

Πορεία οικοδόμησης της έννοιας της ομοιότητας στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο: ο θεσμικός λόγος στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα

Παναγιώτα Κασκαούτη

Υποψήφια διδακτόρισα, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης,
Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών
jkaskaouti@primedu.uoa.gr

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος

Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης,
Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών
moutsiosrent@primedu.uoa.gr

Περίληψη

Η έννοια της ομοιότητας αποτελεί μια θεμελιώδη γεωμετρική έννοια με σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του γεωμετρικού και αναλογικού συλλογισμού των μαθητών και των μαθητριών. Στην παρούσα μελέτη, η ομοιότητα ορίζεται μαθηματικά ως μετασχηματισμός του επιπέδου και στη συνέχεια εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο η ομοιότητα εισάγεται και αναπτύσσεται στο ελληνικό εκπαιδευτικό πλαίσιο, με βάση το νέο Πρόγραμμα Σπουδών του Δημοτικού και του Γυμνασίου και τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια. Η μελέτη δείχνει ότι ήδη από το Δημοτικό παρέχονται οι πρώτες εμπειρικές βάσεις μέσα από μαθηματικά έργα μετασχηματισμών που καλλιεργούν τη χωρική αντίληψη και την πολλαπλασιαστική σκέψη. Στο Γυμνάσιο, η μελέτη της έννοιας συστηματοποιείται με ρητή εισαγωγή της έννοιας μέσα από κριτήρια ομοιότητας και αποδεικτικές διαδικασίες.

Λέξεις κλειδιά: ομοιότητα, Πρόγραμμα Σπουδών, σχολικά εγχειρίδια, Δημοτικό, Γυμνάσιο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ομοιότητα επιπέδων σχημάτων στα Μαθηματικά αποτελεί μια θεμελιώδη έννοια με ιδιαίτερο διδακτικό, μαθησιακό και ερευνητικό ενδιαφέρον, καθώς συνδέεται τόσο με αριθμητικούς, όσο και με γεωμετρικούς συλλογισμούς. Οι Mbatha και Bansilal (2023) αναφέρουν ότι για την κατανόηση της έννοιας απαιτείται η ανάπτυξη ενός γεωμετρικού συλλογισμού που ξεκινάει από την οπτική αναγνώριση των σχημάτων (για παράδειγμα, ένα σχήμα φαίνεται να είναι η μεγέθυνση ή η σμίκρυνση ενός άλλου) και εκτείνεται στον τυπικό παραγωγικό συλλογισμό (για παράδειγμα, ένα άτομο κατανοεί τις ελάχιστες συνθήκες ώστε δύο σχήματα να είναι όμοια και μπορεί να κατασκευάσει μια αντίστοιχη απόδειξη). Ταυτόχρονα, απαιτείται και η ανάπτυξη του (μαθηματικού) αναλογικού συλλογισμού (proportional reasoning)¹ που περιλαμβάνει αλληλουχίες λογικομαθηματικών σκέψεων που βασίζονται σε μια συνειδητή ανάλυση των σχέσεων πολλαπλασιασμού ανάμεσα στις ποσότητες ή στα μεγέθη, ξεπερνώντας τα στενά όρια του μηχανικού χαρακτήρα εφαρμογής κανόνων (Lamon, 2020).

Πολλά παιδιά φτάνουν στο σχολείο με πλούσιες εμπειρίες που αρχικά ενισχύουν τη διαισθητική τους ικανότητα να προσεγγίσουν την έννοια της ομοιότητας, καθώς παίζουν με παιχνίδια μινιατούρες, κατασκευάζουν αντικείμενα υπό κλίμακα, μεγεθύνουν εικόνες (Cox, 2013). Όμως, τα ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι όχι μόνο τα παιδιά, αλλά ακόμα και οι εκπαιδευτικοί (μελλοντικοί και εν ενεργεία) συναντούν γνωστικά εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας (βλ. ενδεικτικά Arıcan & Özçakir, 2021· Biber, 2020).

Με δεδομένο ότι το Πρόγραμμα Σπουδών, αλλά και τα επίσημα σχολικά εγχειρίδια ενός μαθήματος, είναι βασικά εργαλεία συντονισμού των διαδικασιών της μάθησης και της διδασκαλίας του (Glasnovic Gracin, 2018· Καφούση, 2024), στο παρόν άρθρο επιχειρείται η αποτύπωση του τρόπου με τον οποίο η έννοια της ομοιότητας εισάγεται και εξελίσσεται στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο μέσα από τον θεσμικό λόγο του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, με αναφορά τόσο στα νέα Προγράμματα Σπουδών όσο και τα σχολικά εγχειρίδια των αντίστοιχων βαθμίδων της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Αρχικά, θα παρουσιαστεί μια εννοιολογική χαρτογράφηση της

¹ Ο όρος (μαθηματικός) αναλογικός συλλογισμός (proportional reasoning) διακρίνεται από τον αναλογικό συλλογισμό (analogical reasoning), για τον λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε ο προσδιορισμός της παρένθεσης σε συμφωνία με Μοδέστου (2007). Εφεξής ο προσδιορισμός θα παραλείπεται.

ομοιότητας ως μαθηματικής έννοιας στα σχολικά Μαθηματικά. Στη συνέχεια, θα αναλυθεί ο τρόπος εισαγωγής και εξέλιξης της έννοιας αυτής στο νέο ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Τέλος, θα παρουσιαστεί μια κριτική επισκόπηση ενός μικρού μέρους των μαθηματικών έργων των σχολικών εγχειριδίων του Δημοτικού και του Γυμνασίου που αναφέρονται στην ομοιότητα και φαίνεται να ευθυγραμμίζονται με τις γνωστικές απαιτήσεις για την κατανόηση της έννοιας, όπως αυτές περιγράφονται στο Πρόγραμμα Σπουδών.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η ομοιότητα αποτελεί μία θεμελιώδη γεωμετρική σχέση μεταξύ σχημάτων στο επίπεδο, η οποία προκύπτει μέσω των μετασχηματισμών της ομοιοθεσίας και της ισομετρίας (μετατόπιση/μεταφορά, στροφή, ανάκλαση/συμμετρία), και των μεταξύ τους συνθέσεων. Στη γεωμετρία, ένας μετασχηματισμός περιγράφει τη σχέση μεταξύ ενός σημείου και ενός άλλου σημείου (που ονομάζεται εικόνα του αρχικού), δηλαδή τον τρόπο αντιστοίχισής του σε ένα άλλο σημείο. Στο πλαίσιο της γεωμετρίας, ένας μετασχηματισμός σχήματος συνεπάγεται μεταβολή της θέσης του στο καρτεσιανό επίπεδο (εκτός αν πρόκειται για ταυτοτικό μετασχηματισμό στον οποίο η θέση δεν αλλάζει). Οι μετασχηματισμοί που διατηρούν το σχήμα και το μέγεθος του αρχικού γεωμετρικού αντικειμένου ονομάζονται ισομετρίες. Διαφορετικά, οι μετασχηματισμοί ονομάζονται μη-ισομετρικοί (βλ. ενδεικτικά Judson, 2012· Mashingaidze, 2012).

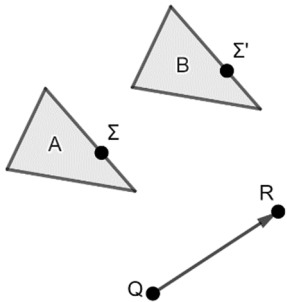
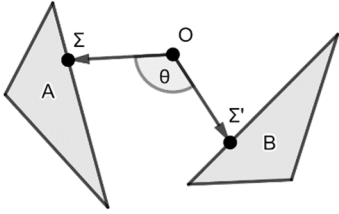
Η εμπλοκή με μαθηματικά έργα γεωμετρικών μετασχηματισμών συμβάλλει στη δόμηση βαθύτερων οπτικοχωρικών και αναπαραστατικών ικανοτήτων, οι οποίες είναι θεμελιώδεις για την ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης. Οι Χιστούρι κ.ά. (2014) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες που εμπλέκονται με έργα μετασχηματισμών μπορούν να αναπτύξουν προοδευτικά ικανότητες όπως η οπτικοποίηση και η χωρική αντίληψη, ενώ – παράλληλα – ο τρόπος σκέψης τους παρουσιάζει χαρακτηριστικά μετάβασης από τη διαισθητική, εμπειρική γεωμετρία προς πιο αφηρημένες και συστηματικές μορφές γεωμετρικού συλλογισμού. Οι δεξιότητες αυτές ενισχύουν την ευελιξία αναπαράστασης και τη δυνατότητα κατανόησης της γεωμετρίας ως συστήματος σχέσεων και μετασχηματισμών.

