 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - b)x^3 + (b - c)x^2 + c - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - b = 0, b - c = 0, c - 1 = 0 \Leftrightarrow b = c = 1.$$

Άρα είναι $P(x) = ax^2 + x + 1, a \neq 0$.

Σημείωση. Μπορούμε να αποκλείσουμε την περίπτωση $n > 2$ και να εργαστούμε απευθείας με τη δεύτερη περίπτωση. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $n > 2$, τότε έχουμε

$$\deg(P(x^2) + x^3) = \deg(x^2P(x) + 1) \Leftrightarrow 2n = n + 2 \Leftrightarrow n = 2, \text{ άτοπο.}$$

Άρα $n \leq 2$ και εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (β) βρίσκουμε

$$P(x) = ax^2 + x + 1, a \in \mathbb{R},$$

η οποία περιέχει και τις δύο λύσεις που βρήκαμε προηγουμένως.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους n που ικανοποιούν την ιδιότητα: Για κάθε θετικό διαιρέτη d του n ισχύει ότι:

ο $d + 1$ διαιρεί το n ή ο $d + 1$ είναι πρώτος.

Λύση. Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $n = 1, 2, 4$ και 12 είναι λύσεις του προβλήματος. Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις.

Γράφουμε $n = 2^k \mu$, όπου k μη αρνητικός ακέραιος και μ περιττός θετικός ακέραιος.

Επειδή $\mu | n$ έπεται ότι: $\mu + 1$ πρώτος ή $\mu + 1 | n$.

Αν $\mu + 1$ πρώτος, αφού μ περιττός έπεται ότι $\mu + 1 = 2$, οπότε $n = 2^k$.

Αν $\kappa \geq 3$, τότε για $\kappa = 3$ έχουμε άτοπο, αφού $8|v$, αλλά $9 \nmid v$.

Άρα είναι $\kappa \leq 2$ και $v \in \{1, 2, 4\}$. Αν $\mu + 1|v = 2^\kappa \mu$, αφού $(\mu + 1, \mu) = 1$, έπεται ότι

$$\mu + 1|2^\kappa \Rightarrow \mu + 1 = 2^\alpha, \text{ όπου } 2 \leq \alpha \leq \kappa,$$

αφού η περίπτωση με $\alpha = 1$ έχει εξεταστεί νωρίτερα.

Τότε $2^\kappa + 1 \nmid v$. Πράγματι, αν $2^\kappa + 1|v = 2^\kappa \mu$, τότε αφού $2^\kappa + 1$ περιττός, έπεται ότι $2^\kappa + 1|\mu$, ενώ $2^\kappa + 1 > \mu$, άτοπο.

Επομένως, λόγω της συνθήκης του προβλήματος, έπεται ότι $2^\kappa + 1$ πρώτος.

Αν $\kappa = 2$, τότε $\alpha = 2$ και $\mu = 2^\alpha - 1 = 3$, οπότε $v = 12$.

Αν $\kappa > 2$, τότε $2^{\kappa-1} + 1 \nmid v$. Πράγματι, αν $2^{\kappa-1} + 1|v = 2^\kappa \mu$, τότε αφού $2^{\kappa-1} + 1$ περιττός, έπεται ότι $2^{\kappa-1} + 1|\mu$, δηλαδή πρέπει $2^{\kappa-1} + 1|2^\alpha - 1$, για $\alpha \leq \kappa$. Αυτό είναι αδύνατο, για $\alpha \leq \kappa - 1$, ενώ επίσης για $\alpha = \kappa$ ισχύει ότι:

$$2^{\kappa-1} + \frac{1}{2} < 2^{\kappa-1} + 1 < 2^\kappa + 1.$$

Επειδή μέχρι τώρα έχουμε ότι $2^\kappa|v$ και $2^\kappa + 1 \nmid v$ και επίσης $2^{\kappa-1}|v$ και $2^{\kappa-1} + 1 \nmid v$, έπεται ότι οι $2^\kappa + 1$ και $2^{\kappa-1} + 1$ είναι και οι δύο πρώτοι. Επειδή ο αριθμός $2^x + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3, αν x περιττός, έπεται ότι $2^\kappa + 1 = 3$ (αδύνατο, γιατί τότε $\kappa = 1$) ή $2^{\kappa-1} + 1 = 3$, οπότε $\alpha = \kappa = 2$ και $\mu = 2^\alpha - 1 = 3$, οπότε $v = 12$.

Πρόβλημα 3. Έστω $AB\Gamma\Delta$ κυρτό τετράπλευρο και M το μέσο της πλευράς AB . Η ευθεία AB είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\Gamma\Delta M$ στο σημείο M . Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AM\Delta$ και $BM\Gamma$ τέμνονται για δεύτερη φορά στο σημείο E . Οι ευθείες AE , MD τέμνονται στο σημείο K και οι ευθείες BE , $M\Gamma$ τέμνονται στο σημείο Λ . Τα σημεία Z και Θ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε $Z\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{E}\Theta = A\hat{E}B$, με το σημείο Z μεταξύ των σημείων Δ και Θ . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες KZ , $\Lambda\Theta$ και EM συντρέχουν.

Λύση. Από την υπόθεση $Z\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{E}\Theta = A\hat{E}B$ λαμβάνουμε

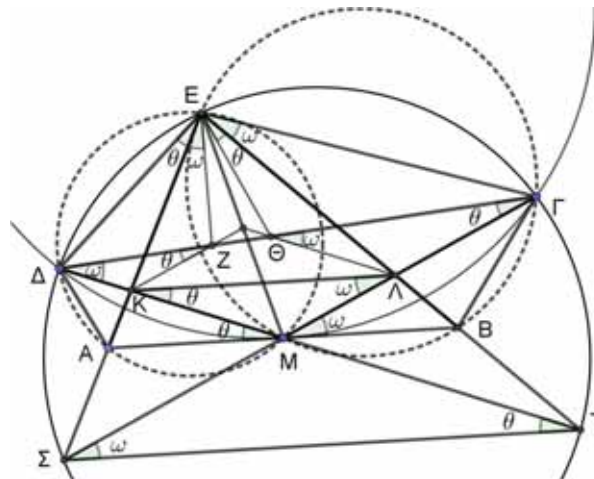
$$Z\hat{E}\Theta + \Theta\hat{E}B + B\hat{E}\Gamma = Z\hat{E}\Theta + \Theta\hat{E}B + A\hat{E}Z \Rightarrow B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}Z = \omega, \quad (1)$$

$$Z\hat{E}\Theta + A\hat{E}Z + \Delta\hat{E}A = Z\hat{E}\Theta + \Theta\hat{E}B + A\hat{E}Z \Rightarrow A\hat{E}\Delta = \Theta\hat{E}B = \theta. \quad (2)$$

Από την ισότητα εγγεγραμμένης γωνία με τη γωνία χορδής εφαπτομένης στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\Gamma\Delta M$, τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AME\Delta$ και $BME\Gamma$ και τις ισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$M\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{M}\Delta = A\hat{E}\Delta = \Theta\hat{E}B = \Theta\hat{E}\Lambda = \theta,$$

$$M\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{M}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}Z = K\hat{E}Z = \omega.$$



Επομένως, προκύπτει ότι τα τετράπλευρα ΕΘΛΓ και ΕΔΚΖ είναι εγγράψιμα, οπότε:
 $\Lambda\hat{\Theta}\Gamma = \Lambda\hat{E}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = M\hat{\Delta}\Gamma = \omega \Rightarrow \Lambda\Theta \parallel M\Delta, \quad K\hat{Z}\Delta = K\hat{E}\Delta = A\hat{E}\Delta = M\hat{\Gamma}\Delta = \omega \Rightarrow KZ \parallel M\Gamma.$
 Έστω ότι οι ευθείες ΕΑ και ΕΒ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΕΔΓ στα σημεία Σ και Τ, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} T\hat{\Delta}\Gamma &= S\hat{E}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma \Rightarrow \Delta, M, T \text{ συνευθειακά,} \\ S\hat{\Gamma}\Delta &= T\hat{E}\Gamma = M\hat{\Gamma}\Delta \Rightarrow \Gamma, M, \Sigma \text{ συνευθειακά.} \end{aligned}$$

Τότε από τις ισότητες $T\hat{\Sigma}\Gamma = T\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{M}\Gamma$, προκύπτει ότι $\Sigma T \parallel AB$.

Επειδή $MA = MB$, από τα ζεύγη ομοίων τριγώνων ΚΑΜ, ΚΣΤ και ΛΜΒ, ΛΣΤ προκύπτει ότι

$$\frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda B} = \frac{\Lambda\Sigma}{\Lambda M} = \frac{\Sigma T}{M B} = \frac{\Sigma T}{M A} = \frac{K\Sigma}{K A} \Rightarrow K\Lambda \parallel \Sigma T \parallel AB.$$

Θεωρούμε τώρα την ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο Ε, η οποία στέλνει το ευθύγραμμο τμήμα ΣΤ στο ΚΛ. Επειδή $KZ \parallel \Sigma\Gamma$ και $\Lambda\Theta \parallel T\Delta$ η ομοιοθεσία αυτή στέλνει τις συντρέχουσες ευθείες ΔΜ, ΣΓ και ΤΔ στις ευθείες ΔΜ, ΚΖ και ΛΘ, οπότε και οι ευθείες αυτές συντρέχουν.

Πρόβλημα 4. Σε ένα διεθνές συνέδριο συμμετέχουν n επιστήμονες ($n > 100$), όπου ισχύουν τα εξής:

- Κάθε επιστήμονας γνωρίζει τουλάχιστον 4 άλλους συμμετέχοντες, και κάθε γνωριμία είναι αμοιβαία.
- Σε καμία ομάδα 4 επιστημόνων δεν είναι όλοι μεταξύ τους γνωστοί.
- Οποιοιδήποτε δύο επιστήμονες που συμμετέχουν στο συνέδριο συνδέονται μέσω μιας αλυσίδας γνωστών. Τον ελάχιστο αριθμό γνωριμιών που χρειάζονται για να συνδεθούν μέσω μιας αλυσίδας γνωστών συμμετεχόντων στο συνέδριο, την αποκαλούμε απόσταση των δύο επιστημόνων.

Αν d είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμμετεχόντων στο συνέδριο, να αποδείξετε ότι

$$d \leq \left\lceil \frac{4}{7}n \right\rceil + 3.$$

Σημείωση. Με $[x]$ συμβολίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του πραγματικού αριθμού x .

Λύση

Έστω V το σύνολο των επιστημόνων του συνεδρίου. Επειδή η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο επιστημόνων στο συνέδριο είναι d , υπάρχουν δύο συμμετέχοντες, έστω u και v , με απόσταση $d = d(u, v)$. Ορίζουμε το σύνολο: $N_i := \{x \in V \mid d(u, x) = i\}$.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι για κάθε $0 \leq i \leq d-3$, πρέπει να ισχύει ότι:

$$|N_i| + |N_{i+1}| + |N_{i+2}| + |N_{i+3}| \geq 7.$$

Πράγματι, εφόσον κάθε επιστήμονας γνωρίζει τουλάχιστον 4, ισχύει ότι

$$|N_i| + |N_{i+1}| + |N_{i+2}| \geq 5 \text{ και } |N_{i+1}| + |N_{i+2}| + |N_{i+3}| \geq 5.$$

Επομένως αν, προς άτοπο, υποθέσουμε ότι $|N_i| + |N_{i+1}| + |N_{i+2}| + |N_{i+3}| \leq 6$, τότε πρέπει

$$|N_i| = |N_{i+3}| = 1 \text{ και } |N_{i+1}| + |N_{i+2}| = 4.$$

Όμως κάθε επιστήμονας στο $N_{i+1} \cup N_{i+2} \setminus \{ \}$ έχει το πολύ 4 γνωστούς, και η ισότητα θα σήμαινε ότι στο σύνολο αυτό σχηματίζεται μια ομάδα 4 επιστημόνων, που όλοι είναι γνωστοί μεταξύ τους, άτοπο από την υπόθεση. Συνεπώς, η σχέση

$$|N_i| + |N_{i+1}| + |N_{i+2}| + |N_{i+3}| \leq 6,$$

δεν είναι δυνατή. Από το προηγούμενο προκύπτει ότι:

$$n = |N_1| + \dots + |N_d| \geq 7 \left\lceil \frac{d}{4} \right\rceil$$

και λύνοντας ως προς d παίρνουμε το ζητούμενο.



Η 66^η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Ηλιόλουστη Ακτή, Αυστραλία, 10-20 Ιουλίου 2025

Η 66η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα πραγματοποιήθηκε από 10 έως 20 Ιουλίου 2025 στην Ηλιόλουστη Ακτή (Sunshine Coast) της Αυστραλίας. Συνολικά συμμετείχαν 110 χώρες και συνολικά 630 μαθητές.

Οι Έλληνες μαθητές είχαν εξαιρετική απόδοση και κατέκτησαν 2 αργυρά μετάλλια, 3 χάλκινα μετάλλια και μία εύφημη μνεία, ως εξής:

Τσουρέκας Κυριάκος	Σχολή Μωραΐτη	Αργυρό μετάλλιο
Μπερκουτάκης Νεκτάριος Ραφαήλ	3 ^ο ΓΕΛ Πύργου	Αργυρό μετάλλιο
Ηλιάδης Σωκράτης	Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων	Χάλκινο μετάλλιο
Καβαλλάρης Ανδρέας	Εράσμιος Ελληνογερμανική Σχολή	Χάλκινο μετάλλιο
Καραγεωργίου Λάζαρος	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο μετάλλιο
Τζαβούλης Σωτήρης	Homo Educandus - Αγωγή	Εύφημη μνεία

Πριν την IMO, οι μαθητές μας προετοιμάστηκαν συστηματικά, μελετώντας και παρακολουθώντας εντατικό πρόγραμμα μαθημάτων εξ' αποστάσεως, από τα μέλη της επιτροπής διαγωνισμών της ΕΜΕ, Γιάννη Τυρλή, Σιλουανό Μπραζιτίκο, Αχιλλέα Συνεφακόπουλο, Δημήτρη Διαμαντίδη, Ανδρέα Βαρβεράκη, Ιάσωνα Προδρομίδα, Γιάννη Γαλαμάτη, Διονύση Πετράκη και Ορέστη Λιγνό. Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Σιλουανός Μπραζιτίκος, Επίκουρος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Κρήτης, με υπαρχηγό τον Αχιλλέα Συνεφακόπουλο, διδάκτορα μαθηματικών. Σε αυτούς οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων που ακολουθούν.



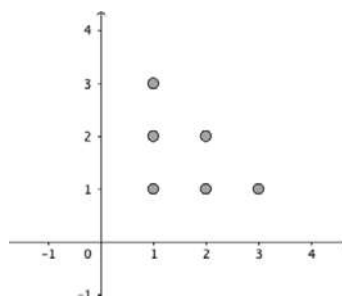
Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1: Μια ευθεία στο επίπεδο ονομάζεται *ηλιόλουστη* αν δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των x , τον άξονα των y , ή προς την ευθεία $x + y = 0$.

Δεδομένου ακεραίου $n \geq 3$, να προσδιορίσετε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους k για τους οποίους υπάρχουν n διακεκριμένες ευθείες του επιπέδου οι οποίες ικανοποιούν και τις δύο από τις ακόλουθες συνθήκες:

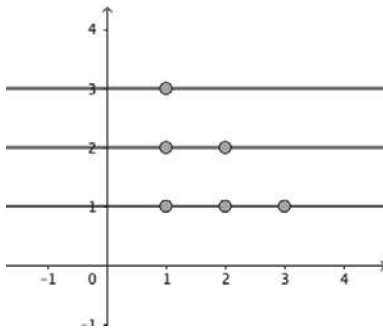
- Για όλους τους θετικούς ακεραίους a και b , με $a + b \leq n + 1$ το σημείο (a, b) ανήκει σε τουλάχιστον μία από τις ευθείες.
- Ακριβώς k από τις n ευθείες είναι ηλιόλουστες.

Λύση (Σωκράτης Ηλιάδης). Προφανώς $0 \leq k \leq n$. Αρχικά θα λύσουμε την περίπτωση $n = 3$. Το σχήμα είναι το παρακάτω:

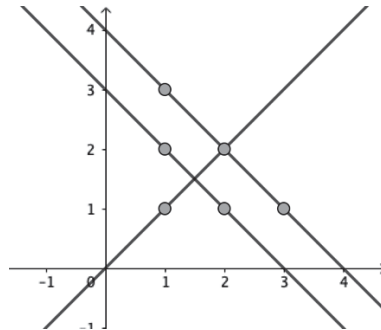


Σχήμα 1: $n = 3$.

Για $k = 0$ και $k = 1$ γίνεται ως εξής:

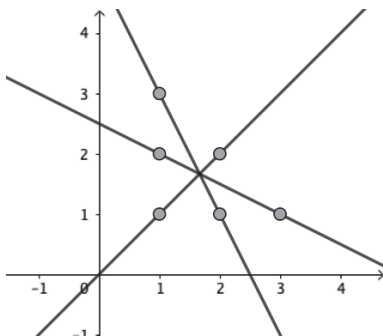


Σχήμα 2: $k = 0$.

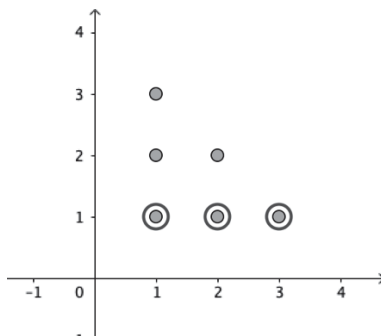


Σχήμα 3: $k = 1$

Για $k = 3$ γίνεται ως εξής:



Σχήμα 4: $k = 3$



Σχήμα 5: $k = 2$

Θα αποδείξουμε ότι για $k = 2$ είναι αδύνατο.

Αν σκεφτούμε τα κυκλωμένα σημεία, βρίσκουμε ότι κάποια ευθεία θα πρέπει να περνάει από καθένα από αυτά. Αν μια ευθεία περνάει από δύο από αυτά τα σημεία, τότε περνάει από όλα και δεν είναι ηλιόλουστη. Αλλιώς, περνάει από το πολύ ένα σημείο από αυτά. Διακρίνω δύο περιπτώσεις για να βρω τις τρεις ευθείες:

1η. Φέρνουμε την ευθεία που περνάει από τα κυκλωμένα σημεία. Τότε έχουμε να χρησιμοποιήσουμε άλλες δύο ηλιόλουστες ευθείες για να καλύψουμε τα υπόλοιπα τρία σημεία. Άρα, κάποια θα καλύπτει τουλάχιστον δυο από αυτά. Όμως, οποιοδήποτε ζεύγος δύο σημείων και να πάρουμε δίνει μια μη ηλιόλουστη ευθεία, άτοπο.

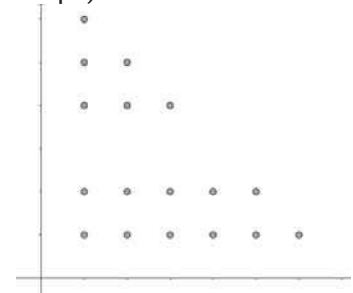
2η. Δεν φέρνουμε την ευθεία που περνάει από τα κυκλωμένα σημεία. Τότε από κάθε κυκλωμένο σημείο θα περνάει ακριβώς μια ευθεία, αφού έχουμε τρεις ευθείες και τρία σημεία, και κάθε ευθεία καλύπτει το πολύ ένα. Έτσι, η μη ηλιόλουστη ευθεία δεν μπορεί να είναι οριζόντια.

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για τα σημεία της πρώτης στήλης, η μη ηλιόλουστη ευθεία δεν μπορεί να είναι κατακόρυφη. Τέλος, δουλεύοντας με την μεγάλη διαγώνιο, η μη ηλιόλουστη ευθεία δεν μπορεί να είναι παράλληλη της $x + y = 0$, άτοπο.

Έτσι, το $k = 2$ είναι αδύνατο.

Επαγωγικά θα αποδείξουμε ότι για όλα τα n οι απαντήσεις είναι $k = 0, 1$, ή 3 . Έστω ότι ο ισχυρισμός αυτός ισχύει για $n - 1$ για κάποιο $n \geq 4$. Θα τον αποδείξουμε για το n .

Το σχήμα για τον n είναι το διπλανό.



Σχήμα 6: $n \geq 4$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Μία από τις ευθείες είναι η «μεγάλη» διαγώνιος. Τότε από τις υπόλοιπες $n - 1$ ευθείες πρέπει οι k να είναι ηλιόλουστες και να καλύπτουν τα σημεία ενός σχήματος ίδιου με αυτό που θεωρήσαμε για το $n - 1$. Άρα, αν $k = 0, 1$, ή 3 , τότε βρήκαμε τρόπο να φτιάξουμε τις ευθείες επαγωγικά. Αλλιώς, η μεγάλη διαγώνιος δεν μπορεί να είναι μία από αυτές τις ευθείες.

Δουλεύοντας ομοίως για την «μεγάλη» οριζόντια ευθεία και την «μεγάλη» κατακόρυφη ευθεία, ούτε αυτές μπορούν να είναι κάποια από τις ευθείες για $k \neq 0, 1, 3$.

Έτσι, όπως και για την περίπτωση $n = 3$, κάθε ευθεία πρέπει να περνάει από ακριβώς ένα σημείο της «μεγάλης» οριζόντιας ευθείας. Επιπλέον, από κάθε σημείο της περνάει το πολύ μια ευθεία, αφού κάθε ευθεία περνάει από το πολύ ένα από αυτά, και έχουμε n ευθείες και n σημεία. Το ίδιο ισχύει και για την «μεγάλη» κατακόρυφη και την «μεγάλη» διαγώνια ευθεία.

Παρατηρούμε ότι αν κάποια ευθεία περνάει από σημείο της «μεγάλης» κατακόρυφης, ή οριζόντιας ή διαγώνιας ευθείας, τότε θα πρέπει να περνάει από κάποια από τις κορυφές του τριγώνου που σχηματίζεται από αυτές, δηλ. τα σημεία $(1,1)$, $(1,n)$, $(n,1)$.

Έτσι, όλες οι ευθείες περνάνε από κάποια από τις κορυφές. Αλλά δεν υπάρχουν δύο ευθείες που να περνάνε από την ίδια κορυφή. Άρα, αφού είναι τρεις οι κορυφές, έχουμε το πολύ τρεις ευθείες, άτοπο, αφού $n \geq 4$. Έτσι, για $k \neq 0, 1, 3$, δεν υπάρχει τέτοια n -άδα ευθειών, ενώ για $k = 0, 1$, ή 3 κατασκευάζεται επαγωγικά.

Επομένως, με βάση το επαγωγικό βήμα, για κάθε $n \geq 3$, η απάντηση είναι $k = 0, 1$, ή 3 .

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε τους κύκλους Ω και Γ με κέντρα τα σημεία M και N , αντίστοιχα, ώστε η ακτίνα του Ω να είναι μικρότερη της ακτίνας του Γ . Υποθέτουμε ότι οι κύκλοι Ω και Γ τέμνονται σε δύο διακεκριμένα σημεία A και B . Η ευθεία MN τέμνει τον Ω στο σημείο C και τον Γ στο σημείο D , ώστε τα σημεία C, M, N και D να βρίσκονται στην ευθεία με αυτήν τη σειρά. Έστω P το περίκεντρο του τριγώνου ACD . Η ευθεία AP τέμνει τον Ω στο σημείο $E \neq A$ και τον Γ στο σημείο $F \neq A$. Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου PMN . Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το H και είναι παράλληλη στην AP εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BEF .

(Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.)

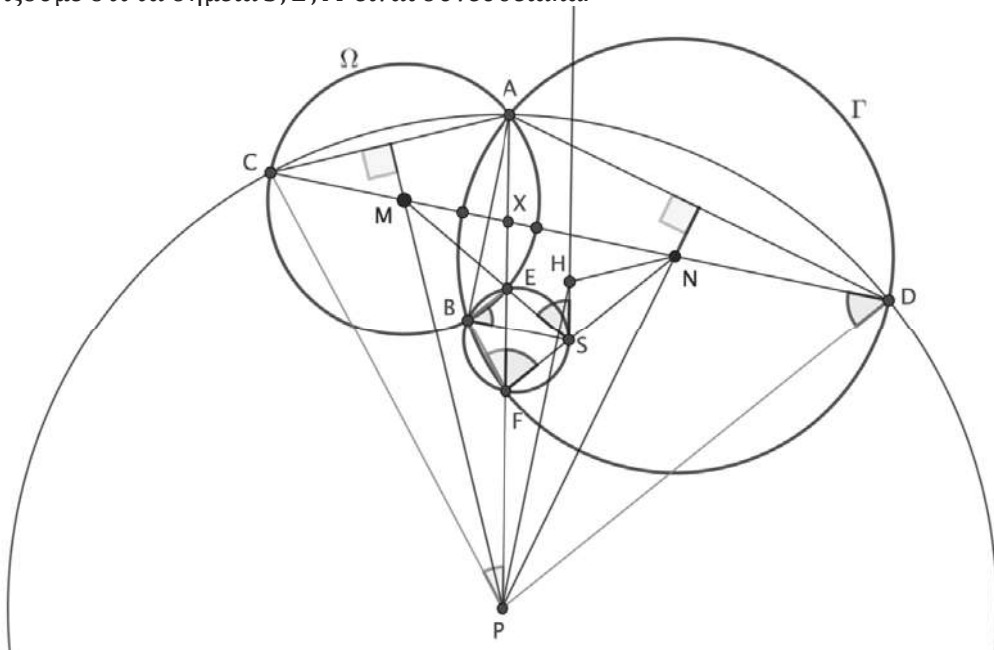
Λύση (Κυριάκος Τσουρέκας) Παρατηρούμε ότι είναι

$$B\hat{F}A = B\hat{D}A = 2 \cdot N\hat{D}A = 2 \cdot C\hat{D}A = C\hat{P}A,$$

οπότε $BF \parallel CP$. Ομοίως, $BE \parallel PD$.

Προφανώς, είναι $AB \perp CD$, αφού η CD είναι η μεσοκάθετος του AB . Έστω S το μέσο του τόξου EF του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BEF , το οποίο δεν περιέχει το B .

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία S, E, M είναι συνευθειακά.



Σχήμα 7- Πρόβλημα 2

Πράγματι, τα σημεία S, E, M είναι συνευθειακά, αν, και μόνο αν, $M\hat{E}B + B\hat{E}S = 180^\circ$. Είναι

$$B\hat{E}S = 180^\circ - B\hat{F}S = 180^\circ - (B\hat{F}E + E\hat{F}S) = 180^\circ - C\hat{P}A - \frac{E\hat{B}F}{2}$$

και

$$M\hat{E}B = 90^\circ - \frac{B\hat{M}E}{2} = 90^\circ - B\hat{A}E = 90^\circ - A\hat{P}H.$$

Συνεπώς, αρκεί να ισχύει

$$180^\circ - \widehat{CPA} - \frac{E\widehat{BF}}{2} + 90^\circ - \widehat{APH} = 180^\circ \quad (1)$$

Λόγω του ισχυρισμού 1, έπεται εύκολα ότι

$$E\widehat{BF} = 180^\circ - \widehat{CPD} = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \widehat{PCD}) = 2 \cdot \widehat{PCD},$$

Επομένως για να ισχύει η (1), αρκεί να είναι $\widehat{CPA} + \widehat{APH} + \widehat{PCD} = 90^\circ$, που ισχύει, αφού $PH \perp CD$. Ομοίως, τα σημεία S, F, N είναι συνευθειακά.

Ισχυριζόμαστε ότι το H είναι το έγκεντρο του τριγώνου SMN . Πράγματι, έστω X το σημείο τομής των AP, CD . Τότε

$$N\widehat{FX} = S\widehat{BE} = \frac{E\widehat{BF}}{2} = \widehat{PCD} = P\widehat{DX},$$

οπότε το τετράπλευρο $FNDP$ είναι εγγράψιμο. Επομένως, $M\widehat{NF} = F\widehat{PD} = A\widehat{PD}$. Όμως,

$$H\widehat{NM} = M\widehat{PH} = A\widehat{PN} = \frac{A\widehat{PD}}{2},$$

οπότε $M\widehat{NF} = 2 \cdot H\widehat{NM}$, που σημαίνει ότι η HN είναι διχοτόμος της $M\widehat{NS}$. Ομοίως, η HM είναι διχοτόμος της $S\widehat{MN}$. Συνεπώς, η SH είναι διχοτόμος της $M\widehat{SN}$.

Θα δείξουμε ότι η SH έχει τις ζητούμενες ιδιότητες:

$$E\widehat{SH} = \frac{M\widehat{SN}}{2} = \frac{E\widehat{BF}}{2} = S\widehat{BE},$$

Επομένως, η SH εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BEF στο S . Επίσης, $H\widehat{SE} = S\widehat{BE} = F\widehat{ES}$, οπότε $SH \parallel EF$. Άρα η ευθεία που διέρχεται από το H και είναι παράλληλη στην AP εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BEF .

Πρόβλημα 3.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ονομάζεται **υπέροχη** αν

$$f(a) | b^a - f(b)^{f(a)}$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{N}$. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή της πραγματικής σταθεράς c , ώστε να ισχύει ότι $f(n) \leq cn$, για κάθε υπέροχη συνάρτηση f και κάθε θετικό ακέραιο n .

Λύση (Βασισμένη στη λύση του Κυριάκου Τσουρέκα). Έστω f μια υπέροχη συνάρτηση και έστω $P(a, b)$ η δοθείσα σχέση. Τότε η $P(a, f(a))$, η οποία σημαίνει ότι $f(a) | f(a)^a - f(f(a))^{f(a)}$, δίνει ότι $f(a) | f(f(a))^{f(a)}$ για κάθε θετικό ακέραιο a . Έτσι, αν ο p είναι πρώτος διαιρέτης του $f(a)$, τότε θα διαιρεί και τον $f(f(a))$. Αλλά ισχύει η σχέση

$$P(f(a), a): f(f(a)) | a^{f(a)} - f(a)^{f(f(a))},$$

οπότε αν ο p είναι πρώτος διαιρέτης του $f(a)$, τότε ο p είναι πρώτος διαιρέτης του a .

Έστω p πρώτος. Από τη σχέση

$$P(p, p): f(p) | p^p - f(p)^{f(p)},$$

συμπεραίνουμε ότι $f(p) | p^p$. Συνεπώς, είτε $f(p) = 1$ είτε $f(p) = p^t$ για κάποιο $1 \leq t \leq p$.

Αν υπάρχουν άπειροι πρώτοι p τέτοιοι ώστε $f(p) = p^t$ με $1 \leq t \leq p$, τότε

$$P(p, b): p^t | b^p - f(b)^{p^t}.$$

Θεωρούμε πρώτο αριθμό p αρκούντως μεγαλύτερο από το b και το $f(b)$. Από το θεώρημα Euler είναι $b^p \equiv b \pmod{p}$ και $f(b)^{p^t} \equiv f(b) \pmod{p}$, οπότε $p | b - f(b)$.

Αφού $b - f(p) < p$, έπεται ότι $b - f(b) = 0$, και άρα $f(b) = b$ για κάθε θετικό ακέραιο b .

Έστω τώρα ότι υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος πρώτοι p με $f(p) = p^t$ με $1 \leq t \leq p$.

Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος M τέτοιος, ώστε για κάθε πρώτο $p > M$ να ισχύει $f(p) = 1$.

Έστω a ένας περιττός θετικός ακέραιος, και έστω ένας πρώτος $p > M$ τέτοιος ώστε

$p \equiv -1 \pmod{f(a)}$, η ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζεται από το θεώρημα Dirichlet. Από τη σχέση

$$P(a, p): f(a) | p^a - 1,$$

έπεται ότι $f(a) | (-1)^a - 1 = 2$, οπότε $f(a) = 1$ ή $f(a) = 2$. Αν $f(a) = 2$, τότε το 2 είναι πρώτος διαιρέτης του $f(a)$, κι άρα και του a , άτοπο, αφού ο a είναι περιττός. Επομένως, $f(a) = 1$ για κάθε περιττό θετικό ακέραιο a .

Έστω k θετικός ακέραιος. Τότε είτε ο $f(2k)$ είναι άρτιος είτε $f(n) = 1$, για κάθε θετικό ακέραιο n .

Πράγματι, αν ο $f(2k)$ είναι άρτιος, τελειώσαμε. Αν ο $f(2k)$ είναι περιττός, τότε $f(f(2k)) = 1$, οπότε η σχέση

$$P(2k, f(2k)): f(2k) | f(2k)^{2k} - f(f(2k))^{f(2k)} = f(2k)^{2k} - 1$$

δίνει ότι $f(2k) | 1$, και άρα $f(2k) = 1$. Αν ο a είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος, τότε η σχέση $P(a, 2k): f(a) | (2k)^a - 1$ δίνει ότι ο $f(a)$ είναι περιττός, οπότε $f(a) = 1$. Δηλαδή, $f(a) = 1$ για κάθε άρτιο θετικό ακέραιο a , και άρα $f(n) = 1$, για κάθε θετικό ακέραιο n .

Θα αποδείξουμε ότι αν ο $f(2k)$ είναι άρτιος, τότε είναι δύναμη του 2. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει περιττός πρώτος διαιρέτης p του $f(2k)$. Τότε ισχύει

$$P(2k, p): f(2k) | p^{2k} - f(p)^{f(2k)} = p^{2k} - 1,$$

οπότε $p | 1$, άτοπο. Άρα ο $f(2k)$ δεν έχει περιττούς πρώτους διαιρέτες, οπότε είναι δύναμη του 2.

Έτσι, αν a άρτιος, τότε $f(a) = 2^{g(a)}$, για κάποιο θετικό ακέραιο $g(a)$.

Αν $b = 8k + 3$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, και a άρτιος, τότε $2^{g(a)} | b^a - 1$. Από LTE είναι

$$v_2(b^a - 1) = v_2(b - 1) + v_2(b + 1) + v_2(a) - 1 = 1 + 2 + v_2(a) - 1 = v_2(a) + 2,$$

οπότε πρέπει $v_2(a) + 2 \geq g(a)$. Έτσι, αν $k \in \mathbb{N}$, και m περιττός, τότε

$$f(2^k m) = 2^{g(2^k m)} \leq 2^{v_2(2^k m) + 2} = 4 \cdot 2^k.$$

Άρα $c \leq 4$. Τώρα θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει καλύτερη σταθερά από την $c = 4$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ 2, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος } \neq 4 \\ 16, & \text{αν } n = 4. \end{cases}$$

Επαληθεύουμε τη συνθήκη $P(a, b)$ για όλους $a, b \in \mathbb{N}$:

- Αν ο a είναι περιττός, τότε $f(a) = 1$, και η συνθήκη $f(a) | b^a - f(b)^{f(a)}$ είναι άμεση.

- Αν ο a είναι άρτιος και $a \neq 4$, τότε $f(a) = 2$, και η συνθήκη γράφεται $2 | b^a - f(b)^2$.

Από την κατασκευή της f , οι αριθμοί b και $f(b)$ έχουν την ίδια αριτιότητα, οπότε η συνθήκη αληθεύει.

- Αν ο $a = 4$, τότε $f(a) = 16$, και η συνθήκη γράφεται

$$16 | b^4 - f(b)^{16}.$$

Αν ο b είναι άρτιος, τότε και οι $f(b)$ είναι άρτιος, οπότε και οι δύο αριθμοί b^4 και $f(b)^{16}$ είναι πολλαπλάσια του 16. Αν ο b είναι περιττός, έστω $b = 2k + 1$, τότε $f(b) = 1$, και ο αριθμός

$$b^4 - f(b)^{16} = b^4 - 1 = (b - 1)(b + 1)(b^2 + 1) = 8k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$$

είναι πολλαπλάσιο του 16.

Επομένως, η f είναι μια υπέροχη συνάρτηση με $f(4) = 16 = 4 \cdot 4$, οπότε η τιμή $c = 4$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

Πρόβλημα 4: Ένας γνήσιος διαιρέτης του θετικού ακεραίου N είναι ένας θετικός ακέραιος που διαιρεί τον N χωρίς να ισούται με αυτόν. Δίνεται μια άπειρη ακολουθία $a_1, a_2, \dots$ αποτελούμενη από θετικούς ακεραίους, καθένας εκ των οποίων έχει τουλάχιστον τρεις γνήσιους διαιρέτες. Για κάθε $n \geq 1$, ο a_{n+1} είναι το άθροισμα των τριών μεγαλύτερων γνήσιων διαιρετών του a_n . Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του a_1 .

Λύση

Σε όλη τη διάρκεια, με τον όρο **διαιρέτες** εννοούμε θετικούς διαιρέτες. Έστω $d_i(a)$ ο i -οστός μεγαλύτερος γνήσιος διαιρέτης ενός θετικού ακεραίου a .

Πρώτα δείχνουμε ότι κάθε όρος της ακολουθίας είναι άρτιος.

Αν a_n είναι άρτιος για κάποιο n , τότε

$$a_{n+1} = d_1(a_n) + d_2(a_n) + d_3(a_n) \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_n}{5} < a_n.$$

Εφόσον το a_{n+1} είναι το άθροισμα τριών περιττών διαιρετών, επομένως είναι και αυτός περιττός. Συνεπώς, έχουμε μια άπειρη, αυστηρά φθίνουσα ακολουθία θετικών ακεραίων, γεγονός που οδηγεί σε αντίφαση.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι αν ο a_n δεν διαιρείται με το 3, τότε ο a_{n+1} δεν διαιρείται με το 3. Για την απόδειξη, θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

- Αν ο a_n διαιρείται με το 4, τότε

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{4} + d_3(a_n) = 3 \cdot \frac{a_n}{4} + d_3(a_n) \equiv d_3(a_n) \not\equiv 0 \pmod{3}.$$
- Αν ο a_n δεν διαιρείται με το 4, έστω p ο μικρότερος περιττός πρώτος διαιρέτης του a_n . Τότε ο $d_1(a_n) = \frac{a_n}{2}$ είναι περιττός, ο $d_2(a_n) = \frac{a_n}{p}$ είναι άρτιος και $d_3(a_n) = a_{n+1} - d_1(a_n) - d_2(a_n)$ είναι περιττός. Τότε ο $\frac{a_n}{d_3(a_n)}$ πρέπει να είναι ο μικρότερος δεύτερος άρτιος διαιρέτης του a_n , οπότε πρέπει να είναι $2p$, άρα

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{p} + \frac{a_n}{2p} = 3 \frac{a_n}{2p} + \frac{a_n}{2} \equiv \frac{a_n}{2} \not\equiv 0 \pmod{3}$$

Έτσι, αν $a_n \not\equiv 0 \pmod{3}$ για κάποιο n , τότε

$$a_{n+1} = d_1(a_n) + d_2(a_n) + d_3(a_n) \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{4} + \frac{a_n}{5} < a_n$$

Έτσι έχουμε μια άπειρη, αυστηρά φθίνουσα ακολουθία, που οδηγεί σε αντίφαση.

Τώρα έχουμε αποδείξει ότι κάθε όρος της ακολουθίας διαιρείται με το 6.

$$d_1(a_n) = \frac{a_n}{2}, d_2(a_n) = \frac{a_n}{3}, d_3(a_n) = \frac{a_n}{4} \text{ ή } \frac{a_n}{5} \text{ ή } \frac{a_n}{6}, \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots$$

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για κάθε a_n , ως εξής:

Αν ο a_n διαιρείται με το 4 και το 6, τότε

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_n}{4} = \frac{13}{12} a_n.$$

(ii) Αν ο a_n διαιρείται με το 5, αλλά όχι με το 4, τότε

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_n}{5} = \frac{31}{30} a_n.$$

Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή το a_{n+1} δεν διαιρείται με το 4, οπότε η περίπτωση αυτή δεν οδηγεί σε λύση.

(iii) Αν το a_n δεν διαιρείται με το 4 ή με το 5, τότε

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_n}{6} = a_n.$$

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις $a_{n+1} \geq a_n$ και $v_2(a_{n+1}) \leq v_2(a_n)$. Καθώς το $v_2(a_n)$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων, πρέπει τελικά να είναι σταθερή. Μόνο στην περίπτωση (iii) ισχύει $v_2(a_{n+1}) = v_2(a_n)$, επομένως από ένα δείκτη και μετά πρέπει να συμβαίνει αυτό. Με άλλα λόγια, υπάρχει κάποιο L τέτοιο ώστε $a_L = a_{L+1} = a_{L+2} = \dots$. Η περίπτωση (iii) συμβαίνει όταν το a_L διαιρείται με το 6, αλλά όχι με το 4 ή το 5, άρα $a_L = 6K$ όπου το K είναι σχετικά πρώτο προς το 10.