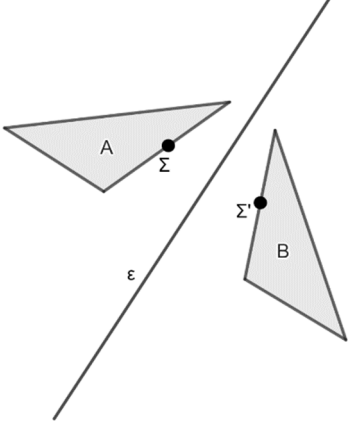
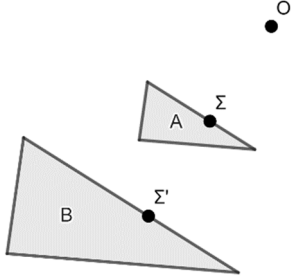
Η μελέτη των μετασχηματισμών αποτελεί βασικό στοιχείο στα περισσότερα Προγράμματα Σπουδών διεθνώς (Hollebrands, 2003), καθώς (α) δίνει στους μαθητές και τις μαθήτριες τη δυνατότητα να εμβαθύνουν σε θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες (όπως, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις και η

συμμετρία), (β) λειτουργεί ως γνωστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να αντιληφθούν τα Μαθηματικά ως ένα συνεκτικό δίκτυο εννοιών, και (γ) δημιουργεί ευκαιρίες ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να αναπτύξουν ανώτερης μορφής συλλογισμούς μέσω της χρήσης ποικίλων αναπαραστάσεων.

Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας ορίζεται ως εξής: δεδομένου ενός σχήματος στο επίπεδο, ένα δεύτερο σχήμα είναι όμοιο με το πρώτο όταν προκύπτει από μετατόπιση ή/και στροφή ή/και ανάκλαση ή/και ομοιοθεσία. Η μετατόπιση ορίζεται από ένα διάνυσμα, η στροφή από ένα σημείο και μια γωνία, η ανάκλαση από μια ευθεία και η ομοιοθεσία από ένα σημείο και έναν συντελεστή (λόγο) (Yao & Manouchehri, 2019). Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται αυτοί οι μετασχηματισμοί ως απεικονίσεις σημείων, καθώς και αντίστοιχα παραδείγματα.

Πίνακας 1. Οι μετασχηματισμοί της μετατόπισης, της στροφής, της ανάκλασης και της ομοιοθεσίας.

Μετασχηματισμός	Παράδειγμα
<u>Μετατόπιση του σχήματος A ως προς το διάνυσμα $\overrightarrow{QR}$</u>: Στο καρτεσιανό επίπεδο, αν $\overrightarrow{QR}=(a,b)$, τότε κάθε σημείο $\Sigma(x,y)$ του σχήματος A αντιστοιχίζεται στο σημείο $\Sigma'(x+a,y+b)$ του σχήματος B.	
<u>Στροφή του σχήματος A ως προς σημείο O και γωνία θ</u>: Αν O ένα σημείο και θ μια γωνία, τότε κάθε σημείο Σ του σχήματος A αντιστοιχίζεται στο σημείο Σ' του σχήματος B έτσι ώστε $\widehat{\Sigma O \Sigma'} = \theta$ και $O\Sigma = O\Sigma'$.	

<u>Ανάκλαση του σχήματος A ως προς την ευθεία ε</u>: Αν ε μια ευθεία, τότε για κάθε σημείο Σ του σχήματος A ισχύει η ακόλουθη αντιστοιχία: α) αν το Σ ανήκει στην ε τότε αντιστοιχίζεται στο ίδιο το Σ και β) αν το Σ δεν ανήκει στην ε τότε αντιστοιχίζεται στο σημείο Σ' έτσι ώστε η ε να είναι μεσοκάθετος του ΣΣ'.	
<u>Ομοιοθεσία του σχήματος A ως προς το σημείο O και λόγο k</u>: Αν O σημείο και πραγματικός αριθμός $k \neq 0$, τότε κάθε σημείο Σ του σχήματος A αντιστοιχίζεται στο σημείο Σ' του σχήματος B, έτσι ώστε $\overrightarrow{O\Sigma'} = k \cdot \overrightarrow{O\Sigma}$.	

Η ομοιότητα είναι ένας μετασχηματισμός s που μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση μιας ομοιοθεσίας h και μιας ισομετρίας f (ή περισσοτέρων), δηλαδή:

$$s = h \circ f,$$

η οποία ομοιότητα s αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος σημείων $\{A, B\}$ στο επίπεδο μοναδικό ζεύγος σημείων $\{A', B'\}$, ώστε

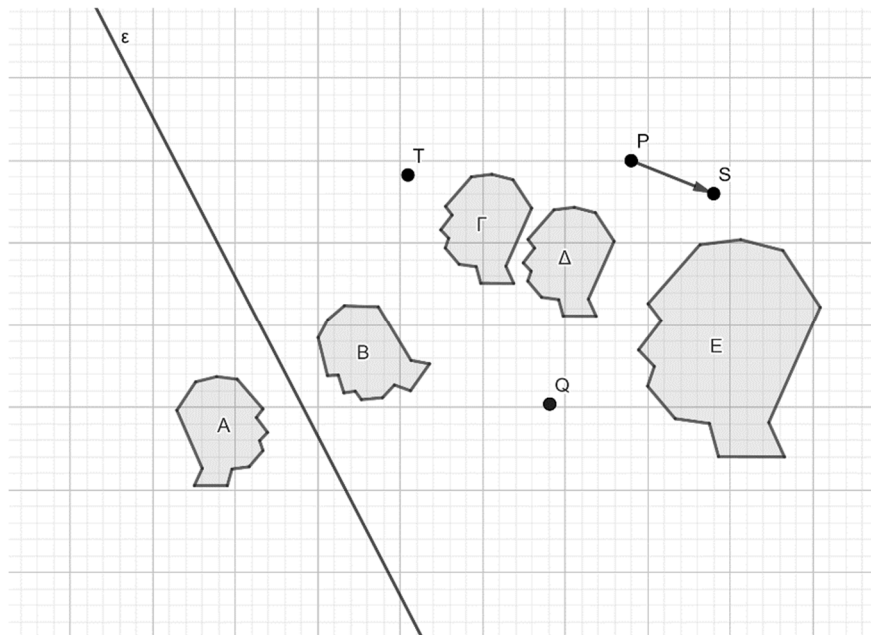
$$s(\{A, B\}) \rightarrow \{A', B'\} \text{ και } |A'B'| = k \cdot |AB|, k > 0.$$

Ο σταθερός αριθμός k ονομάζεται λόγος ομοιότητας. Όταν $k=1$, τότε πρόκειται για την περίπτωση της ισότητας.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1, το σχήμα A μετασχηματίζεται στο σχήμα E, ενώ υπόκειται με την ακόλουθη σειρά στους μετασχηματισμούς:

- ανάκλαση ως προς την ευθεία ε (το σχήμα A μετασχηματίζεται στο σχήμα B)·

- στροφή 55° με τη φορά του ρολογιού ως προς το σημείο Q (το σχήμα B μετασχηματίζεται στο σχήμα Γ)·
- μετατόπιση ως προς το διάνυσμα $\overrightarrow{PS}$ (το σχήμα Γ μετασχηματίζεται στο σχήμα Δ)·
- ομοιοθεσία με λόγο 2 ως προς το σημείο T (το σχήμα Δ μετασχηματίζεται στο σχήμα E).



Σχήμα 1. Τα σχήματα A και E είναι όμοια.

Η παραπάνω μαθηματική αντίληψη για την ομοιότητα περιγράφει την έννοια ως συνάρτηση που αντιστοιχεί σημεία του επιπέδου σε σημεία του επιπέδου, και τα γεωμετρικά αντικείμενα που μετασχηματίζονται νοούνται ως υποσύνολα του επιπέδου. Ωστόσο, ένα σημαντικό πλήθος των μαθητών και των μαθητριών όλων των βαθμίδων, αλλά και των μελλοντικών και εν ενεργεία εκπαιδευτικών τείνουν να αντιλαμβάνονται το επίπεδο ως ένα αόρατο φόντο και τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ως κινήσεις αντικειμένων που *κείτονται* πάνω στο επίπεδο (Edwards, 2003). Από άποψη διδακτικής, μια τέτοια αντίληψη που περιγράφει τον γεωμετρικό μετασχηματισμό ως κίνηση μπορεί να θεωρηθεί χρήσιμη και πιθανότατα απαραίτητη για την υποστήριξη της οπτικοποίησης, της διαισθητικής

κατανόησης και της γλωσσικής περιγραφής των μετασχηματισμών (Edwards, 2003· Hegg κ.ά., 2018).