Επιλέγοντας το L να είναι το ελάχιστο με αυτή την ιδιότητα, πρέπει να έχουμε $v_2(a_L) > v_2(a_{L-1})$. Αυτό συμβαίνει μόνο στην περίπτωση (i). Έτσι, για $1 \leq n \leq L-1$, ισχύει η περίπτωση (i), ο a_n διαιρείται με 4 και $a_{n+1} = \frac{13}{12} a_n$. Έπεται ότι $a_1 = \frac{12^{L-1}}{13^{L-1}} a_L$. Τότε $a_L = 12^M \cdot 6N$, όπου $M > 0$, $N > 0$ και $N = \frac{K}{13^{L-1}}$ να είναι σχετικά πρώτο προς το 10.

Για κάθε τέτοιο a_1 έχουμε ότι:

$$a_k = 12^M \cdot 13^{k-1} \cdot 6N, \text{ για } 1 \leq k \leq M+1, \text{ και} \\ a_{M+1} = a_{M+2} = \dots = 6 \cdot 13^M \cdot N.$$

Πρόβλημα 5: Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το ακόλουθο *κοαλοπαιχνίδι* ανισοτήτων, το οποίο βασίζεται σε έναν θετικό πραγματικό αριθμό λ , τον οποίο γνωρίζουν και οι δύο παίκτες. Στον n -οστό γύρο του παιχνιδιού, οι κανόνες προβλέπουν τα εξής:

- Αν ο n είναι περιττός, η Αλίκη επιλέγει έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό x_n , ώστε

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$
- Αν ο n είναι άρτιος, ο Βασίλης επιλέγει έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό x_n , ώστε

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Αν κάποιος παίκτης δεν μπορεί να επιλέξει κατάλληλο αριθμό x_n , το παιχνίδι τελειώνει και ο αντίπαλος παίκτης κερδίζει. Αν το παιχνίδι συνεχίζεται επ' άπειρον, δεν έχουμε νικητή. Όλες οι επιλογές των παικτών είναι φανερές και στον αντίπαλο παίκτη. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του λ για τις οποίες η Αλίκη έχει στρατηγική νίκης και όλες τις τιμές του λ για τις οποίες ο Βασίλης έχει στρατηγική νίκης.

Λύση (α) Ξεκινάμε με την περίπτωση όπου $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Θα αποδείξουμε ότι μια στρατηγική νίκης για τον Βασίλη συνίσταται στην επιλογή του μεγαλύτερου δυνατού αριθμού σε κάθε γύρο. Πιο συγκεκριμένα, ο Βασίλης θα επιλέγει

$$x_{2k} = \sqrt{2 - x_{2k-1}^2}$$

κατά τη διάρκεια κάθε γύρου του παιχνιδιού.

Στον πρώτο γύρο, η Αλίκη επιλέγει έναν μη αρνητικό αριθμό $x_1 \leq \lambda$. Εφόσον $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, συνεπάγεται ότι $2 - x_1^2 \geq 0$ και επομένως ο Βασίλης μπορεί να επιλέξει $x_2 = \sqrt{2 - x_1^2}$, το οποίο διασφαλίζει ότι $x_1^2 + x_2^2 = 2$. Στον τρίτο γύρο, η Αλίκη πρέπει να επιλέξει έναν μη αρνητικό αριθμό x_3 έτσι ώστε $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\lambda$. Είτε δεν μπορεί και ο Βασίλης κερδίζει, είτε ο μεγαλύτερος αριθμός x_3 που μπορεί να επιλέξει ικανοποιεί

$$x_3 \leq 3\lambda - x_1 - \sqrt{2 - x_1^2} \leq 3\lambda - \sqrt{2} < \lambda.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $x + \sqrt{2 - x^2} \geq \sqrt{2}$ για όλα τα $x \in [0, \sqrt{2}]$, το οποίο μπορεί να αποδειχθεί υψώνοντας και τις δύο πλευρές στο τετράγωνο.

Τώρα, εφόσον $x_3 < \lambda$ συνεπάγεται ότι $2 - x_3^2 > 0$ και έτσι ο Βασίλης μπορεί να επιλέξει $x_4 = \sqrt{2 - x_3^2}$, το οποίο δίνει $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα, μπορούμε

επαγωγικά να αποδείξουμε ότι, εφόσον ο Βασίλης συνεχίζει να επιλέγει $x_{2k} = \sqrt{2 - x_{2k-1}^2}$, τότε είτε η Αλίκη χάνει στον επόμενο γύρο είτε πρέπει να επιλέξει έναν μη αρνητικό αριθμό x_{2k+1} τέτοιο ώστε $x_{2k+1} < \lambda$. Με άλλα λόγια, η στρατηγική του Βασίλη είναι έγκυρη και διασφαλίζει ότι θα μπορεί πάντα να κάνει μια νόμιμη κίνηση, ενώ όλοι οι αριθμοί που επιλέγει η Αλίκη είναι μικρότεροι από λ . Από την άλλη πλευρά, η στρατηγική του Βασίλη υπονοεί επίσης ότι

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = \sum_{i=1}^k \left(x_{2i-1} + \sqrt{2 - x_{2i-1}^2} \right) \geq k\sqrt{2},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ξανά το $x + \sqrt{2 - x^2} \geq \sqrt{2}$. Αφού $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, υπάρχει ένα k αρκετά μεγάλο ώστε $k\sqrt{2} > \lambda(2k + 1)$ και τότε η Αλίκη δεν έχει νόμιμη κίνηση στον γύρο $2k + 1$ και ο Βασίλης κερδίζει.

(β) Ας εξετάσουμε στη συνέχεια την περίπτωση όπου $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Η στρατηγική νίκης της Αλίκης συνίσταται στο να επιλέγει $x_n = 0$ για αρκετούς γύρους στην αρχή, και στη συνέχεια να επιλέγει έναν "μεγάλο" x_n σε έναν μεταγενέστερο γύρο. Τώρα θα κάνουμε αυτή τη στρατηγική ακριβή και θα αποδείξουμε ότι λειτουργεί.

Πρώτα δείχνουμε ότι η Αλίκη μπορεί να επιλέξει $x_n = 0$ για όσους διαδοχικούς γύρους επιθυμεί. Αυτό είναι προφανώς δυνατό στον πρώτο γύρο. Μετά από $2k$ γύρους, αν η Αλίκη επέλεξε $x_n = 0$ στους γύρους $n = 1, 3, \dots, 2k - 1$, τότε

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = x_2 + x_4 + \dots + x_{2k} \leq \sqrt{k(x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k}^2)}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Υποθέτοντας ότι ο Βασίλης δεν έχει χάσει ακόμα, πρέπει να ισχύει $x_1^2 + \dots + x_{2k}^2 \leq 2k$, το οποίο συνεπάγεται $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} \leq k\sqrt{2} < \lambda(2k + 1)$, επειδή $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Αυτό σημαίνει ότι η Αλίκη μπορεί νόμιμα να επιλέξει $x_{2k+1} = 0$ στον γύρο $2k + 1$, ανεξάρτητα από τους αριθμούς που έχει επιλέξει ο Βασίλης μέχρι στιγμής. Πιο συγκεκριμένα, η Αλίκη μπορεί στην πραγματικότητα να επιλέξει το x_{2k+1} να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός αριθμός που ικανοποιεί

$$x_{2k+1} \leq \lambda(2k + 1) - k\sqrt{2} = k(2\lambda - \sqrt{2}) + \lambda.$$

Σημειώστε ότι αυτό το ανώτατο όριο για το x_{2k+1} γίνεται αυθαίρετα μεγάλο καθώς το k αυξάνεται, εφόσον $2\lambda - \sqrt{2} > 0$. Είμαστε τώρα έτοιμοι να περιγράψουμε τη στρατηγική της Αλίκης. Έστω ℓ ένας αρκετά μεγάλος ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε

$$\frac{\ell\sqrt{2} + \sqrt{2\ell + 2}}{2\ell + 1} < \lambda.$$

Ένα τέτοιο ℓ υπάρχει πάντα εφόσον $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Η στρατηγική της Αλίκης είναι να επιλέξει $x_n = 0$ στους

γύρους $n = 1, 3, \dots, 2\ell - 1$ και στη συνέχεια να επιλέξει

$$x_{2\ell+1} = \lambda(2\ell + 1) - \ell\sqrt{2}$$

στον γύρο $2\ell + 1$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι αυτές οι επιλογές είναι πάντα νόμιμες, ανεξάρτητα από τις αποφάσεις του Βασίλη. Τώρα, παρατηρήστε ότι

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2\ell+1}^2 \geq x_{2\ell+1}^2 = (\lambda(2\ell + 1) - \ell\sqrt{2})^2 > 2\ell + 2,$$

από τους ορισμούς των $x_{2\ell}$ και ℓ . Αυτό συνεπάγεται ότι ο Βασίλης δεν έχει νόμιμη κίνηση στον γύρο $2\ell + 2$ και επομένως χάνει το παιχνίδι.

(c) Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Θα αποδείξουμε ότι κανένας παίκτης δεν έχει στρατηγική νίκης σε αυτή την περίπτωση. Το ίδιο επιχείρημα όπως στο μέρος (a) δείχνει ότι ο

Βασίλης μπορεί πάντα να κάνει μια νόμιμη κίνηση επιλέγοντας $x_{2k} = \sqrt{2 - x_{2k-1}^2}$ στον γύρο $2k$ και

επομένως είναι βέβαιο ότι δεν θα χάσει ποτέ. Ομοίως, με το επιχείρημα στο μέρος (b), η Αλίκη μπορεί πάντα να κάνει μια νόμιμη κίνηση επιλέγοντας $x_{2k+1} = 0$ στον γύρο $2k + 1$ και επομένως είναι βέβαιο ότι δεν θα χάσει ποτέ.

Πρόβλημα 6: Θεωρούμε ένα 2025×2025 πλέγμα μοναδιαίων τετραγώνων. Η Ματίλντα θέλει να τοποθετήσει πάνω στο πλέγμα κάποια ορθογώνια πλακίδια, ενδεχομένως διαφορετικών διαστάσεων, ώστε οι πλευρές κάθε πλακιδίου να ανήκουν σε κάποιες από τις γραμμές του πλέγματος και κάθε μοναδιαίο τετράγωνο του πλέγματος να καλύπτεται το πολύ από ένα πλακίδιο. Να προσδιορίσετε το ελάχιστο δυνατό πλήθος πλακιδίων που χρειάζεται να τοποθετήσει η Ματίλντα, ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πλέγματος να έχει ακριβώς ένα μοναδιαίο τετράγωνο που δεν καλύπτεται από κάποιο πλακίδιο.

Λύση

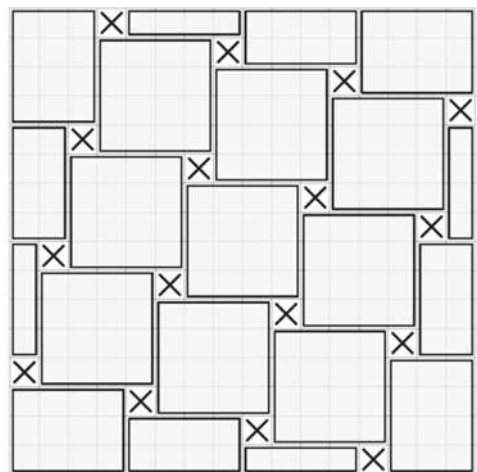
Αρχικά θα δώσουμε το παράδειγμα για την πιο γενική περίπτωση όπου έχουμε ένα $n \times n$ πλέγμα και $n = k^2$. Θα αποδείξουμε ότι η απάντηση είναι $k^2 + 2k - 3$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παράδειγμα για $k = 4$.

Τοποθετούμε $(k - 1)^2$ τετράγωνα στο κέντρο και στη συνέχεια γεμίζουμε τα κενά με $k - 1$ ορθογώνια, δηλαδή συνολικά με $k^2 + 2k - 3$ ορθογώνια.

Για το άνω φράγμα, περιβάλλουμε το αρχικό πλέγμα με τέσσερα πλακίδια $n \times 1$. Ένα *ανερχόμενο μονοπάτι* είναι ένα μονοπάτι που κινείται κατά μήκος των πλευρών των πλακιδίων προς τα πάνω και προς τα δεξιά. Σημειώστε ότι επιτρέπονται ανερχόμενα μονοπάτια μηδενικού μήκους. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_m$ η μακρύτερη δυνατή ακολουθία από X με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Υπάρχει ένα ανερχόμενο μονοπάτι που συνδέει την κάτω αριστερή γωνία του πλέγματος με την κάτω αριστερή γωνία του x_1 .
- Για κάθε $i = 1, 2, \dots, m - 1$, υπάρχει ένα ανερχόμενο μονοπάτι που συνδέει την πάνω δεξιά γωνία του x_i με την κάτω αριστερή γωνία του x_{i+1} .
- Υπάρχει ένα ανερχόμενο μονοπάτι που συνδέει την πάνω δεξιά γωνία του x_m με την πάνω δεξιά γωνία του πλέγματος.

Αυτά τα ανερχόμενα μονοπάτια και τα $x_1, x_2, \dots, x_m$ σχηματίζουν μαζί ένα *διαχωριστικό* το οποίο χωρίζει το πλέγμα σε δύο περιοχές. Έστω U το σύνολο των X στην ανώτερη περιοχή, έστω L το σύνολο των X στην κατώτερη περιοχή, και έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ που είναι τα X πάνω στο διαχωριστικό. Σημειώστε ότι τα U, L και $\mathcal{F}$ σχηματίζουν μια διαμέριση



Σχήμα 8



Η 42η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Σαράγεβο, Βοσνία Ερζεγοβίνη, 25-30 Απριλίου 2025

Η 42η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (BMO) πραγματοποιήθηκε από 25 έως 30 Απριλίου 2025 στο Σαράγεβο της Βοσνίας Ερζεγοβίνης. Συνολικά συμμετείχαν είκοσι τέσσερις ομάδες από είκοσι τρεις χώρες και 143 μαθητές και μαθήτριες.

Οι Έλληνες μαθητές είχαν εξαιρετική απόδοση και κατέκτησαν 2 αργυρά μετάλλια, 3 χάλκινα μετάλλια και μία εύφημη μνεία, ως εξής:

Τσουρέκας Κυριάκος	Σχολή Μωραΐτη	Αργυρό μετάλλιο
Μπερκουτάκης Νεκτάριος Ραφαήλ	3 ^ο Γενικό Λύκειο Πύργου	Αργυρό μετάλλιο
Ηλιάδης Σωκράτης	Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων	Χάλκινο μετάλλιο
Καβαλλάρης Ανδρέας	Εράσμειος Ελληνογερμανική Σχολή	Χάλκινο μετάλλιο
Καραγεωργίου Λάζαρος	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο μετάλλιο
Κουτσουράκης Κωνσταντίνος	Εκπαιδευτήρια Ελληνική Παιδεία	Εύφημη μνεία



Πριν την BMO, οι μαθητές μας προετοιμάστηκαν συστηματικά, μελετώντας και παρακολουθώντας πρόγραμμα μαθημάτων εξ' αποστάσεως, από τον Πρόεδρο της ΕΜΕ Ανάργυρο Φελλούρη και τα μέλη της επιτροπής διαγωνισμών της ΕΜΕ, Αχιλλέα Συνεφακόπουλο, Δημήτρη Διαμαντίδη και Ορέστη Λιγνό.

Τους μαθητές συνόδευσαν ως αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, στον οποίο οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν, και ως υπαρχηγός ο διδάκτωρ μαθηματικός Δημήτριος Διαμαντίδης.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Σαουδική Αραβία). Ένας ακέραιος $n > 1$ ονομάζεται *καλός* αν υπάρχει μετάθεση $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ των αριθμών $1, 2, 3, \dots, n$ τέτοια ώστε

- ο a_i και ο a_{i+1} να έχουν διαφορετική αρτιότητα για κάθε $1 \leq i \leq n - 1$, και
- το άθροισμα $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ να είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo n για κάθε $1 \leq k \leq n$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι καλοί αριθμοί, καθώς και άπειροι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι καλοί.

Σημείωση: Ένας ακέραιος x είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo n αν υπάρχει ένας ακέραιος y τέτοιος, ώστε $x \equiv y^2 \pmod{n}$.

Λύση. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι καλοί. Πράγματι, έστω $n = 4m$, για κάποιο θετικό ακέραιο m , και έστω ότι ο n είναι καλός. Έστω $a_i = 2$ για κάποιο $1 \leq i \leq n$. Έχουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $i = 1$. Τότε το $a_1 = 2$ θα είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo $4m$, οπότε θα υπάρχει ακέραιος x τέτοιος, ώστε $x^2 \equiv 2 \pmod{4m}$. Άρα ο x θα είναι άρτιος, και ο $x^2 - 2$ πολλαπλάσιο του 4, άτοπο, αφού το 2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.

2η περίπτωση: $i > 1$. Τότε

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} \equiv x^2 \pmod{4m} \text{ και } a_1 + a_2 + \dots + a_i \equiv y^2 \pmod{4m}.$$

για κάποιους ακέραιους x, y , οπότε $x^2 + 2 \equiv y^2 \pmod{4m}$. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι οι αριθμοί x και y έχουν την ίδια αρτιότητα, και άρα $4 \mid (x - y)(x + y)$. Αλλά, ισχύει $4m \mid (x - y)(x + y) + 2$, άτοπο, αφού το 2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 4. Συνεπώς, οι αριθμοί $n = 4m$, όπου m θετικός ακέραιος, δεν είναι καλοί.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί οι οποίοι είναι καλοί. Πράγματι, έστω ότι $n = p$, όπου ο p είναι ένας πρώτος αριθμός της μορφής $4k + 3$, με k ακέραιο. Θεωρούμε τους αριθμούς

$$1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2, p - 1^2, p - 2^2, \dots, p - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Ισχυριζόμαστε ότι σε αυτήν την ακολουθία, οποιοδήποτε δύο αριθμοί δεν είναι ίσοι μεταξύ τους modulo p .

Πράγματι, αν ισχυε $i^2 \equiv j^2 \pmod{p}$ με $1 \leq i < j \leq \frac{p-1}{2}$, τότε θα είχαμε ότι $p \mid (j - i)(j + i)$ με $0 < j - i < j + i < p$, άτοπο. Από αυτό προκύπτει ότι οι πρώτοι $\frac{p-1}{2}$ αριθμοί έχουν διαφορετικά υπόλοιπα modulo p . Ομοίως, το ίδιο ισχύει και για τους τελευταίους $\frac{p-1}{2}$ αριθμούς.

Στη συνέχεια, έστω ότι $i^2 \equiv p - j^2 \pmod{p}$ με $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$. Τότε $p \mid i^2 + j^2$.

Σύμφωνα με τις γνωστές ιδιότητες των τετραγωνικών υπολοίπων modulo έναν πρώτο p της μορφής $4k + 3$, καταλήγουμε στο ότι $p \mid i$ και $p \mid j$, που επίσης είναι άτοπο.

Άρα, ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$, οι δύο αριθμοί i^2 και $p - i^2$ έχουν υπόλοιπα διαφορετικής αρτιότητας modulo p , αφού το άθροισμά τους είναι ίσο με p , που είναι περιττός αριθμός. Ας θεωρήσουμε τώρα τα υπόλοιπα των αριθμών $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ κατά τη διαίρεσή τους με το p . Έστω ότι τα περιττά υπόλοιπα είναι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_m$, και τα άρτια υπόλοιπα είναι $b_1, b_2, \dots, b_n$, όπου $m + n = \frac{p-1}{2}$. Τώρα, ας θεωρήσουμε την εξής διάταξη (μετάθεση):

$$a_1, p - a_1, a_2, p - a_2, \dots, a_m, p - a_m, b_1, p - b_1, b_2, p - b_2, \dots, b_n, p - b_n.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω επιχειρήματα, είναι προφανές ότι δύο διαδοχικοί αριθμοί σε αυτή τη μετάθεση έχουν διαφορετική αρτιότητα (ένας είναι περιττός και ένας άρτιος). Επιπλέον, το άθροισμα των πρώτων i αριθμών της μετάθεσης αυτής είναι είτε ισότιμο με το 0, είτε ισότιμο με κάποιον αριθμό από το σύνολο $\left\{1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\}$, που είναι προφανώς τετραγωνικό υπόλοιπο modulo p .

Συνεπώς η παραπάνω κατασκευή ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες. Εφόσον υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $p = 4k + 3$, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν και άπειροι καλοί αριθμοί.

Πρόβλημα 2 (Κύπρος). Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με ορθόκεντρο H και έστω D ένα οποιοδήποτε σημείο στην πλευρά BC . Έστω E και F τα σημεία στα τμήματα AB και AC , αντίστοιχα, τέτοια, ώστε τα τετράπλευρα $ABDF$ και $ACDE$ να είναι εγγράψιμα, και έστω ότι οι BF και CE τέμνονται στο P . Έστω L το σημείο της ευθείας HA τέτοιο, ώστε η LC να εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου PBC στο σημείο C . Έστω ότι οι ευθείες BH και CP τέμνονται στο X . Να αποδείξετε ότι τα σημεία D, L και X είναι συνευθειακά.

Λύση (1ος τρόπος - Ανδρέας Καβαλλάρης): Θα αποδείξουμε ότι τα τετράπλευρα $AEPF$, $BHPC$, και $BEPD$ είναι εγγράψιμα. Πράγματι, από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $ABDF$ και $ACDE$ έχουμε

$$A\hat{E}P = A\hat{E}C = A\hat{D}C \text{ και } A\hat{F}P = A\hat{F}B = A\hat{D}B.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, παίρνουμε $A\hat{E}P + A\hat{F}P = A\hat{D}C + A\hat{D}B = 180^\circ$, αφού τα σημεία B, D, C είναι συνευθειακά. Συνεπώς, το τετράπλευρο $AEPF$ είναι εγγράψιμο.

Άρα $B\hat{P}C = E\hat{P}F = 180^\circ - B\hat{A}C$. Αφού το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC , έχουμε $B\hat{H}C = 180^\circ - H\hat{B}C - H\hat{C}B = (90^\circ - H\hat{B}C) + (90^\circ - H\hat{C}B) = B\hat{C}A + C\hat{B}A$.

Επομένως είναι $B\hat{P}C = B\hat{H}C$, και άρα και το τετράπλευρο $BHPC$ είναι εγγράψιμο.

Έπειτα, από τη γωνία χορδής και εφαπτομένης έχουμε $L\hat{C}P = P\hat{B}C$, οπότε είναι

$$L\hat{C}M = L\hat{C}B = L\hat{C}P + P\hat{C}B = P\hat{B}C + P\hat{C}B = 180^\circ - B\hat{P}C = B\hat{A}C.$$

Επιπλέον, από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $ACDE$ και $ABDF$ παίρνουμε

$$P\hat{E}D = C\hat{E}D = C\hat{A}D = F\hat{A}D = F\hat{B}D = P\hat{B}D.$$

Άρα και το τετράπλευρο $BEPD$ είναι εγγράψιμο.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $ED \parallel LC$, αφού

$$C\hat{E}D = P\hat{E}D = P\hat{B}D = P\hat{B}C = L\hat{C}P = L\hat{C}E.$$

Με βάση την παραπάνω παραλληλία, θα δείξουμε ότι

$$\frac{XE}{XC} = \frac{DE}{LC}$$

οπότε η ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο X που απεικονίζει το E στο C , απεικονίζει το D στο L , και μας δίνει τη συνευθειακότητα των σημείων D, L και X .

Πράγματι, αφού $L\hat{C}M = B\hat{A}C$ και $X\hat{B}E = 90^\circ - B\hat{A}C$, στο τρίγωνο LMC έχουμε ότι

$$MC = LC \cdot \cos L\hat{C}M = LC \cdot \cos B\hat{A}C = LC \cdot \sin X\hat{B}E.$$

Ομοίως, αφού $X\hat{B}C = 90^\circ - A\hat{C}B$, στο τρίγωνο AMC έχουμε

$$MC = AC \cdot \cos A\hat{C}B = AC \cdot \sin X\hat{B}C.$$

Συνεπώς, $LC \cdot \sin X\hat{B}E = AC \cdot \sin X\hat{B}C$, ή ισοδύναμα,

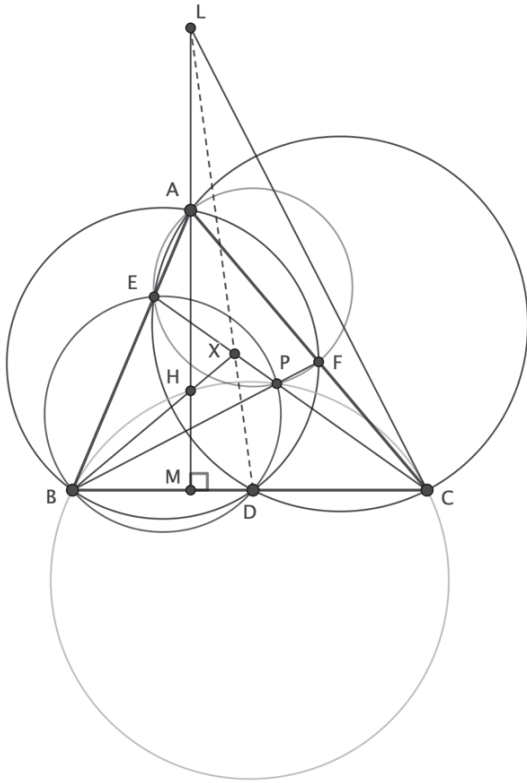
$$\frac{\sin X\hat{B}E}{\sin X\hat{B}C} = \frac{AC}{LC}.$$

Από το λήμμα των αναλογιών στο τρίγωνο EBC παίρνουμε

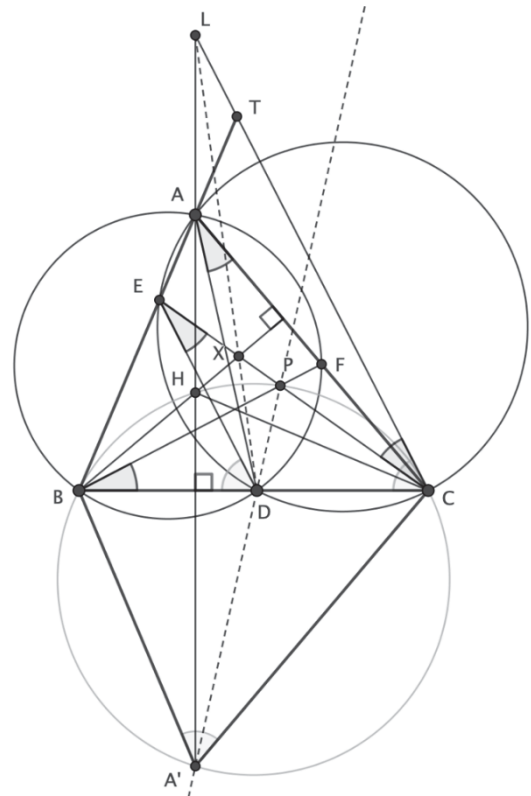
$$\frac{XE}{XC} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{\sin X\hat{B}E}{\sin X\hat{B}C} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{AC}{LC}.$$

Επειδή το $ACDE$ είναι εγγράψιμο, τα τρίγωνα BED και BCA είναι όμοια, με $\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$. Συνεπώς,

$$\frac{XE}{XC} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{AC}{LC} = \frac{DE}{AC} \cdot \frac{AC}{LC} = \frac{DE}{LC}.$$



Σχήμα 1 - (1ος τρόπος)



Σχήμα 2 - (2ος τρόπος)

(2ος τρόπος – Κυριάκος Τσουρέκας): Από τη γωνία χορδής και εφαπτομένης και τα εγγράψιμα τετράπλευρα $ABDF$ και $ACDE$ είναι $L\hat{C}P = P\hat{B}C = F\hat{B}D = D\hat{A}F = D\hat{E}C$, οπότε $DE \parallel CL$.

Αν A' είναι το σημείο τομής της ευθείας AH με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BPC , τότε είναι $B\hat{A}'C = L\hat{C}B = E\hat{D}B = E\hat{A}C = B\hat{A}C$. Αφού το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC , ισχύει $B\hat{H}C = 180^\circ - B\hat{A}C = 180^\circ - B\hat{A}'C$, που σημαίνει ότι το H ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BPC .

Επίσης, αφού η πλευρά BC είναι κοινή και ισχύει $B\hat{A}'C = B\hat{A}C$, από τον νόμο των ημιτόνων, οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BAC και $BA'C$ θα είναι ίσοι. Αφού $AA' \perp BC$, το A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την BC . Επομένως, $D\hat{A}'C = D\hat{A}C = P\hat{B}C = P\hat{A}'C$,

και άρα τα σημεία A', D, P είναι συνευθειακά.

Από το θεώρημα Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $PA'HBCC$, τα σημεία τομής των PA', BC , των $A'H, CC$, και των HB, CP , δηλ. τα σημεία D, L , και X , αντίστοιχα, είναι συνευθειακά, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3 (Ελλάδα, Ιωάννης Γαλαμάτης). Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y , να ισχύει $f(x + yf(x)) + y = xy + f(x + y)$.

Λύση. Ας συμβολίσουμε με $P(x, y)$ τη δοθείσα σχέση. Αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a) = 0$, τότε από την $P(a, y)$ προκύπτει ότι $y = ay + f(a + y)$, και επομένως η f πρέπει να είναι γραμμική. Ελέγχοντας εύκολα βρίσκουμε ότι οι μόνες γραμμικές λύσεις είναι οι $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) και $f(x) = 2 - x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Έστω τώρα ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Από τη σχέση $P(x - y, y)$ προκύπτει ότι:

$$f(x - y + yf(x - y)) = -y^2 + y(x - 1) + f(x).$$

Εφόσον $f(t) \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό t , έπεται ότι $-y^2 + y(x - 1) + f(x) \neq 0$, για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$, και άρα η διακρίνουσα (του τριωνύμου ως προς y) πρέπει να είναι αρνητική, δηλαδή:

$$(x - 1)^2 + 4f(x) < 0,$$

που συνεπάγεται ότι $f(x) < -\frac{(x-1)^2}{4} \leq 0$, για κάθε πραγματικό x .

Από την $(x+1)^2 \geq 0$ έπεται ότι $-\frac{(x-1)^2}{4} \leq x$, οπότε $f(x) < -\frac{(x-1)^2}{4} \leq x$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Από την $P(x, y)$ για $y > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι

$$xy - y + f(x+y) = f(x+yf(x)) < x + yf(x) < x - y \frac{(x-1)^2}{4}$$

και επομένως $f(x+y) < x + y - y \left(x + \frac{(x-1)^2}{4} \right) = x + y - y \frac{(x+1)^2}{4}$.

Θέτοντας $x = -y$ στην παραπάνω ανισότητα, παίρνουμε: $f(0) < -y \frac{(-y+1)^2}{4}$,

για όλα τα θετικά y . Όταν $y \rightarrow +\infty$, φτάνουμε σε άτοπο. Συνεπώς, οι μόνες λύσεις αυτής της συναρτησιακής εξίσωσης είναι: $f(x) = x$ και $f(x) = 2 - x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Πρόβλημα 4 (Ρουμανία). Υπάρχουν n πόλεις σε μία χώρα, όπου $n \geq 100$ είναι ένας ακέραιος. Κάποια ζευγάρια πόλεων συνδέονται με πτήσεις (διπλής κατεύθυνσης). Για δύο πόλεις A και B ορίζουμε:

- ένα μονοπάτι μεταξύ των A και B ως μια ακολουθία διακεκριμένων πόλεων $A = C_0, C_1, \dots, C_k, C_{k+1} = B$, τέτοια, ώστε να υπάρχουν πτήσεις μεταξύ των C_i και C_{i+1} για κάθε $0 \leq i \leq k$,
- ένα μεγάλο μονοπάτι μεταξύ των A και B ως ένα μονοπάτι μεταξύ των A και B τέτοιο, ώστε κανένα άλλο μονοπάτι μεταξύ των A και B να έχει περισσότερες πόλεις,
- ένα μικρό μονοπάτι μεταξύ των A και B ως ένα μονοπάτι μεταξύ των A και B τέτοιο, ώστε κανένα άλλο μονοπάτι μεταξύ των A και B να έχει λιγότερες πόλεις.

Υποθέτουμε ότι για κάθε ζευγάρι πόλεων A και B στη χώρα, υπάρχει ένα μεγάλο μονοπάτι και ένα μικρό μονοπάτι μεταξύ τους, τα οποία δεν έχουν κοινές πόλεις (εκτός των A και B). Έστω F το συνολικό πλήθος των πτήσεων στη χώρα. Να βρείτε, συναρτήσει του n , όλες τις δυνατές τιμές του F .

Λύση. Χρησιμοποιούμε την προφανή ερμηνεία μέσω θεωρίας γραφημάτων. Δείχνουμε ότι οποιοδήποτε τέτοιο γράφημα είναι ένα από τα εξής: το πλήρες γράφημα K_n , το κυκλικό γράφημα C_n και, για άρτιο n , το διμερές γράφημα $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι αυτά τα γραφήματα ικανοποιούν τη συνθήκη.

- Για το K_n , μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε μεγάλο μονοπάτι, με το μικρό μονοπάτι να είναι απλώς η ακμή η οποία συνδέει τις δύο κορυφές.
- Για το C_n , υπάρχουν ακριβώς δύο μονοπάτια ανάμεσα σε οποιοσδήποτε δύο κορυφές, και το ένα έχει το πολύ τόσες κορυφές όσες το άλλο.
- Για το $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, αν οι κορυφές βρίσκονται σε διαφορετικά μέρη, το μικρό μονοπάτι είναι η ακμή.

Διαφορετικά, παίρνουμε οποιοδήποτε μεγάλο μονοπάτι. Παρατηρούμε ότι αυτό εναλλάσσεται ανάμεσα στα δύο μέρη και τελειώνει στο ίδιο μέρος. Επομένως υπάρχει μια κορυφή στο άλλο μέρος που δεν εμφανίζεται στο μεγάλο μονοπάτι. Υπάρχει επίσης ένα μικρό μονοπάτι που περνά από αυτή την κορυφή.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι μόνο αυτά τα γραφήματα λειτουργούν για αρκετά μεγάλο n . Πράγματι, παρατηρούμε ότι το γράφημα είναι προφανώς συνεκτικό, αφού οποιοσδήποτε δύο κορυφές ανήκουν σε κάποιο μονοπάτι. Έστω ένα μέγιστο μονοπάτι του γραφήματος, έστω p το μήκος του, και έστω $V_1, V_2, \dots, V_p$ οι κορυφές του με τη σειρά. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό είναι το μεγάλο μονοπάτι μεταξύ των V_1 και V_p το οποίο έχει αντίστοιχο μικρό μονοπάτι μέσω άλλων κορυφών, και θα δείξουμε ότι η ακμή V_1V_p ανήκει στο γράφημα. Πράγματι, αν η ακμή αυτή δεν υπήρχε στο γράφημα, τότε το μικρό μονοπάτι θα είχε μήκος τουλάχιστον δύο. Δηλαδή, θα υπήρχε κορυφή X διαφορετική από τις $V_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}$ και μια ακμή από την V_1 στην X . Τότε το μονοπάτι $XV_1V_2 \dots V_p$ θα είχε μήκος $p+1$, άτοπο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $p = n$, δηλαδή ότι ο κύκλος $V_1V_2 \dots V_p$ περιέχει όλες τις κορυφές. Πράγματι, αν υπήρχε άλλη κορυφή A που να συνδέεται με ακμή με κάποια V_i , τότε η διαδρομή $AV_iV_{i+1} \dots V_{i-1}$ θα είχε μήκος $p+1$, άτοπο. Εφόσον το γράφημα είναι συνεκτικό, ο κύκλος περιέχει

όλες τις κορυφές.

Λέμε ότι δύο κορυφές έχουν απόσταση r αν υπάρχουν ακριβώς $r - 1$ κορυφές μεταξύ τους σε μια πλευρά του κύκλου, και παρατηρούμε ότι έχουν επίσης απόσταση $n - r$. Αν συμβολίσουμε τις κορυφές ως $A_1, A_2, \dots, A_n$ έτσι ώστε το γράφημα να έχει $n - 1$ ακμές $A_i A_{i+1}$, τότε έχει και την τελευταία ακμή $A_n A_1$, όπως φαίνεται με τον ίδιο τρόπο.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν υπάρχει ακμή μεταξύ V_i και V_j , τότε υπάρχει και ακμή μεταξύ V_{i+1} και V_{j+1} .

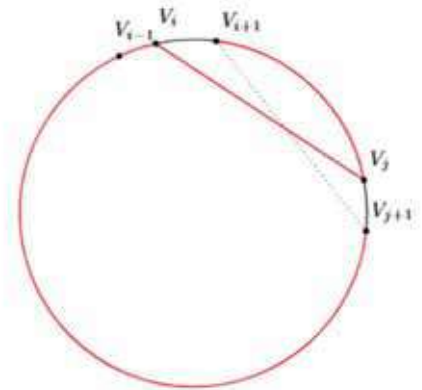
Έστω $i < j$. Θεωρούμε το μονοπάτι $V_{i+1} V_{i+2} \dots V_j V_i V_{i-1} \dots V_{j+1}$ μήκους n , (Σχήμα 3).

Όπως πριν, καταλήγουμε ότι υπάρχει ακμή μεταξύ των V_{i+1} και V_{j+1} . Επαναλαμβάνοντας αυτό, παίρνουμε ότι αν υπάρχει ακμή μεταξύ δύο κορυφών σε απόσταση r , τότε υπάρχουν ακμές μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών σε απόσταση r .

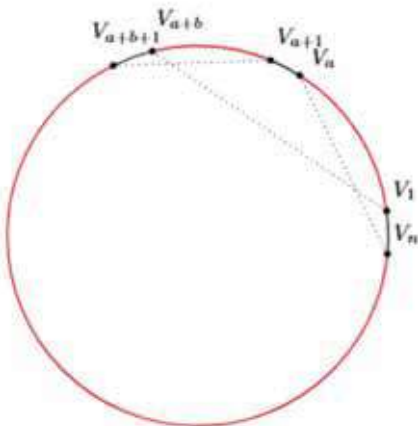
Ορίζουμε S το σύνολο των αριθμών $1 \leq r \leq n - 1$ τέτοιων ώστε το γράφημα να έχει ακμές απόστασης r . Παρατηρούμε ότι $1, n - 1 \in S$.

Για θετικούς ακέραιους a και b με $a + b \leq n - 1$, θεωρούμε τη διάταξη

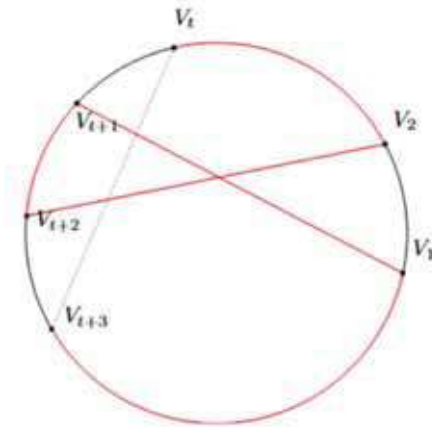
$V_1, V_{a+b}, V_{a+b-1}, \dots, V_{a+1}, V_{a+b+1}, V_{a+b+2}, \dots, V_n, V_a, V_{a-1}, \dots, V_1$
(Σχήμα 4).



Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών στη διάταξη είναι $1, a, b$ ή $a + b - 1$. Αυτό σημαίνει ότι αν δύο από τους αριθμούς $\{a, b, a + b - 1\}$ ανήκουν στο S , τότε θα ανήκει και ο τρίτος. Αν $2 \in S$, τότε παίρνοντας $b = 2$ καταλήγουμε ότι το S περιέχει όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 1 έως $n - 1$. Αυτό δίνει τη λύση K_n . Αντίθετα, αν $2 \notin S$, τότε δεν υπάρχουν δύο διαδοχικοί ακέραιοι μικρότεροι από τον $n - 2$ στο S . Αφού $2 \notin S$, έπεται ότι $n - 2 \notin S$, άρα το S δεν περιέχει δύο διαδοχικούς αριθμούς.

Αν $S = \{1, n - 1\}$, παίρνουμε το C_n . Διαφορετικά, υπάρχει $t \in S$ με $3 \leq t \leq n - 3$. Θεωρούμε τη διαδρομή $V_t V_{t-1} \dots, V_2 V_{t+2} V_{t+1} V_1 V_n \dots V_{t+3}$ μήκους n , (Σχήμα 5).

Όπως πριν, υπάρχει ακμή μεταξύ των V_t και V_{t+3} . Επομένως, $3 \in S$. Παίρνοντας $b = 3$, βλέπουμε ότι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μικρότεροι ή ίσοι από τον $n - 1$ ανήκουν στο S .