ΤΑ (ΝΕΑ) ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Η ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΝΕΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) αποτελεί την κύρια οργανωτική δομή στη βάση της οποίας παρέχονται οι εκπαιδευτικές ευκαιρίες στους μαθητές και τις μαθήτριες και διαμορφώνονται οι τρόποι που αξιοποιούν τις ευκαιρίες αυτές (Mullis, 2019). Μπορεί να νοηθεί τόσο ως προϊόν, όσο και ως διαδικασία: ως προϊόν περιλαμβάνει το σύνολο των θεμάτων και οδηγιών που καθορίζουν τι πρέπει να διδαχθεί, ενώ ως διαδικασία περιγράφει τη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και μαθητριών, εκπαιδευτικών και γνώσης, αποκαλύπτοντας ένα σημαντικό μέρος του τι πραγματικά συμβαίνει μέσα στην τάξη (Cai & Howson, 2013).

Η παραπάνω διάκριση καθίσταται πιο ουσιαστική όταν το ΠΣ ιδωθεί ως ένα σύστημα με διαφορετικά επίπεδα έκφρασης στην εκπαιδευτική πραγματικότητα. Μέσα από τις πολλαπλές εκδοχές του, όπως αυτές αναδύονται στην εκπαιδευτική πράξη, αναγνωρίζονται τρεις πτυχές του ΠΣ: (α) το θεσμοθετημένο ΠΣ (official/intended) που εκφράζει τους στόχους και τις προθέσεις της εκπαιδευτικής πολιτικής και καθορίζει τι πρέπει να διδαχθεί, (β) το εφαρμοσμένο ΠΣ (implemented/enacted/curriculum in action) που αφορά τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί μεταφράζουν και εφαρμόζουν αυτές τις προθέσεις στη διδακτική πράξη, και (γ) το επιτευχθέν (attained/experienced/learned) που αναφέρεται στις γνώσεις, τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών και των μαθητριών όπως αυτές καταγράφονται στις επιδόσεις τους στις διαφορετικού τύπου αξιολογήσεις (Καφούση, 2024· Mullis, 2019).

Το ΠΣ λειτουργεί ως μαθησιακός και διδακτικός πυλώνας που (α) οριοθετεί τους μαθησιακούς στόχους και περιγράφει τα επίπεδα συλλογισμού των μαθητών και των μαθητριών σε συγκεκριμένες γνωστικές περιοχές ώστε να επιτευχθούν οι στόχοι σε κάθε επίπεδο της εξελικτικής πορείας της σκέψης (τροχιά μάθησης· Clements & Sarama, 2025), (β) συμβάλλει στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών και των μαθητριών ενισχύοντας τη συνεκτικότητα της γνώσης (κατακόρυφη και οριζόντια· Schmidt κ.ά., 2005) (γ) θέτει σαφείς στόχους αξιολόγησης (τόσο διαμορφωτικά, όσο και συνολικά) που καθοδηγούνται από τους μαθησιακούς στόχους (Santos & Cai, 2016), (δ) καλλιεργεί τις κοινωνικές και πολιτισμικές ικανότητες των μαθητών και των

μαθητριών δίνοντάς τους την πρόσβαση σε παραδόσεις που ξεπερνούν τα καθημερινά τους βιώματα (Young, 2014), (ε) βοηθά τον εκπαιδευτικό και την εκπαιδευτικό να αποφασίσει ως προς τα διδακτικά εργαλεία και τις πρακτικές που θα χρησιμοποιήσει (Remillard, 2005), (στ) συμβάλλει στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών ενισχύοντας την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (Ball κ.ά., 2008).

Έτσι, το ΠΣ ενός μαθήματος αποτελεί θεμελιώδη άξονα της εκπαιδευτικής διαδικασίας, καθορίζοντας όχι μόνο το *τι* θα διδαχθεί, αλλά και *πώς*, *πότε* και *γιατί*. Μαζί με τα εκπαιδευτικά υλικά αποτελούν τη “*materia medica*” της διδασκαλίας, δηλαδή το σύνολο των διδακτικών μέσων και στρατηγικών που διαθέτει ο εκπαιδευτικός και η εκπαιδευτικός για να διαχειριστεί τη μαθησιακή διαδικασία και, ως τούτου, οι αντίστοιχες γνώσεις συμβάλλουν στις κατάλληλες διδακτικές επιλογές ανάλογα με τις ιδιαίτερες συνθήκες της τάξης (Shulman, 1986).

Χωρίς το μάθημα των Μαθηματικών να αποτελεί εξαίρεση, η δομή και το περιεχόμενο του ΠΣ, αλλά και ο τρόπος ερμηνείας και αξιοποίησής του από τον εκπαιδευτικό και την εκπαιδευτικό που διδάσκει Μαθηματικά διαμορφώνουν τον σχεδιασμό του μαθήματος και την υλοποίησή του στην τάξη, επηρεάζοντας καθοριστικά τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές και τις μαθήτριες (Remillard, 2005· Remillard κ.ά., 2014). Με όρους δραματουργίας, το ΠΣ στα Μαθηματικά μπορεί να ιδωθεί ως ένα «μαθηματικό αφήγημα» (*mathematical story*), όπου τα μαθηματικά νοήματα και ιδέες αναπτύσσονται με εσωτερική συνοχή, ακολουθία και νόημα για τον μαθητή και την μαθήτρια, μέσα από μια δομή που θυμίζει πλοκή και πολλές φορές περιλαμβάνει στοιχεία έντασης και έκπληξης (Dietiker, 2015). Στο αφήγημα αυτό, πρωταγωνιστές και πρωταγωνίστριες είναι τα ίδια τα παιδιά και οι ενέργειές τους, καθώς στη σύγχρονη τάξη των Μαθηματικών οι εκπαιδευτικοί καλούνται να λειτουργούν στηρικτικά στις σκέψεις και αποφάσεις των παιδιών προς μια πορεία κοινωνικής κατασκευής της γνώσης, παρά στο να παρέχουν έτοιμες απαντήσεις ως αυθεντίες που κατέχουν τις μαθηματικές αλήθειες (Christou κ.ά., 2004).

Στα νέα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά του Δημοτικού (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2022α) και του Γυμνασίου (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2022β) αποτυπώνονται σκοποθεσίες που φαίνεται να ευθυγραμμίζονται με τις αντίστοιχες διεθνείς, καθώς το νέο ΠΣ φιλοδοξεί –ανάμεσα σε άλλα– να προσφέρει ευκαιρίες στους μαθητές και τις μαθήτριες να αναπτύξουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, να

αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων, να αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης και να χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα Μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους. Επιπρόσθετα, ο ρόλος των εκπαιδευτικών χαρακτηρίζεται καθοριστικός και ως καίριας σημασίας στην προσπάθεια νοσηματοδότησης των μαθηματικών εννοιών και διεργασιών από όλους τους μαθητές και όλες τις μαθήτριες. Για τον λόγο αυτό, το ΠΣ καλείται να παρέχει στους εκπαιδευτικούς και τις εκπαιδευτικούς ένα σαφές πλαίσιο διδασκαλίας με κατευθύνσεις για τη σταδιακή ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, ενδεικτικές δραστηριότητες και προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, ενώ θα πρέπει να υποστηρίζει διδακτικές στρατηγικές συμπερίληψης και διαφοροποίησης προσαρμοσμένες στις ανάγκες κάθε μαθητή και μαθήτριας.

Η ομοιότητα στο Πρόγραμμα Σπουδών του Δημοτικού

Η έννοια της ομοιότητας στο ΠΣ του Δημοτικού (βλ. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2022α) δεν αναφέρεται ρητά, αλλά προσεγγίζεται κατασκευαστικά έμμεσα μέσω έργων μετασχηματισμών. Ο όρος «ομοιότητα» ως καθαυτός γεωμετρικός όρος δεν αναφέρεται ρητά σε κανένα σημείο του ΠΣ του Δημοτικού και το ίδιο ισχύει και για σχετικούς όρους όπως «λόγοι πλευρών» και «αντίστοιχες γωνίες»: αυτό θα συμβεί στο ΠΣ της επόμενης βαθμίδας, δηλαδή του Γυμνασίου, όπου και μετατίθεται η συστηματική και αφηρημένη προσέγγιση της έννοιας. Η έννοια οικοδομείται προοδευτικά και στηρίζεται στην αναγνώριση της ισότητας σχημάτων. Στον Οδηγό Εκπαιδευτικού Μαθηματικών Δημοτικού (Σακονίδης κ.ά., 2022) σημειώνεται ότι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί συμβάλλουν στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, της οπτικοποίησης και της μαθηματικής γλώσσας, καθώς οι μαθητές και οι μαθήτριες δραστηριοποιούνται με έργα που περιλαμβάνουν μεταφορές, ανακλάσεις, στροφές και ομοιοθεσίες. Στον ίδιο Οδηγό, όπως και στον Οδηγό Εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου (Πόταρη κ.ά., 2022), η ομοιότητα αναφέρεται ως ένα κλασικό παράδειγμα γεωμετρικού μετασχηματισμού ο οποίος διαθέτει αμετάβλητα και μεταβλητά στοιχεία του γεωμετρικού αντικειμένου. Στην περίπτωση των τριγώνων, ο μετασχηματισμός της ομοιότητας διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες τους, ενώ μεταβάλλονται τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τριγώνων με βάση τον λόγο ομοιότητας.