Αφού υποθέσαμε ότι το S δεν περιέχει διαδοχικούς αριθμούς, έχουμε ότι ο n είναι άρτιος και $S = \{1 \leq i \leq n - 1 \mid i \text{ περιττός}\}$. Αυτό δίνει το $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Τελικά, ο αριθμός των ακμών μπορεί να είναι:

n (για C_n), $n(n - 1)/2$ (για K_n), και αν ο n είναι άρτιος, επίσης $n^2/4$ (για $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$).



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπούζος Στέλιος

Θέμα 1. Προβλήματα κατασκευών που δεν λύνονται με χάρακα και διαβήτη

Άλυτα προβλήματα κατασκευών

Ο καθένας μας, μόλις συναντήσει προβλήματα κατασκευών που δεν μπορούν να λυθούν σωστά με τον κανόνα και τον διαβήτη, στην αρχή δεν μένει ικανοποιημένος: πως είναι δυνατό να μη λύνονται; Και όμως τίποτε **το παράξενο** δεν υπάρχει σ' αυτή την αδυναμία. Απλούστατα ο κανόνας κι ο διαβήτη δεν είναι αρκετά ικανά (ίσως καλύτερα θα έπρεπε να πούμε δεν είναι αρκετά ακριβή) όργανα για τη λύση μερικών προβλημάτων. Τέτοια προβλήματα π.χ. είναι τα προβλήματα για τη **διαίρεση μιας γωνίας σε τρία ίσα μέρη** (η λεγόμενη τριχοτόμηση της γωνίας) και για το **διπλασιασμό του κύβου** («Να κατασκευαστεί η ακμή του κύβου διπλάσιου όγκου σε σύγκριση με δοσμένο κύβο»). Μερικά τέτοια προβλήματα μετατρέπονται σε επιλύσιμα, αν στον κανόνα και στον διαβήτη προστεθεί π.χ. ένα όργανο που γράφει παραβολή, ή, ο ελλειψογράφος.

Για να διαπιστώσουμε ποια προβλήματα κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη, κάνουμε τους εξής συλλογισμούς. Ο κανόνας μας δίνει τη δυνατότητα να φτιάξουμε μια ευθεία που να

περνάει από δύο ορισμένα σημεία. Επίσης μας επιτρέπει να βρίσκουμε τα σημεία τομής δύο ευθειών. Χρησιμοποιώντας μαζί με τον κανόνα κι ένα διαβήτη, μπορούμε να κατασκευάσουμε τις περιφέρειες οποιωνδήποτε δοσμένων ακτίνων με δοσμένο κέντρο, να βρούμε τα σημεία τομής δύο περιφερειών ή περιφέρειας και ευθείας. Εφαρμόζουμε στο θέμα αυτό την αναλυτική μέθοδο. Πρώτα –πρώτα βλέπουμε, **ότι μόνος του ο κανόνας** δίνει την δυνατότητα να λύσουμε προβλήματα μόνο με πρώτου βαθμού: η τομή δύο ευθειών π.χ. αντιστοιχεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες με τη λύση συστήματος δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού με δύο αγνώστους. Προσθέτοντας και τον διαβήτη, μπορούμε να λύσουμε μερικά προβλήματα δευτέρου βαθμού, δηλ. και προβλήματα που αναλυτικά ανάγονται στη λύση μιας σειράς εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Άλλωστε η τομή ευθείας και περιφέρειας σημαίνει κοινή λύση εξίσωσης περιφέρειας και εξίσωσης ευθείας. Μετά την απαλοιφή μιας συντεταγμένης δημιουργείται εξίσωση δευτέρου βαθμού (με μια άγνωστη συντεταγμένη).

Θέμα 2. Τι είναι τα συστήματα συντεταγμένων

α. Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η θέση ενός σημείου πάνω σε επίπεδο μπορεί να δοθεί με δύο αριθμούς x και y , αν πρώτα:

1) διαλέξουμε στο επίπεδο αυτό δύο οποιεσδήποτε ευθείες κάθετες μεταξύ τους (συνήθως μια οριζόντια Ox και μια κατακόρυφη Oy).

Το σημείο O της τομής των ευθειών αυτών λέγεται **αρχή** και οι ευθείες, που τώρα είναι κατευθυνόμενες λέγονται **άξονες συντεταγμένων**: ο πρώτος απ' αυτούς είναι ο Ox ή άξονας των

2) Δώσουμε κατεύθυνση (ή φορά) σ' αυτές τις ευθείες (π.χ. προς τα δεξιά και προς τα πάνω θετική φορά).

3) Αποφασίσουμε ποια μονάδα μήκους θα χρησιμοποιήσουμε (π.χ. το εκατοστόμετρο)

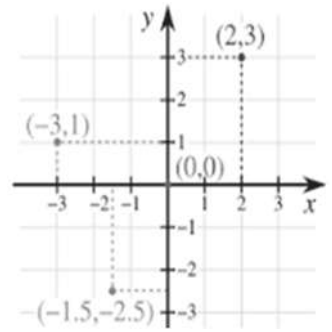
τετμημένων, και ο δεύτερος Oy ή άξονας των **τεταγμένων**. Τώρα, για να δοθεί η θέση του σημείου χρειάζεται να ορίσουμε μόνο:

α. σε ποια απόσταση βρίσκεται το σημείο από τον άξονα Oy. Η απόσταση αυτή, έχοντας το πρόσημο, «+» ή «-», συμβολίζεται με το γράμμα x και λέγεται **τετμημένη** του σημείου.

β. σε ποια απόσταση βρίσκεται το σημείο από τον άξονα Ox. Η απόσταση αυτή, έχοντας το πρόσημο, «+» ή «-», συμβολίζεται με το γράμμα y και λέγεται **τεταγμένη** του σημείου.

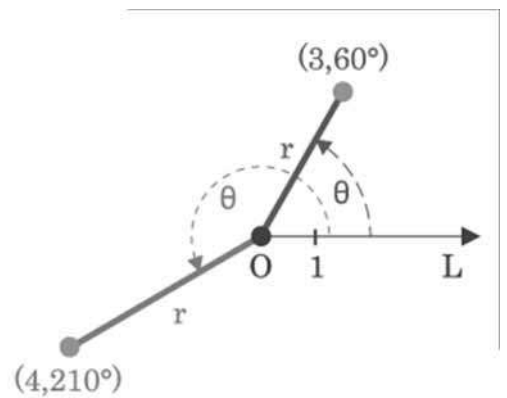
Αν το σημείο βρίσκεται από την πλευρά του άξονα Oy που κατευθύνεται ο άξονας Ox, βάζουμε στην τετμημένη πρόσημο «+», ενώ στην αντίθετη περίπτωση «-». Με τον ίδιο τρόπο βάζουμε «+» ή «-» και στην τεταγμένη. Στα σημεία του άξονα

Ox οι τεταγμένες είναι ίσες με 0 ($x=0$). Αν στο σημείο A η τετμημένη είναι ίση με x και η τεταγμένη είναι y , γράφουμε: $A(x,y)$. Οι αριθμοί x,y λέγονται **καρτεσιανές συντεταγμένες** του σημείου (x,y) . Στη γραφή (x,y) την πρώτη θέση κατέχει πάντα η τετμημένη και τη δεύτερη θέση πάντα η τεταγμένη.



β. πολικές συντεταγμένες

Ένα σημείο A στο επίπεδο μπορεί να αναπαρασταθεί κατά μοναδικό τρόπο από δύο αριθμούς (r, θ) , όπου r η απόστασή του A από την αρχή των αξόνων και $\theta \in [0, 2\pi)$ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα των x και της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το A. Οι αριθμοί r, θ θα λέγονται **πολικές συντεταγμένες του A**. Ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από: ένα σημείο O (πόλος) μια ημιευθεία OL με αρχή το O (πολικός άξονας). Ένα σημείο P προσδιορίζεται από τις πολικές συντεταγμένες $pr, \theta p$ όπου r είναι η απόσταση του σημείου από το O, θ είναι η γωνία από τον πολικό άξονα προς το P. Το ζεύγος $p\theta, \theta p$ περιγράφει τον πόλο για οποιοδήποτε θ .



Αν το A έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) και πολικές συντεταγμένες (r, ϕ) , εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$x=r \cdot \cos \theta \text{ και } y=r \cdot \sin \theta \quad (1)$$

Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να έχουμε τις πολικές συντεταγμένες όταν γνωρίζουμε τις καρτεσιανές και αντίστροφα.

Παράδειγμα. Να βρεθεί το σχήμα της καμπύλης με εξίσωση

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Δίνουμε στην θ διάφορες τιμές, π.χ.: $\theta=0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$, βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του r . Όταν το θ έχει τιμές μεταξύ 45° και 135° , καθώς και μεταξύ 225° και 315° το σνημίτιο είναι αρνητικό και γι' αυτό το r είναι φανταστικό: η καμπύλη δεν έχει σημεία με τέτοιες τιμές πολικής γωνίας.

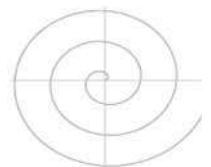
Κατά τη λύση πολλών προβλημάτων είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες πολικές συντεταγμένες: διαλέγουμε στο επίπεδο ένα ακίνητο σημείο O (τον λεγόμενο πόλο) και την εξερχόμενη από το σημείο αυτό ακτίνα OP (τον λεγόμενο πολικό άξονα). Η θέση του σημείου M, σ' αυτή την περίπτωση, ορίζεται από δύο αριθμούς: με την απόστασή του r από τον πόλο O και με τη γωνία θ . Οι αριθμοί r (πολική ακτίνα) και θ (πολική γωνία) λέγονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου M.

γ. Η σπείρα του Αρχιμήδη

Η καμπύλη αυτή δίνεται σε πολικές συντεταγμένες με την εξίσωση $r=C\phi$, όπου C σταθερή τιμή

Με τη βοήθεια της καμπύλης αυτής οποιαδήποτε γωνία μπορεί να διαιρεθεί σε αυθαίρετο αριθμό ίσων μερών (π.χ. σε τρία -

τριχοτόμηση της γωνίας). Αυτό γίνεται ως εξής: Έστω ότι σε φύλλο χαρτιού γράφτηκε η σπείρα του Αρχιμήδη, που βγαίνει από τον πόλο O του



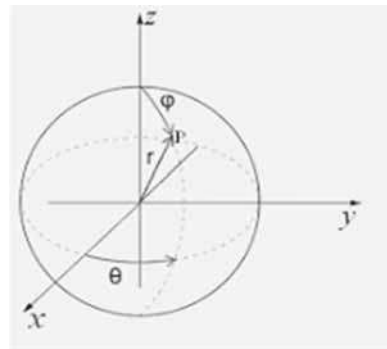
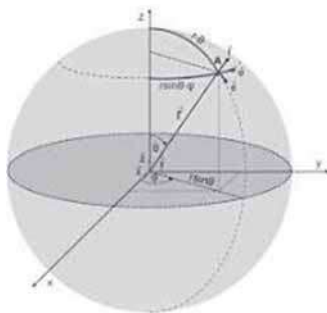
πολικού συστήματος συντεταγμένων. Ο πολικός άξονας OP χρησιμεύει στην σπείρα σαν εφαπτόμενη. Μεταφέρουμε στο σχέδιο αυτό τη γωνία που μας δόθηκε για να διαιρεθεί σε ίσα μέρη. Η μεταφορά γίνεται με τρόπο που η κορυφή της γωνίας να συμπίπτει με τον πόλο, μια πλευρά της να συμπίπτει με τον πολικό άξονα OP και η δεύτερη πλευρά, η OQ , να βρεθεί προς το μέρος της αύξησης της πολικής γωνίας φ (αντίθετα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού). Σημειώνουμε με το γράμμα A , το πρώτο (μετρώντας από το O) σημείο τομής

Οι τοιχογράφοι που διακόσμησαν ένα κτίσμα στον αρχαιολογικό χώρο του Ακρωτηρίου της

Θήρας φαίνεται ότι γνώριζαν στα τέλη της Εποχής του Χαλκού ένα γεωμετρικό σχήμα που περιέγραψε πρώτος ο Αρχιμήδης πάνω από μια χιλιετία αργότερα.

Πρόκειται για τη λεγόμενη «σπείρα του Αρχιμήδη», στην οποία η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών περιελίξεων παραμένει σταθερή. Αν και το σχήμα περιγράφεται από έναν απλό μαθηματικό τύπο, σπείρες αυτού του είδους «φαίνεται ότι δεν υπάρχουν στη φύση» υποστηρίζουν οι Έλληνες ερευνητές που μελέτησαν τις τοιχογραφίες.

δ. Σφαιρικές συντεταγμένες



Η θέση ενός σημείου πάνω σε σφαίρα είναι καλύτερα να δίνεται όπως στη Γεωγραφία. Στη δοσμένη σφαίρα με ακτίνα R , διαλέγουμε δύο οποιαδήποτε εκ διαμέτρου αντίθετα σημεία. Το ένα απ' αυτά, το N (Nord), το ονομάζουμε συμβατικά *βόρειο πόλο*, και το άλλο, το S (South), το ονομάζουμε συμβατικά *νότιο πόλο*. Έναν από τους "**μεσημβρινούς**" (που σαν μέγιστοι κύκλοι είναι ο συντομότερος δρόμος πάνω στη σφαίρα από το N στο S) τον ονομάζουμε αρχικό μεσημβρινό. Το επίπεδο που περνά από το κέντρο O της σφαίρας και είναι κάθετο στον SN , το ονομάζουμε ισημερινό επίπεδο, ενώ την τομή του με τη σφαίρα την ονομάζουμε περιφέρεια του ισημερινού. Πάνω στην περιφέρεια του ισημερινού διαλέγουμε μια φορά περιστροφής, π.χ. αντίθετη προς την φορά κίνησης των δεικτών του

ρολογιού, βλέποντας από το N . Η θέση του M πάνω στη σφαίρα ορίζεται με δύο συντεταγμένες, μια απ' αυτές την ονομάζουμε γεωγραφικό μήκος, και είναι η γωνία φ , που σχηματίζεται ανάμεσα στο επίπεδο του πρώτου μεσημβρινού και το επίπεδο που περνά από το M και τον άξονα SN (η γωνία μετριέται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής που διαλέξαμε πάνω στον ισημερινό. Γεωγραφικό πλάτος θα ονομάσουμε τη γωνία θ που σχηματίζεται ανάμεσα στην ακτίνα OM και το **επίπεδο του Ισημερινού**. (η θ θεωρείται θετική για τα σημεία του βόρειου ημισφαιρίου και αρνητική για τα σημεία του νότιου ημισφαιρίου). Θα γράφουμε: $M(\varphi, \theta)$, τοποθετώντας πρώτο το γεωγραφικό μήκος και δεύτερο το γεωγραφικό πλάτος.

Θέμα 3. Τα Μαθηματικά στην υπηρεσία του ανθρώπου:

Ο Le Verrier και ο Adams ανακαλύπτουν νέο πλανήτη αποκλειστικά με μαθηματικές μεθόδους

Ένας μακρινός πλανήτης, ο Ποσειδώνας, ανακαλύφθηκε μαθηματικώς «**με το μολύβι**», όπως λένε οι αστρονόμοι. Την ύπαρξή του αποκάλυψε πρώτα –πρώτα η ίδια η δική του δύναμη έλξης. Είχε διαπιστωθεί ότι ο πλανήτης

Ουρανός δεν κινείται ακριβώς όπως θα έπρεπε να κινείται κάτω από την επίδραση της έλξης του Ήλιου και των γνωστών τότε πλανητών. Υποπτεύθηκαν τότε, ότι μπορεί να υπάρχει ακόμη ένας πλανήτης και προσπάθησαν να

προϋπολογίσουν τη θέση του στον ουρανό. Αυτό το εξαιρετικά δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα το έλυσαν με επιτυχία δύο νέοι αστρονόμοι ο Άγγλος Άνταμς Τζων Κώτς (John Couch Adams) κι ο Γάλλος Ουρμπέν Ζαν Ζοζέφ Λεβεριέ (Urbain Jean Joseph Le Verrier), ανεξάρτητα ο ένας απ' τον άλλο. Και οι δυο πρόβλεψαν σωστά σε ποιο μέρος του έναστρου ουρανού πρέπει να βρίσκεται ο άγνωστος πλανήτης. Παίρνοντας τα στοιχεία του Λεβεριέ (11 Μαρτίου 1811), ο Γερμανός αστρονόμος Γιόχαν Γκότφριντ Γκάλε (Johann Gottfried Galle) **ανακάλυψε τον πλανήτη Ποσειδώνα το 1846**. Η μέση απόστασή του από τον Ήλιο είναι 30 (αστρονομικές μονάδες), η περίοδος περιφοράς του (γύρω από τον Ήλιο) είναι 164 χρόνια και 280 ημέρες.

Η φαινόμενη διάμετρος του Ποσειδώνα είναι μόλις 2". Η ακρίβεια μετρήσεων τέτοιου μεγέθους δε μπορεί να είναι μεγάλη, γιατί η γήινη ατμόσφαιρα προκαλεί παραμορφώσεις, που σπάνια είναι μικρότερες του 1". Η διάμετρος του Ποσειδώνα έγινε δυνατό να εξακριβωθεί χωρίς τη βοήθεια γωνιομέτρων, στις 7 Απρίλη 1968, όταν ο πλανήτης, κατά την κίνησή του στον έναστρο

ουρανό, επισκίασε ένα από τα μακρινά άστρα. (η φαινόμενη διάμετρος οποιουδήποτε απλανούς είναι μηδαμινή σε σύγκριση με τη φαινόμενη διάμετρο των πλανητών). Η διάρκεια της έκλειψης όταν ήταν ακριβώς γνωστά τα χαρακτηριστικά της κίνησης του Ποσειδώνα, επέτρεψε στους επιστήμονες να (υπολογίσουν τη γραμμική διάμετρο του πλανήτη). Η λεπτομερειακή θεωρητική επεξεργασία των εγγράφων της εξασθένησης **της λαμπρότητας ενός άστρου**, όταν κρύβεται πίσω από την ατμόσφαιρα του Ποσειδώνα, έδωσε πολλές συμπληρωματικές πληροφορίες. Ιδίως βρέθηκε, ότι **η μέση μοριακή μάζα των στρωμάτων της ατμόσφαιρας του Ποσειδώνα** πάνω από τα σύννεφα ισούται με 38. Αυτό αντιστοιχεί στη μοριακή μάζα του υδρογόνου με μικρή πρόσμιξη μεθανίου.

Ο Ποσειδώνας έχει δυο δορυφόρους. Οι διαστάσεις τους είναι γνωστές με προσέγγιση. Γνωρίζουμε όμως ότι ο ένας απ' αυτούς, ο Τρίτωνας είναι πολύ μεγάλος: η διάμετρός του ανέρχεται περίπου 4.000 km, ενώ η μάζα του είναι διπλάσια από τη μάζα της Σελήνης.

II. "Ευκλείδεια Γεωμετρία, αγάπη μου

α. η αξία της

συνίσταται στο ότι: *οδηγηθήκαμε από την εμπειρία στη θεωρία*

Αν σκεφτούμε πως η Ευκλείδεια Γεωμετρία, πρώτη αυτή, ενσωμάτωσε στο σύστημά της την ανθρώπινη ιδιότητα –ανάγκη για "απόδειξη" ισχυρισμών, μπορούμε να καταλάβουμε την άποψη ότι η συμβολή της Ευκλείδεια Γεωμετρία

στην **προαγωγή της σκέψης** ήταν επαναστατική. Οι αρχαίοι γεωμέτρες παρέλαβαν μια διαδικασία **εμπειρική** και την μετασχημάτισαν σε **θεωρητική επιστήμη**. Ακριβώς, αυτό το επίτευγμα, ήταν η ανεπανάληπτη προσφορά τους στην ανθρώπινη κοινωνία

διευκρινίστηκαν τα είδη των μαθηματικών προτάσεων. Έτσι:

α) οι περισσότερες μαθηματικές προτάσεις εκφράζονται με τη μορφή υποθετικών προτάσεων που περιέχουν ένα συμπέρασμα (δηλ., «αν Α τότε Β» ή «από Α έπεται Β». Το Α λέγεται "υπόθεση" και το Β λέγεται "συμπέρασμα" της πρότασης) (υποθετικές μαθηματικές προτάσεις)

β) δύο υποθετικές προτάσεις λέγονται:

i. αντίστροφες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από Β έπεται Α),

ii. αντίθετες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από όχι Α έπεται όχι Β),

iii. ανάστροφες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από όχι Β έπεται όχι Α).

παρατήρηση. δύο ανάστροφες προτάσεις ή αληθεύουν και οι δύο ή ψεύδονται και οι δύο (**σχετιζόμενες προτάσεις**.)

γ) δύο προτάσεις που έπονται αμοιβαία ή που υπακούουν στο νόμο της αναστροφής, θα ονομάζονται **ισοδύναμες (ισοδύναμες προτάσεις)**

δ) μια πολλαπλή πρόταση που εκφράζει ότι από μια πλήρη σειρά από διαζευκτικές υποθέσεις έπονται, αντίστοιχα, μια πλήρης σειρά από διαζευκτικά συμπεράσματα λέγεται **διαζευκτική πρόταση**.

Θα ήταν σοβαρή παράληψη αν δεν σημειώναμε ότι από κάθε διαζευκτική πρόταση έπεται αντίστροφή της (με άλλα λόγια: από διαζευκτικές υποθέσεις, έπονται επίσης διαζευκτικά συμπεράσματα. Όλα τα αντίστροφα αληθεύουν επίσης) (διαζευκτικές προτάσεις)

διατυπώθηκαν οι βασικές "συνθήκες":

- | | |
|--|---|
| <p>α) συνθήκη "αναγκαία": λέμε "αναγκαία συνθήκη" μιας ιδιότητας κάθε συμπέρασμα που έπεται από την ιδιότητα αυτή</p> <p>β) συνθήκη "ικανή": λέμε "ικανή συνθήκη" μιας ιδιότητας κάθε υπόθεση απ' την οποία έπεται η ιδιότητα αυτή</p> | <p>γ) συνθήκη "αναγκαία και ικανή": μια ιδιότητα B θα λέμε ότι είναι συνθήκη "αναγκαία και ικανή" της ιδιότητας A, όταν οι δύο αυτές ιδιότητες έπονται αμοιβαία. Δηλ. αν: (από A έπεται B) και (από B έπεται A).</p> |
|--|---|

Σημείωση. εδώ σημειώνουμε πως οι εκφράσεις «αναγκαία και ικανή συνθήκη», «αν και μόνο αν», «πρέπει και αρκεί», «τότε και μόνο τότε, αν» είναι λογικά ισοδύναμες συνθήκες.

η ΕΓ και η πρακτική

οι δυνατότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. για σχεδιασμό σε επίγειες αποστάσεις, παραμένουν αναντικατάστατες. Για παράδειγμα ο σχεδιασμός μιας κατοικίας, ενός δρόμου, μιας δεξαμενής και "άπειρων" άλλων πραγμάτων δεν είναι τίποτε άλλο παρά εφαρμογή προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ακόμη και σε πολλές περιπτώσεις συσκευών χάραξης ευθειών που να είναι π.χ.	κάθετες ή παράλληλες μεταξύ τους ή κύκλων ή... σ' αυτές τις περιπτώσεις οι συσκευές αυτές έχουν εφοδιασθεί με λογισμικό που έχει ενσωματωμένους κανόνες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Άλλο παράδειγμα, είναι ο τρόπος που αλληλοσυνδέονται οι βραχίονες και οι τροχοί μιας αμαξοστοιχίας' εδώ έχει ενσωματωθεί η λογική των γεωμετρικών τόπων.
---	---

Θέμα 4. Το Nobel των Μαθηματικών λέγεται Fields Medal

Το Μετάλλιο Fields επίσημα γνωστό ως Διεθνές Μετάλλιο για Εξαιρετικές Ανακαλύψεις στα Μαθηματικά (αγγλ. <i>International Medal for Outstanding Discoveries in Mathematics</i>) είναι βραβείο που απονέμεται σε δύο, τρεις ή τέσσερις μαθηματικούς κάτω των 40 ετών σε κάθε διεθνές συνέδριο της Διεθνούς Μαθηματικής Ένωσης (IMU), το οποίο διεξάγεται κάθε τέσσερα χρόνια. Το όνομα του βραβείου είναι προς τιμήν του Καναδού μαθηματικού Τζον Τσαρλς Φιλντς, ο οποίος εγκαίνιασε το βραβείο, σχεδίασε το μετάλλιο και ανέλαβε την κάλυψη του χρηματικού ποσού που συνόδευε το βραβείο. Σύμφωνα με την ετήσια έρευνα ακαδημαϊκής αριστείας της ARWU, το Μετάλλιο Φιλντς θεωρείται σταθερά ως το κορυφαίο βραβείο στον τομέα των Μαθηματικών παγκοσμίως, ενώ σε μια	άλλη έρευνα φήμης που διεξήχθη από το IREG το 2013 –14, το Μετάλλιο Fields ήρθε αμέσως μετά το Βραβείο Abel ως το δεύτερο πιο διάσημο διεθνές βραβείο στα Μαθηματικά. Συνοδεύεται με το χρηματικό ποσό των 15.000 δολαρίων Καναδά. Το βραβείο απονεμήθηκε για πρώτη φορά το 1936 στον Φιλανδό μαθηματικό Λαρς Άλφορς και στον Αμερικανό μαθηματικό Τζέσι Ντάγκλας και απονέμεται κάθε τέσσερα χρόνια από το 1936. Στόχος του βραβείου είναι να δώσει διεθνή αναγνώριση και υποστήριξη σε νέους μαθηματικούς που έκαναν σημαντικές συνεισφορές στον χώρο των Μαθηματικών. Έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ως το «Βραβείο Νόμπελ των Μαθηματικών».
---	--

προϋποθέσεις απονομής

Ο Moshé Flato Ο Moshé Flato στο βιβλίο του "*Η ΙΣΧΥΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*" (εκδόσεις "Κάτοπτρο". 1993), γράφει:

«Ισχύει στατιστικά η παρατήρηση πως οι μεγάλες ανακαλύψεις στα Μαθηματικά επιτεύχθηκαν ή διαμορφώθηκαν ως επί το πλείστον προ της ηλικίας των τριάντα ετών. Η παρατήρηση ισχύει μάλιστα ακόμη περισσότερο για τη φυσική, σε αντίθεση με αυτό που πιστεύεται	γενικά. Εξάλλου από καταστατική δέσμευση, το μετάλλιο Fields μπορεί να δοθεί μόνο σε μαθηματικό ηλικίας κάτω των 40 ετών (ενώ απονέμονται μόνο δύο έως τέσσερα σε κάθε διεθνές συνέδριο των Μαθηματικών, που πραγματοποιείται κάθε τέσσερα χρόνια).
--	--

Ωστόσο, αν και θεωρώ ότι τα βιολογικά αίτια αυτού του φαινομένου δεν έχουν ακόμη αρκετά πειστικά για να μπορώ να τα επικαλεστώ, αντιθέτως ουδεμία αμφιβολία υπάρχει πια για τη **συμβολή διανοητικών**, θεσμικών και κοινωνικών **παραγόντων**. Αν η δημιουργικότητα, ιδιαίτερα στα Μαθηματικά, συνίσταται στο να φανταστεί κανείς νέους αφηρημένους τρόπους σκέψης, τότε προϋποθέτει κάποια τόλμη και – ας το πούμε – ιδιαίτερη ασέβεια απέναντι στην παράδοση· αυτά τα δύο χάνονται με την πάροδο της ηλικίας, δηλ. Με την πάροδο της ηλικίας, δηλ. Εν προκειμένω όχι με κάποια προϊούσα νωθρότητα των νευρώνων, αλλά με την άνοδο στη σταδιοδρομία.



Fields

Το **Μετάλλιο Fields** επίσημα γνωστό ως **Διεθνές Μετάλλιο για Εξαιρετικές Ανακαλύψεις στα Μαθηματικά**

Οι προϋποθέσεις μιας επινοητικότητας που απαιτεί ένταση και ενέργεια πνευματική είναι το να μη υποκλίνεται κανείς μπροστά στην αυθεντία, να μη κάμπτεται κάτω από το βάρος μιας καθαγιασμένης γνώσης».

Σε τούτο πρέπει να προσθέσουμε ότι η σύγχρονη οργάνωση της επιστήμης, ο θεσμικός και κοινωνικός τρόπος ύπαρξής της, σύντομα οδηγεί τους επιστήμονες σε ανάληψη διοικητικών ευθυνών και καθηκόντων διαχείρισης, ή ακόμη τους εξωθεί στο να χρησιμοποιούν ή τουλάχιστον να προάγουν τις έρευνες άλλων, παρά συνεχίζουν τις δικές τους».

Άλλα συστήματα αναφοράς. Στην πράξη υπάρχουν κι άλλα συστήματα αναφοράς, τα οποία θα αναφέρουμε κάθε φορά, που η ανάγκη αναφοράς, μας το επιβάλλει (π.χ. κυλινδρικές, γεωγραφικές, Ουράνιες, Ελλειπτικές, παραμετρικές κλπ). Η σχέση μεταξύ καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Τί είναι οι κωνικές τομές

Οι καμπύλες γραμμές που δημιουργούνται όταν τέμνεται η επιφάνεια μιας κωνικής επιφάνειας εκ περιστροφής από επίπεδα που δεν περνούν από την κορυφή της, λέγονται καμπύλες δεύτερου βαθμού ή **κωνικές τομές**.

Υπάρχουν τρεις τύποι κωνικών τομών:



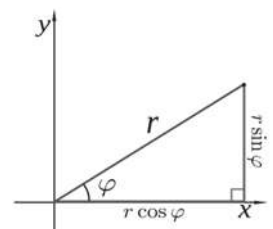
Abel

Το δεύτερο πιο διάσημο διεθνές βραβείο στα Μαθηματικά. Συνοδεύεται με το χρηματικό ποσό των 15.000 δολαρίων Καναδά.

Το Μετάλλιο Fields θεωρείται από την αρχή ως το βραβείο με το μεγαλύτερο κύρος στον τομέα των Μαθηματικών και συχνά χαρακτηρίζεται ως το βραβείο Νόμπελ των Μαθηματικών Σε αντίθεση με το βραβείο Νόμπελ, το Μετάλλιο Fields απονέμεται μόνο κάθε τέσσερα χρόνια. Το Μετάλλιο Fields έχει επίσης όριο ηλικίας: ο αποδέκτης πρέπει να είναι κάτω των 40 ετών την 1η Ιανουαρίου του έτους κατά το οποίο απονέμεται το μετάλλιο. Ο κανόνας των κάτω των 40 ετών βασίζεται στην επιθυμία του Fields ότι "ενώ πρόκειται για αναγνώριση της εργασίας που έχει ήδη γίνει, ταυτόχρονα προορίζεται να αποτελέσει ενθάρρυνση για περαιτέρω επιτεύγματα εκ μέρους των παραληπτών και κίνητρο για ανανεωμένη προσπάθεια από την πλευρά άλλων". Επιπλέον, ένα άτομο μπορεί να βραβευτεί μόνο με ένα μετάλλιο Fields – οι νικητές δεν δικαιούνται να βραβευτούν με μελλοντικά μετάλλια.

Το μετάλλιο απονεμήθηκε για πρώτη φορά το 1936. Από τότε 64 άτομα έχουν κερδίσει το μετάλλιο μέχρι το 2022.

Με εξαίρεση δύο κατόχους διδακτορικού στη Φυσική (Εντουαρντ Γουίτεν και Μάρτιν Χάιερ), μόνο άτομα με διδακτορικό στα Μαθηματικά έχουν κερδίσει το μετάλλιο.



α. το τέμνον επίπεδο τέμνει την κωνική επιφάνεια σε σημεία μιας και της ίδιας χοάνης.

β. το τέμνων επίπεδο είναι παράλληλο προς ένα από τα εφαπτόμενα επίπεδα της κωνικής επιφάνειας.

γ. το τέμνον επίπεδο τέμνει και τις δυο χοάνες της κωνικής επιφάνειας.

Άσκηση 1

A) Υπολογίστε γρήγορα τις αριθμητικές παραστάσεις:

i) $98^2 - 102^2$

ii) $47 \cdot 53$

iii) $\frac{(8,45)^2 - (2,45)^2}{10,9}$

B) α) Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha + 1)^2 - \alpha(\alpha + 2) = 1$$

β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$(3,5432)^2 - 2,5432 \cdot 5,5432$$

Λύση:

A) i)

$$98^2 - 102^2 = (98 + 102)(98 - 102) = 200 \cdot (-2) = -400$$

ii) $47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$

iii) $\frac{(8,45)^2 - (2,45)^2}{10,9} = \frac{(8,45 - 2,45)(8,45 + 2,45)}{10,9} = \frac{6 \cdot 10,9}{10,9} = 6$

B) α) Έχουμε ότι:

$$(\alpha + 1)^2 - \alpha(\alpha + 2) = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha^2 - 2\alpha = 1$$

β) $(3,5432)^2 - 2,5432 \cdot 5,5432$

$$= (2,5432 + 1)^2 - 2,5432 \cdot (2,5432 + 2) = 1$$

Άσκηση 2

Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\beta}{\beta + \gamma} = \frac{\gamma}{\gamma + \alpha}$

ii) Αν $\alpha + \beta - 2\gamma = 2\beta + \gamma - 3\alpha = 2\gamma + \alpha - 3\beta$

Λύση:

i) $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\beta}{\beta + \gamma} = \frac{\gamma}{\gamma + \alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2\alpha = \alpha + \beta \text{ και } 2\beta = \beta + \gamma \text{ και } 2\gamma = \gamma + \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta \text{ και } \beta = \gamma \text{ και } \gamma = \alpha$$

Άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο

ii) Έστω

$$\alpha + \beta - 2\gamma = \kappa \quad (1)$$

$$2\beta + \gamma - 3\alpha = \kappa \quad (2)$$

$$2\gamma + \alpha - 3\beta = \kappa \quad (3)$$

$$1 + 3) \Rightarrow \alpha - \beta = \kappa.$$

$$\text{Άρα: } \alpha + \beta - 2\gamma = \alpha - \beta \Rightarrow \beta = \gamma \quad (4)$$

$$(2) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} 3\beta - 3\alpha = \kappa \quad (5)$$

$$(3) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \alpha - \beta = \kappa \quad (6)$$

$$5, 6) \Rightarrow 3\beta - 3\alpha = \alpha - \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο

Άσκηση 3

Αν x, y είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και

$$(x + y)^4 - (x - y)^4 = 32xy,$$

να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας.

Λύση:

Έχουμε ότι:

$$(x + y)^4 - (x - y)^4 = 32xy \Leftrightarrow$$

$$\left((x + y)^2\right)^2 - \left((x - y)^2\right)^2 = 32xy \Leftrightarrow$$

$$\left[(x + y)^2 - (x - y)^2\right] \left[(x + y)^2 + (x - y)^2\right] = 32xy$$

$$\Leftrightarrow 4xy \cdot (2x^2 + 2y^2) = 32xy \stackrel{x, y \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$2(x^2 + y^2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου έχει μήκος 2.

Άσκηση 4

Αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί x, y, z τέτοιοι ώστε να είναι:

$$xy \left(\frac{x+y}{2} - z \right) + yz \left(\frac{y+z}{2} - x \right) + zx \left(\frac{x+z}{2} - y \right) \leq 0$$

να αποδείξετε ότι $x = y = z$.

Λύση:

Έχουμε ότι

$$xy\left(\frac{x+y}{2}-z\right)+yz\left(\frac{y+z}{2}-x\right)+zx\left(\frac{x+z}{2}-y\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2y+xy^2-2xyz}{2}\right)+\left(\frac{y^2z+yz^2-2xyz}{2}\right)+\left(\frac{x^2z+xz^2-2xyz}{2}\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$x^2y+xy^2-2xyz+y^2z+yz^2-2xyz+x^2z+xz^2-2xyz\leq 0\Leftrightarrow$$

$$(x^2y+yz^2-2xyz)+(xy^2+xz^2-2xyz)+x^2z-2xyz+y^2z\leq 0\Leftrightarrow$$

$$(x^2y+yz^2-2xyz)+(xy^2+xz^2-2xyz)+x^2z-2xyz+y^2z\leq 0\Leftrightarrow$$

$$y(x^2+z^2-2xz)+x(y^2+z^2-2yz)+z(x^2-2xy+y^2)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$y(x-z)^2+x(y-z)^2+z(x-y)^2\leq 0$$

Η τελευταία ισχύει μόνον όταν

$$x-y=y-z=x-z=0,$$

δηλαδή $x=y=z$.

Άσκηση 5

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$, τότε να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=0$$

Λύση:

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει ότι:

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

Άρα

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)= \\ & \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3\alpha\beta\gamma}+\frac{2}{3}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)= \\ & \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3\alpha\beta\gamma}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}= \\ & \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3\alpha\beta\gamma}+\frac{2(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)}{3\alpha\beta\gamma}= \\ & \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}{3\alpha\beta\gamma}= \end{aligned}$$

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3\alpha\beta\gamma}=\frac{0}{3\alpha\beta\gamma}=0.$$

Άσκηση 6

Αν ισχύουν: $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=26$

και $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=38$, τότε να δείξετε ότι

i) $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-11$ και

ii) $\alpha\beta\gamma=-12$

Λύση:

Από την ταυτότητα του Euler έχουμε ότι

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot$$

$$\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

ή

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot$$

$$\cdot[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)] \quad (1)$$

Επίσης από την

$$\alpha+\beta+\gamma=2\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)^2=2^2$$

Επομένως

$$\underbrace{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}_{26}+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=4\Rightarrow$$

$$26+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=4\Rightarrow$$

$$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=4-26\Rightarrow$$

$$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-22\Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-11} \quad (2).$$

και τότε η (1) λόγω της (2) και της υπόθεσης γίνεται

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot$$

$$\cdot[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]\Rightarrow$$

$$38-3\alpha\beta\gamma=2\cdot[26-(-11)]\Rightarrow$$

$$38-3\alpha\beta\gamma=2\cdot 37\Rightarrow 3\alpha\beta\gamma=38-74\Rightarrow$$

$$3\alpha\beta\gamma=-36\Rightarrow \boxed{\alpha\beta\gamma=-12}.$$

Άσκηση 7

Σε ένα ξυλουργείο παράγονται ξύλινα πηχάκια για να κατασκευαστούν κορνίζες. Τα πηχάκια έχουν μήκη x και y που κυμαίνονται στα διαστήματα από 20cm μέχρι 20,2cm και 4,9cm και 5cm αντίστοιχα, δηλαδή $20\leq x\leq 20,2$ και $4,9\leq y\leq 5$.

A) Να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η περίμετρος και το εμβαδόν καθεμιάς από τις ορθογώνιες κορνίζες που θα κατασκευάζονται με διαστάσεις x και y

B) Στη συνέχεια να βρεθούν τα όρια του αθροίσματος των εμβαδών δυο τετραγωνικών κορνιζών που θα κατασκευαστούν με πλευρές μήκους x και y .

Λύση:

A) Η περίμετρος είναι $2x+2y$ εκατοστά ενώ το εμβαδό $x \cdot y$ τετραγωνικά εκατοστά. Έχουμε:

$$\bullet \quad 20 \leq x \leq 20,2 \Rightarrow 40 \leq 2x \leq 40,4 \quad (1)$$

$$4,9 \leq y \leq 5 \Rightarrow 9,8 \leq 2y \leq 10 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 49,8 \leq 2x+2y \leq 50,4$$

$$\bullet \quad 20 \leq x \leq 20,2 \text{ και}$$

$$4,9 \leq y \leq 5 \Rightarrow 98 \leq x \cdot y \leq 101$$

B) Το ζητούμενο άθροισμα είναι $x^2 + y^2 \text{ cm}^2$

$$\bullet \quad 20 \leq x \leq 20,2 \Rightarrow 400 \leq x^2 \leq 408,04 \quad (3)$$

$$\bullet \quad 4,9 \leq y \leq 5 \Rightarrow 24,01 \leq y^2 \leq 25 \quad (4)$$

Άσκηση 8

i) Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = |2^{x+2} - 2^x| + |x + |x|| - ||x| - x| \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Αν x, y, z πραγματικοί αριθμοί με

$$x(y-1)(z-2) \neq 0, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y-1}{|y-1|} + \frac{z-2}{|z-2|} \leq 3.$$

iii) Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 3$, να δείξετε ότι

$$\alpha) |4x - 5y| \leq 19 \text{ και}$$

$$\beta) |3x - 2y + 2014| < 2025$$

Λύση:

i) Γνωρίζουμε ότι ισχύει $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι η παράσταση γίνεται:

$$A = |2^{x+2} - 2^x| + |x + |x|| - ||x| - x| =$$

$$|2^2 \cdot 2^x - 2^x| + |x + |x|| - ||x| - x| =$$

$$|3 \cdot 2^x| + |x + |x|| - ||x| - x| =$$

$$3 \cdot 2^x + x + |x| - (|x| - x) =$$

$$3 \cdot 2^x + x + |x| - |x| + x = 3 \cdot 2^x + 2x$$

$$\text{ii) } x \cdot (y-1) \cdot (z-2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq 0 \text{ και } y \neq 1 \text{ και } z \neq 2$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $|x| \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Άρα } \frac{x}{|x|} \leq 1. \text{ Όμοια } \frac{y-1}{|y-1|} \leq 1 \text{ και } \frac{z-2}{|z-2|} \leq 1,$$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε την ζητούμενη.

iii) α) Αφού

$$\left. \begin{array}{l} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot (-5) \end{array} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -4 \leq 4x \leq 4 \\ -15 \leq -5y \leq 15 \end{array} \right\}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$-19 \leq 4x - 5y \leq 19 \Leftrightarrow |4x - 5y| \leq 19$$

β' τρόπος

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|\alpha - \beta| = |\alpha + (-\beta)| \leq |\alpha| + |-\beta| = |\alpha| + |\beta|$$

Άρα έχουμε

$$|4x - 5y| \leq |4x| + |5y| = 4|x| + 5|y| \leq \leq 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 4 + 15 = 19.$$

β) Όμοια έχουμε:

$$|3x - 2y + 2014| \leq |3x| + |2y| + 2014 =$$

$$3|x| + 2|y| + 2014 \leq 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2014 = 2023.$$

$$\text{Άρα τελικά: } |3x - 2y + 2014| \leq 2023 < 2025$$

Άσκηση 9

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{x^2 + |x|}{|x| + 1} + \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} - \frac{3x^2 - 12}{|x| + 2}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση A .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2A = 3$

Λύση:

α) Πρέπει και αρκεί

$$\left. \begin{array}{l} |x| + 1 \neq 0 \\ |x| - 1 \neq 0 \\ |x| + 2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

β) Η παράσταση γίνεται:

$$A = \frac{x^2 + |x|}{|x| + 1} + \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} - \frac{3x^2 - 12}{|x| + 2} =$$

$$\frac{|x|^2 + |x|}{|x| + 1} + \frac{|x|^2 - |x|}{|x| - 1} - \frac{3|x|^2 - 12}{|x| + 2} =$$

$$\frac{|x|(|x| + 1)}{|x| + 1} + \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} - \frac{3(|x|^2 - 4)}{|x| + 2} =$$

$$\frac{|x|(|x|+1)}{|x|+1} + \frac{|x|(|x|-1)}{|x|-1} - \frac{3(|x|-2)(|x|+2)}{|x|+2} =$$

$$|x| + |x| - 3|x| + 6 = -|x| + 6.$$

γ) Η εξίσωση γίνεται:

$$2A = 3 \Leftrightarrow 2(-|x| + 6) = 3 \Leftrightarrow -2|x| = -9 \Leftrightarrow$$

$$|x| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{9}{2}, \text{ δεκτές.}$$

Άσκηση 10

Δίνεται ο αριθμός

$$A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3 \cdot 2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 3}} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{98}}{\sqrt{99 \cdot 98}}.$$

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$K = A^2 + \frac{2}{\sqrt{198}}$$

Λύση:

Ο αριθμός A γίνεται:

$$A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3 \cdot 2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 3}} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{98}}{\sqrt{99 \cdot 98}} =$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{98}}{\sqrt{99} \cdot \sqrt{98}} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{99}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{99}}. \text{ Άρα η παράσταση K γίνεται:}$$

$$K = A^2 + \frac{2}{\sqrt{198}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{99}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 99}} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{99}} + \frac{1}{99} + \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{99}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{99} = \frac{101}{198}.$$

Άσκηση 11

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = 4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1.$$

β) Εάν η παράσταση A γίνεται

$$A = (4x^2 - 1)(x^2 - 4x + 1)$$

να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

Λύση:

α) $A = 4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 =$

$$4x^4 - 16x^3 + 4x^2 - x^2 + 4x - 1 =$$

$$4x^2(x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 4x + 1) =$$

$$(4x^2 - 1)(x^2 - 4x + 1)$$

β) $A = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$4x^2 - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \text{ ή } x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \text{ ή } x^2 - 4x + 4 = 3 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \text{ ή } (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \text{ ή } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Άσκηση 12

i) Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

παίρνει την μορφή: $A = (x-1)^4(x^2 + x + 1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $A \geq 0$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

Λύση:

i) Η παράσταση γίνεται:

$$A = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 =$$

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 =$$

$$x^3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$

$$x^3(x-1)^3 - (x-1)^3 = (x-1)^3(x^3 - 1) =$$

$$(x-1)^4(x^2 + x + 1)$$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $(x-1)^4 \geq 0$ και

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $A \geq 0$.

iii) Η εξίσωση γίνεται: $A = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)^4 \left(\underbrace{x^2 + x + 1}_{>0} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^4 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Βιβλιογραφία:

www.mathematica.gr

Νικολουδάκης Βαγγέλης: Απόλυτα

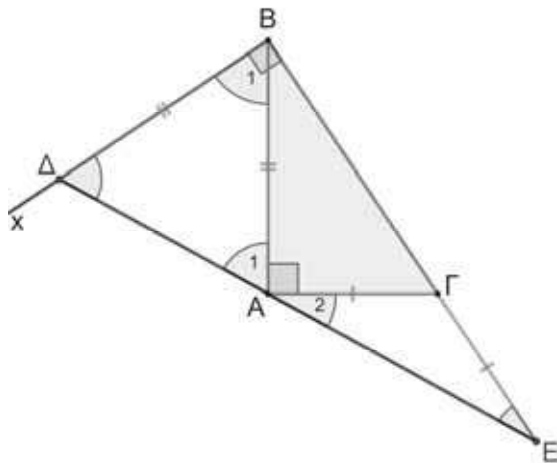
Ομάδα Facebook

Άσκηση 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Θεωρούμε ημιευθεία Bx κάθετη στη πλευρά $B\Gamma$ στο ίδιο ημιεπίπεδο με το τρίγωνο. Πάνω στην Bx θεωρούμε σημείο Δ , τέτοιο ώστε $BA = B\Delta$ και στην προέκταση της $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma A = \Gamma E$.

- Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}_2$ όπου $\hat{A}_2 = \hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma}$
- Να αποδείξετε ότι $\hat{A}_1 = 45^\circ + \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B}$ και $\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

Λύση



Ενώνουμε με δύο ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία Δ, A και A, E .

- Προφανώς το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές αφού $\Gamma A = \Gamma E$ έτσι οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A}_2 = \hat{E}$. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του $A\Gamma E$ επομένως $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2 + \hat{E}$ άρα $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}_2$.
- Το τρίγωνο ΔBA είναι ισοσκελές $BA = B\Delta$, άρα $\hat{\Delta} = \hat{A}_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔBA , έχουμε:
 $\hat{\Delta} + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ$ ή $\hat{A}_1 + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ$
 $2\hat{A}_1 + 90^\circ - \hat{B} = 180^\circ$ ή $2\hat{A}_1 = 180^\circ - 90^\circ + \hat{B}$

$$2\hat{A}_1 = 90^\circ + \hat{B} \text{ ή } \hat{A}_1 = 45^\circ + \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\text{iii) } \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 45^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{A} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$$

$$45^\circ + \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} + \hat{A} = 45^\circ + \frac{90^\circ}{2} + \hat{A} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

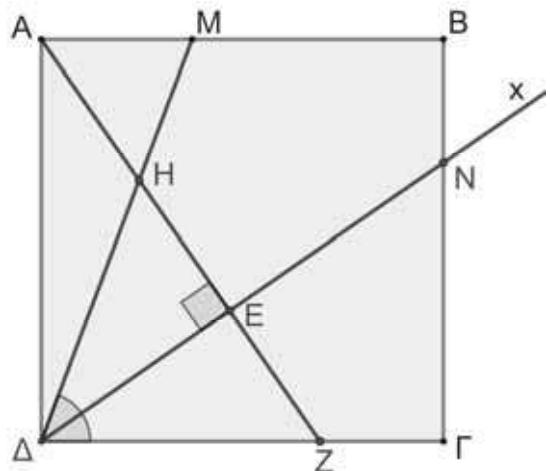
Άρα $\Delta A E = 180^\circ$, οπότε τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

Προσοχή! μέχρι να αποδείξουμε ότι τα Δ, A, E είναι συνευθειακά, δεν χρησιμοποιήσαμε ότι υπάρχει τρίγωνο ΔBE !

Άσκηση 2

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο της AB έτσι ώστε $AM < \frac{AB}{2}$. Αν η ημιευθεία Δx

είναι η διχοτόμος της γωνία $\hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N και η κάθετη AE προς την Δx δηλαδή $AE \perp \Delta x$, όπου E είναι το ίχνος της κάθετου από το A πάνω στη Δx



τέμνει την ΔM στο H και τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο Z .

- Να δείξετε ότι $\Delta Z = \Delta H$
- Να δείξετε ότι: $\Delta Z = \Gamma N$ και $AZ = \Delta N$
- Να δείξετε ότι $MA = MH$
- Να δείξετε ότι $\Delta M = \Gamma N + AM$
- Να δείξετε ότι $\Delta B > \Gamma N + AM$

Λύση

- Στο τρίγωνο ΔHZ η ΔE είναι ύψος

($AE \perp \Delta x$) και διχοτόμος, άρα το ΔHZ είναι ισοσκελές, επομένως $\Delta H = \Delta Z$.

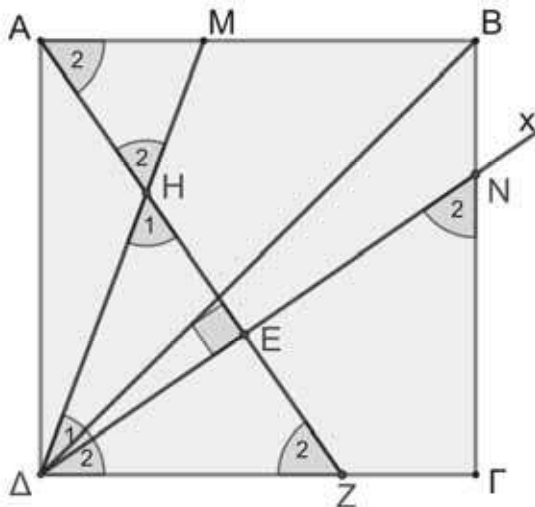
ii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\Delta \Delta Z$ και $\Delta \Gamma N$. Αυτά έχουν:

- Είναι ορθογώνια $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$
- $\Delta \Delta = \Delta \Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$
- $\hat{N}_2 = \hat{Z}_2$, ως οξείες γωνίες με τις πλευρές τους κάθετες $ZA \perp \Delta N$ και $NG \perp Z\Delta$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά τους ίση και μια οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα, δηλαδή $\Delta \Delta Z = \Delta \Gamma N$, επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, άρα $\Delta Z = \Gamma N$ και $AZ = \Delta N$.

iii) Έχουμε $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$, ως κατακορυφήν και $\hat{A}_2 = \hat{Z}_2$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB \parallel \Delta \Gamma$ που τέμνονται από την AZ , έτσι

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \hat{Z}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$



Επομένως το τρίγωνο ΔHZ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta H = \Delta Z$.

iv) Τότε $\Delta M = \Delta H + HM = \Delta Z + AM = \Gamma N + AM$

v) Για να αποδείξουμε ότι $\Delta B > \Gamma N + AM$ αρκεί να δείξουμε ότι

vi) Για να αποδείξουμε ότι $\Delta B > \Gamma N + AM$ αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta B > \Delta H + MH$ δηλαδή $\Delta B > \Delta M$ που ισχύει αφού M εσωτερικό σημείο του ΔB .

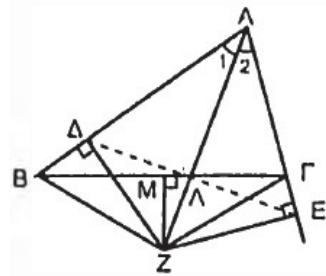
Άσκηση 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Η κάθετη στην $B\Gamma$ στο M τέμνει την διχοτόμο AA της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο Z . Φέρνουμε τις $Z\Delta \perp AB$ και $ZE \perp A\Gamma$. Να δείξετε ότι:

i) $B\Delta = \Gamma E$

ii) $AB + A\Gamma = 2A\Delta$

iii) Η AZ είναι μεσοκάθετη της ΔE



Λύση

i) Έχουμε ότι:

$\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$ (Αφού $Z\Delta \perp AB$ και $ZE \perp A\Gamma$)

$BZ = \Gamma \Gamma$ (Αφού η MZ είναι μεσοκάθετος της $B\Gamma$)

$Z\Delta = ZE$ (Αφού τα σημεία της διχοτόμου ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας)

Άρα τα τρίγωνα $B\Delta Z = \Gamma \Gamma E$, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

ii) Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} AB = A\Delta + \Delta B \\ A\Gamma = A\Gamma - \Gamma \Gamma \end{array} \right\}^+ \Rightarrow$$

$$AB + A\Gamma = A\Delta + \Delta B + A\Gamma - \Gamma \Gamma \xrightarrow{B\Gamma = A\Gamma} AB + A\Gamma = A\Delta + A\Gamma \quad (1).$$

Αφού $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$, AZ (κοινή πλευρά), $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (η AZ διχοτόμος) τα τρίγωνα $A\Delta Z = A\Gamma E$, οπότε $A\Delta = A\Gamma$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη.

iii) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές (αφού $A\Delta = A\Gamma$) και η AZ διχοτόμος της $\hat{A}$ άρα είναι και μεσοκάθετος της ΔE .

Άσκηση 4

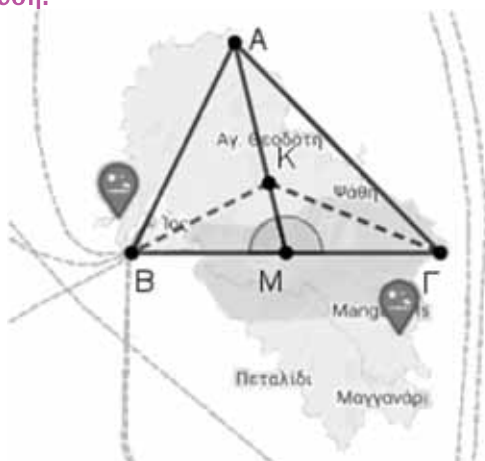
Σε κοσμοπολίτικο νησί του Αιγαίου δύο συνοικισμοί B , Γ απέχουν άνισα ($AB < A\Gamma$) από την μονάδα αφαλάτωσης A . Η μεταξύ τους απόσταση είναι $B\Gamma = 10$ Km και το κόστος σύνδεσης είναι 100 ευρώ/m.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M στον σωλήνα ύδρευσης AM , ώστε οι δύο συνοικισμοί να έχουν το ίδιο κόστος σύνδεσης, όταν συνδεθούν στο σημείο αυτό και να βρεθεί το κόστος σύνδεσης.

ii) Αν μπορούν να συνδεθούν σε διαφορετικά σημεία με το ίδιο κόστος σύνδεσης να βρεθεί η

Θέση των σημείων και το αντίστοιχο κόστος.

Λύση:



i) Προφανές σημείο σύνδεσης είναι το μέσο M της μεταξύ τους απόστασης BΓ και το κόστος σύνδεσης για κάθε συννοικισμό θα είναι $5000 \cdot 100 = 500000$ ευρώ.

Θα δείξουμε ότι το σημείο M είναι μοναδικό. Τα τρίγωνα ABM και AMΓ έχουν: $BM = MΓ$, AM κοινή πλευρά και $AB < AΓ$, άρα αντίστοιχα

$\hat{A}MB < \hat{A}M\Lambda$ (απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται αντίστοιχα άνισες γωνίες).

Έστω τώρα τυχαίο σημείο K που βρίσκεται μεταξύ των A, M. Στα τρίγωνα BMK και ΓMK έχουμε ότι $BM = MΓ$, KM κοινή πλευρά και

$\hat{K}MB < \hat{K}M\Lambda$, άρα $KB < KΓ$.

Αντίστοιχα ισχύουν, αν το K βρίσκεται στην προέκταση της AM προς το M.

ii)



Φέρνουμε την διάμεσο AM και τις BΔ, ΓΖ

κάθετες στη διάμεσο από τα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Τα τρίγωνα BMD και ΓMZ είναι ίσα,

γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{Z} = 90^\circ$, $BM = MΓ$, $\hat{M}B\Delta = \hat{M}ΓZ$

(ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων BΔ, ΓΖ).

Άρα $B\Delta = ΓZ$. Άρα οι συννοικισμοί πρέπει να συνδεθούν στα σημεία Δ, Z αντίστοιχα με κόστος

$$5000 \cdot \text{συν}(\hat{M}B\Delta) \text{ ευρώ.}$$

Άσκηση 5

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AΓ$). Στις πλευρές AB, AΓ παίρνουμε τμήματα $AK = A\Lambda$ αντίστοιχα. Στα σημεία K και Λ φέρνουμε ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) κάθετες στις AB και AΓ που τέμνουν τη BΓ στα E και Z αντίστοιχα. Αν οι (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται μεταξύ τους στο Δ, να δείξετε ότι

i) $ZB = ΓE$

ii) Το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.

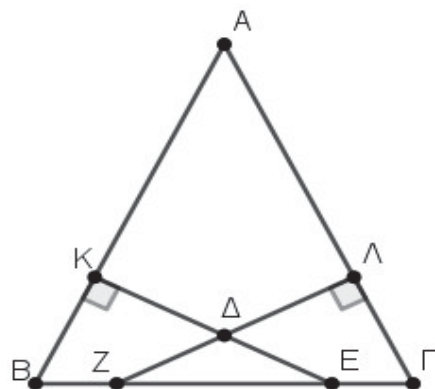
iii) Αν το σημείο M είναι το μέσο της BΓ, δείξτε

ότι η AΔ διέρχεται από το μέσο M της BΓ.

Λύση

i)

Τα



τρίγωνα EKB, ZΛΓ έχουν:

$\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου), $KB = Γ\Lambda$ (υπόλοιπα ίσων πλευρών). Άρα είναι ίσα, οπότε και $BE = ΓZ$, συνεπώς $ZB = ΓE$.

ii) Αφού τα τρίγωνα $EKB = Z\Lambda\Gamma$ θα έχουν

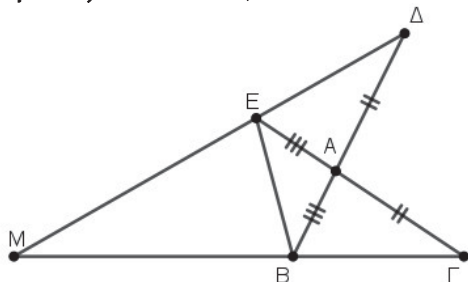
$\hat{B}E\Delta = \hat{\Gamma}Z\Delta$, άρα το τρίγωνο ΔEZ έχει τις παρά τη βάση του γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.

iii) Τα τρίγωνα AKΔ και AΛΔ είναι ίσα (ορθογώνια με AΔ κοινή και $AK = A\Lambda$), άρα η AΔ είναι διχοτόμος της γωνίας A επομένως η AΔ είναι και διάμεσος του ισοσκελούς ABΓ, συνεπώς η AΔ διέρχεται από το M.

Άσκηση 6

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Προεκτείνουμε τις AB και $A\Gamma$ προς το A και παίρνουμε $AD = A\Gamma$ και $AB = AE$ αντίστοιχα. Αν η DE τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο M , να δείξετε ότι:

i) Οι γωνίες $\hat{AEB} = \hat{ABE}$, $\hat{AED} = \hat{AB\Gamma}$.



ii) το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές.

iii) Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{EMB}$ διέρχεται από το σημείο A .

Λύση

i) Το τρίγωνο AEB είναι ισοσκελές, άρα $\hat{AEB} = \hat{ABE}$. Τα τρίγωνα AED , $AB\Gamma$ είναι ίσα (γιατί;), οπότε $\hat{AED} = \hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B} = \hat{ADE}$.

ii) Τα τρίγωνα BED , BEG είναι ίσα (γιατί;), άρα οι γωνίες $\hat{BED} = \hat{BEG}$ οπότε και $\hat{BEM} = \hat{EBM}$ (γωνίες της βάσης). Άρα το τρίγωνο MEB είναι ισοσκελές.

iii) Φέρνουμε την AM , οπότε τα τρίγωνα AEM και AMB είναι ίσα (γιατί;). Οπότε $\hat{EMA} = \hat{BMA}$.

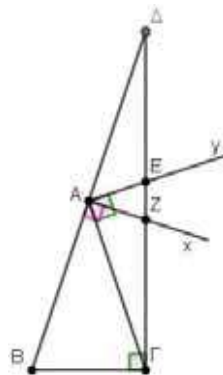
Άσκηση 7

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην κορυφή Γ φέρνουμε κάθετη στην $B\Gamma$ που τέμνει τη BA στο σημείο Δ . Από την κορυφή A φέρνουμε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$ που τέμνουν την $\Gamma\Delta$ στα σημεία Z και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $DE = \Gamma Z$.

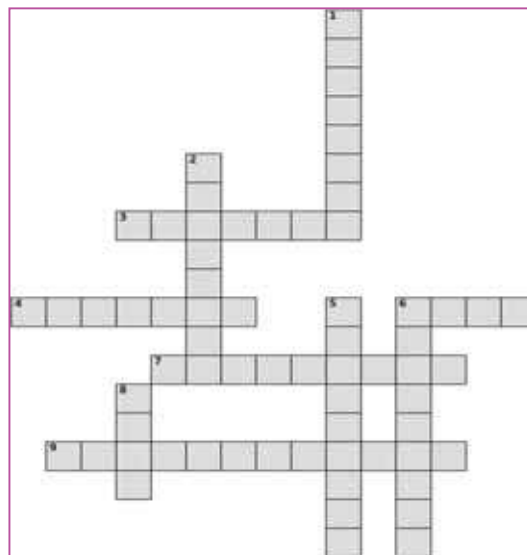
Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ADE και $A\Gamma Z$ είναι ίσα.

Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το $B\Gamma\Delta$ ορθογώνιο έχουμε ότι: $\hat{ADE} = \hat{A\Gamma Z}$ (1) ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $AD = A\Gamma$ (2). Οι γωνίες $\hat{DAE} = \hat{ZAG}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{EAZ}$ (3). Άρα τα τρίγωνα $ADE = A\Gamma Z$ οπότε $DE = \Gamma Z$.



Άσκηση 8 - Σταυρόλεξο (Πετροπούλου Άννα)



Οριζόντια

3. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ... ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα

4. Έτσι λέγεται ένα τρίγωνο όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες

6. Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους μία προς μία

7. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος

9. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι στη βάση γωνίες είναι ίσες

Κάθετα

1. Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς

2. Σε δύο ίσα τρίγωνα από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα

5. Έτσι λέγεται ένα τρίγωνο όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες

6. Έτσι λέγεται ένα τρίγωνο όταν έχει δύο πλευρές του ίσες

8. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

Περικλής Παντούλας

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $\Delta = [0, 3\pi]$.

Λύση

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \kappa \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ ή } x - \frac{\pi}{4} = \kappa \cdot 2\pi - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa \cdot 2\pi + \pi \text{ ή } x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Από τις παραπάνω λύσεις αναζητούμε αυτές που ανήκουν στο διάστημα $\Delta = [0, 3\pi]$. Έχουμε:

$$\checkmark \quad x \in [0, 3\pi] \Rightarrow 0 \leq x \leq 3\pi \Rightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \pi \leq 3\pi \Rightarrow$$

$$0 \leq 2\kappa + 1 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 2\kappa \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \kappa \leq 1 \Rightarrow \kappa = 0, 1$$

Για $\kappa = 0$, $x = \pi$ και για $\kappa = 1$, $x = 3\pi$

$$\checkmark \quad x \in [0, 3\pi] \Rightarrow 0 \leq x \leq 3\pi \Rightarrow 0 \leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq 3\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2\kappa - \frac{1}{2} \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2\kappa \leq 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$\kappa = 1. \text{ Για } \kappa = 1, \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Άρα το σύνολο λύσεων είναι

$$L = \left\{ \pi, \frac{3\pi}{2}, 3\pi \right\}$$

Άσκηση 2

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x$

ii) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

iii) $\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$

Λύση

i) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε:

Περικλής Παντούλας - Βασίλης Κουγιουμτσιάδης

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} - x \text{ ή } \cancel{x} + \frac{\pi}{3} = \kappa \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2} + \cancel{x} \Leftrightarrow$$

$$x + x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \text{ ή Αδύνατη } \Leftrightarrow$$

$$2x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

1ος τρόπος:

Έχουμε:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

και στη συνέχεια όπως στο παράδειγμα i.

2ος τρόπος:

Έχουμε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ (1).

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι αν μια λύση της είναι το $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε θα είναι $\sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0$.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$, τότε λόγω της (1) θα είναι και $\eta\mu x_0 = 0$.

Τότε από την ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ για

$x = x_0$ θα έχουμε:

$$\eta\mu^2 x_0 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0 = 1 \Leftrightarrow 0^2 + 0^2 = 1, \text{ το οποίο είναι}$$

άτοπο. Οπότε από την (1) έχουμε:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \stackrel{+\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

1ος τρόπος:

Έχουμε:

$$\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = \sin(\pi - x) \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi - x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \kappa \cdot 2\pi + \pi - x \text{ ή } \frac{\pi}{2} - x = \kappa \cdot 2\pi - \pi + x \Leftrightarrow$$

$$x - x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } -2x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Σημείωση: Το $-\kappa$ το γράψαμε κ (γιατί);

2ος τρόπος:

$$\text{Έχουμε } \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

Όμοια από το 2ο τρόπο του ii)

Από την (1) έχουμε:

$$\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Σημείωση:

Οι λύσεις που προκύπτουν από τους δύο τρόπους για τις διάφορες ακέραιες τιμές του κ ταυτίζονται.



Βασίλης Κουγιουμτσιάδης

Άσκηση 3

Αν ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = 2$, να

βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων

$$A = \frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right)} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)}$$

$$B = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)$$

$$\Gamma = \varepsilon\varphi^3\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \varepsilon\varphi^3\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)$$

$$\Delta = \varepsilon\varphi^4\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \varepsilon\varphi^4\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)$$

$$E = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)} + \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right)}$$

Λύση

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \frac{\pi}{12} + x + \frac{5\pi}{12} - x = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

Άρα οι γωνίες $\frac{\pi}{12} + x$ και $\frac{5\pi}{12} - x$ είναι συμπληρωματικές.

Επομένως,

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right) \text{ άρα}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = 1$$

Θέτουμε $\alpha = \frac{\pi}{12} + x$ και $\beta = \frac{5\pi}{12} - x$ οπότε έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = 2 \text{ και } \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta = 1$$

$$A = \frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right)} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\beta} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} = \frac{2}{1} = 2$$

$$B = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = \alpha^2 + \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$\Gamma = \varepsilon\varphi^3\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \varepsilon\varphi^3\left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = \alpha^3 + \beta^3$$

$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

$$\Delta = \varepsilon\varphi^4\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \varepsilon\varphi^4\left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = \alpha^4 + \beta^4$$

$$(\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 =$$

$$B^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 2^2 - 2 \cdot 1^2 = 2$$

$$E = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)} + \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{12} - x\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12} + x\right)} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} + \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha} =$$

$$\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\beta}{\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} = \frac{B}{1} = 2$$

Άσκηση 4

Αν $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ και ισχύει ότι

$$2(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi) = 1 - \sqrt{3}$$

i) Να δείξετε ότι $\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

ii) Να βρείτε $\eta\mu\varphi$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi$.

iii) Να βρείτε $\varepsilon\varphi\varphi$ και $\sigma\varphi\varphi$.

iv) Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = 2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi,$$

$$B = \sigma\upsilon\nu^2\varphi - \eta\mu^2\varphi,$$

$$\Gamma = \frac{2\varepsilon\varphi\varphi}{1 - \varepsilon\varphi^2\varphi}$$

$$\text{και να δείξετε ότι } A^2 + B^2 = 1.$$

Λύση

i) $2(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi) = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow$

$$(2(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi))^2 = (1 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

$$4(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi)^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \Rightarrow$$

$$4(\eta\mu^2\varphi + 2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi) = 1 - 2\sqrt{3} + 3 \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi + 2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$1 + 2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} - 1 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\cancel{4} - 2\sqrt{3} - \cancel{4}}{4} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

ii) Αφού $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ προφανώς

$$\eta\mu\varphi > 0, \sigma\upsilon\nu\varphi < 0, \epsilon\varphi\varphi < 0 \text{ και } \sigma\varphi\varphi = \frac{1}{\epsilon\varphi\varphi} < 0$$

Τότε οι αριθμοί $x_1 = \eta\mu\varphi > 0$, $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi < 0$ έχουν άθροισμα

$$S = x_1 + x_2 = \eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

και γινόμενο

$$P = x_1 \cdot x_2 = \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{4},$$

άρα θα είναι οι δύο (ετερόσημες ρίζες) της εξίσωσης β βαθμού $x^2 - S \cdot x + P = 0$ δηλαδή τα $x_1 = \eta\mu\varphi > 0$, $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi < 0$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \text{ δηλαδή}$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Άρα } x_1 = \eta\mu\varphi = \frac{1}{2}, x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{iii) } \epsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ενώ}$$

$$\sigma\varphi\varphi = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\text{iv) } A = 2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$B = \sigma\upsilon\nu^2\varphi - \eta\mu^2\varphi = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma = \frac{2\epsilon\varphi\varphi}{1-\epsilon\varphi^2\varphi} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{9}} =$$

$$\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = -\sqrt{3}$$

και τότε

$$A^2 + B^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Άσκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{2026} + \left(\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)^{2026} = 0 \quad (1)$$

Λύση

$$\text{Προφανώς } \left(\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{2026} \geq 0 \text{ και}$$

$$\left(\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)^{2026} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{2026} = 0 \\ \left(\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)^{2026} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{2} = \kappa \cdot \pi, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x + \frac{\pi}{3} = \lambda \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Σχόλιο:

Εννοείται και δεν ξέρουμε ότι ο ακέραιος που εμφανίζεται στο τύπο (1) είναι ο ίδιος με τον ακέραιο που εμφανίζεται στον τύπο (2) και επειδή ζητάμε στην πραγματικότητα λύσεις που συναληθεύουν θα υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των τιμών των δύο ακεραίων

$$\left. \begin{aligned} 3x &= \kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, & \kappa \in \mathbb{Z} \\ x &= \lambda \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}, & \lambda \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\kappa \cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{6}, & \kappa \in \mathbb{Z} \\ x &= \lambda \cdot \pi + \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}, & \lambda \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\kappa \cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{6}, & \kappa \in \mathbb{Z} & (1) \\ x &= \lambda \cdot \pi + \frac{\pi}{6}, & \lambda \in \mathbb{Z} & (2) \end{aligned} \right\}$$

Έτσι πρέπει να αναζητήσουμε ακεραίους $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε οι λύσεις που παράγονται από τον τύπο (1) να ταυτίζονται με τις λύσεις που παράγονται από τον τύπο (2)

$$\frac{\kappa \cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \lambda \cdot \pi + \frac{\pi}{6}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\frac{\kappa \cdot \pi}{3} = \lambda \cdot \pi, \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\kappa = 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα έχουμε: } x = \lambda \cdot \pi + \frac{\pi}{6}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 6

Η θερμοκρασία σε μια πόλη κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια τριγωνομετρική συνάρτηση.

Η μέγιστη θερμοκρασία είναι 30°C και καταγράφεται στις 15.00 και η ελάχιστη 10°C και καταγράφεται στις 03.00. Θεωρείστε ότι $t=0$ αντιστοιχεί στα μεσάνυχτα (00.00).

i) Να βρείτε μια συνάρτηση της μορφής

$$T(t) = \rho \cdot \sin[\omega(t-c)] + \kappa,$$

$\rho, \omega > 0$ και $c, \kappa \in \mathbb{R}$

Που περιγράφει τη θερμοκρασία T σε σχέση με την ώρα t του 24ώρου.

ii) Να βρείτε τις ώρες του 24ώρου στις οποίες η θερμοκρασία είναι ακριβώς 25°C (πηγή: ΑΙ)

Λύση

i) Από το σχόλιο του σχολικού βιβλίου σελίδα 81, έχουμε:

- ρ είναι το πλάτος, δηλαδή
 $\rho = T_{\max} - T_{\min} = 30 - 20 = 10(^{\circ}\text{C})$

- Συχνότητα $T=24$ (ώρες), άρα

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

- Η σταθερά κ είναι η μέση θερμοκρασία και ισούται με το μέσο όρο της μέγιστης και της ελάχιστης θερμοκρασίας. Άρα

$$\kappa = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = \frac{30 + 10}{2} = 20(^{\circ}\text{C})$$

(Υπόψιν ότι η γραφική παράσταση της T προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(t) = \rho \cdot \sin \omega t$ με οριζόντια μετατόπιση κατά c μονάδες (αριστερά αν $c > 0$, δεξιά αν $c < 0$) και με κατακόρυφη μετατόπιση κατά κ μονάδες (προς τα πάνω αν $\kappa > 0$ και προς τα κάτω αν $\kappa < 0$)

- Η σταθερά c ισούται με τη ποσότητα της οριζόντιας μετατόπισης. Αφού η μέγιστη θερμοκρασία καταγράφεται στις 15.00 (αντί στις 00.00) η γραφική παράσταση θα έχει μετατοπιστεί 15 μονάδες προς τα δεξιά. Άρα $c=15$

Έτσι η συνάρτηση είναι:

$$T(t) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-15)\right] + 20, \quad 0 \leq t \leq 24$$

$$\text{ii)} T(t) = 15 \Leftrightarrow 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-15)\right] + 20 = 15 \Leftrightarrow$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-15)\right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-15)\right] = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}(t-15) = \kappa \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow t = 19 + 24\kappa \text{ ή } t = 11 + 24\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Όμως $0 \leq t \leq 24$, οπότε

- $0 \leq 19 + 24\kappa \leq 24 \Rightarrow -19 \leq 24\kappa \leq 5 \Rightarrow$

$$-\frac{19}{24} \leq \kappa \leq \frac{5}{24} \Rightarrow \kappa = 0. \text{ Για } \kappa = 0, t = 19$$

- $0 \leq 11 + 24\kappa \leq 24 \Rightarrow -11 \leq 24\kappa \leq 5 \Rightarrow$

$$-\frac{11}{24} \leq \kappa \leq \frac{5}{24} \Rightarrow \kappa = 0. \text{ Για } \kappa = 0, t = 11$$

Άρα,

η θερμοκρασία είναι ακριβώς 25°C στις 19.00 (δηλαδή στις 7 το απόγευμα) και στις 11.00 (δηλαδή στις 11 το πρωί)

Άσκηση 1

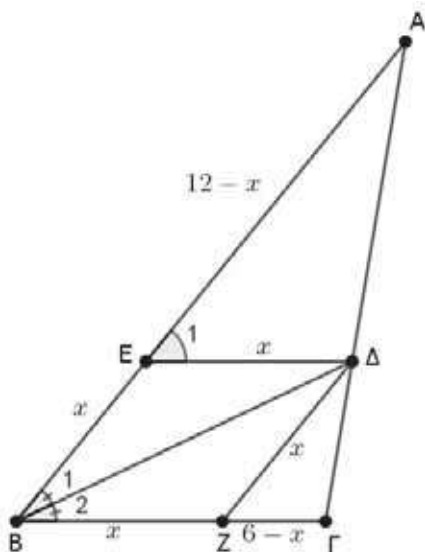
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BD . Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $B\Gamma$ στο Z και η παράλληλη από το Δ προς την $B\Gamma$ τέμνει την AB στο E . Αν $AB=12$ και $B\Gamma=6$,

α) να βρείτε την περίμετρο Π του τετραπλεύρου $EDZB$.

β) Αν $BD=4\sqrt{3}$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AG .

Λύση

α) Είναι $ED \parallel BZ$ και $EB \parallel \Delta Z$, άρα το $EDZB$ είναι παραλληλόγραμμο και εφόσον η διαγώνιος BD διχοτομεί τη γωνία B , το $EDZB$ είναι ρόμβος.



Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια καθώς έχουν $\hat{E}_1 = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά) και $\hat{A}$ κοινή. Αν $EB=x$ τότε

$$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{12-x}{12} = \frac{x}{6} \Rightarrow$$

$$12x = 72 - 6x \Rightarrow x = 4.$$

Επομένως $\Pi = 4x = 16$.

β) Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $EB\Delta$ έχουμε

$$BD^2 = EB^2 + ED^2 - 2 \cdot EB \cdot ED \cdot \sin(\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}) \Rightarrow$$

$$(4\sqrt{3})^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}) \Rightarrow$$

$$\sin(\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} = 120^\circ, \text{ άρα}$$

$\hat{E}\hat{B}\hat{Z} = 60^\circ$ και από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$

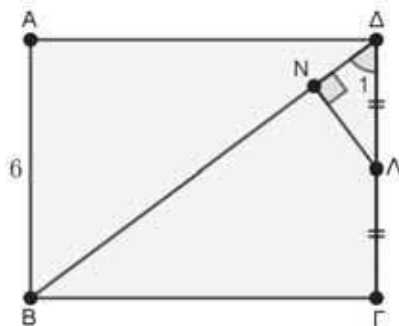
$$AG^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot B\Gamma \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow$$

$$AG^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AG = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

Άσκηση 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω Λ το μέσο της $\Delta\Gamma$. Η κάθετη από το Λ προς τη BD , τέμνει τη BD στο σημείο N . Αν $ND = \frac{9}{5}$ και $AB = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του $B\Gamma$.

Λύση



Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $N\Delta\Lambda$ είναι όμοια καθώς είναι ορθογώνια με $\hat{\Delta}_1$ κοινή. Έτσι

$$\frac{\Delta\Lambda}{B\Delta} = \frac{N\Delta}{\Delta\Gamma} \Rightarrow \frac{\Delta\Gamma}{2 \cdot B\Delta} = \frac{N\Delta}{\Delta\Gamma} \Rightarrow B\Delta = \frac{\Delta\Gamma^2}{2 \cdot N\Delta} \Rightarrow$$

$$B\Delta = \frac{6^2}{2 \cdot \frac{9}{5}} \Rightarrow B\Delta = \frac{36 \cdot 5}{18} \Rightarrow B\Delta = 10$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ έχουμε

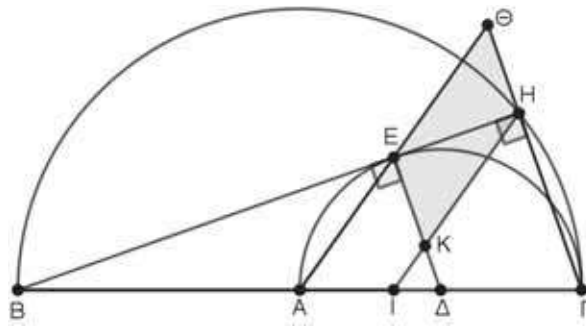
$$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow B\Gamma = 8.$$

Άσκηση 3

Δίνεται ημικύκλιο C_1 κέντρου A , ακτίνας $R=6$ και διαμέτρου $B\Gamma$. Εσωτερικά του C_1 γράφουμε ημικύκλιο C_2 κέντρου Δ και διαμέτρου $\Delta\Gamma$. Από το B φέρνουμε εφαπτομένη (ε) προς το ημικύκλιο C_2 και έστω E το σημείο επαφής με το C_2 και H το σημείο τομής της (ε) με το C_1 . Οι ευθείες ΓH και $A E$ τέμνονται στο σημείο Θ . Εσωτερικά της $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο I τέτοιο ώστε $B I = 8$. Οι ευθείες $I H$ και ΔE τέμνονται στο σημείο K .

Δείξτε ότι το ΘΕΚΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



Είναι $\Delta E \perp BH$ (αφού Ε σημείο επαφής) και $\Gamma H \perp BH$ (αφού η $\Gamma\hat{H}B$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), άρα $\Delta E \parallel \Gamma H$. Συνεπώς τα τρίγωνα $BE\Delta$ και $BH\Gamma$ είναι όμοια καθώς είναι ορθογώνια με τη γωνία $\hat{B}$ κοινή. Άρα

$$\frac{BE}{BH} = \frac{B\Delta}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{BE}{BH} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{BE}{BH} = \frac{3}{4}$$

Επιπλέον είναι

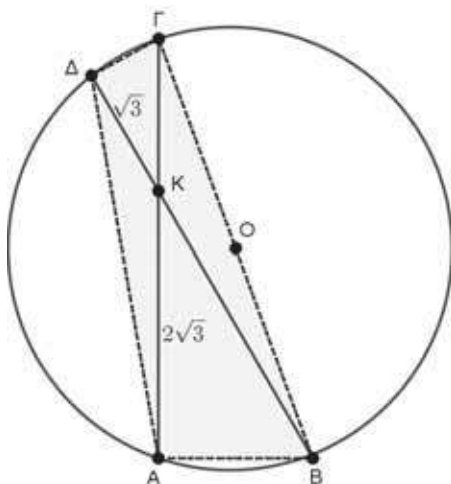
$$\frac{BA}{BI} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{BA}{BI} = \frac{3}{4}, \text{ δηλαδή } \frac{BA}{BI} = \frac{BE}{BH},$$

οπότε από το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή προκύπτει ότι $AE \parallel IK$.