Στο νέο ΠΣ για τα Μαθηματικά στο Δημοτικό, η έννοια της ομοιότητας θεμελιώνεται πάνω στην κατανόηση της έννοιας της ισότητας, όπως αυτή

αναπτύσσεται μέσω γεωμετρικών μετασχηματισμών και της αναγνώρισης ίδιων σχημάτων σε διαφορετικές θέσεις ή προσανατολισμούς. Η διδασκαλία της ισότητας εντοπίζεται για πρώτη φορά στις τάξεις Γ' και Δ' με μαθηματικά έργα που δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές και τις μαθήτριες να αναγνωρίσουν την ισότητα δύο επίπεδων σχημάτων ή/και αντικειμένων με ανάκλαση, στροφή ή μεταφορά (για παράδειγμα, Γ.Μ.3.1 – Γ.Μ.3.5, σελ. 38 και Γ.Μ.4.1 – Γ.Μ.4.7, σελ. 50 – 51). Η έννοια εμπλουτίζεται στην Ε' τάξη με τη συστηματική αναγνώριση του αποτελέσματος της σύνθεσης των παραπάνω μετασχηματισμών (Γ.Μ.5.1 – Γ.Μ.5.5, σελ. 63), οικοδομώντας έτσι μια προ-εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας ως διατήρηση σχήματος με πιθανή αλλαγή θέσης ή μεγέθους. Έπειτα, μέσω κατάλληλων μαθηματικών δραστηριοτήτων που προωθούν την πολλαπλασιαστική συλλογιστική, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν την ευκαιρία να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις δισδιάστατων σχημάτων, καθώς και να σχεδιάσουν σε τετραγωνισμένο καμβά μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις με απλές κλίμακες και να τις συνδέουν με την κατασκευή χαρτών (Γ.Μ.5.6 – Γ.Μ.5.7, σελ. 63). Προτείνεται, για παράδειγμα, να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά σχήματα για να σχεδιάσουν ένα ανθρωπάκι και μετά να σχεδιάσουν μέλη της οικογένειάς του.

Σε συνέχεια της προοδευτικής ανάπτυξης της έννοιας της ομοιότητας, στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα της Στ' τάξης περιλαμβάνεται η εισαγωγή και διερεύνηση της έννοιας του λόγου, καθώς και η διάκριση των ποσών σε ανάλογα και μη ανάλογα (Αρ.Ρ.6.4, σελ. 69), όπως επίσης και η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ ανάλογων ποσών σε διαφορετικά πλαίσια (Αλ.Σρ.5.3, σελ. 59). Η καλλιέργεια της αναγνώρισης σταθερών λόγων και συμμεταβαλλόμενων μεγεθών μπορεί να λειτουργήσει ως εννοιολογική «γέφυρα» ανάμεσα στην αριθμητική σύγκριση και τη γεωμετρική έννοια της ομοιότητας. Επιπρόσθετα, περιλαμβάνεται η κατασκευή ίσων σχημάτων σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον (Γ.Μ.6.1, σελ. 73 – 74), η συζήτηση για τα κρίσιμα χαρακτηριστικά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και η σύνταξη περιγραφών (μη τυπικούς ορισμούς) για τετράπλευρα (Γ.Ε.6.1, σελ. 72), ενώ προτείνεται η χρήση χειραπτικών υλικών για την επίτευξη των στόχων αυτών. Τέτοια μαθηματικά έργα αναδεικνύουν τη σημασία της οπτικής και μετασχηματιστικής κατανόησης των σχημάτων, καθώς και τη σημασία αναγνώρισης των χαρακτηριστικών εκείνων που παραμένουν σταθερά μεταξύ σχημάτων, επομένως λειτουργούν προπαρασκευαστικά για την κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας.

Συμπερασματικά, η έννοια της ομοιότητας στο ΠΣ του Δημοτικού θεμελιώνεται εμπειρικά και διαισθητικά μέσω κυρίως της αναγνώρισης και σύγκρισης σχημάτων μέσα από έργα που ενισχύουν την οπτική, αναπαραστασιακή και ‘εμπειρική’ γεωμετρική σκέψη.

Η ομοιότητα στο Πρόγραμμα Σπουδών του Γυμνασίου

Το ΠΣ του Γυμνασίου (βλ. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2022β) επιδιώκει τη σταδιακή μετάβαση από εμπειρικές αναπαραστάσεις σε αφαιρετικές γενικεύσεις, μέσα από μια διαβαθμισμένη και δομημένη προσέγγιση. Η έννοια της ομοιότητας καταλαμβάνει κεντρική θέση στο πεδίο της Γεωμετρίας της Γ΄ τάξης, με σαφή εννοιολογική οριοθέτηση, αναλυτικούς διδακτικούς στόχους και ενδεικτικές δραστηριότητες. Στην τάξη αυτή, οι μαθητές και οι μαθήτριες αναγνωρίζουν και περιγράφουν τον μετασχηματισμό της ομοιοθεσίας σε ένα σχήμα και κατασκευάζουν την εικόνα του, συσχετίζουν τον μετασχηματισμό της ομοιοθεσίας με την ομοιότητα σχημάτων και με τις έννοιες μεγέθυνση-σμίκρυνση (που έχουν συναντήσει στο Δημοτικό) και ως γενίκευση, αντιλαμβάνονται τα όμοια σχήματα μέσω της αναγνώρισης της ακολουθίας μετασχηματισμών στην οποία υπόκεινται (Πόταρη κ.ά., 2022).

Στην Α΄ Γυμνασίου, το ΠΣ περιγράφει ως προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα την αναγνώριση του μετασχηματισμού της συμμετρίας ως προς άξονα, καθώς και τον εντοπισμό και τη διερεύνηση των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από τον μετασχηματισμό (Γ.Μ.7.1 – Γ.Μ.7.5, σελ. 20 – 21). Οι μαθητές και οι μαθήτριες εμπλέκονται σε δραστηριότητες που συνδέουν τους μετασχηματισμούς ισομετρίας με την ισότητα, με σκοπό να αντιληφθούν ως ίσα τα σχήματα που ταυτίζονται μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού. Η αξιοποίηση τέτοιων δραστηριοτήτων συμβάλλουν στην καλλιέργεια της αντίληψης της έννοιας του αναλλοίωτου που αποτελεί βασική ιδέα στην έννοια της ομοιότητας. Παράλληλα, στην ίδια τάξη, η διερεύνηση σχέσεων γωνιών (κατακορυφήν, παραπληρωματικές, συμπληρωματικές, γωνίες που σχηματίζονται από παράλληλες και τέμνουσες ευθείες) (Γ.Ε.7.2 – Γ.Ε.7.8, σελ. 17 – 18) ενισχύει την αντίληψη της έννοιας του αναλλοίωτου, αυτή τη φορά με αναφορά σε γωνίες.

Αναφορές στους ισομετρικούς μετασχηματισμούς της μεταφοράς, της στροφής και της ανάκλασης περιλαμβάνονται στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα της Β΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να διερευνήσουν ιδιότητες και χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν

αναλλοίωτα από τους μετασχηματισμούς της μεταφοράς, της στροφής και της συμμετρίας (Γ.Μ.8.1 – Γ.Μ.8.10, σελ. 32 – 33), έχοντας για μια ακόμα φορά την ευκαιρία να συνδέσουν την ισότητα με τους μετασχηματισμούς ισομετρίας.

Στη Γ΄ Γυμνασίου, η έννοια της ομοιότητας προσεγγίζεται συστηματικά και ρητά μέσω έργων που συνδέουν την ομοιότητα με τον μετασχηματισμό της ομοιοθεσίας και ενισχύουν την κατανόηση της ομοιότητας ως γεωμετρικής έννοιας που υπακούει σε συγκεκριμένες ιδιότητες των μετασχηματισμών (διατήρηση γωνιών και λόγου αποστάσεων), χωρίς να εξαρτάται από τη θέση ή τον προσανατολισμό των σχημάτων (Πόταρη κ.ά., 2022). Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι σαφή ως προς το τι πρέπει να έχουν κατακτήσει οι μαθητές και οι μαθήτριες ώστε να συγκροτήσουν νοηματικά την ομοιότητα σχημάτων (Γ.Μ.9.1 – Γ.Μ.9.6 και Γ.Ε.9.3, σελ. 43 – 44). Στη δεξιά στήλη του Πίνακα 2 παρουσιάζονται αυτά τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, ενώ στην αριστερή στήλη παρουσιάζονται τα αντίστοιχα της Ε΄ Δημοτικού· πρόκειται για τις δύο τάξεις της υποχρεωτικής εκπαίδευσης που τα εν λόγω μαθησιακά αποτελέσματα παρουσιάζονται ρητά.