Το ΘΕΚΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές ανά δυο παράλληλες.

Άσκηση 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) διαμέτρου $B\Gamma$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Αν K είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του $AB\Gamma\Delta$ και $\Delta K = \sqrt{3}, AK = 2\sqrt{3}$, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$.



Λύση

Προφανώς $B\Gamma = 2\rho = 2\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

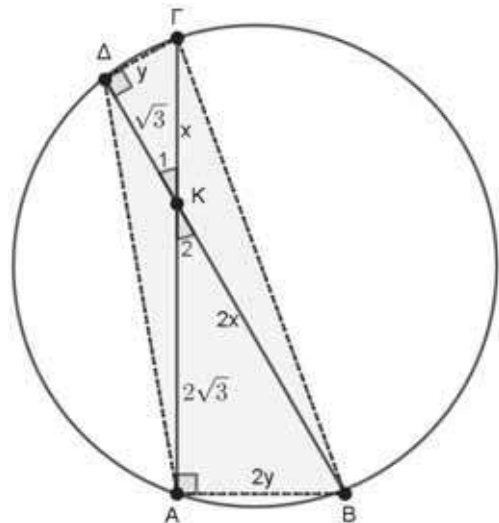
Τα τρίγωνα $\Delta\Gamma K$ και KAB είναι όμοια καθώς οι γωνίες $B\hat{\Delta}\Gamma, B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθές ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα

$$\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{KB}{K\Gamma} = \frac{AK}{K\Delta} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2.$$

Επομένως αν $\Delta\Gamma = y, K\Gamma = x$ τότε

$$AB = 2y, KB = 2x$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα $A\Gamma B$ και $\Delta\Gamma B$ και έχουμε αντίστοιχα:



$$A\Gamma^2 + AB^2 = B\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$(x + 2\sqrt{3})^2 + (2y)^2 = (2\rho)^2 \quad (1)$$

$$\Delta\Gamma^2 + \Delta B^2 = B\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$(2x + \sqrt{3})^2 + y^2 = (2\rho)^2 \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$(x + 2\sqrt{3})^2 + (2y)^2 = (2x + \sqrt{3})^2 + (y)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 + 4y^2 = 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$9 + 3y^2 = 3x^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 3 \quad (3).$$

Από τη (2) μέσω της (3) προκύπτει η εξίσωση:

$$(2x + \sqrt{3})^2 + x^2 - 3 = (2\sqrt{5+2\sqrt{3}})^2 \Leftrightarrow$$

$$5x^2 + 4\sqrt{3}x - 20 - 8\sqrt{3} = 0 \text{ με διακρίνουσα}$$

$$\Delta = 448 + 160\sqrt{3} = 16(28 + 10\sqrt{3}) = 16(5 + \sqrt{3})^2$$

και ρίζες

$$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm 4(5 + \sqrt{3})}{10} = \begin{cases} 2, \\ -\frac{20 + 8\sqrt{3}}{10} < 0 \end{cases}$$

από τις οποίες δεχόμαστε μόνο τη $x=2$. Από την (3) έχουμε ότι $y=1$. Άρα $\Delta\Gamma=1$ και $AB=2$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\text{K}$ είναι $\Delta\Gamma = \frac{\text{ΚΓ}}{2}$

οπότε $\hat{K}_1 = 30^\circ$ και τότε

$$\Delta\hat{K}A = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Από το νόμο των συνημιτόνων για το $\Delta\text{ΚΑ}$ τρίγωνο έχουμε

$$A\Delta^2 = \Delta\text{K}^2 + \text{ΑΚ}^2 - 2 \cdot \Delta\text{Κ} \cdot \text{ΑΚ} \cdot \cos 150^\circ \Rightarrow$$

$$A\Delta^2 = 3 + 12 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A\Delta = \sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$$

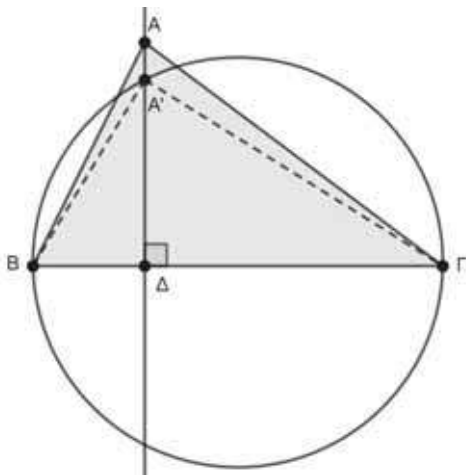
Άσκηση 5

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ οξείες γωνίες και το ύψος του $A\Delta$. Αν ισχύει $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή.

Λύση

α' τρόπος

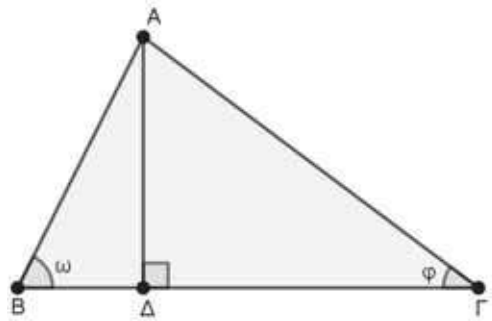
Έστω ότι ο κύκλος με διάμετρο $B\Gamma$ τέμνει, στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$, την $A\Delta$ σε σημείο A' διαφορετικό του A .



Τότε $B\hat{A}'\Gamma = 90^\circ$ (ως εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο) και το τρίγωνο $BA'\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $A'\Delta$ ύψος. Οπότε $A'\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ και έχουμε $A\Delta^2 = A'\Delta^2 \Rightarrow A\Delta = A'\Delta$, άτοπο αφού το A είναι διαφορετικό του A' . Άρα τα σημεία A και A' ταυτίζονται και το τρίγωνο $BA\Gamma$ είναι ορθογώνιο

στο A .

β' τρόπος (με Τριγωνομετρία)



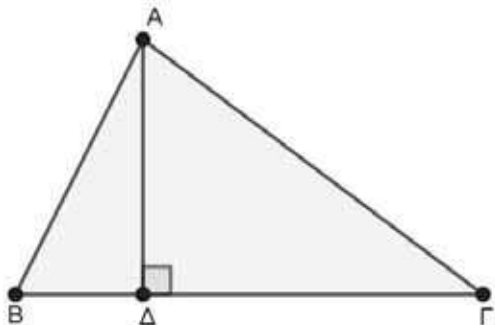
$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sigma\varphi\varphi \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \Leftrightarrow \omega, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2} - \varphi \Leftrightarrow$$

$$\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

γ' τρόπος (με Αναλυτική Γεωμετρία για τους/τις μαθητές/τριες Θετικού προσανατολισμού)

Εφόσον οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες το σημείο Δ είναι εσωτερικό της $B\Gamma$ και έτσι τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι ομόρροπα άρα $|\overrightarrow{B\Delta}| \cdot |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| = \overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



Από τη σχέση $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ έχουμε

$$|\overrightarrow{A\Delta}|^2 = |\overrightarrow{B\Delta}| \cdot |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \Rightarrow \overrightarrow{A\Delta}^2 = \overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{A\Delta}^2 = (\overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\text{B}}) \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{A\Delta}^2 = -\overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 + \overrightarrow{\text{B}\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 = \overrightarrow{\text{B}\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} \quad (1)$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.) στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε $\overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 = \overrightarrow{\text{ΑΓ}}^2$ άρα από την (1) προκύπτει ότι $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}^2 = \overrightarrow{\text{B}\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} \quad (2)$.

Όμοια,

$$\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DG} \Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BD}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = -\overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BG} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BG} \quad (3)$$

Από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε

$$\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 \text{ άρα από την (3) προκύπτει}$$

$$\text{ότι } \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BG} \quad (4).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (2) και (4) και έχουμε

$$\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BG} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DG}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BG} \Rightarrow \overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG}^2 \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AG}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BG}|^2,$$

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

Άσκηση 6

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύουν:

$$AG = 2AB \text{ και } \frac{\sin B}{\sin \Gamma} = \frac{2}{3}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $BG = \sqrt{6} \cdot AB$

β) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο,

γ) η προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΑΓ είναι ίση με $\frac{AG}{8}$.

Λύση

Δεδομένου ότι $AG = \beta$, $BG = \alpha$, $AB = \gamma$ εφαρμόζοντας τον νόμο συνημιτόνων έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sin B \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sin B = \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\sin B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2 \cdot \alpha \cdot \gamma} \stackrel{\beta=2\gamma}{\Leftrightarrow}$$

$$\sin B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - 4\gamma^2}{2 \cdot \alpha \cdot \gamma} \Leftrightarrow$$

$$\sin B = \frac{\alpha^2 - 3\gamma^2}{2 \cdot \alpha \cdot \gamma} \quad (1)$$

Και ανάλογα έχουμε ότι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sin \Gamma \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sin \Gamma = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\sin \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2 \cdot \alpha \cdot \beta} \stackrel{\beta=2\gamma}{\Leftrightarrow}$$

$$\sin \Gamma = \frac{\alpha^2 + 4 \cdot \gamma^2 - \gamma^2}{4 \cdot \alpha \cdot \gamma} \Leftrightarrow$$

$$\sin \Gamma = \frac{\alpha^2 + 3\gamma^2}{4 \cdot \alpha \cdot \gamma} \quad (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη:

$$\frac{\sin B}{\sin \Gamma} = \frac{\frac{\alpha^2 - 3\gamma^2}{2 \cdot \alpha \cdot \gamma}}{\frac{\alpha^2 + 3\gamma^2}{4 \cdot \alpha \cdot \gamma}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 - 3\gamma^2)}{2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 + 3\gamma^2)} \Leftrightarrow$$

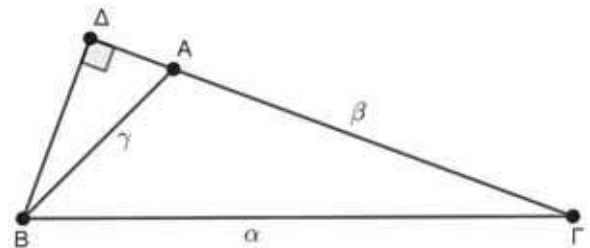
$$\frac{1}{3} = \frac{(\alpha^2 - 3\gamma^2)}{(\alpha^2 + 3\gamma^2)} \Leftrightarrow 3 \cdot (\alpha^2 - 3\gamma^2) = (\alpha^2 + 3\gamma^2) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \alpha^2 = 12 \cdot \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 6 \cdot \gamma^2 \stackrel{\alpha, \gamma > 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \sqrt{6} \cdot \gamma$$

Δηλαδή $BG = \sqrt{6} \cdot AB$, που είναι το ζητούμενο.

β) Έχουμε ότι: $\beta = 2 \cdot \gamma$ και $\alpha = \sqrt{6} \cdot \gamma$. Οπότε προκύπτει ότι:

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, άρα $\hat{A} > 90^\circ$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.



γ) Αν ΒΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, έστω τότε ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΑΓ και τότε από τη γενίκευση του Π.Θ. απέναντι από αμβλεία γωνία προκύπτει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot AD \stackrel{\beta=2\gamma}{\Leftrightarrow} AD = \frac{\beta}{\alpha=\sqrt{6}\cdot\gamma}$$

Άσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\alpha = 7 \cdot \sqrt{5}$, $\beta = \sqrt{65}$

και $\gamma = 10$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες

β) Έστω ΑΔ και ΓΕ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ και Ζ η προβολή του Δ στην ΑΒ. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:

i) ΓΔ

ii) ΑΖ και ΔΖ

iii) ΓΖ

Λύση

α) Αρχικά θα πρέπει να ελέγξουμε με την τριγωνική ανισότητα αν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο. Πράγματι ισχύει ότι:

$$|\gamma - \beta| < \alpha < \gamma + \beta, \text{ με } \beta < \gamma < \alpha$$

καθώς

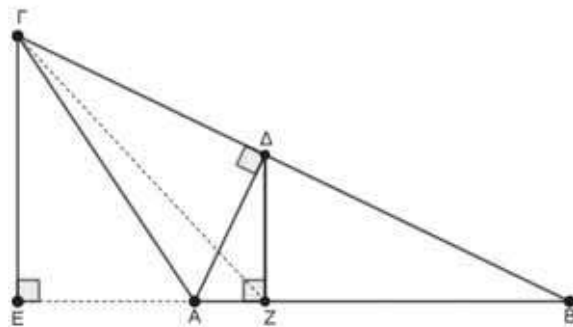
$$|\gamma - \beta| = |10 - \sqrt{65}| < |10 - \sqrt{64}| = 2 < \alpha \text{ και}$$

$$\gamma + \beta = \sqrt{65} + 10 > \sqrt{64} + 10 > 18 > \alpha \text{ αφού}$$

$$18 > \alpha \Leftrightarrow 18^2 > (7\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 324 > 245, \text{ που}$$

ισχύει.

Επίσης, $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ άρα $\hat{A} > 90^\circ$, συνεπώς το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.



β) i. Από τη γενίκευση του Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \Gamma\Delta \Rightarrow$$

$$100 = 65 + 245 - 14\sqrt{5} \cdot \Gamma\Delta \Rightarrow$$

$$15 = \sqrt{5} \cdot \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta = 3\sqrt{5}$$

ii. Από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\alpha\Gamma^2 = \alpha\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 \Leftrightarrow \alpha\Delta = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Επιπλέον το ΔΖ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ άρα

$$\alpha\Delta^2 = \alpha\Delta \cdot \alpha\text{Β} \Leftrightarrow \alpha\Delta = 2$$

$$\text{και } \Delta\text{Ζ}^2 = \alpha\text{Ζ} \cdot \alpha\text{Β} \Leftrightarrow \Delta\text{Ζ} = 4$$

iii. Από τη γενίκευση του Π.Θ απέναντι από αμβλεία γωνία έχουμε:

$$\beta\Gamma^2 = \alpha\text{Β}^2 + \alpha\Gamma^2 + 2 \cdot \alpha\text{Β} \cdot \alpha\text{Ε} \Leftrightarrow$$

$$\alpha\text{Ε} = \frac{\beta\Gamma^2 - (\alpha\text{Β}^2 + \alpha\Gamma^2)}{2} = 4$$

και

$$\Gamma\text{Ζ}^2 = \alpha\text{Ζ}^2 + \alpha\Gamma^2 + 2 \cdot \alpha\text{Ζ} \cdot \alpha\text{Ε} \Leftrightarrow \Gamma\text{Ζ} = \sqrt{85}$$

Άσκηση 8

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με

$$\alpha = 2 \cdot \sqrt{11}, \beta = 5, \gamma = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

α) Να δείξετε ότι ισχύει: $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

γ) Να υπολογίσετε:

i) Την προβολή ΑΖ της πλευράς ΑΓ πάνω στην πλευρά ΑΒ.

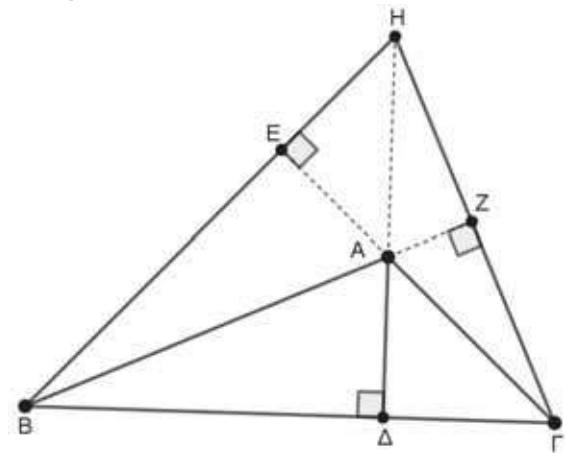
ii) Την προβολή ΑΕ της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΑΓ.

δ) Έστω ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τα ύψη του τριγώνου και Η το ορθόκεντρό του. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \beta \cdot \alpha\text{Ε} + \gamma \cdot \alpha\text{Ζ} = \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\text{ii) } \text{ΗΒ}^2 + \text{ΗΓ}^2 - 2 \cdot \text{ΗΑ}^2 = \frac{5 \cdot \alpha^2}{4}$$

Λύση:



α) Έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 5^2 + (2 \cdot \sqrt{2})^2 = 25 + 8 = 33 \quad (1)$$

$$\text{και } \frac{3}{4} \cdot \alpha^2 = \frac{3}{4} \cdot (2 \cdot \sqrt{11})^2 = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 11 = 33 \quad (2)$$

από (1), (2) προκύπτει ότι: $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$.

β) Από την σχέση $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$ προκύπτει ότι

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ άρα $\hat{A} > 90^\circ$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

γ) i) Από γενίκευση Π.Θ. έχουμε ότι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \gamma \cdot AZ \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{3}{4} \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \gamma \cdot AZ \Leftrightarrow$$

$$AZ = \frac{\alpha^2 - \frac{3}{4} \cdot \alpha^2}{2 \cdot \gamma} \Leftrightarrow AZ = \frac{\alpha^2}{8 \cdot \gamma} \Leftrightarrow$$

$$AZ = \frac{44}{16\sqrt{2}} = \frac{11 \cdot \sqrt{2}}{8}$$

ii) Ομοίως από γενίκευση Π.Θ. έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot AE \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{3}{4} \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \beta \cdot AE \Leftrightarrow$$

$$AE = \frac{\alpha^2 - \frac{3}{4} \cdot \alpha^2}{2 \cdot \beta} \Leftrightarrow AE = \frac{\alpha^2}{8 \cdot \beta} \Leftrightarrow$$

$$AE = \frac{44}{8 \cdot 5} = \frac{11}{10}$$

δ) i) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \gamma \cdot AZ \quad (3)$$

$$\text{και } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot AE \quad (4)$$

προσθέτοντας κατά μέλη (3)+(4) παίρνουμε:

$$2 \cdot \alpha^2 = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \gamma \cdot AZ + 2 \cdot \beta \cdot AE \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \alpha^2 - \frac{3}{2} \cdot \alpha^2 = 2 \cdot \gamma \cdot AZ + 2 \cdot \beta \cdot AE \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{2} = 2 \cdot (\gamma \cdot AZ + \beta \cdot AE) \Leftrightarrow \gamma \cdot AZ + \beta \cdot AE = \frac{\alpha^2}{4}$$

ii) Ισχύουν ότι:

$$HB^2 = \gamma^2 + HA^2 + 2 \cdot \gamma \cdot AZ \quad (5)$$

$$H\Gamma^2 = \beta^2 + HA^2 + 2 \cdot \beta \cdot AE \quad (6)$$

προσθέτοντας κατά μέλη (5), (6) παίρνουμε:

$$HB^2 + H\Gamma^2 =$$

$$= \gamma^2 + \beta^2 + 2 \cdot HA^2 + 2 \cdot (\gamma \cdot AZ + \beta \cdot AE) \Leftrightarrow$$

$$HB^2 + H\Gamma^2 - 2 \cdot HA^2 =$$

$$\gamma^2 + \beta^2 + 2 \cdot (\gamma \cdot AZ + \beta \cdot AE) \stackrel{(\delta 1)}{\Leftrightarrow}$$

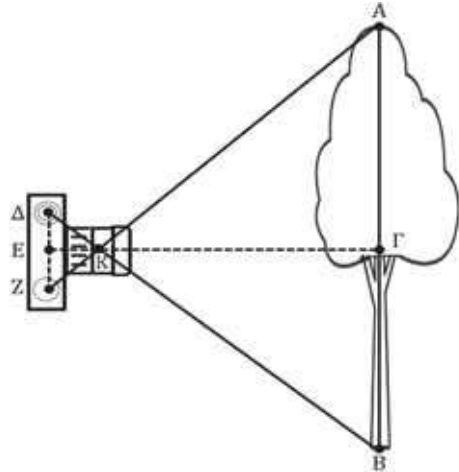
$$HB^2 + H\Gamma^2 - 2 \cdot HA^2 = \frac{3}{4} \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$HB^2 + H\Gamma^2 - 2 \cdot HA^2 = \frac{5}{4} \cdot \alpha^2$$

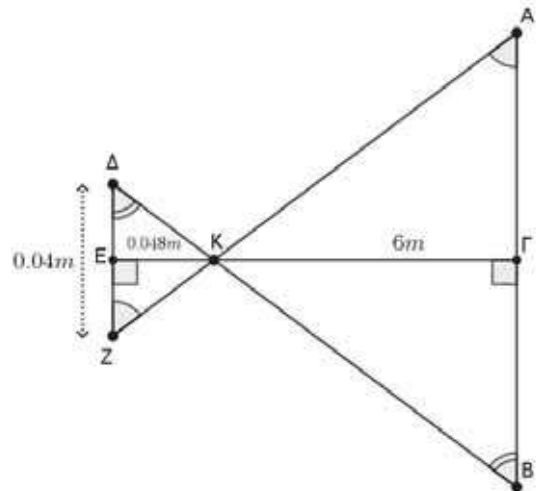
Άσκηση 9

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά τη λειτουργία μιας φωτογραφικής μηχανής. Δίνονται οι αποστάσεις $DZ = 40\text{mm}$, $EK = 48\text{mm}$ και $K\Gamma = 6\text{m}$. Αν $AB \perp E\Gamma$ και $DZ \parallel AB$, να βρείτε το ύψος AB του δέντρου.

(Τα σημεία Δ , E , Z όπως και τα σημεία A , Γ , B είναι συνευθειακά)



Λύση



Τα τρίγωνα ΔZK και KAB είναι όμοια διότι έχουν $\hat{Z}\hat{\Delta}K = \hat{K}\hat{B}A$ ως εντός εναλλάξ ($\Delta Z \parallel AB$ με τέμνουσα την ΔB) και $\hat{\Delta}\hat{Z}K = \hat{K}\hat{A}B$ ως εντός εναλλάξ ($\Delta Z \parallel AB$ με τέμνουσα την ZA). Είναι γνωστό ότι ο λόγος ομοιότητας λ δυο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δυο ομόλογων υψών τους. Έτσι

$$\lambda = \frac{DZ}{AB} = \frac{EK}{K\Gamma} \Leftrightarrow \frac{0,04}{AB} = \frac{0,048}{6} \Leftrightarrow$$

$$0,048 \cdot AB = 6 \cdot 0,04 \Leftrightarrow AB = 5\text{m}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα οποία δεν είναι συγγραμμικά. Αν $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} + \kappa \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ και } \kappa = 0$$

Απόδειξη

($\Leftarrow$): Αν $\lambda = 0$ και $\kappa = 0$ τότε προφανώς ισχύει

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} + \kappa \cdot \vec{\beta} = \vec{0}$$

$$(\Rightarrow) \lambda \cdot \vec{\alpha} + \kappa \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{\alpha} = -\kappa \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = -\frac{\kappa}{\lambda} \cdot \vec{\beta} \Rightarrow$$

$\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, που είναι άτοπο αφού από την υπόθεση τα διανύσματα αυτά δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $\lambda = 0$ οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται

$$0 \cdot \vec{\alpha} + \kappa \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} + \kappa \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \kappa \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow$$

$\kappa = 0$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$. Όμως $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, προφανώς αφού σε αντίθετη περίπτωση ως μηδενικό διάνυσμα είναι συγγραμμικό με οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου, άρα και με το $\vec{\alpha}$, το οποίο είναι επίσης άτοπο. Έτσι συμπερασματικά έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta} \\ \lambda \vec{\alpha} + \kappa \vec{\beta} = \vec{0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ και } \kappa = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1 (ΕΦΑΡΜΟΓΗ)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ για το οποίο ισχύει ότι: $(\overline{AB}^2 - \overline{A\Gamma}^2) \cdot \overline{AB} + (2\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} - \overline{AB}^2) \cdot \overline{A\Gamma} = \vec{0}$ (1)

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη

Αφού από υπόθεση δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$, προφανώς $\overline{AB} \not\parallel \overline{A\Gamma}$. Οπότε λόγω της προηγούμενης πρότασης έχουμε

$$\overline{AB}^2 - \overline{A\Gamma}^2 = 0 \text{ και } 2\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} - \overline{AB}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{A\Gamma}|^2 \text{ και}$$

$$2|\overline{AB}| \cdot |\overline{A\Gamma}| \cdot \cos(\widehat{BAG}) - |\overline{AB}|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{A\Gamma}| \text{ και } 2|\overline{AB}|^2 \cdot \cos \hat{A} - |\overline{AB}|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{A\Gamma}| \text{ και } 2\cos \hat{A} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ και } \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ και } \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα οποία είναι τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και η γωνία τους

$$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \hat{\varphi} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

- α) Να βρείτε τα μήκη των διαγώνιων του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
β) Τι είδους παραλληλόγραμμο προκύπτει;

Λύση

α) Έστω $OAMB$ το παραλληλόγραμμο που προκύπτει από τα διανύσματα $\overline{OA} = \vec{u} = 2\vec{\beta}$ και $\overline{OB} = \vec{v} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι: $\overline{OM} = \vec{u} + \vec{v} = 3\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ και $\overline{AB} = \vec{v} - \vec{u} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Επίσης $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 1$. Έχουμε:

$$|\overline{OM}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |3\vec{\beta} - \vec{\alpha}|^2 = (3\vec{\beta} - \vec{\alpha})^2 =$$

$$9\vec{\beta}^2 - 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = 9|\vec{\beta}|^2 - 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\alpha}|^2 = 7.$$

$$\text{Άρα } |\overline{OM}| = \sqrt{7}$$

$$|\overline{AB}|^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 = |-\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 =$$

$$\vec{\alpha}^2 + 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 7.$$

$$\text{Άρα } |\overline{AB}| = \sqrt{7}$$

β) Αφού οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $OAMB$ είναι ίσες, αυτό είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 3

Στο σημείο $O(0,0)$ ορθογωνίου συστήματος αξόνων τοποθετούμε κινητό Σ στο οποίο ασκείται δύναμη $\vec{F} = 6 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j} = (6,8)$. Να βρείτε την δύναμη $\vec{G}$ η οποία έχει μέτρο $|\vec{G}| = 5N$, η οποία πρέπει να ασκηθεί στο σημείο Σ έτσι ώστε:

α) η συνισταμένη των δύο δυνάμεων $\vec{F} + \vec{G}$ να έχει το μέγιστο δυνατό μέτρο και να βρείτε πόσο είναι το $\max|\vec{F} + \vec{G}|$ και

β) η συνισταμένη των δύο δυνάμεων να έχει το ελάχιστο δυνατό μέτρο και επίσης να βρείτε πόσο είναι το $\min|\vec{F} + \vec{G}|$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι για οποιαδήποτε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ με την δεξιά ισότητα να ισχύει όταν $\vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$ (ομόρροπα) και την αριστερή όταν $\vec{\alpha} \nearrow \nwarrow \vec{\beta}$ (αντίρροπα).

α) Αφού $\vec{F} = (6, 8)$ τότε $|\vec{F}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\text{N}$.

Αρα $|\vec{F} + \vec{G}|_{\max} = |\vec{F}| + |\vec{G}| = 10 + 5 = 15\text{N}$ μόνο όταν $\vec{F} \nearrow \vec{G}$, δηλαδή όταν υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\vec{G} = \lambda \cdot \vec{F}$. Τότε έχουμε

$$|\vec{G}| = |\lambda \cdot \vec{F}| = |\lambda| \cdot |\vec{F}| \Rightarrow 5 = |\lambda| \cdot 10 \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{και τότε } \vec{G} = \frac{1}{2} \cdot \vec{F} = \frac{1}{2} \cdot (6, 8) = (3, 4) = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}.$$

β) Όμοια $|\vec{F} + \vec{G}|_{\min} = |\vec{F}| - |\vec{G}| = 10 - 5 = 5\text{N}$ μόνο όταν $\vec{F} \nearrow \nwarrow \vec{G}$, δηλαδή όταν υπάρχει $\lambda < 0$ τέτοιο ώστε $\vec{G} = \lambda \cdot \vec{F}$. Τότε

$$|\vec{G}| = |\lambda \cdot \vec{F}| = |\lambda| \cdot |\vec{F}| \Rightarrow 5 = |\lambda| \cdot 10 \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2},$$

και τότε

$$\vec{G} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{F} = -\frac{1}{2} \cdot (6, 8) = (-3, -4) = (-3) \cdot \vec{i} + (-4) \cdot \vec{j}$$

Άσκηση 4

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε $\vec{\alpha} = (\lambda + 2, 2)$, $\vec{\beta} = (\lambda - 4, 5)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

iii) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) < \frac{\pi}{2}$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i) } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= (\lambda + 2, 2) \cdot (\lambda - 4, 5) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \\ &= (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 4) + 2 \cdot 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2, \text{ έτσι} \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \lambda^2 - 4\lambda + 2\lambda - 8 + 10 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = \\ &= (\lambda - 1)^2 + 1 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 1 = (\lambda - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \geq 1 \end{aligned}$$

Το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του 1 για $\lambda = 1$

ii) Για να είναι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ αρκεί τα διανύσματα να είναι ομόρροπα δηλαδή $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$. Όμως

$$\vec{\alpha} / \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ \lambda - 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$5(\lambda + 2) - 2(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$5\lambda + 10 - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda + 18 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -6}$$

Για $\lambda = -6$, $\vec{\alpha} = (-6 + 2, 2) = (-4, 2)$ και

$\vec{\beta} = (-6 - 4, 5) = (-10, 5)$. Οπότε

$$\vec{\alpha} = (-4, 2) = \left(\frac{4}{10} \cdot (-10), \frac{4}{10} \cdot 5 \right) =$$

$$\frac{4}{10} \cdot (10, 5) = \frac{2}{5} \cdot \vec{\beta},$$

επομένως $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.

Άρα για $\lambda = -6$ ισχύει ότι: $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

$$\text{iii) } \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{(\lambda - 1)^2 + 1}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} > 0 \Rightarrow$$

$0 \leq \widehat{\varphi} < \frac{\pi}{2}$ δηλαδή ή $0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) < \frac{\pi}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5

Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM είναι και διχοτόμος, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Απόδειξη

Αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, τότε έχουμε:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \hat{A}_2 \Leftrightarrow$$

$$\sin(\vec{AB}, \vec{AM}) = \sin(\vec{AM}, \vec{A\Gamma}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AM}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}|} = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{A\Gamma}|}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{A\Gamma}|} \Leftrightarrow \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AM}|}{|\vec{AB}|} = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{A\Gamma}|}{|\vec{A\Gamma}|} \quad (1).$$

Αφού η AM είναι διάμεσος, έχουμε:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AG}) \quad (2).$$

Έτσι η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{AG})}{2|\overline{AB}|} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{AG}) \cdot \overline{AG}}{2|\overline{AG}|} \Leftrightarrow \\ \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AG}}{|\overline{AB}|} &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AG} + \overline{AG}^2}{|\overline{AG}|} \Leftrightarrow \\ \frac{|\overline{AB}|^2 + |\overline{AB}| \cdot |\overline{AG}| \sin \hat{A}}{|\overline{AB}|} &= \frac{|\overline{AG}|^2 + |\overline{AB}| \cdot |\overline{AG}| \sin \hat{A}}{|\overline{AG}|} \Leftrightarrow \\ |\overline{AB}| + |\overline{AG}| \sin \hat{A} &= |\overline{AG}| + |\overline{AB}| \sin \hat{A} \Leftrightarrow \\ |\overline{AB}|(1 - \sin \hat{A}) &= |\overline{AG}|(1 - \sin \hat{A}) \Leftrightarrow \\ (1 - \sin \hat{A})(|\overline{AB}| - |\overline{AG}|) &= 0 \Leftrightarrow \overset{\sin \hat{A} \neq 1}{|\overline{AB}| = |\overline{AG}|}. \end{aligned}$$

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άσκηση 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \nu)$ για τα οποία έχουμε $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να δείξετε ότι $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 4$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} = 1 \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 = 1 \quad (1)$$

$$|\vec{\beta}| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\mu^2 + \nu^2} = 2 \Leftrightarrow \mu^2 + \nu^2 = 4 \quad (2)$$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \kappa\mu + \lambda\nu = 0 \quad (3)$$

Από την (3) έχουμε

$$(\kappa\mu + \lambda\nu)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2\mu^2 + 2\kappa\lambda\mu\nu + \lambda^2\nu^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2\mu^2 + \lambda^2\nu^2 = -2\kappa\lambda\mu\nu \quad (4)$$

Τότε έχουμε:

$$(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = \kappa^2\nu^2 - 2\kappa\lambda\mu\nu + \lambda^2\mu^2 \stackrel{(4)}{=} \kappa^2\nu^2 + \kappa^2\mu^2 + \lambda^2\nu^2 + \lambda^2\mu^2 \stackrel{(1)}{=} \stackrel{(2)}{=} (\kappa^2 + \lambda^2)(\mu^2 + \nu^2) \stackrel{(1)}{=} \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot 4 = 4.$$

β' τρόπος

Από την ταυτότητα του Lagrange

$$(\kappa^2 + \lambda^2)(\mu^2 + \nu^2) = (\kappa\mu + \lambda\nu)^2 + (\kappa\nu - \lambda\mu)^2$$

$$\text{έχουμε ότι: } 1 \cdot 4 = 4 = (\kappa\nu - \lambda\mu)^2$$

Άσκηση 7

Δύο σημεία $A(\alpha, 0)$ με $0 \leq \alpha \leq 2$ και $B(0, \beta)$ κινούνται πάνω στους ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα, έτσι ώστε $(OA) + (OB) = 2$. Με διαγώνιο το ευθύγραμμο τμήμα AB κατασκευάζουμε τετράγωνο $AGBD$.

α) Να αποδείξετε ότι, καθώς το α , μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 2]$, η μία από τις κορυφές Γ και Δ παραμένει σταθερή, ενώ η άλλη κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραγώνου δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = (AGBD) = \alpha^2 - 2\alpha + 2, \text{ με } 0 \leq \alpha \leq 2.$$

γ) Να βρείτε για ποια θέση των σημείων A και B το εμβαδόν του τετραγώνου γίνεται ελάχιστο και πόσο είναι το ελάχιστο αυτό εμβαδόν.

Λύση

α)

$$i) \quad (OA) + (OB) = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 2 - \alpha.$$

Άρα $B(0, 2 - \alpha)$. Οπότε $\overline{AB} = (-\alpha, 2 - \alpha)$

Το κέντρο M του τετραγώνου είναι

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Επίσης $\overline{GD} \perp \overline{AB}$ με $|\overline{GD}| = |\overline{AB}|$.

Αν $\overline{GD} = (x, y)$ τότε $\overline{GD} \cdot \overline{AB} = 0$ δηλαδή

$$-\alpha x + (2 - \alpha)y = 0 \quad (1) \text{ και}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \alpha)^2} \text{ δηλαδή}$$

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 + (2 - \alpha)^2 \quad (2)$$

- Αν $\alpha = 2$ τότε $\overline{GD} = (0, -2)$

- Αν $\alpha \neq 2$ τότε από την (1) προκύπτει ότι

$$y = \frac{\alpha}{2 - \alpha}x \text{ και αντικαθιστώντας στην (2)}$$

έχουμε $x = 2 - \alpha$ ή $x = -2 + \alpha$ οπότε

$$\overline{GD} = (2 - \alpha, \alpha) \text{ ή } \overline{GD} = (-2 + \alpha, -\alpha)$$

1^η περίπτωση: $\overline{\Gamma\Delta} = (2-\alpha, \alpha)$. Τότε:

$$\overline{M\Delta} = \frac{1}{2}\overline{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow (x_{\Delta} - x_M, y_{\Delta} - y_M) = \frac{1}{2}(2-\alpha, \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left(x_{\Delta} - \frac{\alpha}{2}, y_{\Delta} - 1 + \frac{\alpha}{2}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_{\Delta} = 1 \text{ και } y_{\Delta} = 1. \text{ Άρα } \Delta(1,1)$$

$$\overline{\Gamma M} = \frac{1}{2}\overline{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow (x_M - x_{\Gamma}, y_M - y_{\Gamma}) = \frac{1}{2}(2-\alpha, \alpha)$$

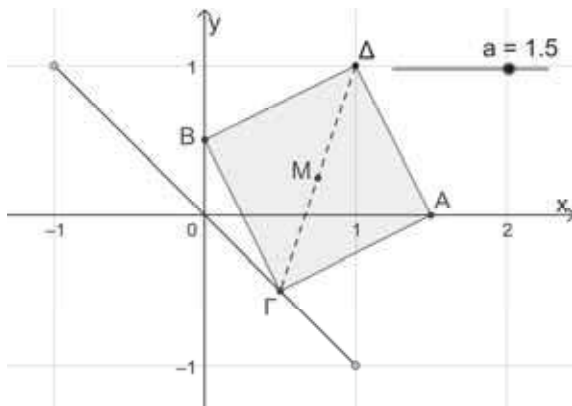
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2} - x_{\Gamma}, 1 - \frac{\alpha}{2} - y_{\Gamma}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_{\Gamma} = \alpha - 1 \text{ και } y_{\Gamma} = 1 - \alpha. \text{ Άρα } \Gamma(\alpha - 1, 1 - \alpha)$$

Έστω $N(x, y)$ σημείο της γραμμής στην οποία κινείται το Γ . Τότε $x = \alpha - 1$ και $y = 1 - \alpha$, με $0 \leq \alpha \leq 2$. Οπότε $\alpha = x + 1$ και $y = 1 - (x + 1)$ δηλαδή $y = -x$. Όμως έχουμε:

$$0 \leq x + 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq 1$$

Επομένως το σημείο Γ κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(-1, 1)$ και $(1, -1)$.



<https://www.geogebra.org/m/jmzhgnpq>

2^η περίπτωση: $\overline{\Gamma\Delta} = (-2+\alpha, -\alpha)$. Τότε:

$$\overline{M\Delta} = \frac{1}{2}\overline{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow (x_{\Delta} - x_M, y_{\Delta} - y_M) = \frac{1}{2}(-2+\alpha, -\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left(x_{\Delta} - \frac{\alpha}{2}, y_{\Delta} - 1 + \frac{\alpha}{2}\right) = \left(-1 + \frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_{\Delta} = \alpha - 1 \text{ και } y_{\Delta} = 1 - \alpha. \text{ Άρα } \Delta(\alpha - 1, 1 - \alpha)$$

$$\overline{\Gamma M} = \frac{1}{2}\overline{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow (x_M - x_{\Gamma}, y_M - y_{\Gamma}) = \frac{1}{2}(-2+\alpha, -\alpha)$$

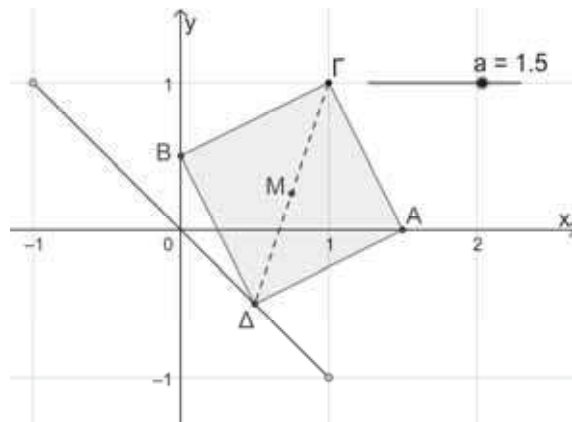
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2} - x_{\Gamma}, 1 - \frac{\alpha}{2} - y_{\Gamma}\right) = \left(-1 + \frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_{\Gamma} = 1 \text{ και } y_{\Gamma} = 1. \text{ Άρα } \Gamma(1,1)$$

Έστω $N(x, y)$ σημείο της γραμμής στην οποία κινείται το Δ . Τότε $x = \alpha - 1$ και $y = 1 - \alpha$, με $0 \leq \alpha \leq 2$. Οπότε $\alpha = x + 1$ και $y = 1 - (x + 1)$ δηλαδή $y = -x$. Όμως έχουμε:

$$0 \leq x + 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq 1$$

Επομένως το σημείο Δ κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(-1, 1)$ και $(1, -1)$.



<https://www.geogebra.org/classic/cyay2jk8>

ii) Έχουμε:

$$E = (A\Gamma B\Delta) = 2(A\Delta\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} |\det(\overline{A\Delta}, \overline{A\Gamma})|$$

$$\text{Όμως, } \overline{A\Delta} = (1-\alpha, 1) \text{ και } \overline{A\Gamma} = (-1, 1-\alpha)$$

Οπότε,

$$\det(\overline{A\Delta}, \overline{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)^2 + 1 > 0$$

$$\text{Άρα } E(\alpha) = (1-\alpha)^2 + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 2, \quad 0 \leq \alpha \leq 2$$

β' τρόπος

Το εμβαδό του τετραγώνου $A\Gamma B\Delta$ δίνεται από τον τύπο:

$$(A\Gamma B\Delta) = (\Delta A)^2 = \left(\sqrt{(\alpha-1)^2 + 1^2}\right)^2 =$$

$$(\alpha-1)^2 + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 2,$$

$$\text{άρα } \boxed{E(\alpha) = (A\Gamma B\Delta) = \alpha^2 - 2\alpha + 2}, \text{ με } \alpha \in [0, 2].$$

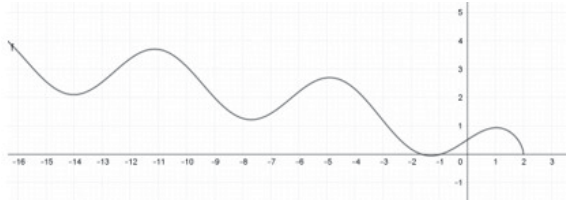
iii) Έχουμε

$$E = (1-\alpha)^2 + 1 \Rightarrow E - 1 = (1-\alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow E \geq 1$$

Για $\alpha = 1$, έχουμε $E = 1$ που είναι η ελάχιστη τιμή του. Τότε $A(1,0)$ και $B(0,1)$.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x-2}, x > 2$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$



1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
2. Να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1} .
3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\eta \mu \left(\frac{1}{g(x)} \right) + \frac{1}{g(x)} \right]$$

Λύση

1. α' τρόπος:

Για κάθε $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1 - 2} = \frac{x_2 - 1}{x_2 - 2} \Rightarrow$$

$$x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 = x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2 - x_1 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1.

β' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{x_2 - 1}{x_2 - 2} - \frac{x_1 - 1}{x_1 - 2} = \\ &= \frac{(x_2 - 1)(x_1 - 2) - (x_1 - 1)(x_2 - 2)}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)} = \\ &= \frac{-x_1 - 2x_2 + 2x_1 + x_2}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)} < 0 \end{aligned}$$

Άρα $f(x_2) < f(x_1)$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$ άρα είναι 1-1.

γ' τρόπος:

Για κάθε $x > 2$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 2 < x_1 < x_2 &\Rightarrow 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \frac{1}{x_2 - 2} < \frac{1}{x_1 - 2} \Rightarrow \\ \frac{1}{x_1 - 2} &> \frac{1}{x_2 - 2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1 - 2} > 1 + \frac{1}{x_2 - 2} \Rightarrow \\ f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$, άρα είναι 1-1.

δ' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\Rightarrow x_1 - 2 \neq x_2 - 2 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 2} \neq \frac{1}{x_2 - 2} \Rightarrow \\ -\frac{1}{x_1 - 2} &\neq -\frac{1}{x_2 - 2} \Rightarrow \\ 1 - \frac{1}{x_1 - 2} &\neq 1 - \frac{1}{x_2 - 2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι 1-1

ε' τρόπος:

Για κάθε $y \in ((2, +\infty))$ και $x > 2$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \Leftrightarrow yx - 2y = x - 1 \Leftrightarrow \\ x(y-1) &= 2y - 1 \end{aligned}$$

- Αν $y = 1$ έχουμε $0x = 1$ επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $y \neq 1$ έχουμε: $x = \frac{2y-1}{y-1}$

$$x > 2 \Leftrightarrow \frac{2y-1}{y-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Άρα για κάθε $y > 1$ και $x > 2$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως προς x .

Άρα η f είναι 1-1.

2. Για κάθε $y \in ((2, +\infty))$ και $x > 2$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \Leftrightarrow$$

$$yx - 2y = x - 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y - 1$$

- Αν $y = 1$ έχουμε $0x = 1$ επομένως η

εξίσωση είναι αδύνατη.

- Αν $y \neq 1$ έχουμε: $x = \frac{2y-1}{y-1}$

$$\text{Πρέπει } x > 2 \Leftrightarrow \frac{2y-1}{y-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}, x > 1$$

3. Το πεδίο ορισμού της $p(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{g(x)}\right) + \frac{1}{g(x)}$

είναι υποσύνολο του $(0,2)$. Άρα αναζητούμε μόνο το όριο για $x < 2$.

Για να υπολογιστεί το όριο σκεφτόμαστε αρχικά τον κανόνα υπολογισμού ορίου σύνθετης συνάρτησης.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε

$$x \in (0,2) \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{g(x)} = +\infty.$$

Βήμα 1ο: Θέτουμε $u = \frac{1}{g(x)}$

Βήμα 2ο: $\lim_{x \rightarrow 2^-} u = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{g(x)} = +\infty$

Βήμα 3ο: Όμως το $\lim_{u \rightarrow +\infty} \eta\mu u$ δεν υπάρχει άρα ο κανόνας δεν εφαρμόζεται. Για τον λόγο αυτό γράφουμε:

Για κάθε $x \in (0,2)$ έχουμε:

$$\eta\mu \frac{1}{g(x)} \geq -1 \Rightarrow \eta\mu \frac{1}{g(x)} + \frac{1}{g(x)} \geq \frac{1}{g(x)} - 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{g(x)} - 1\right) = +\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\eta\mu \left(\frac{1}{g(x)} \right) + \frac{1}{g(x)} \right] = +\infty.$$

Άσκηση 2

Δίνεται συνάρτηση $f: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3f(1)x + f(2)}{x-1} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 1} - g(2)x \right] \in \mathbb{R}$.
- $f([-2,2]) = [-2,2]$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Να αποδείξετε ότι $g(2) = 2$.

3. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 = 4x + f(x) + g(x) - 8$$

4. Να αιτιολογήσετε ότι η f αντιστρέφεται και κατόπιν, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 f^{-1}(x)).$$

Λύση

1. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3f(1)x + f(2)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 - 3f(1)x + f(2)}{x-1} (x-1) \right]$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3f(1) + f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 3f(1) - 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3f(1)x + f(2)}{x-1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3f(1)x + 3f(1) - 1}{x-1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x-1)(x+1-3f(1))}{x-1} \right] = -1 \Leftrightarrow 2 - 3f(1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = 1$$

Από την (1) έχουμε ότι $f(2) = 2$.

Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Έστω ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

Τότε $1 < 2 \Rightarrow f(1) > f(2) \Rightarrow 1 > 2$, άτοπο.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. α' τρόπος:

• Αν $g(2) > 2$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 1} - g(2)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - g(2)x \right]_{x>0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - g(2) \right) \right] = -\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - g(2) \right) = 2 - g(2) < 0 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

• Αν $g(2) < 2$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 1} - g(2)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - g(2)x \right]_{x>0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - g(2) \right) \right] = +\infty$$

διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - g(2) \right) = 2 - g(2) > 0$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

- Αν $g(2) = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Επομένως $g(2) = 2$.

β' τρόπος:

Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - g(2)x}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - g(2) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$2 - g(2) = 0 \Rightarrow g(2) = 2.$$

3. Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \in D_f$

$$\text{Όμως, } x \in D_f \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$$

Για κάθε $x \in [-2, 2]$ έχουμε:

$$x^2 = 4x + f(x) + g(x) - 8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 2 - f(x) + 2 - g(x) = 0 \quad (1)$$

Όμως για κάθε $x \in [-2, 2]$ έχουμε:

$$x \leq 2 \xRightarrow{f \in [-2, 2]} f(x) \leq f(2) \Rightarrow 2 - f(x) \geq 0$$

Μάλιστα

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \xRightarrow{f^{-1}[-2, 2]} x = 2.$$

$$x \leq 2 \xRightarrow{g \in [-2, 2]} g(x) \leq g(2) \Rightarrow 2 - g(x) \geq 0$$

Μάλιστα

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow g(x) = g(2) \xRightarrow{g^{-1}[-2, 2]} x = 2.$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$(x-2)^2 + 2 - f(x) + 2 - g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-2)^2 = 0 \\ f(x) = 2 \\ g(x) = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 2.$$

4. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$[-2, 2]$ είναι 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται.

Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Όμως $f([-2, 2]) = [-2, 2]$

επομένως $D_{f^{-1}} = [-2, 2]$ και $f^{-1}([-2, 2]) = [-2, 2]$.

Για κάθε $x \in [-2, 2]$ έχουμε:

$$|f^{-1}(x)| \leq 2 \Rightarrow |x^3 f^{-1}(x)| \leq 2|x^3| \Rightarrow -2|x^3| \leq x^3 f^{-1}(x) \leq 2|x^3|$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} (-2|x^3|) = \lim_{x \rightarrow 0} (2|x^3|) = 0.$$

Συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 f^{-1}(x)) = 0.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}, \quad x \in [0, 1].$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να βρείτε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x \in [0, 1]$.

3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f\left(x - \frac{1}{2}\right)}{f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$

4. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{2x-1}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} = x^2 - 2x + 2$$

Λύση

1. Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \text{ και } -x_1 > -x_2 \geq -1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \text{ και } 1 - x_1 > 1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \text{ και } \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \text{ και } -\sqrt{1-x_1} < -\sqrt{1-x_2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{1-x_1} < \sqrt{x_2} - \sqrt{1-x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

Για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε:

$$0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{f \in [0, 1]} f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0) = -1$ και ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = 1$.

2. Για κάθε $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ έχουμε:

$$x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) < 0.$$

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ έχουμε:

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) > 0.$$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

για κάθε $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ισχύει:

$$f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] = 0$ συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)} \right] = +\infty.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\eta\mu\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$ τελικά

έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\eta\mu\left(x - \frac{1}{2}\right)}{f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{\eta\mu\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)} \right] = +\infty$$

4. Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν, $x \geq 0$ και $1 - x \geq 0$ και $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \neq 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in [0, 1]$.

Για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} &= x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow \\ \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} &= (x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow \\ 1 - f(x) + (x-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x-1=0 \\ f(x)=1 \end{cases} &\Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

καθώς,

$$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Άσκηση 4

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και η γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

• $f(x) = (\alpha - 2)x + x^3 + (\alpha^2 - 4\alpha + 3)x^4$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1.$

• $g(1) + g(2) = 5$

• $g(1) + g(3) = 7.$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2025$.

γ. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[g(\sqrt{x-x_0}) + \frac{1}{f(x)-f(x_0)} \right],$$

όπου x_0 το x_0 του ερωτήματος β.

Λύση

α. Έστω $\alpha^2 - 4\alpha + 3 \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha^2 - 4\alpha + 3)x^4}{x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha^2 - 4\alpha + 3)x] = +\infty \text{ ή } -\infty. \text{ Άστοχο!}$$

Άρα $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$ δηλαδή $\alpha = 1$ ή $\alpha = 3$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1.$$

Όμως

• αν $\alpha = 1$ τότε $f(x) = x^3 - x$ η οποία

προφανώς δεν είναι γνησίως αύξουσα καθώς

$$f(0) = f(1) = 0.$$

• αν $\alpha = 3$ τότε $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$

β. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνεπώς $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x_0) = 2025$.

Όμως η f είναι 1-1, συνεπώς το x_0 είναι μοναδικό.

γ. Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις

$g(1) + g(2) = 5$ και $g(1) + g(3) = 7$ και έχουμε

$$g(3)-g(2)=2>0$$

Η g είναι γνησίως μονότονη, συνεπώς είναι η γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Υποθέτουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε

$$2<3 \Rightarrow g(2)>g(3) \text{ άτοπο αφού}$$

$$g(3)-g(2)=2>0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η συνάρτηση

$$h(x)=g(\sqrt{x-x_0})+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}$$

έχει πεδίο ορισμού το $(x_0, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>x_0$ έχουμε:

$$x>x_0 \Rightarrow \sqrt{x-x_0}>0 \stackrel{g \leq R}{\Rightarrow} g(\sqrt{x-x_0})>g(0) \Rightarrow$$

$$g(\sqrt{x-x_0})+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}>g(0)+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)-f(x_0)) \stackrel{\text{συνεχής}}{\underset{\text{στο } x_0}}{=}} 0$$

και $f(x)-f(x_0)>0$ για κάθε $x>x_0$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty, \text{ συνεπώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[g(\sqrt{x-x_0}) + \frac{1}{f(x)-f(x_0)} \right] = +\infty.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)-x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(0)(f(1)-1)(f(2)-2)x^3 + x^2 + 1) = -\infty$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{f(x^2)}$.

4. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x \cdot f(x) = x(f(x) + \eta\mu x - x)$.

Λύση

1. Έστω $f(0)=0$ ή $f(1)=1$ ή $f(2)=2$. Τότε έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(0)(f(1)-1)(f(2)-2)x^3 + x^2 + 1) =$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, άτοπο.

Άρα $f(0) \neq 0$ και $f(1) \neq 1$ και $f(2) \neq 2$.

Συνεπώς $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Η $f(x)-x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$f(x)-x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως από συνέπεια του θεωρήματος Bolzano έχουμε ή $f(x)-x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x)-x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι $f(x)-x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$f(0)(f(1)-1)(f(2)-2) < 0$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(0)(f(1)-1)(f(2)-2)x^3 + x^2 + 1) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(0)(f(1)-1)(f(2)-2)x^3] = +\infty. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Για κάθε $x > 0$ έχουμε $f(x) > x > 0$

συνεπώς

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < \frac{x^2}{f(x)} < x \text{ οπότε } 0 < \frac{x^4}{f(x^2)} < x^2.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{f(x^2)} = 0.$$

β' τρόπος

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2) \stackrel{u=x^2}{\underset{u \rightarrow 0^+}{=}} \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = f(0) \neq 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{f(x^2)} = \frac{0}{f(0)} = 0$.

5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\eta\mu x \cdot f(x) = x(f(x) + \eta\mu x - x) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot f(x) - xf(x) - x(\eta\mu x - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)-x)(\eta\mu x-x) = 0 \stackrel{f(x)-x \neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = x \Leftrightarrow x=0,$$

διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\eta\mu x| \leq |x|$, με το « $\Rightarrow$ » να ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Άσκηση 6

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1.$$

Επίσης δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(0)=0$.

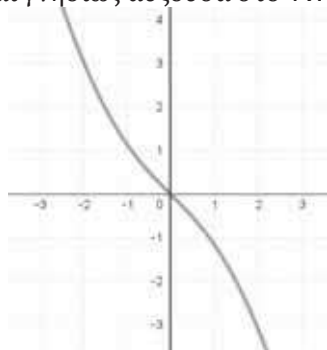
β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(-1)x^2 - x + f(1) = 0$ έχει δύο ετερόσημες

ρίζες.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^3(x) = g(x)$

Λύση

α. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \Leftrightarrow h(f(x)) = x + 1$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow h(f(x_1)) < h(f(x_2)) \\ &\stackrel{h \text{ γ.ν.}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x = 0$ έχουμε:

$$e^{f(0)} + f(0) = 1 \Leftrightarrow h(f(0)) = h(0) \stackrel{h \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(0) = 0.$$

β. Έχουμε ότι:

$$-1 < 0 \stackrel{f \text{ γ.ν.}}{\Rightarrow} f(-1) < f(0) \Rightarrow f(-1) < 0$$

Επομένως η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού.

$$\text{Επίσης: } 1 > 0 \stackrel{f \text{ γ.ν.}}{\Rightarrow} f(1) > f(0) \Rightarrow f(1) > 0$$

Συνεπώς η εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 1 - 4f(-1)f(1) > 0$$

άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 .

$$\text{Από τύπους Vieta έχουμε: } x_1 x_2 = \frac{f(1)}{f(-1)} < 0$$

οπότε οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ. Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x = 0$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$x > 0 \stackrel{f \text{ γ.ν.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f^3(x) > 0$$

Όμως από την γραφική παράσταση της g έχουμε ότι $g(x) < 0$ συνεπώς η εξίσωση

$$f^3(x) = g(x)$$

είναι αδύνατη.

Για κάθε $x < 0$ έχουμε:

$$x < 0 \stackrel{f \text{ γ.ν.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f^3(x) < 0$$

Όμως από την γραφική παράσταση της g έχουμε ότι $g(x) > 0$ συνεπώς η εξίσωση $f^3(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

Άρα μοναδική ρίζα είναι η $x = 0$.

Άσκηση 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ από τις οποίες η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύουν:

- $f(x) = (e^x - 1)g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
- $g(1) > 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι $g(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \sqrt{x} + 1 = \sin x$.

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(e^{x_0} + x_0 - 2) = 0.$$

Λύση

α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει $g(x) - x \neq 0$.

Επίσης $g(1) - 1 \neq 0$.

Τελικά $g(x) - x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η $g(x) - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Από συνέπεια του θεωρήματος Bolzano έχουμε:

$$\text{ή } g(x) - x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή } g(x) - x < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αλλά, $g(1) - 1 > 0$ οπότε $g(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) > x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ συνεπώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(e^x - 1)g(x)] = +\infty.$$

Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$,

μπορούμε να αποφύγουμε την άμεση χρήση του κριτηρίου παρεμβολής χρησιμοποιώντας το

$$\text{γνωστό όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = 0.$$

(Είναι παράδειγμα στο σχολικό, άρα το χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη)

Θέτουμε $u = \frac{1}{f(x)}$ και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0. \text{ Επίσης } \lim_{u \rightarrow 0} \left(u \eta \mu \frac{1}{u} \right) = 0,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \eta \mu \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(u \eta \mu \frac{1}{u} \right) = 0$$

δ. Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \geq 0$.

Η $x=0$ είναι μια προφανής ρίζα της εξίσωσης.

Έστω $\alpha > 0$ μια άλλη ρίζα της εξίσωσης, τότε

$$f(\alpha) = (e^\alpha - 1)g(\alpha) > 0, \text{ αφού } g(\alpha) > \alpha > 0 \text{ και}$$

$$e^\alpha - 1 > 0. \text{ Άρα } f(\alpha) + \sqrt{\alpha} + 1 - \text{συνα} > 0 \Rightarrow 0 > 0,$$

άτοπο, άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 0.

ε. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = e^x + x - 2, x \in \mathbb{R}.$$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $g(0)g(1) < 0$.

Από θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + x_0 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$f(e^{x_0} + x_0 - 2) = f(0) = 0$$

Άσκηση 8

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(g(x)) + g(x) = f(e^x + x) + e^x + x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $g(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$

τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f\left(\frac{1}{g(x)}\right) + \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \right].$$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = \text{συν}\sqrt{x}$.

Λύση

α. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = f(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1-1.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(g(x)) + g(x) = f(e^x + x) + e^x + x \Leftrightarrow$$

$$h(g(x)) = h(e^x + x) \Leftrightarrow g(x) = e^x + x$$

β. Η g είναι συνεχής στο $\left[-1, -\frac{1}{e}\right]$ και ισχύουν:

$$\bullet \quad g(-1) = e^{-1} - 1 < 0$$

$$\bullet \quad g\left(-\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - e^{-1} = e^{-1} \left(e^{1-\frac{1}{e}} - 1 \right) > 0,$$

Από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα

τουλάχιστον $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0.$$

γ. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της $f\left(\frac{1}{g(x)}\right) + \frac{1}{\sqrt{x-x_0}}$ είναι

το $(x_0, +\infty)$.

Για κάθε $x > x_0$ έχουμε:

$$x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) \Rightarrow \frac{1}{g(x)} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{g(x)}\right) > f(0) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{g(x)}\right) + \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} > f(0) + \frac{1}{\sqrt{x-x_0}}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (\sqrt{x-x_0}) = 0$ και $\sqrt{x-x_0} > 0$ για κάθε

$x > x_0$, τελικά

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(f(0) + \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \right) = +\infty,$$

άρα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f\left(\frac{1}{g(x)}\right) + \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[f\left(\frac{1}{g(x)}\right) + \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \right] = +\infty$$

δ. Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq 0$. Η $x=0$ είναι προφανής ρίζα και για $x > 0$ έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow e^x + x > 1 \geq \text{συν}\sqrt{x}$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$.

Τελικά μοναδική ρίζα είναι η $x=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1, & x \geq 0 \\ -x^2 - 4x - 1, & x < 0 \end{cases}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.
β. Χωρίς την χρήση παραγώγων να βρείτε το ολικό μέγιστο της f .

- γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(1 - \eta\mu x)(f(x) - 3) = f^2(x) - 6f(x) + 9.$$

- δ. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(f(x) - 3)}{(f(x) - 3)^2}$$

Λύση

- α. Παρατηρούμε ότι $f(2) = f(-2)$, συνεπώς η f δεν είναι 1-1, άρα δεν αντιστρέφεται.

- β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x) = -x^2 + 4|x| - 1 = -(|x| - 2)^2 + 3 \leq 3.$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 2 και στο -2 το 3.

- γ. Η $x = -2$ και η $x = 2$ είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης. Με $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ έχουμε :

$$(1 - \eta\mu x)(f(x) - 3) = f^2(x) - 6f(x) + 9 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \eta\mu x)(f(x) - 3) = (f(x) - 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - \eta\mu x + 3 - f(x) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη καθώς $1 - \eta\mu x \geq 0$ και $3 - f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x = -2$, $x = 2$.

- δ. Θέτουμε $u = f(x) - 3$ και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} u = \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3) = 0.$$

Επίσης $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(f(x) - 3)}{f(x) - 3} = 1$.

Ακόμα $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3) = 0$ και $f(x) - 3 < 0$ κοντά

στο 2, άρα $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x) - 3} = -\infty$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(f(x) - 3)}{(f(x) - 3)^2} = -\infty.$$

Έφυγαν από κοντά μας

† Γιώργος Αποστολόπουλος

Η ΕΜΕ αποχαιρετά τον Γιώργο Αποστολόπουλο
Στις 23/6/2025 απεβίωσε ο εκλεκτός μαθηματικός Γιώργος Αποστολόπουλος. Γεννήθηκε το 1949 και υπηρέτησε ως μαθηματικός στη Δημόσια Εκπαίδευση στο Μεσολόγγι. Δραστήριο μέλος της Ε.Μ.Ε., είχε βαθιές γνώσεις για τα **διαγωνιστικά** Μαθηματικά, συμμετείχε στις επιτροπές της Ε.Μ.Ε. για τους διαγωνισμούς, ως συνοδός των ολυμπιακών ομάδων και ως διδάσκων επί σειρά ετών στα θερινά σχολεία της Ε.Μ.Ε. Ήταν **σπουδαίος** λύτης διαγωνιστικών προβλημάτων, δημιουργός σχετικών προβλημάτων και συνεργάτης ρουμάνικων μαθηματικών περιοδικών, δημιουργός και λύτης προβλημάτων στο καναδικό περιοδικό **CruX** και στα περιοδικά **American Mathematical Monthly**, **Mathematics Magazine**, **College Mathematics Journal** κ.α. Το 2015 οι εκδόσεις «Σύγχρονη εκδοτική» εξέδωσαν το βιβλίο του με τον τίτλο «**The Beauty of Proving**». Είχε συνεργαστεί με τον Ρουμάνο μαθηματικό **Daniel Sitaru** και είχε εκδώσει βιβλία μαζί του. Το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. εκφράζει στα μέλη της οικογένειάς του τα θερμά του συλλυπητήρια

† Αγγελική Βλάχου

Η ΕΜΕ αποχαιρετά την Αγγελική Βλάχου

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία εκφράζει τη βαθύτατη θλίψη της για τον ξαφνικό και αναπάντεχο θάνατο, στις αρχές Αυγούστου 2025, της αγαπημένης συναδέλφου Αγγελικής Βλάχου, μαθηματικού στο 2ο Πρότυπο Γυμνάσιο Αθηνών. Η Αγγελική Βλάχου υπήρξε μια σπουδαία επιστήμονας και **παιδαγωγός**, με πολυετή προσφορά στην Ε.Μ.Ε. και ιδιαίτερα στον τομέα των **μαθηματικών διαγωνισμών**. Διετέλεσε αρχηγός και συνοδός εθνικών μαθητικών ομάδων σε διεθνείς διαγωνισμούς, προσφέροντας με τον χρόνο και τη γνώση της για την προετοιμασία των μαθητών. Παράλληλα, συμμετείχε ενεργά σε μαθήματα, σεμινάρια και δράσεις της Ε.Μ.Ε., εμπνέοντας εκατοντάδες νέους ανθρώπους να αγαπήσουν τα Μαθηματικά. Το συγγραφικό της έργο στην Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία αποτελεί πολύτιμη παρακαταθήκη για τη μαθηματική εκπαίδευση και τους διαγωνισμούς. Η **διδασκαλία της, η συνέπειά της και το ήθος** της άφησαν ανεξίτηλο αποτύπωμα στη μαθηματική κοινότητα. Η απώλειά της μας συγκλονίζει όλους και αφήνει δυσαναπλήρωτο κενό, τόσο στους μαθητές και τους συναδέλφους της, όσο και στην ευρύτερη οικογένεια της Ε.Μ.Ε. Το Διοικητικό Συμβούλιο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένεια και τους οικείους της. **Η μνήμη** της θα παραμείνει αιώνια ζωντανή μέσα από **το έργο**, την προσφορά και την αγάπη της για τα Μαθηματικά. Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά της.



Ο Ευκλείδης

προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα προβλήματα και οι λύσεις και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». P. R. HALMOS

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 445 (ΤΕΥΧΟΣ 135)

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α , για τις οποίες, για κάθε τιμή της παραμέτρου β η εξίσωση $|x-2|+|2x+1|=\alpha$ έχει τουλάχιστον μια λύση.

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = |x-2| + 2\beta \left| x + \frac{1}{2} \right|$$

και για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ ο αριθμός $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$ περιέχεται στο σύνολο τιμών της. Παρατηρούμε ότι:

- Αν $\beta = \frac{1}{2}$ τότε

$$f(x) = |x-2| + \left| x + \frac{1}{2} \right| \geq \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) - (x-2) \right| = \frac{5}{2}$$

που σημαίνει ότι όταν $\beta = \frac{1}{2}$ τότε το σύνολο τιμών της f δεν περιέχει αριθμούς μικρότερους από το $\frac{5}{2}$.

- Αν $\beta = -\frac{1}{2}$ τότε

$$f(x) = |x-2| - \left| x + \frac{1}{2} \right| \leq \left| (x-2) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{5}{2}$$

που σημαίνει ότι όταν $\beta = -\frac{1}{2}$ τότε το σύνολο τιμών της f δεν περιέχει αριθμούς μεγαλύτερους από το $\frac{5}{2}$.

Επομένως, μόνο για $\alpha = \frac{5}{2}$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου β , τουλάχιστον μια λύση.

Λύση έστειλαν επίσης οι Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο

Κρήτης, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια και Χασάκης Γεώργιος – Ρόδος.

ΑΣΚΗΣΗ 446 (ΤΕΥΧΟΣ 135)

Να λύσετε την εξίσωση

$$\log_{8x}^2 x + (x+1) \log_{8x} x + 2x - 2 = 0$$

Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο Κρήτης.

ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια)

Με $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, +\infty\right)$ η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ln x}{\ln 8x}\right)^2 + 2 \frac{\ln x}{\ln 8x} \cdot \frac{x+1}{2} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 2x + 2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x}{\ln 8x} + \frac{x+1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

και διασπάται στις παρακάτω εξισώσεις:

- $\frac{\ln x}{\ln 8x} + \frac{x+1}{2} = \frac{x-3}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 8x} + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \ln x + 2 \ln 8x = 0 \Leftrightarrow \ln 64x^3 = \ln 1$
 $\Leftrightarrow 64x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$
- $\frac{\ln x}{\ln 8x} + \frac{x+1}{2} = \frac{3-x}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 8x} + x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow \ln x + (x-1)(\ln x + \ln 8) = 0$
 $\Leftrightarrow \ln x + x \ln x - \ln x + 3(x-1) \ln 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x \ln x + 3(x-1) \ln 2 = 0$

η οποία έχει προφανή ρίζα την $x=1$. Επιπλέον, αν $x > 1$, τότε $x \ln x + 3(x-1) \ln 2 > 0$, ενώ αν

$0 < x < 1$, $x \neq \frac{1}{8}$, τότε $x \ln x + 3(x-1) \ln 2 < 0$.

Άρα ο αριθμός 1 είναι η μοναδική ρίζα της. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και $\frac{1}{4}$.

Λύση έστειλαν επίσης οι Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και Καραβότας Δημήτριος – Κάτω Αχαΐα.

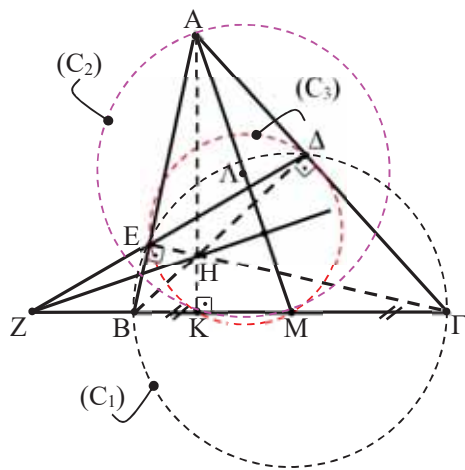
ΑΣΚΗΣΗ 447 (ΤΕΥΧΟΣ 136)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΕ, Η το ορθόκεντρο του τριγώνου και Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $ZH \perp AM$.

Βαγγέλης Σταματιάδης – Νέα Ιωνία

ΛΥΣΗ (Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο Κρήτης)

Είναι γνωστό ότι ο γεωμ. τόπος των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς δύο κύκλους είναι μία ευθεία κάθετη στην ευθεία που ορίζουν τα κέντρα των δύο κύκλων (ριζικός άξονας των κύκλων).



Στην προκειμένη περίπτωση αρκεί να αποδειχθεί ότι η ΖΗ είναι ριζικός άξονας δύο κύκλων, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στην ΑΜ.

Λόγω των υψών ΒΔ και ΓΕ, το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, με διάμετρο την ΒΓ και κέντρο το Μ. [Κύκλος (C₁)]

Λόγω του τρίτου ύψους ΑΚ, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΜ εγγράφεται σε κύκλο με διάμετρο την ΑΜ και κέντρο το μέσον της Λ [Κύκλος (C₂)]

Επίσης, ο κύκλος Euler του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από τα ίχνη Δ, Ε και Κ των υψών του και από τα μέσα των πλευρών του, άρα και από το Μ. [Κύκλος (C₃)]. Σε ότι αφορά στις δυνάμεις έχουμε:

- Του Ζ ως προς τον κύκλο (C₁):

$$\Delta_{C_1}^Z = ZB \cdot Z\Gamma = ZE \cdot Z\Delta \quad (1)$$

Αφού τα Κ και Μ ανήκουν και στους δύο κύκλους C₂ και C₃, είναι προφανές ότι:

- Του Ζ ως προς τον κύκλο (C₃):

$$\Delta_{C_3}^Z = ZK \cdot ZM = \Delta_{C_2}^Z = ZE \cdot Z\Delta \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι

$$\Delta_{C_1}^Z = \Delta_{C_2}^Z,$$

δηλ. το Ζ ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (C₁) και (C₂).

- Του Η ως προς τον κύκλο (C₁):

$$\Delta_{C_1}^H = HB \cdot HD = HE \cdot HG \quad (3)$$

- Του Η ως προς τον κύκλο (C₂):

$$\Delta_{C_2}^H = HA \cdot HK \quad (4)$$

Αλλά, από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΗΕΑ και ΗΚΓ παίρνουμε:

$$\frac{HA}{HG} = \frac{HE}{HK} \Leftrightarrow HA \cdot HK = HE \cdot HG \quad (5)$$

Και από τον συνδυασμό των (3), (4) και (5) προκύπτει ότι: $\Delta_{C_1}^H = \Delta_{C_2}^H$, δηλ. και το Η ανήκει

στον ριζικό άξονα των κύκλων. Άρα η ΖΗ είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων (C₁) και (C₂) και επομένως είναι κάθετος στην ΑΜ (που συνδέει τα κέντρα τους Μ και Λ).

Λύση έστειλαν επίσης οι **Λαγογιάννης Βασίλης** – Νέο Ηράκλειο, **Δεληστάθης Γιώργος** – Κάτω Πατήσια, **Καρτσακλής Δημήτριος** – Αγρίνιο και **Ιωαννίδης Αντώνης** – Χολαργός

ΑΣΚΗΣΗ 448 (ΤΕΥΧΟΣ 136)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{\alpha^9}{\beta\gamma} + \frac{\beta^9}{\gamma\alpha} + \frac{\gamma^9}{\alpha\beta} \geq \alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha + \beta + \gamma)$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Μηνάς Στασινός – Αθήνα)

Η αποδεικτέα γράφεται:

$$\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + \frac{\beta^7}{\alpha^3\gamma^3} + \frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq \alpha + \beta + \gamma.$$

Από την ανισότητα

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ για κάθε $x, y \geq 0$ παίρνουμε:

$$\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + \frac{\beta^7}{\alpha^3\gamma^3} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} \cdot \frac{\beta^7}{\alpha^3\gamma^3}} = \frac{2\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} \quad (1).$$

Όμοια βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\beta^7}{\alpha^3\gamma^3} + \frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq \frac{2\beta^2\gamma^2}{\alpha^3} \quad (2)$$

και

$$\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + \frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \quad (3)$$

Προσθέτουμε τις (1),(2),(3) και έχουμε:

$$\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + \frac{\beta^7}{\alpha^3\gamma^3} + \frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} + \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^3} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \quad (4).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} + \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^3} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \geq \alpha + \beta + \gamma.$$

Από την ανισότητα

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ που ισχύει για κάθε $x, y, z \geq 0$ έχουμε:

$$\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^3} + \beta + \gamma \geq 3\sqrt[3]{\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^3}\beta\gamma} = \frac{3\beta\gamma}{\alpha}$$

οπότε:

$$\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^3} \geq \frac{3\beta\gamma}{\alpha} - \beta - \gamma \quad (5).$$

Όμοια:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} \geq \frac{3\alpha\beta}{\gamma} - \alpha - \beta \quad (6) \text{ και } \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \geq \frac{3\alpha\gamma}{\beta} - \alpha - \gamma \quad (7).$$

Προσθέτουμε τις (5), (6), (7) κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} + \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^3} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \geq 3\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma}{\beta}\right) - 2(\alpha + \beta + \gamma), \quad (8)$$

Όμως

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{\alpha\gamma}{\beta}} = 2\alpha \quad (9), \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \geq 2\beta \quad (10),$$

$$\text{και } \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \geq 2\gamma \quad (11)$$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη:

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} \geq \alpha + \beta + \gamma \quad (12)$$

και από τη σχέση (8) παίρνουμε:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} + \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^3} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \geq 3(\alpha + \beta + \gamma) - 2(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$$

2η Λύση (Γιάνναρος Διονύσης - Πύργος)

Η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + \frac{\beta^7}{\gamma^3\alpha^3} + \frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq \alpha + \beta + \gamma$$

Από την ανισότητα AM-GM έχουμε διαδοχικά:

$$4\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + 3\frac{\beta^7}{\gamma^3\alpha^3} + 3\frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq 10\sqrt[10]{\frac{\alpha^{28}\beta^{21}\gamma^{21}}{\beta^{21}\gamma^{21}\alpha^{18}}}$$

$$\Rightarrow 4\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + 3\frac{\beta^7}{\gamma^3\alpha^3} + 3\frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq 10\alpha, \quad (1)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$3\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + 4\frac{\beta^7}{\gamma^3\alpha^3} + 3\frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq 10\alpha, \quad (2)$$

$$3\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + 3\frac{\beta^7}{\gamma^3\alpha^3} + 4\frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq 10\alpha, \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$10\left(\frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + \frac{\beta^7}{\gamma^3\alpha^3} + \frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3}\right) \geq 10(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^7}{\beta^3\gamma^3} + \frac{\beta^7}{\gamma^3\alpha^3} + \frac{\gamma^7}{\alpha^3\beta^3} \geq \alpha + \beta + \gamma$$

που είναι η ζητούμενη.

Σχόλιο

Οι συντελεστές 4, 3, 3 στις ανισότητες (1), (2) και (3) δεν προέκυψαν τυχαία. Ο τρόπος επιλογής τους αναπτύσσεται διεξοδικά από τον συνάδελφο σε άρθρο με τίτλο «ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ» που θα δημοσιευθεί στο επόμενο τεύχος του περιοδικού.

Λύση έστειλαν επίσης οι **Λαγογιάννης Βασίλης**

- **Νέο Ηράκλειο**, **Καρτσακλής Δημήτριος** - **Αγρίνιο** και **Ιωαννίδης Αντώνης** - **Χολαργός**.

ΑΣΚΗΣΗ 449 (ΤΕΥΧΟΣ 136)

Να βρείτε όλες τις πραγματικές λύσεις του συστήματος

$$\frac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \frac{3xy}{2(1-x)^2} \text{ και } 2x^2 + xy = 1$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι.

ΛΥΣΗ (Καρτσακλής Δημήτριος - Αγρίνιο)

Η εξίσωση δεν έχει λύση της μορφής $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$

οπότε με $x \neq 0$ θέτουμε $\frac{3x}{(1-x)^2} = y$, $y \neq 0$ και η

πρώτη εξίσωση γράφεται

$$\frac{u^2}{2} = 1 + \frac{uy}{2} \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{2+uy}{2} \Leftrightarrow y = \frac{u^2-2}{u}, \quad (1)$$

Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$y = \frac{1-2x^2}{x}, \quad (2)$$

Έτσι από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{u^2-2}{u} = \frac{1-2x^2}{x} \Leftrightarrow xu^2 - 2x = u - 2x^2u$$

$$\Leftrightarrow xu(u+2x)-(u+2x)=0 \Leftrightarrow (u+2x)(xu-1)=0$$

$$\Leftrightarrow u+2x=0 \text{ ή } xu-1=0$$

• $u+2x=0$:

$$\frac{3x}{(x-1)^2} = -2x \Leftrightarrow (x-1)^2 = -\frac{3}{2}, \text{ αδύνατη.}$$

• $xu-1=0$:

$$\frac{3x^2}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$$

και επειδή $1-2x^2=2x$, παίρνουμε:

$$xy = 2x \Leftrightarrow y = 2$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι οι:

$$(x, y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, 2 \right)$$

2η Λύση (Γιάνναρος Διονύσης - Πύργος)

Σχόλιο: Αφιερώνεται στη μνήμη του εξαιρετικού συνάδελφου **Αποστολόπουλου Γεώργιου**, που δεν είναι πια μαζί μας.

Προφανώς $x \neq 1$ και $x \neq 0$. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$\frac{9x^2}{(1-x)^4} = 2 + \frac{3xy}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3x}{(1-x)^2} \right)^2 - 2 \frac{3x}{(1-x)^2} \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 2$$

$$\left[\frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{y}{2} \right]^2 = 2 + \frac{y^2}{4}, \quad (1)$$

Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$y = \frac{1-2x^2}{x} = \frac{1}{x} - 2x, \text{ οπότε } y^2 = \left(\frac{1}{x} - 2x \right)^2, \quad (2)$$

Λόγω της (2) η (1) γίνεται

$$\left[\frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{y}{2} \right]^2 = 2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} - 2x \right)^2 = \left(x + \frac{1}{2x} \right)^2$$

δηλαδή

$$\left[\frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{y}{2} \right]^2 = \left(x + \frac{1}{2x} \right)^2$$

Έτσι, έχουμε:

• $\frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{y}{2} = x + \frac{1}{2x} \xrightarrow{y=\frac{1}{x}-2x} \frac{3x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$$

και με αντικατάσταση στην $y = \frac{1-2x^2}{x}$ βρίσκουμε $y = 2$.

• $\frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{y}{2} = -x - \frac{1}{2x} \xrightarrow{y=\frac{1}{x}-2x} \frac{3x}{(1-x)^2} = -2x$

$$\xrightarrow{x \neq 0} \frac{3}{(1-x)^2} = -2$$

που είναι αδύνατη.

Λύση έστειλαν επίσης οι **Λαγογιάννης Βασίλης**, **Δεληστάθης Γιώργος** - Κάτω Πατήσια, **Καραβό-τας Δημήτριος** - Κάτω Αχαΐα.

Προτεινόμενα Θέματα

453. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}} = 4x$$

Γιάνναρος Διονύσης - Πύργος

454 Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^3 + \left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} \right)^3 + \left(\frac{\gamma}{\gamma+\alpha} \right)^3 \geq \frac{3}{8}$$

Καμπούκος Κυριάκος - Αθήνα

455 Αν $\alpha > 1$ να λύσετε την εξίσωση

$$\log_{\alpha+1}(\alpha^x + 2\alpha + 1) = \log_{\alpha}[(\alpha+1)^x - 2\alpha - 1]$$

Καρτσακλής Δημήτριος - Αγρίνιο

456 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα εσωτερικά σημεία Δ, E, Z στις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{(AEZ)} + \sqrt{(BZ\Delta)} + \sqrt{(ΓΕΔ)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(AB\Gamma)}$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι

Με ιδιαίτερη λύπη η στήλη γνωστοποιεί στους φίλους και συνεργάτες ότι ο εξαιρετος συνάδελφος **Γιώργος Αποστολόπουλος**, ένα από τους πλέον ενεργά μέλη της ομάδας μας, δεν είναι πια μαζί μας.