Πίνακας 2. Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα στα ΠΣ του Δημοτικού και του Γυμνασίου αναφορικά με την έννοια της ομοιότητας.

Η ομοιότητα δισδιάστατων σχημάτων στα Προγράμματα Σπουδών του Δημοτικού και του Γυμνασίου Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα Οι μαθητές και οι μαθήτριες είναι σε θέση:	
Ε΄ Δημοτικού	Γ΄ Γυμνασίου
✓ Να αναγνωρίζουν και περιγράφουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις δισδιάστατων σχημάτων (Γ.Μ.5.6). ✓ Να σχεδιάζουν σε τετραγωνισμένο καμβά μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις με απλές κλίμακες και τις συνδέουν με την κατασκευή χαρτών (Γ.Μ.5.7).	✓ Να καθορίζουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας (Γ.Μ.9.1). ✓ Να αναγνωρίζουν ως όμοια σχήματα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου (Γ.Μ.9.2). ✓ Να διαπιστώνουν και να περιγράφουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις μέσω της ομοιοθεσίας χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων (Γ.Μ.9.3).

	✓ Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά ομοιόθετων σχημάτων (Γ.Μ.9.4). ✓ Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας ως προς κέντρο και λόγο ομοιοθεσίας στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αξιολόγηση ιδιοτήτων τους (Γ.Μ.9.5). ✓ Να σχεδιάζουν ομοιόθετα και όμοια σχήματα χρησιμοποιώντας μια ποικιλία υλικών εργαλείων και στρατηγικών (Γ.Μ.9.6). ✓ Να διερευνούν τη σχέση των περιμέτρων και των εμβαδών όμοιων σχημάτων (Γ.Ε.9.3).
--	---

Αναφορικά με τις ενδεικτικές δραστηριότητες με τις οποίες μπορούν να εμπλακούν οι μαθητές και οι μαθήτριες προκειμένου να επιτευχθούν τα παραπάνω αποτελέσματα, προτείνονται μαθηματικά έργα που βοηθούν στην αντίληψη ως όμοιων σχημάτων εκείνα που το ένα καθίσταται ομοιόθετο του άλλου μέσα από την ακολουθία συγκεκριμένων μετασχηματισμών, καθώς και στην αναγνώριση της σχέσης περιμέτρου και εμβαδού δύο ομοιόθετων σχημάτων αξιοποιώντας ψηφιακά εργαλεία ή τετραγωνισμένο χαρτί. Προτείνεται, επίσης, η διδακτική αξιοποίηση της ομοιότητας τριγώνων στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να έχουν την ευκαιρία σύνδεσης της πραγματικής ζωής με τα Μαθηματικά. Για παράδειγμα, γνωρίζοντας το ύψος ενός ανθρώπου και το μήκος της σκιάς ενός ανθρώπου που στέκεται πλάι σε μια κεραία, μπορούν οι μαθητές και οι μαθήτριες να υπολογίσουν το ύψος της κεραίας μετρώντας τη σκιά της.

Στο ΠΣ των Μαθηματικών του Γυμνασίου, λοιπόν, η έννοια της ομοιότητας εκκινεί από απλές χωρικές αντιλήψεις, οικοδομείται πάνω σε σχέσεις και ιδιότητες που παραμένουν αναλλοίωτες (ή και όχι) από συγκεκριμένες μαθηματικές λειτουργίες και ολοκληρώνεται με τη θεμελίωση γεωμετρικών σχέσεων που στηρίζονται στην αφαίρεση και την απόδειξη. Η έννοια μεταβαίνει από εμπειρική αναγνώριση στο Δημοτικό και την Α΄ Γυμνασίου σε τυπική, αποδεικτική γνώση στη Γ΄ Γυμνασίου, ενισχύοντας τόσο τον

γεωμετρικό αναστοχασμό όσο και την εφαρμογή μαθηματικής σκέψης στην καθημερινή ζωή.

Η ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Η προσέγγιση

Τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών συνιστούν θεμελιώδες διδακτικό και μαθησιακό μέσο, καθώς είναι ο βασικός συνδετικός κρίκος μεταξύ του Προγράμματος Σπουδών και της μαθησιακής πράξης λειτουργώντας διαμεσολαβητικά κατά τη μετάβαση από τις θεσμικές προθέσεις και προτάσεις στην υλοποίησή τους μέσα στη σχολική αίθουσα (Schmidt κ.ά., 2002). Ως κεντρικοί φορείς του εκπαιδευτικού περιεχομένου, τα σχολικά εγχειρίδια παρέχουν στους εκπαιδευτικούς και στις εκπαιδευτικούς πλαίσιο και κατευθύνσεις για το *τι* και *πώς* θα διδάξουν, ενώ παράλληλα καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό *τι* και *πώς* οι μαθητές και οι μαθήτριες μαθαίνουν (Herbel-Eisenmann, 2007· Lepik κ.ά., 2015· Weinberg & Wiesner, 2011).

Στη παρούσα μελέτη, το ενδιαφέρον στρέφεται στις ευκαιρίες μάθησης της έννοιας της ομοιότητας που παρέχονται στους μαθητές και στις μαθήτριες του Δημοτικού και του Γυμνασίου και εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται η έννοια στα σχολικά εγχειρίδια (βιβλία των μαθητών και των μαθητριών, τετράδια εργασιών). Περιγράφοντας παραδείγματα μαθηματικών έργων –τα οποία σχολιάζονται ως προς τον στόχο τους (τόσο γενικότερα όσο και ειδικότερα μέσω της αντιστοιχίας τους με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα όπως αυτά περιγράφονται στον Πίνακα 2) και το περιεχόμενό τους– επιχειρείται μια σκιαγράφηση των μαθηματικών έργων ομοιότητας που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών.

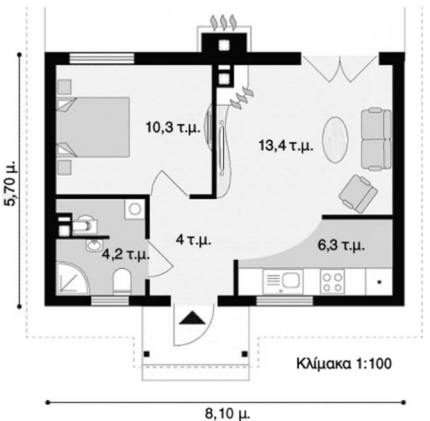
Σε πρόσφατη έρευνα (Kaskaouti & Moutsios–Rentzos, 2024) των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και των βιβλίων εκπαιδευτικών, όπως αυτά παρουσιάζονται από τον επίσημο ψηφιακό χώρο του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων & Αθλητισμού (βλ. <https://ebooks.edu.gr/>), ταυτοποιήσαμε 176 μαθηματικά έργα ομοιότητας τα οποία αναλύθηκαν ως προς το είδος των έργων, το πλαίσιο αναφοράς τους και τη συμβολή τους στην ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού των μαθητών και των μαθητριών. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι τα σχετικά με την ομοιότητα μαθηματικά έργα εμφανίζονται κυρίως στην Γ' Γυμνασίου ($n = 126$), ενώ από τα συνολικά 176 έργα τα 144 είναι ασκήσεις, εκ των οποίων στις 60 ζητείται οι μαθητές και οι μαθήτριες να βρουν κάτι

(για παράδειγμα, να βρουν το μήκος μιας πλευράς ή το μέτρο μιας γωνίας ενός τριγώνου, την κλίμακα, τον λόγο ομοιότητας), ενώ οι 49 απαιτούν ένα είδος βαθύτερου στοχασμού (για παράδειγμα, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να ερμηνεύσουν, να επιχειρηματολογήσουν, να αιτιολογήσουν, να αποδείξουν, να συμπεράνουν). Επίσης, μόλις το 30% των μαθηματικών έργων εντάσσεται σε ένα πλαίσιο που επιτρέπει τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο, ενώ το αντίστοιχο 64% πρόκειται για μαθηματικά έργα ομοιότητας που προωθούν την ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού.

Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιαστούν ενδεικτικά μαθηματικά έργα από τις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, την Α΄ τάξη και Γ΄ τάξη Γυμνασίου, καθώς από την ανάλυση των Kaskaouti και Moutsios–Rentzos (2024) προκύπτει ότι τα σχολικά εγχειρίδια των τάξεων αυτών περιλαμβάνουν έργα ομοιότητας. Η επιλογή τους έγινε με βάση τόσο το είδος του έργου (για παράδειγμα, αν πρόκειται για εισαγωγικό έργο, θεωρητική πρόταση, άσκηση, κ.ά.) όσο και τη σύγκλισή του με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα όπως αυτά παρουσιάζονται στα Προγράμματα Σπουδών (βλ. Πίνακα 2).

Ε΄ Δημοτικού

Το μαθηματικό έργο στην Εικόνα 1 είναι το εισαγωγικό διερευνητικό έργο της ενότητας «Μετρώ και σχεδιάζω σε κλίμακες» και παρουσιάζει ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο διαμερίσματος σε κλίμακα 1:100.

Πώς μπορούμε να κάνουμε μεγέθυνση  Κλίμακα 1:100	Ένας αρχιτέκτονας έφτιαξε το διπλανό σχέδιο ενός διαμερίσματος σε κλίμακα $\frac{1}{100}$ ή 1:100. Συζητάμε: α. τι είναι η κλίμακα, β. πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις πραγματικές διαστάσεις του διαμερίσματος με βάση το σχέδιο του αρχιτέκτονα.
--	---

Εικόνα 1. Εισαγωγικό διερευνητικό έργο μεγέθυνσης σχεδίου (βιβλίο μαθητή Ε΄ Δημοτικού, τεύχος β΄, σελ. 39).

Μέσω ενός προβλήματος της καθημερινότητας, εισάγεται η έννοια της κλίμακας ως σταθερού λόγου αποστάσεων και οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να κατανοήσουν ότι όλες οι αποστάσεις στο συγκεκριμένο σχέδιο είναι 100 φορές μικρότερες από τις αντίστοιχες πραγματικές διαστάσεις (Γ.Μ.5.6)². Το έργο δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές και τις μαθήτριες, μέσα από ένα οικείο και καθημερινό πλαίσιο, να οικοδομήσουν τη διαισθητική κατανόηση της ομοιότητας, ενισχύοντας τη χωρική τους αντίληψη και συνδέοντας τη διαδικασία της μέτρησης μηκών με τη διατήρηση της μορφής του σχήματος σε διαφορετική κλίμακα.

Στην Εικόνα 2 παρουσιάζεται το μαθηματικό έργο που διατυπώνει τον διαδικαστικό κανόνα μεγέθυνσης και σμίκρυνσης ενός σχεδίου (Γ.Μ.5.6).

- Για να μεγεθύνουμε ένα σχέδιο ή μια εικόνα, **πολλαπλασιάζουμε** κάθε απόσταση μεταξύ δύο σημείων του σχεδίου ή της εικόνας με τον ίδιο αριθμό.
- Για να σμικρύνουμε ένα σχέδιο ή μια εικόνα, **διαιρούμε** κάθε απόσταση μεταξύ δύο σημείων του σχεδίου ή της εικόνας με τον ίδιο αριθμό.

Εικόνα 2. Έργο διατύπωσης διαδικαστικού κανόνα μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης ενός σχεδίου ή μιας εικόνας (βιβλίο μαθητή Ε΄ Δημοτικού, σελ. 40).

Στο παραπάνω έργο συνοψίζεται ένας απλός αλγόριθμος για την κατασκευή όμοιων σχημάτων, ενώ υπονοείται η χρήση του σταθερού λόγου αναλογίας. Το έργο δίνει τη θεωρητική γενίκευση των παρατηρήσεων που έχουν προκύψει μέσα από την εμπειρία (όπως για παράδειγμα μέσα από το έργο στην Εικόνα 1). Το έργο προωθεί τη δεξιότητα της γενίκευσης αφού οι μαθητές και οι μαθήτριες περνούν από συγκεκριμένες περιπτώσεις (για παράδειγμα, αρχιτεκτονικό σχέδιο) σε ένα καθολικό κανόνα που ισχύει για κάθε σχέδιο.

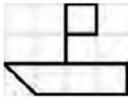
Στ΄ Δημοτικού

Το μαθηματικό έργο που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3 είναι το εισαγωγικό διερευνητικό έργο της ενότητας «Μεγεθύνω – μικραίνω σχήματα» και ζητά από τους μαθητές και τις μαθήτριες να αναπαράγουν σε μιλιμετρέ χαρτί ένα

² Κάθε μαθηματικό έργο που αναλύεται στην ενότητα αυτή αντιστοιχεί σε ένα ή περισσότερα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του Πίνακα 2.

απλό σχέδιο (καραβάκι) και στη συνέχεια να σχεδιάσουν το ίδιο σχήμα με διπλάσιες ή τριπλάσιες διαστάσεις (Γ.Μ.5.7 και Γ.Μ.9.6). Η δραστηριότητα των μαθητών και των μαθητριών οδηγεί στην πρακτική κατανόηση της διαδικασίας μεγέθυνσης με βάση ένα σταθερό συντελεστή, εφαρμόζοντας την πράξη του πολλαπλασιασμού σε όλες τις αποστάσεις του σχεδίου. Η χρήση του μιλιμετρέ χαρτιού διευκολύνει την ακριβή μέτρηση και μεταφορά των διαστάσεων, βοηθώντας έτσι τους μαθητές και τις μαθήτριες στην οπτικοποίηση της αναλογικής σχέσης ανάμεσα στο αρχικό και τελικό σχέδιο. Επίσης, προωθείται η μεταγνώση αφού οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν.

Δραστηριότητα 1η



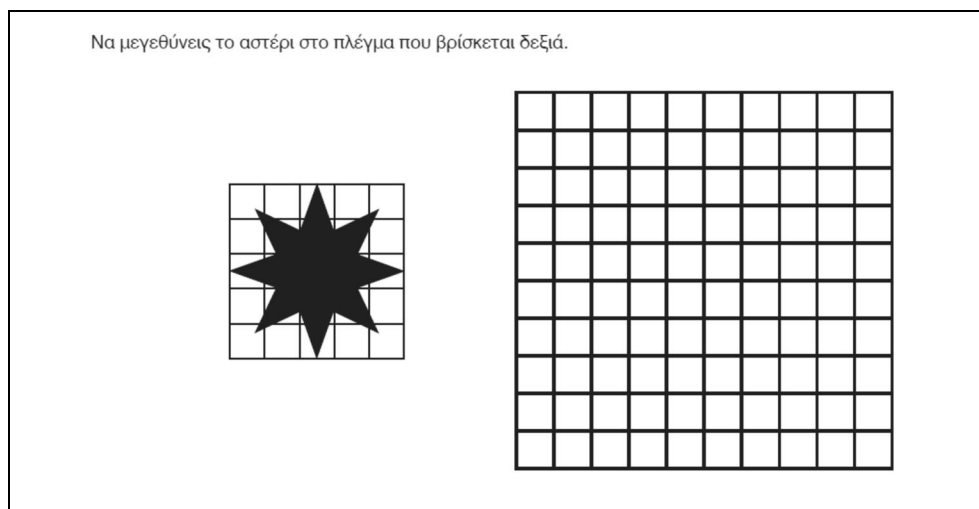
- Να σχεδιάσεις στην αριστερή μεριά του μιλιμετρέ χαρτιού το διπλανό караβάκι, του οποίου η βάση είναι ένα τετράπλευρο και πάνω του έχει ένα τετράγωνο για σημαία.
- Να σχεδιάσεις στη δεξιά μεριά ένα караβάκι με διπλάσιες ή τριπλάσιες διαστάσεις.

- Εξήγησε τον τρόπο που εργάστηκες για να διπλασιάσεις ή να τριπλασιάσεις το σχήμα:
- Οι γωνίες του δεύτερου σχήματος τι σχέση έχουν με τις γωνίες του πρώτου σχήματος;

Εικόνα 3. Εισαγωγικό διερευνητικό έργο αναπαραγωγής και μεγέθυνσης σχεδίου (βιβλίο μαθητή Στ΄ Δημοτικού, σελ. 143).

Στο έργο αυτό, η έννοια της ομοιότητας εμφανίζεται με τρόπο σαφή: τα σχήματα που σχεδιάζουν τα παιδιά έχουν το ίδιο σχήμα και ίσες γωνίες με το αρχικό, διαφέρουν όμως στο μέγεθος. Η ερώτηση που ζητά την περιγραφή της σχέσης των γωνιών των δύο σχημάτων βοηθά τους μαθητές και τις μαθήτριες να συνειδητοποιήσουν ότι κατά τη μεγέθυνση σχημάτων το μέτρο των γωνιών μένει αναλλοίωτο, σχέση που είναι βασική για την κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας.

Η Εικόνα 4 παρουσιάζει ένα μαθηματικό έργο μεγέθυνσης που οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να μεγεθύνουν το σχήμα ενός αστεριού, το οποίο αρχικά είναι σχεδιασμένο σε μικρό πλέγμα 5×5 τετραγώνων, ώστε να καταλάβει το μεγαλύτερο πλέγμα 10×10 τετραγώνων (Γ.Μ.5.6 και Γ.Μ.5.7, αλλά και Γ.Μ.9.3 και Γ.Μ.9.6). Το συγκεκριμένο έργο συνδέεται με το προηγούμενο (διπλασιασμός ή τριπλασιασμός καραβιού), αλλά αυτή τη φορά σε ένα πιο σύνθετο και συμμετρικό σχήμα, που απαιτεί ακριβέστερη οπτική παρατήρηση και συστηματική μεταφορά των αναλογιών στο νέο πλέγμα. Ο βαθμός πολυπλοκότητας εδώ αυξάνεται καθώς το σχήμα του αστεριού περιλαμβάνει περισσότερες κορυφές, όπως επίσης δεν δίνεται ρητά ο συντελεστής του πολλαπλασιασμού (2), αλλά πρέπει να προκύψει από την παρατήρηση της σχέσης των δύο πλεγμάτων.



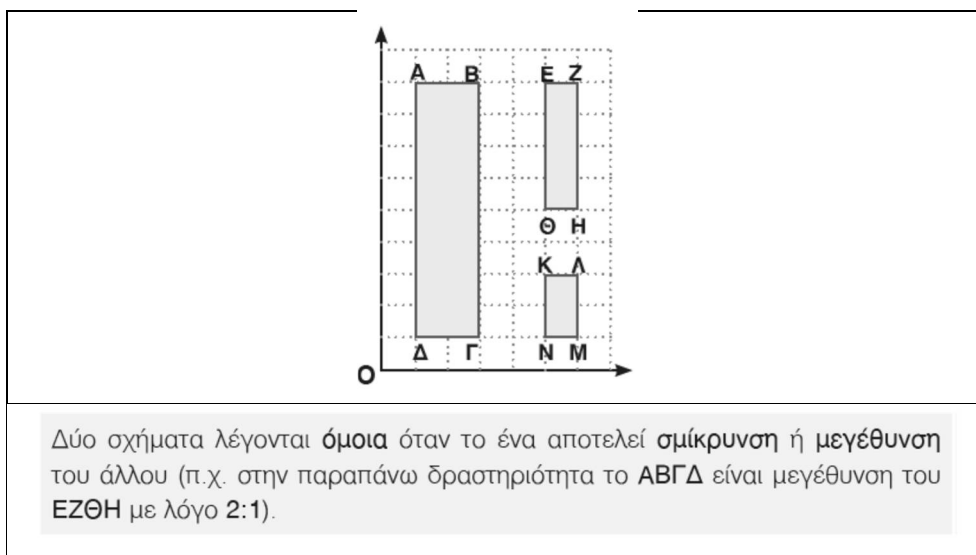
Εικόνα 4. Έργο μεγέθυνσης σχεδίου (τετράδιο εργασιών Στ' Δημοτικού, τεύχος δ, σελ. 15).

Η εμπλοκή των μαθητών και των μαθητριών με το εν λόγω έργο φαίνεται να λειτουργεί συμπληρωματικά του προηγούμενου έργου: η μεγέθυνση του καραβιού δίνει τη δυνατότητα προσέγγισης της έννοιας της ομοιότητας μέσω μιας κατευθυνόμενης δραστηριότητας, ενώ η μεγέθυνση του αστεριού εμβαθύνει την έννοια μέσω μιας πιο διερευνητικής προσέγγισης.

Α' Γυμνασίου

Στο απόσπασμα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 5 εισάγεται για πρώτη φορά ο όρος *όμοια σχήματα* ως σχήματα που το ένα αποτελεί σμίκρυνση ή

μεγέθυνση του άλλου (Γ.Μ.5.6 και Γ.Μ.9.2). Το έργο που δίνεται λειτουργεί ως συγκεκριμένη αναπαράσταση του ορισμού: τα σχήματα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι όμοια με λόγο 2:1 και αυτό σημαίνει ότι όλες οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του $AB\Gamma\Delta$ υποδιπλασιάστηκαν για να προκύψει το $EZH\Theta$.



Εικόνα 5. Έργο το οποίο εισάγει τον όρο *όμοια σχήματα* (βιβλίο μαθητή Α' Γυμνασίου, σελ. 91).

Η έννοια εδώ συνδέεται άμεσα με προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών και των μαθητριών από δραστηριότητες μεγέθυνσης και σμίκρυνσης, ενώ ταυτόχρονα γίνεται μια προσπάθεια σταθεροποίησης της γνώσης μέσα από τη μαθηματική ορολογία και τη γενίκευση: τα σχήματα δεν είναι απλώς *μεγαλύτερα* ή *μικρότερα*, αλλά είναι *όμοια* διότι όλες οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του ενός σχήματος μετασχηματίστηκαν με τον ίδιο αναλογικό τρόπο και έτσι δημιουργήθηκε το άλλο σχήμα.

Το έργο στην Εικόνα 6 θέτει στους μαθητές και τις μαθήτριες ένα πρόβλημα από την καθημερινή ζωή, ζητώντας να βρουν πόσο έχει σμικρυνθεί η εικόνα ενός ανθρώπου σε φωτογραφία, με δεδομένο το πραγματικό του ύψος (Γ.Μ.5.6).

Σε μια φωτογραφία το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 cm, ενώ το πραγματικό το ύψος είναι 1,76 m. Πόσο έχει σμικρυνθεί η εικόνα του ανθρώπου στη φωτογραφία;

Εικόνα 6. Έργο σμίκρυνσης (βιβλίο μαθητή Α΄ Γυμνασίου, σελ. 92).

Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να υπολογίσουν τον λόγο σμίκρυνσης, να εκφράσουν δηλαδή ποσοτικά τη σχέση ανάμεσα στο πραγματικό μέγεθος και το αντίστοιχο μέγεθος στην εικόνα. Η έννοια της ομοιότητας υποβόσκει στο έργο αλλά δεν αξιοποιείται στη διατύπωση του έργου (όπως συμβαίνει και σε κάθε έργο της Α΄ Γυμνασίου που συνδέεται με την ομοιότητα). Έτσι, ενώ σε θεωρητικό επίπεδο έχει δοθεί μια πρώτη προσέγγιση της έννοιας, χάνεται η ευκαιρία μετάβασης από το θεωρητικό ορισμό (που δόθηκε προηγουμένως στο έργο 5) στην εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα. Τέτοιες συνδέσεις που υπερβαίνουν μια εργαλειακή αντίληψη και συμβάλλουν στη νοηματοδότηση της έννοιας της ομοιότητας μέσω της χρήσης του όρου σε διαφορετικά πλαίσια συναντώνται στη Γ΄ Γυμνασίου.

Γ΄ Γυμνασίου

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου η έννοια της ομοιότητας εισάγεται μέσω της ομοιοθεσίας με κέντρο εσωτερικό σημείο ενός τετραπλεύρου (Εικόνα 7). Μέσω μεγεθύνσεων και σμικρύνσεων (λόγοι 2:1 και 1:2 αντίστοιχα), οι μαθητές και οι μαθήτριες κατασκευάζουν νέα τετράπλευρα με πλευρές ανάλογες και ίσες γωνίες, πληρώνοντας έτσι το γενικότερο κριτήριο της ομοιοθεσίας σχημάτων (Γ.Μ.9.1).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

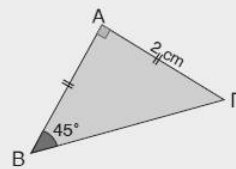
1. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και στο εσωτερικό του να πάρετε ένα σημείο Ο.
2. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ', ΟΔ' διπλάσια των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α'Β'Γ'Δ' και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου.
3. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ'', ΟΒ'', ΟΓ'', ΟΔ'', μισά των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α''Β''Γ''Δ'' και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες τους με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε;

Εικόνα 7. Εισαγωγικό έργο ομοιοθεσίας (βιβλίο μαθητή Γ' Γυμνασίου, σελ. 210).

Το συγκεκριμένο μαθηματικό έργο, αν και δεν εισάγει ρητά τον όρο «ομοιοθεσία», αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα διερεύνησης των δομικών στοιχείων της και δίνει στους μαθητές και τις μαθήτριες την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με τα βασικά χαρακτηριστικά της ομοιοθεσίας: την ύπαρξη κοινού κέντρου, την αναλογία των πλευρών και τη διατήρηση των αντίστοιχων γωνιών. Ο πειραματισμός με ένα *τυχαίο* τετράπλευρο και η κατασκευή ομοιόθετων με αυτό σχήματα βοηθά στην αναγνώριση και περιγραφή εκείνων των στοιχείων που χαρακτηρίζουν τον μετασχηματισμό της ομοιοθεσίας, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να οδηγηθούν σε συμπεράσματα για τη διατύπωση κριτηρίων ομοιότητας πολυγώνων και τριγώνων ειδικότερα.