Το προηγούμενο προτεινόμενο θέμα, όπως και άλλα που θα ακολουθήσουν, προέρχεται από τα αρχεία που κατά καιρούς μας έχει αποστείλει ο Γιώργος Αποστολόπουλος.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Ταυτότητα του Euler

Τρια Αναγνωστοπούλου – Γιώργος Τσαπακίδης

Η αφορμή για να γραφεί αυτό το άρθρο είναι το γεγονός ότι αρκετά από τα προβλήματα των διαγωνισμών λύνονται με τη βοήθεια της ταυτότητας του Euler.



Ο **Leonhard Euler** (1707-1783) ήταν Ελβετός μαθηματικός, μεταξύ των κορυφαίων μαθηματικών όλων των εποχών. Έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στις Ακαδημίες της Αγίας Πετρούπολης και του Βερολίνου. Συνέβαλε στην ανάπτυξη όλων των γνωστών μέχρι τότε κλάδων των μαθηματικών και ανέπτυξε καινούργιους, όπως η Θεωρία Μεταβολών, η Αναλυτική θεωρία Αριθμών, η Αναλυτική Μηχανική, η Ρευστομηχανική και η Τοπολογία.

Το τεράστιο έργο του συγκεντρώθηκε σε 75 τόμους, που περιέχουν 45.000 σελίδες, ως εκ τούτου είναι προφανώς ο πολυγραφότερος από όλους τους μαθηματικούς. Παρ' ότι το σύνολο του έργου αφορά κυρίως τα ανώτερα μαθηματικά είχε και σημαντική συνεισφορά στα στοιχειώδη, μεταξύ των οποίων είναι και οι προτάσεις:

1. Σε κάθε τρίγωνο το ορθόκέντρο, το κέντρο βάρους και το περίκέντρο του είναι συνευθειακά σημεία και η απόσταση των δύο πρώτων είναι η διπλάσια από την απόσταση των δύο δευτέρων (Ευθεία του Euler).
2. Σε κάθε κυρτό πολύεδρο ισχύει $K + E = A + 2$, όπου K είναι το πλήθος των κορυφών, E το πλήθος των εδρών και A το πλήθος των ακμών του πολυέδρου.
3. Σε κάθε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4K\Lambda^2$, όπου K, Λ τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma, B\Delta$.
4. Αν οι θετικοί ακέραιοι α, ν είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε $a^{\varphi(\nu)} \equiv 1 \pmod{\nu}$, όπου $\varphi(\nu)$ το πλήθος των θετικών αριθμών που είναι μικρότεροι και πρώτοι προς τον ν .
5. Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν $IO^2 = R^2 - 2R\rho$ και $I_a O^2 = R^2 + 2R\rho_a$, όπου I το έγκεντρο, O το περίκέντρο, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και ρ_a η ακτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
6. Την φερώνυμη ταυτότητα, που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Η ταυτότητα:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$$

Η απόδειξη της ταυτότητας μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, πιο απλός είναι να κάνουμε πράξεις στο δεύτερο μέλος για να πάρουμε το πρώτο:

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = \alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 - \alpha^2\beta - \alpha\beta\gamma - \gamma\alpha^2 + \beta\alpha^2 + \beta^3 + \beta\gamma^2 - \alpha\beta^2 - \beta^2\gamma - \alpha\beta\gamma + \gamma\alpha^2 + \gamma\beta^2 + \gamma^3 - \alpha\beta\gamma - \beta\gamma^2 - \gamma^2\alpha = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma.$$

Συνέπειες της ταυτότητας.

- Είναι $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) + (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2) + (\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2)] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2].$

Έτσι η ταυτότητα συμπληρώνεται:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] \quad (1)$$

- Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $(1) \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, έτσι: Αν το άθροισμα τριών αριθμών είναι μηδέν, τότε το άθροισμα των κύβων τους ισούται με το τριπλάσιο γινόμενο τους.
- Είναι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$, επομένως:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ ή } \alpha = \beta = \gamma$$

- Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, έχουμε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] \geq 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$ (2)

Αν στην (2) θέσουμε $a = \sqrt[3]{x}, \beta = \sqrt[3]{y}, \gamma = \sqrt[3]{z}$ με $x, y, z > 0$, παίρνουμε

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad (3).$$

Επειδή η (3) ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς x, y, z θα ισχύει και όταν στη θέση των x, y, z θέσουμε $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, οπότε:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$\text{Αν } x, y, z > 0, \text{ τότε: } \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}, \text{ το } = \text{ όταν } x=y=z$$

Η προηγούμενη ανισότητα γενικεύεται στην περίφημη ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού-Αρμονικού Μέσου;

$$\text{Αν } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0, \text{ τότε: } \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

το = ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$

Η ανισότητα αυτή παρουσιάστηκε πρώτη φορά με την απόδειξη της (μέθοδος διπλής επαγωγής) στο βιβλίο του A.L.Cauchy «Cours d'Analyse de l' Ecole Polytechnique» το 1821. Έχουν δοθεί περισσότερες από 70 αποδείξεις της σημαντικής αυτής ανισότητας.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)



Λαμπρός Γάλλος μαθηματικός, που εισήγαγε την αυστηρότητα στην Ανάλυση, θεμελίωσε τη Θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων, εργασίες του αναφέρονται στη Θεωρία Αριθμών, Θεωρία Ομάδων, Θεωρία Συναρτήσεων, στις σειρές στη διάδοση των κυμάτων, στην οπτική, στα ρευστά και τη θεωρία ελαστικότητας. Δημοσίευσε 789 εργασίες που εκδόθηκαν σε 27 τόμους με τίτλο: «Oeuvres complètes d' Augustin Cauchy».

Εφαρμογές

1. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ και $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 1$, δείξτε ότι ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι ίσος με μηδέν.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha\beta\gamma = 0$. Παρατηρούμε ότι τόσο τα δεδομένα του προβλήματος, όσο και το ζητούμενο συνυπάρχουν στην ταυτότητα του Euler:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \quad (1)$$

Μένει να υπολογιστεί το άθροισμα $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

Είναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \quad (2)$$

Λόγω των υποθέσεων και της (2) η (1) γίνεται: $1 - 3\alpha\beta\gamma = 1(1 - 0) \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 0$.

2. Αν $x = \alpha^2 - \beta\gamma, y = \beta^2 - \gamma\alpha$ και $z = \gamma^2 - \alpha\beta$, να παραγοντοποιηθεί η $ax + \beta y + \gamma z$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } ax + \beta y + \gamma z &= \alpha(\alpha^2 - \beta\gamma) + \beta(\beta^2 - \gamma\alpha) + \gamma(\gamma^2 - \alpha\beta) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha^2 - \beta\gamma) + (\beta^2 - \gamma\alpha) + (\gamma^2 - \alpha\beta)] = (\alpha + \beta + \gamma)(x + y + z). \end{aligned}$$

3. Αν $\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8$, τότε $\alpha + \beta =$;

(Ευκλείδης)

Απάντηση

$$\text{Είναι } \alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 - 8 = -6\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + (-2)^3 = 3\alpha\beta(-2)$$

(το άθροισμα των κύβων τριών αριθμών είναι το ίδιο με το τριπλάσιο γινόμενο τους)

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta - 2 = 0 \text{ ή } \alpha = \beta = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha = \beta = -2.$$

Άρα $\alpha + \beta = 2$ ή $\alpha + \beta = -4$.

4. Λύστε στο $\mathbb{R}$ το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \neq 0 & (1) \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{1}{9} & (2) \quad (\Sigma) \\ xyz = 27 & (3) \end{cases}$$

(Θαλής)

Λύση

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 = 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} \text{ (από την (3))} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \text{ (απορρίπτεται λόγω της (1))} \text{ ή } \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = y = z, \text{ οπότε (3)} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3, \text{ έτσι: } (\Sigma) \Leftrightarrow x = y = z = 3. \end{aligned}$$

5. Λύστε την εξίσωση $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt[3]{1-x}$.

Λύση

Περιορισμοί: $x \geq 0$ και $1-2x \geq 0$ και $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ και $x \leq \frac{1}{2}$ και $x \leq 1$
 $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Για $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ η εξίσωση γράφεται: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-2x} + (-\sqrt[3]{1-x}) = 0$
 (άθροισμα τριών αριθμών ίσο με το μηδέν, άρα το άθροισμα των κύβων τους ισούται με το τριπλάσιο γινόμενό τους) $\Rightarrow (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{1-2x})^3 + (-\sqrt[3]{1-x})^3 = 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1-2x}(-\sqrt[3]{1-x}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x + 1 - 2x - (1-x) = -3\sqrt[3]{x(1-2x)(1-x)} \Leftrightarrow 0 = -3\sqrt[3]{x(1-2x)(1-x)}$
 $\Leftrightarrow x(1-2x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{1}{2}$ ή $x = 1$ απορρίπτεται.

Για $x = 0$ ή $x = \frac{1}{2}$ η εξίσωση επαληθεύεται, επομένως αυτές είναι οι ρίζες της.

(Η επαλήθευση επιβάλλεται, γιατί $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και όχι $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$).

6. Αν $(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6})^3 + (\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2})^3 + (\frac{x}{6} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3})^3 = \frac{1}{8}$
 τότε $(x-3y+2z)(2x+y-3z)(-3x+2y+z) =$;

Απάντηση

$$\begin{aligned} &\text{Είναι } \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2}\right) + \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right) = \\ &= \left(-\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right) + \left(\frac{y}{3} + \frac{y}{6} - \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{z}{6} - \frac{z}{2} + \frac{z}{3}\right) = 0 + 0 + 0 = 0, \\ &\text{Άρα } \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right)^3 = 3 \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2}\right) \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{-3x-2y+z}{6} \cdot \frac{2x+y-3z}{6} \cdot \frac{x-3y+2z}{6} \\ &\Leftrightarrow (-3x+2y+z)(2x+y-3z)(x-3y+2z) = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{8 \cdot 3} \\ &\Leftrightarrow (x-3y+2z)(2x+y-3z)(-3x+2y+z) = 9. \end{aligned}$$

7. Λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} x+y+z = 1 & (1) \\ (\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1) = 8 & (2) \quad (\Sigma) \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

Λύση

$$(2) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{1}{z}\right) = -8 \Leftrightarrow 1^3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) 1^2 + \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) 1 - \frac{1}{xyz} = -8$$

(ταυτότητα Νεύτωνα) $\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{x+y+z}{xyz} - \frac{1}{xyz} = -8$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{xyz} - \frac{1}{xyz} = -8 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9 \Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 9 \quad (3)$$

Από την ανισότητα Αριθμητικού - Αρμονικού Μέσου για τους $x, y, z > 0$ έχουμε

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9, \text{ όπου το } = \text{ ισχύει όταν } x = y = z, \text{ έτσι (3)} \Leftrightarrow$$

$$x = y = z, \text{ οπότε } (1) \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

8. Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0, \alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5$, δείξτε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{6}{5}$.

Απόδειξη

Η εξίσωση $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ (1) έχει ρίζες τους αριθμούς α, β, γ .

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow x^3 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

$$(2) \text{ (αφού } \alpha + \beta + \gamma = 0).$$

Η (2) έχει ρίζες τους α, β, γ , άρα:

$$\begin{cases} \alpha^3 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\alpha - \alpha\beta\gamma = 0 \\ \beta^3 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\beta - \alpha\beta\gamma = 0 \\ \gamma^3 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\gamma - \alpha\beta\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^5 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\alpha^3 - \alpha^3\beta\gamma = 0 \\ \beta^5 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\beta^3 - \alpha\beta^3\gamma = 0 \\ \gamma^5 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\gamma^3 - \alpha\beta\gamma^3 = 0 \end{cases}$$

Με πρόθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - \alpha\beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0 \quad (3)$$

$$\text{είναι } \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \quad (4)$$

$$(3) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot 3\alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = \frac{5}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \alpha\beta\gamma \quad (5)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} 3\alpha\beta\gamma = \frac{5}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{6}{5}.$$

9. Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x, y, z για τους οποίους ισχύει: $x^2y + 2y^2 + 4x - 6xy = 0$ (1)

Απάντηση

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2y})^3 + (\sqrt[3]{2y^2})^3 + (\sqrt[3]{4x})^3 = 3\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{2y^2} \cdot \sqrt[3]{4x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[3]{2y^2} = \sqrt[3]{4x} \quad (2) \text{ ή } \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{2y^2} + \sqrt[3]{4x} = 0 \quad (3).$$

Η (3) είναι αδύνατη, αφού το πρώτο της μέλος είναι άθροισμα θετικών αριθμών, έτσι

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow x^2y = 2y^2 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = 2y^2 \\ \text{και} \\ 2y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = 2y^2 \quad (3) \\ \text{και} \\ y^2 = 2x \quad (4) \end{cases}$$

$$\text{Από τις (3) και (4) παίρνουμε } \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 = 2y \Leftrightarrow y^4 = 8y \Leftrightarrow y^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow y = 2, \text{ οπότε από την (3) έχουμε: } x^2 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

10. Λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y + z + 2 = xyz \\ xy + yz + zx = 12 \quad (\Sigma) \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

(Βρετανική Ολυμπιάδα)

Λύση

$$\text{Είναι } xyz = z + y + z + 2 \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 2 \quad (1) \Rightarrow xyz \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 2 \quad (2).$$

$$\text{Θέτουμε } \sqrt[3]{xyz} = \kappa, \text{ οπότε } (1) \Leftrightarrow \kappa^3 \geq 3\kappa + 2 \Leftrightarrow \kappa^3 - 3\kappa - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa^3 - \kappa - 2\kappa - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa^2 - 1) - 2(\kappa + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa - 1)(\kappa + 1) - 2(\kappa + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 1)[\kappa(\kappa - 1) - 2] \geq 0 \Leftrightarrow (\kappa + 1)(\kappa^2 - \kappa - 1 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (\kappa + 1)[(\kappa - 1)(\kappa + 1) - (\kappa + 1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 1)^2(\kappa - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \kappa = -1, \text{ άτοπο (αφού } \kappa = \sqrt[3]{xyz} > 0) \text{ ή } \kappa - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \kappa \geq 2 \quad (3).$$

$$\text{Είναι } 12 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Leftrightarrow 12 \geq 3\kappa^2 \Leftrightarrow \kappa \leq 2 \Rightarrow \kappa = 2 \text{ λόγω της (3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{xyz} = 2 \Rightarrow xyz = 8 \text{ και έτσι η (1) γίνεται:}$$

$$8 = x + y + z + 2 \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8, \text{ άρα}$$

$$x + y + z = 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow x = y = z, \text{ τότε } xyz = 8 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow x = y = z.$$

11. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = 1$, δείξτε ότι $\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)} + \frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)} + \frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)} \geq \frac{3}{2}$. (Διεθνής Ολυμπιάδα)

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)} + \frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)} + \frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\alpha^3(\beta+\gamma)} + \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\beta^3(\gamma+\alpha)} + \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\gamma^3(\alpha+\beta)} =$$

$$\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha(\beta+\gamma)} + \frac{(\alpha\gamma)^2}{\beta(\gamma+\alpha)} + \frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma(\alpha+\beta)} = \frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta + \alpha\gamma} + \frac{(\alpha\gamma)^2}{\beta\gamma + \beta\alpha} + \frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma\alpha + \gamma\beta} \geq$$

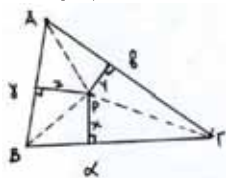
$\geq \frac{(\beta\gamma + \gamma\alpha + \beta\alpha)^2}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \beta\alpha + \gamma}$ (από την κλασματική ανισότητα: Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$,
 τότε $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$, το = όταν $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$) =
 $= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2}{2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)} = \frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geq \frac{1}{2} 3^3 \sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}$ (από την ανισότητα Αριθμητικού -
 Γεωμετρικού Μέσου για τους θετικούς αριθμούς $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$) = $\frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} = \frac{3}{2}$.
 Το = ισχύει όταν $\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma + \beta\alpha} = \frac{\beta\gamma}{\gamma\alpha + \gamma\beta}$ και $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$ (αφού $\alpha\beta\gamma = 1$) $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

12. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, τότε δείξτε ότι $(1 + \frac{\alpha}{\beta})(1 + \frac{\beta}{\gamma})(1 + \frac{\gamma}{\alpha}) \geq 2(1 + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}})$. (Asian Pasific Olymbian)

Απόδειξη

$(1 + \frac{\alpha}{\beta})(1 + \frac{\beta}{\gamma})(1 + \frac{\gamma}{\alpha}) = 1^3 + (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}) \cdot 1^2 + (\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}) \cdot 1 + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}$
 (από την ταυτότητα του Νεύτωνα: $(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$) = $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + 2 = (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha}{\alpha}) + (\frac{\beta}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha}) + (\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\gamma}) - 1 \geq$
 $\geq 3 \sqrt[3]{\frac{\alpha^3}{\alpha\beta\gamma}} + 3 \sqrt[3]{\frac{\beta^3}{\alpha\beta\gamma}} + 3 \sqrt[3]{\frac{\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}} - 1 = 3 \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + 3 \frac{\beta}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + 3 \frac{\gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} - 1 =$
 $= 3 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} - 1 = 2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} - 1 \geq 2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + \frac{3 \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} - 1 =$
 $= 2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + 3 - 1 = 2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + 2 = 2(1 + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}})$. Το = ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma$.

13. Ποιο από τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου ΑΒΓ έχει μέγιστο γινόμενο αποστάσεων από τις πλευρές του; (Βρετανική Ολυμπιάδα)



Απάντηση

Έστω P τυχαίο εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ, x,y,z οι αποστάσεις του P αντίστοιχα από τις πλευρές ΒΓ=α, ΓΑ=β και ΑΒ=γ. Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου, τότε $E = (PBG) + (PGA) + (PAB) = \frac{1}{2} \alpha x + \frac{1}{2} \beta y + \frac{1}{2} \gamma z$,

Άρα $2E = \alpha x + \beta y + \gamma z \geq 3 \sqrt[3]{\alpha x \beta y \gamma z} \quad (1) \Rightarrow 2E \geq 3 \sqrt[3]{\alpha \beta \gamma x y z} \Leftrightarrow 8E^3 \geq$

$$27 \alpha \beta \gamma x y z \Leftrightarrow x y z \leq \frac{8E^3}{27 \alpha \beta \gamma}, \text{ άρα } \max(xyz) = \frac{8E^3}{27 \alpha \beta \gamma}$$

Το μέγιστο του xyz συμβαίνει όταν ισχύει το = στην (1), δηλ όταν $\alpha x = \beta y = \gamma z \Leftrightarrow \frac{1}{2} \alpha x = \frac{1}{2} \beta y = \frac{1}{2} \gamma z \Leftrightarrow (PBG) = (PGA) = (PAB) \Leftrightarrow P$ κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

14. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, δείξτε ότι $\frac{1}{\alpha(\gamma+\alpha)} + \frac{1}{\beta(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\gamma(\beta+\gamma)} \geq \frac{27}{2(\alpha+\beta+\gamma)^2}$ (Βαλκανική Ολυμπιάδα Νέων)

Απόδειξη

Από την ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου έχουμε:

- $\frac{1}{\alpha(\gamma+\alpha)} + \frac{1}{\beta(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\gamma(\beta+\gamma)} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma \cdot 3 \sqrt[3]{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}}} \quad (1).$
- $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} \geq \frac{3}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (2).$
- $\frac{(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)}{3} \geq \sqrt[3]{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}} \geq \frac{3}{2(\alpha+\beta+\gamma)} \quad (3).$
- Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (2) και (3) παίρνουμε:
 $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \sqrt[3]{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}} \geq \frac{9}{2(\alpha+\beta+\gamma)^2} \quad (4)$
- Από τις (1) και (4) παίρνουμε την ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.
- Το = ισχύει όταν οι ανισότητες (1), (2) και (3) ισχύουν συγχρόνως, αυτό ισχύει όταν $\frac{1}{\alpha(\gamma+\alpha)} = \frac{1}{\beta(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\gamma(\beta+\gamma)}$ και $\alpha = \beta = \gamma$ και $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

15. Αν $x, y, z \geq 0$ και $x + y + z = 1$, δείξτε ότι $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$. (Διεθνής Ολυμπιάδα)

Απόδειξη

- Η υπόθεση και η αποδεικτέα πρόταση είναι συμμετρικές παραστάσεις των x, y, z γι' αυτό δε βλάπτεται η γενικότητα αν υποθέσουμε ότι $0 \leq x \leq y \leq z$, οπότε:
 $1 = x + y + z \geq x + x + x = 3x \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.
- Είναι $xy + yz + zx - 2xyz = x(y + z) + yz(1 - 2x) \geq 0$ (αφού $x, y, z \geq 0$ και $x \leq \frac{1}{3}$).
- Είναι $y + z \geq 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow 1 - x \geq 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow (\frac{1-x}{2})^2 \geq yz$, οπότε:

$$xy + yz + zx - 2xyz = x(y + z) + yz(1 - 2x) = x(1 - x) + yz(1 - 2x) \leq$$

$$\leq x(1 - x) + (\frac{1-x}{2})^2(1 - 2x) = \frac{1}{4}(1 + x + 2x^2 - x - x^2 - 2x^3) = \frac{1}{4}(1 + x^2 - 2x^3) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x \cdot x \cdot (1 - 2x) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\frac{x+x+(1-2x)}{3})^3 \quad (\text{γιατί από την ανισότητα Αριθμητικού Γεωμετρικού}$$

Μέσου για τους $x, x, (1 - 2x) \geq 0$ έχουμε

$$\frac{x+x+(1-2x)}{3} \geq \sqrt[3]{xx(1-2x)} \Leftrightarrow (\frac{x+x+(1-2x)}{3})^3 \geq x \cdot x \cdot (1 - 2x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{27} = \frac{28}{4 \cdot 27} = \frac{7}{27}.$$
- Το = ισχύει όταν $y + z = 2\sqrt{yz}$ και $\frac{x+x+(1-2x)}{3} = \sqrt[3]{xx(1-2x)} \Leftrightarrow y = z$ και $x = x = 1 - 2x \Leftrightarrow y = z$ και $x = \frac{1}{3}$, οπότε η $x + y + z = 1$ γίνεται: $\frac{1}{3} + 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$, άρα το = ισχύει όταν $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Προτεινόμενα Θέματα

- Δείξτε ότι $(\alpha + \beta)^3 + (\beta + \gamma)^3 + (\gamma + \alpha)^3 - 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = 2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma)$.
- Αν $\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1$, τότε $\alpha - \beta =$; (Ευκλείδης)
- Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ και $\alpha + \beta + \gamma = 0$, δείξτε ότι $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3} + \frac{2}{3}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}) = 0$.
- Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαφορετικοί ανά δύο και $x^3 + y^3 + \lambda(x + y) = y^3 + z^3 + \lambda(y + z) = z^3 + x^3 + \lambda(z + x)$, δείξτε ότι η παράσταση $A = (\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y})(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z})$ είναι ανεξάρτητη των x, y, z .
- Αν $xyz \neq 0$, $x \neq z$, $(x + y)^2 + (2 - xy) = 9$ και $(y + z)^2 - (3 + yz) = 4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = (\frac{x}{y} + \frac{y}{x^2} + \frac{z^3}{x^2y})(\frac{y}{z} + \frac{z}{y^2} + \frac{x^3}{y^2z})(\frac{z}{x} + \frac{x}{z^2} + \frac{y^3}{z^2x})$. (Αρχιμήδης)
- Αν $\alpha^2 + b^2 - 2\alpha = 2b + ab - 4$, να λύσετε την εξίσωση $(2x - \alpha)^3 - (x - b)^3 - x^3 = 0$. (Ευκλείδης)
- Αν $x^2 - y^2 = z^2$, $y^2 - z = x^2$ και $z^2 - x = y^2$, δείξτε ότι $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ και ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0. (Θαλής)
- Αν $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ και $abc = 5$, τότε $(a - \frac{1}{b})^3 + (b - \frac{1}{c})^3 + (c - \frac{1}{a})^3 =$;
- Αν a, b, c θετικοί αριθμοί και $a^3 + b^3 + 3ab = c + d = 1$, δείξτε ότι $(a + \frac{1}{a})^3 + (b + \frac{1}{b})^3 + (c + \frac{1}{c})^3 + (d + \frac{1}{d})^3 \geq 40$. (Αρχιμήδης)
- α. Για κάθε $x > 0$, δείξτε ότι $x^3 - 3x + 2 \geq 0$.
 β. Αν $x, y, z > 0$, δείξτε ότι $\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} + 2(\frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{x}{yz}) \geq 9$ (Προκρινατικός)
- Λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xy + yz + zx \\ xyz = 1 \\ x + y + z = \min \end{cases}$$
 (Προκρινατικός)
- Αν $\alpha, b, x, y, z > 0$, $\alpha + \beta = 3$ και $xyz = 1$, δείξτε ότι $(\alpha x + b)(\alpha y + b)(\alpha z + b) \geq 27$.
 Πότε ισχύει το =; (Αρχιμήδης)
- Αν $a, b, c, d > 0$ και $a + b + c + d = 1$, δείξτε ότι $\frac{bcd}{a+2} + \frac{cda}{b+2} + \frac{dab}{c+2} + \frac{abc}{d+2} < \frac{1}{13}$. (Ρουμανία)
- Αν $a, b, c > 0$ και $abc = 1$, δείξτε ότι $2(\alpha^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) \geq 3(\alpha + b + c + \alpha b + bc + ca)$ (ΒΜΟ)
- Αν $AD, BE, \Gamma Z$ είναι διχοτόμοι του τριγώνου $AB\Gamma$ και I το έγκεντρό του, δείξτε ότι $\frac{AI \cdot BI \cdot \Gamma I}{AD \cdot BE \cdot \Gamma Z} \leq \frac{8}{27}$. (ΙΜΟ)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- T. Andreescu, 105 Algebra Problems, XYZ Press, LLC, 2013.
- T. Andreescu, Dorin Andrica, 360 Problems for Mathematical Contests, GIL Publishing House, Zalau Romania, 2003.
- A. Engel, Problems-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York, 1998.
- Z. Cvetkovski, Inequalities, Springer, New York, 2010.
- R. Honsberger, Mathematical Chestnuts for Around the World, MAA, USA, 2001.
- Xu Jiagu, Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses for Junior, Vol. 1, Vol. 2, World Scientific Publishing Co, Pte. Ltd, Singapore, 2010.
- Xu Jiagu, Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses for Senior, Vol. 1, Vol. 2, World Scientific Publishing Co, Pte. Ltd, Singapore 2012.
- R.B. Manfrino, J.A.G. Ortega, R.V. Delgado, Topics in Algebra and Analysis, Springer International Publishing Switzerland, 2015.
- A. Φελλούρης κ.ά. Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες 1959-2000, Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 2001.
- Ευκλείδης Β', Περιοδικό Ε.Μ.Ε.

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες*

Σωτήρης Χρ. Γκουντουβάς

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ξεκίνησε την μακρόχρονη διαδρομή της περίπου το 300 π.Χ με τα *Στοιχεία* και συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα νέοι βλαστοί φύτρωσαν επί του παλαιού κορμού. Οι Lobatchevski και Bolyai θεμελίωσαν την πρώτη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία και λίγο μετά τα μέσα του ίδιου αιώνα ακολούθησε ο Riemann με τη δεύτερη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ας δούμε τώρα τη συναρπαστική αυτή Γεωμετρική Διαδρομή στη χώρα των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Από τις απαρχές τους τα *Στοιχεία* δέχθηκαν κριτική με κύριο θέμα την ανεξαρτησία του 5^{ου} αιτήματος, δηλαδή ότι από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη προς αυτή. Όπως έχουμε αναφέρει πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να αποδείξουν αυτό το αξίωμα στην αρχαιότητα, όπως ο Ήρων, ο Κλαύδιος Πτολεμαίος και ο Πρόκλος.

Το νήμα για την αμφισβήτηση του 5^{ου} αιτήματος της αρχαιότητας έπιασαν πολλοί μαθηματικοί μετά την Αναγέννηση, αλλά θα σταθούμε στην πρώτη σημαντική προσπάθεια του Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733), ο οποίος ήταν Ιησουΐτης, ιερέας και καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Παβίας.

Στο έργο του «*Ευκλείδης απαλλαγμένος από ατέλειες, μια προσπάθεια για νέες ολοκληρωμένες γεωμετρικές αρχές*» (*Euclides ab omni naevo, vindicatus sive Conatus geometricus quo stabiliuntur et prima ipsa universae geometriae principia, Mediolani 1733*) που δημοσιεύτηκε στο Μιλάνο μερικούς μήνες πριν τον θάνατό του, στην προσπάθειά του να αποδείξει το 5^ο αίτημα των *Στοιχείων* του Ευκλείδη ασχολείται με τετράπλευρα με άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο ή μικρότερο από 360°.

Τα τετράπλευρα αυτά που καλούνται S(accheri)-τετράπλευρα κατασκευάζονται ως εξής: Παίρνουμε τη βάση AB και υψώνουμε δύο κάθετα τμήματα ΑΓ και ΒΔ στο AB ίσα μεταξύ τους και ενώνουμε τα σημεία Γ και Δ. Οι γωνίες Γ και Δ, όπως εύκολα αποδεικνύεται, είναι ίσες μεταξύ τους.

Διακρίνει τότε τρεις περιπτώσεις. Οι γωνίες Γ και Δ να είναι ορθές, αμβλείες, ή οξείες. Συνεπώς έχουμε τρεις περιπτώσεις για το άθροισμα των γωνιών Γ και Δ:

- 1) Το άθροισμα είναι ίσο με 180°, αν οι γωνίες είναι ορθές
- 2) Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από 180°, αν οι γωνίες είναι αμβλείες
- 3) Το άθροισμα είναι μικρότερο από 180°, αν οι γωνίες είναι οξείες.

Στην πρώτη περίπτωση (υπόθεση ορθής γωνίας) το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι 360° και έχουμε ακριβώς την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δηλαδή το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180° και από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλος προς την ευθεία.

Στη δεύτερη περίπτωση (υπόθεση αμβλείας γωνίας), ο Saccheri εργάζεται με **reductio ad absurdum** (εις άτοπον απαγωγή). Υποθέτει ότι άθροισμα των γωνιών Γ και Δ είναι μεγαλύτερο από 180° και με μερικούς συλλογισμούς καταλήγει σε άτοπο.

Στην περίπτωση αυτή της αμβλείας γωνίας, ο Saccheri προχωρά και εξάγει κάποια συμπεράσματα που δεν είναι τίποτε άλλο παρά θεωρήματα της Ελλειπτικής Γεωμετρίας, στην οποία το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180° και από σημείο εκτός ευθείας δεν άγεται καμία παράλληλη προς την ευθεία, δηλαδή όλες οι ευθείες τέμνονται.

Στην τρίτη περίπτωση (υπόθεση οξείας γωνίας) ο Saccheri εξάγει μερικά συμπεράσματα που δεν είναι τίποτε άλλο παρά θεωρήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας.



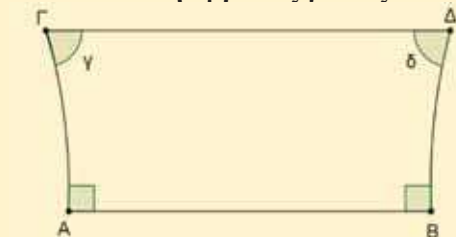
S-τετράπλευρο



Υπόθεση ορθής γωνίας



Υπόθεση αμβλείας γωνίας



Υπόθεση οξείας γωνίας

* Στη μνήμη του Χρόνη & Θανάση Στράντζαλου

Στην Υπερβολική Γεωμετρία το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180° και από σημείο εκτός ευθείας άγονται άπειρες παράλληλες προς την ευθεία. Ο Saccheri κατέληξε στη θεμελιώδη έννοια, αυτή που ο Nikolai Ivanovich Lobatchevski 100 χρόνια αργότερα αποκάλεσε «γωνία παραλληλισμού».

Ο Saccheri λοιπόν έφθασε στο κατώφλι των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, άνοιξε την πόρτα τους μπήκε μέσα και τρομοκρατημένος οπισθοχώρησε αφού τα αποτελέσματα αυτών των Γεωμετριών ήταν πέρα από την κατεστημένη Ευκλείδεια Γεωμετρία και εντελώς ξένα προς την ανθρώπινη εμπειρία.

Ο φωτισμένος Ιησούιτης εκφοβισμένος από τα αποτελέσματα αυτών των γεωμετριών τις απορρίπτει και διατρανώνει τον θρίαμβο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, της μόνης Γεωμετρίας που μπορεί να αντιληφθεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος!

Έτσι ο Giovanni Girolamo Saccheri, όπως και ο Gauss αρκετά χρόνια αργότερα που φοβήθηκε τις «φωνές των Βοιωτών», έχασε την ευκαιρία να είναι ο αυτός που ανακάλυψε τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, αφήνοντας τη δόξα αυτή στους Lobatchevski – Bolyai και αργότερα στον Riemann.

Με τα τετράπλευρα Saccheri ασχολήθηκε μερικά χρόνια αργότερα ο Johann Heinrich Lambert (1728-1777) με τους εξής συλλογισμούς.

Αν δεχθούμε ότι οι ίσες γωνίες Γ και Δ είναι αμβλείες (υπόθεση αμβλείας γωνίας), τότε φθάνουμε σε ένα σύστημα όμοιο με αυτό της επιφάνειας της σφαίρας, όπου το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180° , δηλαδή στην ελλειπτική γεωμετρία.

Αν δεχθούμε ότι οι ίσες γωνίες Γ και Δ είναι οξείες (υπόθεση οξείας γωνίας), τότε φθάνουμε σε ένα σύστημα περίεργο, όπως έγραψε ο Lambert, όμοιο με αυτό μιας σφαίρας με φανταστική ακτίνα και τότε ένα τρίγωνο στην επιφάνεια αυτή έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο από 180° , δηλαδή στην υπερβολική γεωμετρία. Το εντυπωσιακό είναι ότι ο Lambert δέχεται μια σφαίρα με φανταστική ακτίνα σε μια εποχή που οι φανταστικοί αριθμοί στην άλγεβρα αντιμετωπιζόνταν τουλάχιστον με καχυποψία, στη δε γεωμετρία ήταν εντελώς άγνωστοι. Εκεί σταματά ο Lambert την εργασία του και δεν προχωρά ώστε να θεμελιώσει τις δύο άλλες μη ευκλείδειες γεωμετρίας. Όπως και ο Saccheri, δεν μπόρεσε να υπερβεί τις κατεστημένες απόψεις της ευκλείδειας γεωμετρίας που συμβαδίζουν με την ανθρώπινη εμπειρία και άφησε την προσπάθειά του ημιτελή.

Στα ίδια περίπου βήματα κινήθηκε και η προσπάθεια του Adrien Marie Legendre (1752–1833), χωρίς τελικό αποτέλεσμα.

Με αυτά λοιπόν τα δειλά βήματα των Saccheri-Lambert-Legendre φθάνουμε στον ρώσο Nikolai Ivanovich Lobatchevski (1792-1856), καθηγητή μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Kazan, ο οποίος ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε μια μη ευκλείδεια Γεωμετρία και παράλληλα δημοσίευσε την εργασία του.

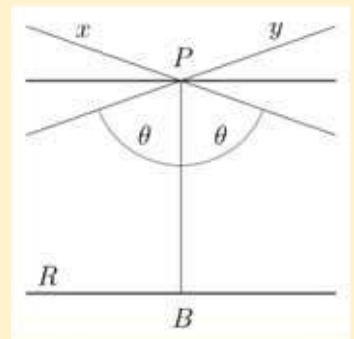
N. I. Lobatchevski ως πρότανης στο Kazan

Το έργο που τον οδήγησε στην αθανασία ήταν το *Exposition succincte de la Geometrie, avec une Demonstration rigoureuse de la Theorie des Paralleles* (Συνοπτική έκθεση των αρχών της Γεωμετρίας με μίαν αυστηράν απόδειξιν της θεωρίας των παραλλήλων), το οποίο αναγνώστηκε δημόσια στο Πανεπιστήμιο του στις 24 Φεβρουαρίου 1826.



Μία περίληψη αυτής της εργασίας με τίτλο «Επί των αρχών της Γεωμετρίας» δημοσιεύτηκε το 1929 στο περιοδικό “Αγγελιοφόρος του Kazan” και ήταν επαρκής για αποκαταστήσει βάσει χρονολογίας την προτεραιότητα του Lobatchevski έναντι του Janos Bolyai για την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Στη νέα Γεωμετρία που θεμελιώσε αντικατέστησε το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη με το λεγόμενο αίτημα Lobatchevski, δηλαδή από σημείο εκτός ευθείας άγονται άπειρες παράλληλες προς αυτή. Θεμελιώδης έννοια αυτού είναι η «γωνία παραλληλίας» θ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Όλες οι ευθείες που βρίσκονται μέσα στον κώνο που σχηματίζουν οι ευθείες x, y δεν τέμνουν την ευθεία R .



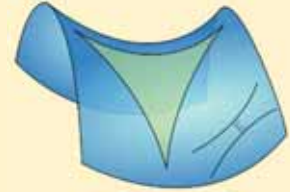
Σχήμα 1

Η γεωμετρία αυτή ονομάστηκε Υπερβολική Γεωμετρία ή Γεωμετρία Lobatchevski, στην οποία το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180° .

Η Υπερβολική Γεωμετρία μπορεί να υλοποιηθεί πάνω στην επιφάνεια ενός υπερβολικού παραβολοειδούς, η οποία έχει αρνητική καμπυλότητα. Ανεξάρτητα από τον Lobatchevski εργάστηκε και ο Ούγγρος μαθηματικός Janos Bolyai (1802-1860), ο οποίος θεωρείται συνιδρυτής της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Το 1830 κατέγραψε τις ανακαλύψεις του σε μια εργασία 26 σελίδων παράρτημα σε διδακτικό βιβλίο Γεωμετρίας.

Ο πατέρας του Bolyai, Farkas έστειλε ένα αντίγραφο της εργασίας στον φίλο του Gauss, ο οποίος αφού το διάβασε του απάντησε:

«...θεωρώ ότι αυτός ο νεαρός γεωμέτρης Bolyai είναι μια μεγαλοφυΐα πρώτου μεγέθους... Το να παινέσω αυτήν την εργασία, θα είναι σαν να επαινώ τον εαυτό μου. Όλο το περιεχόμενο της εργασίας, το μονοπάτι που πήρε ο γιος σου, τα αποτελέσματα στα οποία οδηγήθηκε, συνταυτίζονται με τις δικές μου σκέψεις οι οποίες απασχολούν το μυαλό μου για τα τελευταία 30 ή 35 χρόνια. Έτσι μένω έκπληκτος και χαρούμενος που ο γιος του παλιού μου φίλου με ξεπέρασε μ' αυτόν τον θαυμάσιο τρόπο».



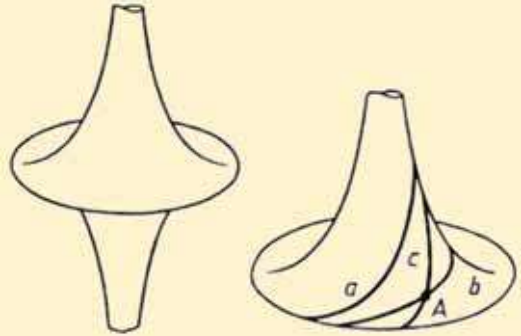
Σχήμα 2

Ο Gauss άρχισε να εργάζεται πάνω στο Αξίωμα της Παράλληλης το 1792, όταν ήταν μόλις 15 ετών. Το 1817 πείστηκε ότι το πέμπτο αξίωμα ήταν ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα τέσσερα και γράφει στον W. Olbers: «Πείθομαι όλο και περισσότερο ότι η αναγκαιότητα της γεωμετρίας μας (Ευκλείδεια) δεν μπορεί να αποδειχτεί, όχι τουλάχιστον από ανθρώπινη λογική ούτε για την ανθρώπινη λογική». Άρχισε να εργάζεται πάνω στις επιπτώσεις μιας γεωμετρίας στην οποία από σημείο εκτός ευθείας άγονται παραπάνω από μία παράλληλη προς τη δοθείσα ευθεία. Το 1824 έγραψε στον F. A. Taurinus:

«Η υπόθεση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180° με οδηγεί σε μια περίεργη γεωμετρία, αρκετά διαφορετική από τη δική μας... Μπορεί στο μέλλον αν έχω μεγαλύτερη άνεση από τις παρούσες συνθήκες να εκδώσω τις έρευνές μου».