Στο έργο που παρουσιάζεται στην Εικόνα 8 οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να κατασκευάσουν ένα τρίγωνο ομοίθετο του δοσμένου, με γνωστό λόγο και ελεύθερη επιλογή κέντρου, ενώ στη συνέχεια τους ζητείται να υπολογίσουν τις πλευρές και τις γωνίες του σχήματος που θα προκύψει (Γ.Μ.9.4 και Γ.Μ.9.5).

Να σχεδιάσετε το ομοίθετο του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο Ο εκτός του τριγώνου και λόγο $\lambda = 3$.
Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του νέου τριγώνου.



Εικόνα 8. Έργο ομοιοθεσίας (βιβλίο μαθητή Γ' Γυμνασίου, σελ. 213).

Το έργο λειτουργεί ως γέφυρα μεταξύ γεωμετρικού και αλγεβρικού συλλογισμού, συνδέοντας τη γεωμετρική κατασκευή με την αλγεβρική έκφραση των σχέσεων αναλογίας. Αξιοποιώντας την ομοιοθεσία ως συγκεκριμένο μετασχηματισμό που παράγει όμοια σχήματα ανεξάρτητα της επιλογής του κέντρου ομοιοθεσίας, οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να ερμηνεύσουν την ομοιότητα όχι ως μια στατική σχέση μεταξύ σχημάτων αλλά ως μια δυναμική διαδικασία μετασχηματισμού. Έτσι, παρέχεται ένα πλαίσιο καλλιέργειας και ανάπτυξης της έννοιας της ομοιότητας σχημάτων που παρότι η θέση τους αλλάζει, η μορφή τους δεν μεταβάλλεται.

Το μαθηματικό έργο στην Εικόνα 9 παρέχει ένα σαφές κριτήριο της ομοιότητας πολυγωνικών σχήματα: αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια (Γ.Μ.9.4).

Γενικά	Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.
---------------	---

Εικόνα 9. Έργο διατύπωσης κριτηρίου της ομοιότητας πολυγώνων (βιβλίο μαθητή Γ΄ Γυμνασίου, σελ. 215).

Η εισαγωγή του κριτηρίου αυτού επεκτείνει τη μέχρι τώρα αντίληψη των μαθητών και των μαθητριών για την ομοιότητα σχημάτων (κυρίως έχουν συναντήσει τα όμοια σχήματα ως μεγέθυνση και σμίκρυνση) προσθέτοντας μια συνθήκη που περιλαμβάνει δύο προϋποθέσεις. Με το κριτήριο θεμελιώνεται η έννοια της ομοιότητας πολυγώνων και προάγεται η ανάπτυξη της μαθηματικής γλώσσας (εισάγονται ρητά οι όροι «ανάλογες πλευρές» και «αντίστοιχες γωνίες»), οπότε υπάρχει μια μετάβαση από την οπτική και διαισθητική κατανόηση στην αυστηρή και τυπική γεωμετρική οριοθέτηση.

Στην Εικόνα 10, το έργο ζητά από τους μαθητές και τις μαθήτριες να χαρακτηρίσουν διάφορες προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες. Η δραστηριότητα συνδέεται άμεσα με το κριτήριο που έχει διατυπωθεί στο αμέσως προηγούμενο έργο (Γ.Μ.9.2 και Γ.Μ.9.4).

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες. α) Δύο τετράγωνα είναι όμοια. β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια. γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια. δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια. ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια. στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
--	--

Εικόνα 10. Έργο χαρακτηρισμού προτάσεων σε σωστές ή λανθασμένες (βιβλίο μαθητή Γ΄ Γυμνασίου, σελ. 217).

Στόχος του είναι οι μαθητές και οι μαθήτριες να εμβαθύνουν στην έννοια της ομοιότητας και να αποφύγουν παρανοήσεις όπως, για παράδειγμα, ότι όλα τα ορθογώνια είναι όμοια ή ότι όλοι οι ρόμβοι είναι όμοιοι. Το συγκεκριμένο έργο συμβάλλει στην αποσαφήνιση και κριτική εφαρμογή της έννοιας της ομοιότητας, πέρα και πάνω από υπολογιστικές διεργασίες. Μέσω του ελέγχου της εγκυρότητας μιας πρότασης, δίνεται στους μαθητές και στις μαθήτριες η ευκαιρία της επιχειρηματολογίας, αλλά και της κατασκευής αντιπαραδειγμάτων για την απόρριψη ισχυρισμών.

Η πρόταση που διατυπώνεται στην Εικόνα 11 αποτελεί ένα κριτήριο ομοιότητας τριγώνων: αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

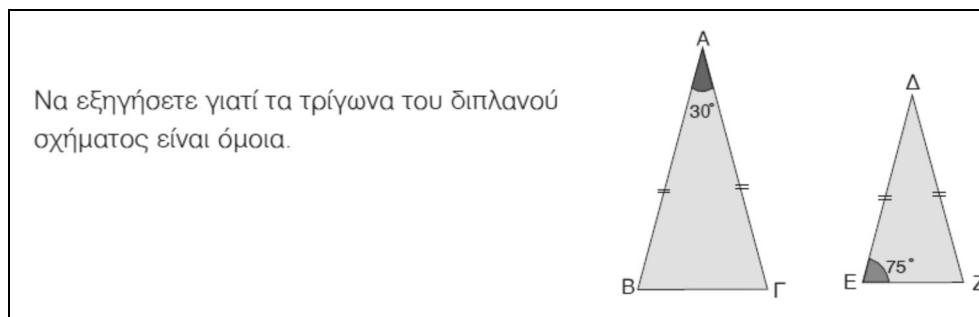
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
--

Εικόνα 11. Έργο διατύπωσης κριτηρίου της ομοιότητας τριγώνων (βιβλίο μαθητή Γ΄ Γυμνασίου, σελ. 220).

Πρόκειται για μια ειδική περίπτωση του κριτηρίου ομοιότητας των πολυγώνων, όπου η ισότητα δύο αντίστοιχων γωνιών δύο τριγώνων είναι επαρκής συνθήκη ώστε τα τρίγωνα να χαρακτηριστούν όμοια (Γ.Μ.9.4). Μέσα από τη συγκεκριμένη πρόταση αναδεικνύεται η σημασία της ακρίβειας του μαθηματικού λόγου, καθώς αν και μειώνεται ο αριθμός των συνθηκών που απαιτούνται για την αναγνώριση (ή μη) της ομοιότητας, ωστόσο η μία συνθήκη της ισότητας των γωνιών τριγώνων είναι ικανή ώστε τα τρίγωνα να είναι όμοια. Αυτό οφείλεται στο ότι η τρίτη γωνία καθορίζεται αναγκαστικά από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου, ενώ οι πλευρές διατηρούνται σε σταθερή αναλογία λόγω της μοναδικότητας της γωνιακής δομής του σχήματος (η απόδειξη αυτού του κριτηρίου καθώς και η απόδειξη των δύο

άλλων βασικών κριτηρίων μαζί με τις αποδείξεις τους περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου).

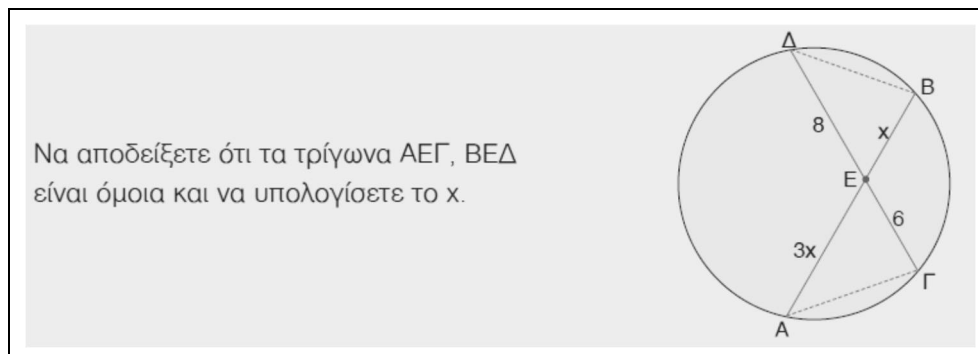
Στην Εικόνα 12 παρουσιάζεται ένα έργο που ζητά από τους μαθητές και τις μαθήτριες να εξηγήσουν γιατί τα τρίγωνα του σχήματος είναι όμοια (Γ.Μ.9.4).



Εικόνα 12. Έργο αιτιολόγησης της ομοιότητας δύο τριγώνων (βιβλίο μαθητή Γ' Γυμνασίου, σελ. 222).

Το έργο δίνει την ευκαιρία στους μαθητές και τις μαθήτριες να εφαρμόσουν το κριτήριο ομοιότητας τριγώνων (που παρουσιάστηκε στο έργο 9) σε συγκεκριμένο παράδειγμα, συνδυάζοντας μέτρα γωνιών τριγώνων και ιδιότητες γωνιών ισοσκελών τριγώνων. Η ομοιότητα εδώ δεν αναγνωρίζεται