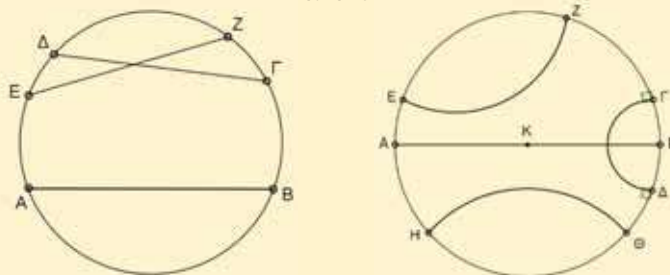
Τελικά ο Gauss ποτέ δεν δημοσίευσε τις έρευνές του φοβούμενος τις αντιδράσεις και εναρμονιζόμενος με τις κυρίαρχες αντιλήψεις της επιστημονικής κοινότητας, αλλά και της επικρατούσας φιλοσοφίας περί του κόσμου και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είχαν εκφραστεί και από τον μεγάλο φιλόσοφο Ι. Κάντ.

Το 1868 ο Eugenio Beltrami πρότεινε ένα μοντέλο για την Υπερβολική Γεωμετρία τη λεγόμενη ψευδοσφαίρα Beltrami, το οποίο συντέλεσε στην αποδοχή και διάδοση της Γεωμετρίας αυτής. Η ψευδοσφαίρα Beltrami, η οποία αποτελείται από δύο χοάνες (σχήμα 3α), μπορεί να προκύψει από την επίπεδη καμπύλη που καλείται έλκουςα με περιστροφή 360° γύρω από τον άξονα $y'y$.



Σχήμα 3. Ψευδοσφαίρα Beltrami

Τα σημεία και οι ευθείες βρίσκονται στην επιφάνεια της ψευδοσφαίρας η οποία έχει αρνητική καμπυλότητα. Αν δοθεί μια ευθεία στην επιφάνεια της τότε υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες προς αυτή (σχήμα 3β) και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180° . Τρία χρόνια αργότερα το 1871 ο Felix Klein πρότεινε ως μοντέλο ένα κυκλικό δίσκο, που ονομάστηκε δίσκος Klein. Σημεία θεωρούνται τα εσωτερικά σημεία του δίσκου και ευθείες οι χορδές του κύκλου χωρίς τα άκρα (σχήμα 4α).



Σχήμα 4. Δίσκος Klein και Δίσκος Poincare

Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα 4α υπάρχουν δύο τουλάχιστον παράλληλες ευθείες στην AB, οι ευθείες ΓΔ και ΕΖ. Ένα καλύτερο μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας αποτελεί ο **δίσκος Poincare** (σχήμα 4β). Είναι ένας κυκλικός δίσκος, σημεία θεωρούνται τα εσωτερικά σημεία του δίσκου και ευθείες οι διάμετροι του κύκλου και τα τόξα κύκλων που είναι κάθετα στον κυκλικό δίσκο. Στο σχήμα 4β ευθείες είναι η διάμετρος AB και τα τόξα ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ. Το μοντέλο του Poincare έχει ιστορική αξία γιατί με τη βοήθεια αυτού αποδείχθηκε η συνέπεια της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Εικοσιπέντε χρόνια αργότερα ο Bernhard Riemann (1826-1866) θεμελίωσε μία ακόμη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, την Ελλειπτική στην οποία από σημείο εκτός ευθείας δεν άγεται καμία παράλληλη και το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180° .

Το 1854 ο Riemann με την εργασία του *Ueber die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Επί των υποθέσεων εφ' ων στηρίζεται η Γεωμετρία), θεμελιώνει θεωρητικά και μία άλλη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία την Ελλειπτική. Η εργασία αυτή με προτροπή του Gauss δόθηκε υπό μορφή διάλεξης από τον Riemann για την



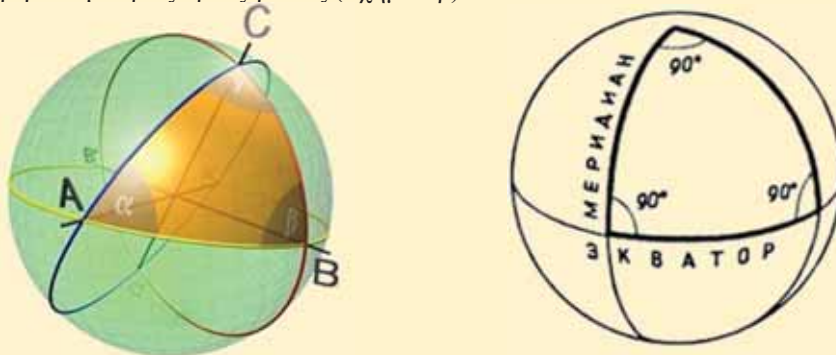
G. F. B. Riemann

υψηλότερη του στο πανεπιστήμιο του Göttingen, μπήκε στο αρχείο του πανεπιστημίου και δεν δημοσιεύτηκε ώστε να γίνει γνωστή στη μαθηματική κοινότητα. Έγινε ευρέως γνωστή όταν δημοσιεύτηκε από τον Dedekind 14 χρόνια αργότερα, το 1868, και δύο χρόνια μετά το θάνατό του Riemann. Ο Riemann δεν έδωσε συγκεκριμένο παράδειγμα, αλλά περισσότερο εστίασε στη μελέτη n -διάστατων χώρων και στην εύρεση μιας μετρικής τους. Επίσης συσχέτισε την καμπυλότητα χώρων με το άθροισμα γωνιών τριγώνου S στην επιφάνεια αυτών. Απέδειξε ότι αν η καμπυλότητα είναι σταθερή το άθροισμα S είναι 180° , αν η καμπυλότητα είναι αρνητική το άθροισμα S είναι μικρότερο από 180° , ενώ αν η καμπυλότητα είναι θετική το άθροισμα S είναι μεγαλύτερο από 180° .



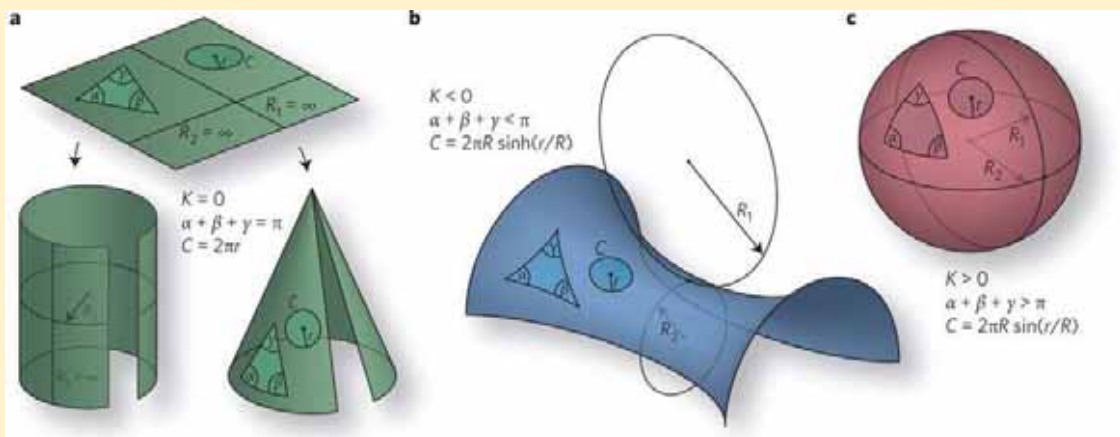
Αν η καμπυλότητα είναι μηδέν η περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r είναι $C = 2\pi r$, αν είναι θετική τότε $C = 2\pi r \cdot \eta(r/R)$ και αν είναι αρνητική τότε $C = 2\pi r \cdot \sinh(r/R)$, όπου R η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας πάνω στην οποία βρίσκεται ο κύκλος.

Η Ελλειπτική Γεωμετρία μπορεί να υλοποιηθεί πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, η οποία έχει θετική καμπυλότητα (σχήμα 5). Ευθείες θεωρούνται οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας, (αυτοί που έχουν κέντρο το κέντρο της σφαίρας), οι οποίες καλούνται γεωδαισιακές. Όλες λοιπόν οι ευθείες στην επιφάνεια μιας σφαίρας τέμνονται και το άθροισμα των γωνιών ενός γεωδαισιακού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180° . Μάλιστα αν θεωρήσει κανείς τη Γη και δύο μεσημβρινούς κάθετους στον Ισημερινό που τέμνονται στον Βόρειο Πόλο κάθετα θα σχηματιστεί ένα τρίγωνο με τρεις ορθές γωνίες (σχήμα 5β).



Σχήμα 5

Όταν το 1868 αποδείχθηκε τελικά η ανεξαρτησία του 5ου αιτήματος από τον Ιταλό μαθηματικό Eugenio Beltrami, είχαν ήδη ανακαλυφθεί οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και είχε συμπληρωθεί το κάδρο. Πλάι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία υπήρχαν οι δύο μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, η Υπερβολική και η Ελλειπτική (σχήμα 6).



Σχήμα 6

Η τελευταία πράξη του έργου των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών λαμβάνει χώρα το 1908. Τότε ο Γερμανός μαθηματικός Hermann Minkowski (1864-1909) θεμελιώνει τη χωροχρονική Γεωμετρία Minkowski, στην οποία στηρίζεται η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ) που διατύπωσε ο Albert Einstein το 1905.

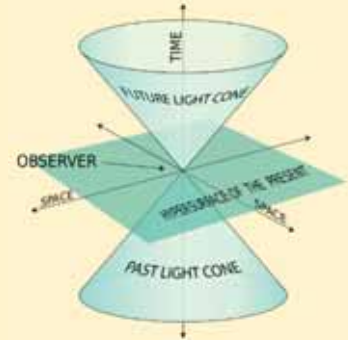
Ο Minkowski, καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Göttingen κατάλαβε ότι η ΕΘΣ του Einstein, ο οποίος υπήρξε μαθητής του στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης, θα μπορούσε να κατανοηθεί καλύτερα σε ένα τετραδιάστατο χώρο, αυτόν που αποκαλούμε σήμερα χωροχρόνο Minkowski.

Στον χωροχρόνο Minkowski ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι ανεξάρτητες οντότητες, αλλά συμπλέκονται σε ένα τετραδιάστατο χώρο, ο οποίος έχει τρεις χωρικές συντεταγμένες x , y , z και μία φανταστική χρονική

συντεταγμένη $\sqrt{-1} c \cdot t$, στον οποίο προσαρτάται η μετρική $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ και σχηματίζουν μια τετραδιάστατη τοπολογική πολλαπλότητα. Την χρονική συντεταγμένη με φανταστικό συντελεστή την εισήγαγε ο Γάλλος μαθηματικός Henri Poincare το 1906.

Έτσι λοιπόν ένας μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να θεωρηθεί ως μια στροφή των συντεταγμένων στον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο με τρεις πραγματικές συντεταγμένες, που αναπαριστούν τον χώρο και μια φανταστική συντεταγμένη, που παριστά τον χρόνο ως την τέταρτη συντεταγμένη. Επειδή έτσι ο χώρος είναι ψευδο-Ευκλείδειος χώρος, η στροφή παριστά μια υπερβολική στροφή.

Σύμφωνα με τον Minkowski ο χρόνος και χώρος πρέπει να έχουν ισάξια μεταχείριση και έτσι προκύπτει η έννοια των γεγονότων που λαμβάνουν μέρος σε ένα ενοποιημένο τετραδιάστατο χωροχρονικό συνεχές. Σε μια περαιτέρω ανάπτυξη ο Minkowski έδωσε μια εναλλακτική διατύπωση αυτής της ιδέας όπου δε χρησιμοποιούσε την φανταστική συντεταγμένη $\sqrt{-1} c \cdot t$, αλλά αναπαριστούσε τις τέσσερις μεταβλητές (x,y,z,t) του χώρου και του χρόνου, ως σύστημα τεσσάρων συντεταγμένων στον ομοπαράλληλο χώρο. Τα σημεία σε αυτόν το χώρο παριστούν γεγονότα στον χωροχρόνο. Στον χωροχρόνο ορίζεται ένας κώνος φωτός που σχετίζεται με κάθε σημείο και τα γεγονότα που βρίσκονται εκτός του κώνου φωτός χαρακτηρίζονται σχετικά με την κορυφή ως *χωρικά* ή *χρονικά* (σχήμα 7).



Σχήμα 7. Κώνος φωτός

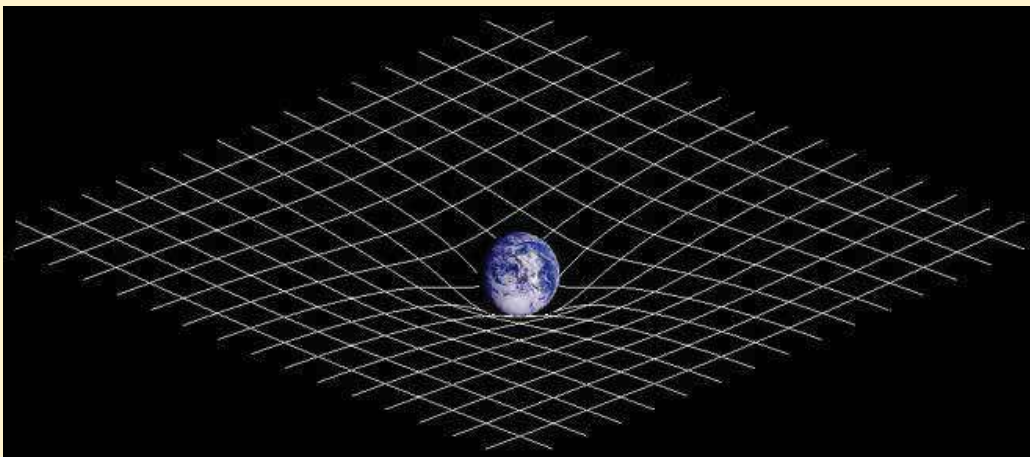
Ο κώνος φωτός που αναπαριστά τους μετασχηματισμούς Lorentz, για τον παρατηρητή (παρόν) και για γεγονότα τα οποία μπορούν να βρίσκονται μέσα στον κώνο και είναι δυνατόν να επηρεασθούν από τον παρατηρητή ή εκτός αυτού που είναι αδύνατο να επηρεασθούν από αυτόν.

Επιπροσθέτως όσα γεγονότα βρίσκονται "πάνω" από το επίπεδο του παρόντος γίνονται στο μέλλον, ενώ αυτά που βρίσκονται "κάτω" στο παρελθόν.

Η εργασία του Minkowski για τον χώρο και τον χρόνο παρουσιάστηκε στις 21 Σεπτεμβρίου 1908 στο 80^ο συνέδριο των Γερμανών φυσικών επιστημόνων και φυσικών. Η ομιλία του ξεκινά ως εξής:

Οι απόψεις του χώρου και του χρόνου τις οποίες σας παρουσιάζω, ξεπρόβαλλαν από το έδαφος της πειραματικής φυσικής και εκεί βρίσκεται η δύναμή τους. Είναι ριζοσπαστικές. Εφεξής ο χώρος και ο χρόνος από μόνοι τους, είναι καταδικασμένοι να εξασθενήσουν σε απλές σκιές και μόνο κάποιον είδους ενοποίηση των δύο θα επικρατήσει στην ανεξάρτητη πραγματικότητα.

Το επόμενο βήμα για τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες ήταν η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) που διατυπώθηκε από τον Einstein τον Νοέμβριο του 1915 στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου. Εκεί ο χωροχρόνος Minkowski καμπυλώνεται από την παρουσία μάζας και εκδηλώνεται ως βαρύτητα.



Βιβλιογραφία

- 1) Σωτήρης Γκουντουβάς, *Γεωμετρικές Διαδρομές*, Αθήνα 2021, Εκδόσεις Κορφιάτη.
- 2) Χρόνης Στράντζαλος, *Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και μη Ευκλείδειων Γεωμετριών*, Αθήνα 1989, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.
- 3) Donald Davis, *Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών*, Ηράκλειο 2005, ΠΕΚ.
- 4) Stephen Hawking, *Το χρονικό του χρόνου*, Αθήνα 1988, Εκδόσεις Κάτοπτρο.
- 5) Gino Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμος III, Αθήνα 1971, Εκδόσεις Ε.Μ.Ε – Παπαζήση.



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Είμαστε στον **21^ο αιώνα**, είμαστε στην εποχή της **τεχνητής νοημοσύνης**, που πλέον έχει μπει για τα καλά στη ζωή μας και είναι ένας σπουδαίος δάσκαλος και φίλος. Με την τεχνητή νοημοσύνη μπορούμε να συζητάμε, να ζητάμε πληροφορίες, να ρωτάμε τη γνώμη έχει για διάφορα θέματα. Μόνο μπάλα δεν μπορούμε να παίξουμε, όμως ξέρει να μας πει πως παίζετε το κάθε παιχνίδι. Ξέρει τα πάντα και συζητάει τα πάντα. Βέβαια λίγο με τους γρίφους δεν τα καταφέρνει, δοκιμάστε το.

— ΓΡΙΦΟΙ —



Τα Δύο Ρολόγια: Έχω δύο ρολόγια με δείκτες. Το ένα ρολόι χάνει 2 λεπτά κάθε ώρα, ενώ το άλλο κερδίζει 3 λεπτά κάθε ώρα. Αν και τα δύο δείχνουν σωστά την ώρα στις 12:00 το μεσημέρι, σε πόσες ώρες θα δείχνουν ξανά την ίδια ώρα; Πότε οι λεπτοδείκτες θα είναι στην ίδια θέση;

Λευκά και Μαύρα: Έχουμε δύο ίδια δοχεία. Στο ένα περιέχονται 50 λευκά μπαλάκια και στο άλλο 50 μαύρα. Με κλειστά τα μάτια θα πάρουμε ένα μπαλάκι από κάποιο δοχείο και εάν είναι λευκό κερδίζουμε το παιχνίδι, ενώ εάν είναι μαύρο χάνουμε. Έχουμε δικαίωμα από πριν να μετακινήσουμε όσα μπαλάκια θέλουμε από το ένα δοχείο στο άλλο, αφήνοντας όμως μέσα στα δύο δοχεία και τα 100 μπαλάκια. Πόσα μπαλάκια θα μετακινήσουμε ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα να πιάσουμε λευκό μπαλάκι;



Μαθητές φίλοι: Ποια είναι η πιθανότητα δύο μαθητές ενός σχολείου να έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων από τους μαθητές του ίδιου σχολείου;

Αγόρια και Κορίτσια: Στην πρώτη τάξη του Λυκείου τα κορίτσια ήταν διπλάσια από τα αγόρια. Μια μαθήτρια άλλαξε σχολείο και στη Β τάξη τα κορίτσια είναι ένα λιγότερα. Το γινόμενο του αριθμού των αγοριών επί τον αριθμό των κοριτσιών είναι 91. Πόσα είναι τα κορίτσια και πόσα τα αγόρια στη Β τάξη;



Η Γιορτή: Στην ονομαστική του εορτή ο Τάκης πήγε στους 10 φίλους του ένα κουτί με 58 σοκολατάκια. Όλοι έφαγαν διαφορετικό αριθμό σοκολατάκια. Πόσα έφαγε ο καθένας;

Ο Κωπηλάτης: Ένας κωπηλάτης σε ένα ποτάμι ξεκινά από μια θέση Α και πηγαίνει κόντρα στο ρεύμα του ποταμού για να πάει στη θέση Β. Τη στιγμή που ξεκινάει από τη θέση Α του πέφτει στο νερό το καπέλο του. Κωπηλατεί για 15 λεπτά κόντρα στο ρεύμα και τότε αντιλαμβάνεται ότι έχασε το καπέλο του. Αμέσως γυρνάει πίσω και σε 15 λεπτά βρίσκει το καπέλο του 7 χιλιόμετρα μακριά από το σημείο Α. Τι ταχύτητα έχει το ρεύμα του ποταμού;



Απαντήσεις των Γρίφων του προηγούμενου τεύχους 136

Το Παράξενο Ρολόι: Μπορούμε όλες τις ώρες, εκτός από τις ώρες που οι δείκτες αλλάζουν θέση αφού συναντηθούν.

Το Μισό της Μισής: Αν **Μ** είναι η μεγάλη πίτσα και **μ** η μικρή τότε $\mu = \frac{3M}{4}$. Άρα $\frac{M}{4} + 6 = \frac{1}{2} \times \frac{3M}{4}$ και $M=48$ κομμάτια. (Στην εκφώνηση να διορθωθεί η μεγάλη πίτσα «είναι 6 κομμάτια λιγότερα ...»)

Τα άλογα και οι Χήνες: Τα άλογα είναι $34:2=17$. Η απάντηση: τα κεφάλια επί 2 είναι 54 δηλαδή 17 άλογα και 10 χήνες. Πόδια τα άλογα $17 \times 4=68$ και οι χήνες $10 \times 2=20$, σύνολο 88 ($88-54=34$).

Το σκαλοπάτι: **Α)** Το σκαλοπάτι έχει ύψος $(38+10):2=24$ εκατοστά, γιατί $P+\Sigma-N=38$, $N+\Sigma-P=10$ προσθέτουμε κατά μέλη. **Β)** Ο Πέτρος είναι $(38-10):2=14$ εκ. πιο ψηλός από τη Ναταλία, γιατί $P+\Sigma-N=38$, $N+\Sigma-P=10$ (αφαιρούμε κατά μέλη ...).

Αναπτύσσοντας τον Εγκέφαλο: Πώς τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ενισχύουν τις γνωστικές δεξιότητες και τις ψυχικές ικανότητες

Βασιλική Χ. Βλαχοπούλου

Η ενασχόληση με τα Μαθηματικά είναι κάτι παραπάνω από μια απλή διαδικασία επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. Τα Μαθηματικά είναι μια ισχυρή **γλώσσα του νου**, η οποία όχι μόνο μας επιτρέπει να κατανοούμε και να περιγράφουμε τον κόσμο γύρω μας, αλλά και ενισχύει τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Έρευνες που αφορούν τη **νευροεπιστήμη** της μάθησης δείχνουν ότι η συστηματική ενασχόληση με τα Μαθηματικά ενισχύει μια σειρά από γνωστικές ικανότητες, αυξάνει την ευφυΐα, ενδυναμώνει τη μνήμη και προάγει τη **δημιουργικότητα**.

Αλλά πώς ακριβώς συμβαίνει αυτό; Ποια είναι τα οφέλη της μαθηματικής σκέψης στον εγκέφαλό μας και πώς επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και αλληλοεπιδρούμε με τον κόσμο;

Η Επίδραση της Μαθηματικής Σκέψης στον Εγκέφαλο

Η μαθηματική σκέψη, που περιλαμβάνει έννοιες όπως η αφαίρεση, η λογική και η επίλυση σύνθετων προβλημάτων, ενεργοποιεί πολλές περιοχές του εγκεφάλου. Κάθε μαθηματική δραστηριότητα ενισχύει τη νευροπλαστικότητα, τη δυνατότητα του εγκεφάλου να προσαρμόζεται και να δημιουργεί νέες συνδέσεις μεταξύ των νευρώνων, με αποτέλεσμα να ενεργοποιούνται περιοχές που δουλεύουν συντονισμένα και σχετίζονται με τη λογική σκέψη, την ανάλυση, τη μνήμη και την προσοχή. Ειδικότερα:

- Η περιοχή του **προμετωπιαίου φλοιού (Prefrontal Cortex)**, που είναι υπεύθυνη για την ανώτερη γνωστική επεξεργασία, όπως η λογική σκέψη, η λήψη αποφάσεων και η αναλυτική σκέψη, ενεργοποιείται όταν ασχολούμαστε με μαθηματικά προβλήματα που απαιτούν στρατηγική και προγραμματισμό.
- Ο **βρεγματικός φλοιός (Parietal Cortex)** είναι κρίσιμος για την κατανόηση αριθμών και ποσοτήτων και συνεργάζεται με άλλες περιοχές του εγκεφάλου για να διαχειριστεί τις έννοιες του χώρου και του χρόνου.
- Ο **ινιακός φλοιός (Occipital Cortex)**, αν και κυρίως υπεύθυνος για την επεξεργασία οπτικών πληροφοριών, συμμετέχει στην αναγνώριση μαθηματικών σχημάτων και στην οπτικοποίηση αριθμητικών δεδομένων, όπως σε γραφήματα ή γεωμετρικές μορφές.
- Ο **θαλαμικός πυρήνας (Thalamus)**, ο οποίος λειτουργεί ως ενδιάμεσος σταθμός για την επεξεργασία και την αναμετάδοση πληροφοριών μεταξύ διαφόρων περιοχών του εγκεφάλου, συνεισφέρει στην συντονισμένη επεξεργασία πληροφοριών και την ομαλή ροή των γνωστικών διεργασιών.
- Ο **υπόκαμπος (Hippocampus)**, παρόλο που είναι κυρίως υπεύθυνος για τη μνήμη και τη μάθηση, ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία απόκτησης νέας μαθηματικής γνώσης και της διατήρησης των μαθηματικών δεξιοτήτων.
- Η **κορυφή του λοβού του κροταφικού φλοιού (Temporal Lobe)** εμπλέκεται στην αναγνώριση και απομνημόνευση αριθμητικών δεδομένων και μαθηματικών κανόνων και είναι ενεργός όταν επεξεργαζόμαστε ακολουθίες αριθμών ή φράσεις που σχετίζονται με μαθηματικά.



Η ενεργοποίηση αυτών των περιοχών έχει συσχετιστεί με την ενίσχυση της **γνωστικής ευελιξίας**, της **συντονιστικής ικανότητας** και της **νοητικής ανθεκτικότητας**, ικανότητες που είναι θεμελιώδεις για τη διαρκή προσαρμογή και ανάπτυξη του ανθρώπου.

Η Σημασία της Λογικής Σκέψης και της Κριτικής Ανάλυσης

Τα Μαθηματικά δεν περιορίζονται μόνο σε ακριβείς υπολογισμούς ή σε απλές διαδικασίες. Η πραγματική αξία τους έγκειται στην **λογική σκέψη** και στην **ικανότητα ανάλυσης**. Η μαθηματική σκέψη απαιτεί από τον εγκέφαλο να κατανοεί έννοιες, να κάνει υποθέσεις και να ερμηνεύει δεδομένα με ακρίβεια. Ο εγκέφαλος, εξαιτίας αυτής της διαδικασίας, εκπαιδεύεται στο να βρίσκει σχέσεις αιτίου και αποτελέσματος, να προβλέπει συνέπειες και να συνθέτει λύσεις. Η ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων μέσω των μαθηματικών έχει ισχυρές επιπτώσεις και στην καθημερινή ζωή, διότι ενισχύει την **κριτική σκέψη** και τη **σωστή λήψη αποφάσεων**.

Τα Μαθηματικά είναι το εργαλείο που επιτρέπει στους ανθρώπους να σκέφτονται πέρα από τα προφανή, να συνθέτουν πληροφορίες από διάφορες πηγές και να προσεγγίζουν τα προβλήματα από διαφορετικές

οπτικές γωνίες. Οι μαθηματικοί αλγόριθμοι και τα μοντέλα προάγουν τη δυνατότητα ανάλυσης και σύνθεσης πληροφοριών σε διαρκώς εξελισσόμενα, δυναμικά περιβάλλοντα.

Βελτίωση της Μνήμης και της Νοητικής Ανθεκτικότητας

Η ενασχόληση με τα μαθηματικά έχει επίσης σημαντικά οφέλη στη **μνήμη**. Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων απαιτεί συχνά την απομνημόνευση δεδομένων και τύπων, τη σύνθεση διαφορετικών πληροφοριών και την οργάνωση αυτών των δεδομένων με βάση τις σχέσεις τους. Αυτή η διαδικασία έχει ως αποτέλεσμα την ενίσχυση της **μνήμης εργασίας** και την **ικανότητα αποθήκευσης νέων πληροφοριών**. Η αντιμετώπιση πολύπλοκων μαθηματικών προβλημάτων ενισχύει τη στρατηγική σκέψη και ενδυναμώνει την αντοχή του εγκεφάλου στην πίεση.

Τα μαθηματικά, επίσης, προάγουν την **μακροχρόνια μνήμη**, καθώς απαιτούν από τον εγκέφαλο να θυμάται και να ανακαλεί συχνά μαθηματικούς τύπους και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Η διαδικασία αυτή ενισχύει επίσης την **νοητική ανθεκτικότητα**, δηλαδή την ικανότητα του εγκεφάλου να παραμένει λειτουργικός και ενεργός, παρά τις αντιξοότητες ή τις δυσκολίες. Έρευνες δείχνουν ότι η τακτική άσκηση της μνήμης μέσω μαθηματικών προβλημάτων ή παιχνιδιών μπορεί να ενισχύσει την πνευματική υγεία των ηλικιωμένων και να μειώσει τον κίνδυνο εμφάνισης νευρολογικών παθήσεων, όπως η άνοια ή η νόσος του Αλτσχάιμερ.

Ανάπτυξη Συγκέντρωσης και Προσοχής

Η μαθηματική σκέψη απαιτεί υψηλό επίπεδο **συγκέντρωσης** και **προσοχής**. Καθώς επιλύουμε μαθηματικά προβλήματα, καλούμαστε να επικεντρωθούμε σε πολλαπλές παραμέτρους ταυτόχρονα και να εντοπίσουμε τα κλειδιά της λύσης. Αυτή η εντατική συγκέντρωση έχει μακροχρόνια οφέλη στον εγκέφαλο, διότι τον εξασκεί στην ικανότητα να διαχειρίζεται και να επεξεργάζεται πληροφορίες σε υψηλό επίπεδο. Οι περιοχές του εγκεφάλου που σχετίζονται με τη διαχείριση της προσοχής, όπως ο **μετωπιαίος φλοιός**, ενισχύονται μέσω αυτής της διαδικασίας, κάνοντάς μας πιο ικανούς να παραμένουμε συγκεντρωμένοι και προσηλωμένοι σε στόχους, τόσο σε μαθηματικά καθήκοντα όσο και σε άλλες δραστηριότητες.



Ψυχολογικά Οφέλη και Προσωπική Ανάπτυξη

Η ενασχόληση με τα μαθηματικά ενισχύει την **αυτοεκτίμηση** και την **αυτοπεποίθηση**, καθώς η επίλυση ενός δύσκολου μαθηματικού προβλήματος προσφέρει στον εγκέφαλο μια αίσθηση **ικανοποίησης** και **επιτυχίας**. Αυτή η αίσθηση επιτυχίας μπορεί να ενισχύσει τη θετική ψυχολογική κατάσταση και να αυξήσει τη συνολική ευημερία. Το αίσθημα της ικανοποίησης που προκύπτει στους μαθητές που ενθαρρύνονται να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά ως πρόκληση και όχι ως απογοήτευση, είναι ιδιαίτερα ισχυρό και ενεργοποιεί περιοχές του εγκεφάλου που σχετίζονται με τη μνήμη και την ανταμοιβή, όπως ο **αισθητηριακός φλοιός** και η **μέσα νησιωτική περιοχή** με αποτέλεσμα να τους οδηγεί σε αυξημένο κίνητρο για μάθηση και αυτοβελτίωση.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι τα μαθηματικά προάγουν τη **δημιουργικότητα**. Αν και φαίνονται να είναι μια αυστηρή και «λογική» πειθαρχία, στην πραγματικότητα, τα μαθηματικά απαιτούν από τους ανθρώπους να σκεφτούν με μη παραδοσιακούς τρόπους, να πειραματιστούν με διαφορετικές λύσεις και να δημιουργήσουν νέες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Αυτή η διαδικασία ενδυναμώνει την δημιουργική σκέψη και φαντασία.

Συμπέρασμα

Τα Μαθηματικά, αν και συχνά θεωρούνται ως μια αμιγώς «λογική» επιστήμη, έχουν βαθιές και πολύπλευρες επιδράσεις στον ανθρώπινο εγκέφαλο και την προσωπική ανάπτυξη. Από την παιδική ηλικία, με τη χρήση παζλ και κατασκευών (τουβλάκια LEGO), μέχρι την τρίτη ηλικία, η ενασχόληση με τα μαθηματικά ενισχύει τις γνωστικές μας ικανότητες, βελτιώνει τη μνήμη, ενισχύει τη συγκέντρωση και τη λογική σκέψη, ενώ παράλληλα προσφέρει σημαντικά ψυχολογικά και συναισθηματικά οφέλη. Με την **εξάσκηση** στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ο εγκέφαλος αποκτά μεγαλύτερη ανθεκτικότητα, δημιουργικότητα και ικανότητα να ανταπεξέρχεται στις προκλήσεις της καθημερινής ζωής. Τα Μαθηματικά δεν είναι απλώς ένα εργαλείο για την επιστημονική πρόοδο· είναι, στην πραγματικότητα, μια εκπαιδευτική διαδικασία που ενισχύει τη νοητική ευελιξία και συμβάλλει στην **προσωπική και ψυχική ανάπτυξη**.

Βιβλιογραφία

1. Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford University Press
2. Gazzaniga, M. S., Ivry, R., & Mangun, G. R. (2018). *Cognitive Neuroscience: The Biology of the Mind* (5th ed.). W. W. Norton & Company.
3. Miller, K. L., & Rustichini, A. (2004). *Mathematical Thinking and Problem Solving: Cognitive and Neurobiological Perspectives*. Cambridge University Press.
4. Butterworth, B. (2011). How and why is mathematics so important for the human brain? *Trends in Cognitive Sciences*, 15(6), 248-254.
5. Menon, V., & Bhattacharjee, M. (2013). Neurodevelopmental and Neuroplasticity Processes in Mathematical Learning and Reasoning. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, 37(3), 474-482.
6. Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the “number sense”: The approximate number system in 3- to 5-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44(5), 1457-1465.
7. Kaufman, A. S., & Kaufman, N. L. (2014). Mathematical Cognition and the Brain. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 26(5), 1181-1194.
8. Reyna, V. F. (2004). How People Make Decisions That Involve Risk: A Dual Process Model of Decision Making. *Psychological Science*, 15(3), 176-184.
9. Reynolds, C. R., & Fletcher-Janzen, E. (2006). *Handbook of Neuropsychology and Education*. Springer.
10. Anderson, M. L. (2007). How Cognitive Science Can Help Us Understand the Brain. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19(7), 1056-1071.
11. Ansari, D. (2008). Neurocognitive Development of the Number Sense and Its Implications for Mathematical Learning. *Current Directions in Psychological Science*, 17(1), 39-43.

Έφυγε από κοντά μας: + ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΕΞΑΡΧΑΚΟΣ (1937-2025)

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία με μεγάλη θλίψη αποχαιρετά τον Θεόδωρο Εξαρχάκο (1937-2025).



Ο Θεόδωρος Εξαρχάκος ήταν από τα πιο **δραστήρια μέλη** της ΕΜΕ και είχε υπηρετήσει τους στόχους της ως απλό μέλος, μέλος συντακτικών Επιτροπών, οργανωτικών και επιστημονικών Επιτροπών συνεδρίων, μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ. Γεννήθηκε στον Πύργο Δυρού το 1937 και τελείωσε το Γυμνάσιο του Γυθείου. Το 1964 πήρε το πτυχίο του μαθηματικού από το Πανεπιστήμιο Αθηνών και στη συνέχεια ακολούθησε μεταπτυχιακές σπουδές με διάκριση στα **θεωρητικά Μαθηματικά** στο Λονδίνο, (Royal Holloway College), όπου και αναγορεύτηκε διδάκτορας.

Δίδαξε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στο Τμήμα Στατιστικής και Πληροφορικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών και στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του ΕΚΠΑ.

Διετέλεσε Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του ΕΚΠΑ και πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (1996-2000) όπου συνέβαλε στη διαμόρφωση των Παιδαγωγικών Τμημάτων όλων των Πανεπιστημίων της χώρας, μετατρέποντάς τα από **Παιδαγωγικές Ακαδημίες** σε **σύγχρονα πανεπιστημιακά τμήματα**. Οραματίστηκε και υλοποίησε με επιτυχία την ακαδημαϊκή και επαγγελματική **αναβάθμιση των δασκάλων** στην Ελλάδα και στην Κύπρο και **αγωνίστηκε** με επιμονή και συνέπεια για την **ποιοτική μεταπτυχιακή τους εκπαίδευση**. Εμπνεύστηκε και δημιούργησε -για πρώτη φορά στην Ελλάδα- το **Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών** (ΕΠΠΣ) από το Νηπιαγωγείο μέχρι και το Λύκειο και υποστήριξε τη συγγραφή και την αναβάθμιση πολλών σχολικών βιβλίων και ιδιαίτερα στα Μαθηματικά. **Δημιούργησε** τα **Σχολεία Εφαρμογής Πειραματικών Προγραμμάτων Εκπαίδευσης** (ΣΕΠΠΕ) και ίδρυσε σε όλους τους νομούς της χώρας, Κέντρα και Γραφεία **Επαγγελματικού Προσανατολισμού**.

Έχει δημοσιεύσει πάνω από 60 επιστημονικές και ερευνητικές εργασίες σε διεθνή περιοδικά υψηλού κύρους, καθώς και ένα μεγάλο αριθμό επιστημονικών εργασιών, μελετών και άρθρων σε περιοδικά του εξωτερικού και του εσωτερικού και σε πρακτικά συνεδρίων. Έχει γράψει **14 βιβλία** που αναφέρονται στα Μαθηματικά, στην ιστορία των Μαθηματικών και στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής του πορείας, τού έγιναν αρκετές τιμητικές διακρίσεις, του απενεμήθησαν τιμητικά διπλώματα, τιμητικές πλακέτες και ψηφίσματα, καθώς και διεθνή βραβεία.

Εκλέχθηκε μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ για τη διετία 1979 -1981 και στη συνέχεια Β΄ Αντιπρόεδρος (1981-1983), Α΄ Αντιπρόεδρος (1985-87) και μέλος (1989-1991). Διετέλεσε πρόεδρος του ΔΣ το (1987-1989) και το (2005-2007).

Ήταν μέλος του Editorial Board του Bulletin of the Greek Mathematical Society μέχρι το 1992, μέλος της Συντακτικής Επιτροπής της Μαθηματικής Επιθεώρησης. Πρόεδρος και μέλος των Οργανωτικών και επιστημονικών επιτροπών των Πανελληνίων Συνεδρίων Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ, κεντρικός ομιλητής σε αυτά και ομιλητής στα στρογγυλά τραπέζια. Ήταν ομιλητής σε μεγάλο αριθμό ημερίδων σε όλη την Ελλάδα που διοργάνωσε το **Κέντρο Αξιολόγησης** και Επιμόρφωσης της ΕΜΕ.

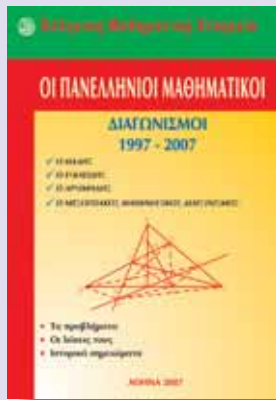
Ως Πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.) συνέβαλε ώστε να δημιουργηθούν η Βαλκανική Ολυμπιάδα Μαθηματικών και το **Βαλκανικό Σχολείο**, επίσης, ήταν πρόεδρος της Οργανωτικής Επιτροπής της **1ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας**.

Προσέφερε στην ΕΜΕ το σύνολο των αντιτύπων του βιβλίου το «Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα Μαθηματικά των Αρχαίων Πολιτισμών».

Πέρα όμως από το έργο και τις ακαδημαϊκές του διακρίσεις, **θα τον θυμόμαστε για το ήθος, την ευγένεια, την απλότητα, την καλοσύνη, την αφοσίωση, την προσφορά του και την αληθινή του και έμπρακτη αγάπη για τον εκπαιδευτικό κόσμο.**

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Προσφορές

Διαγωνισμοί



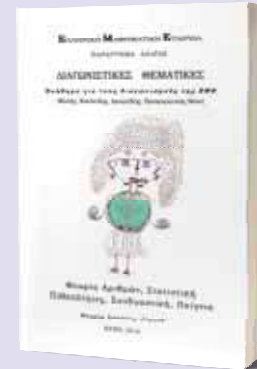
Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Βιβλία της ΕΜΕ



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 20€

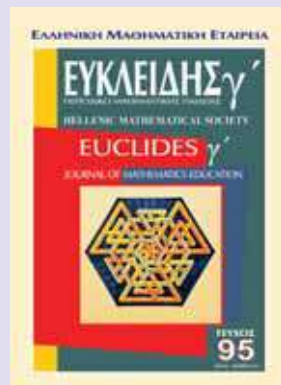


Τιμή βιβλίου: 15€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr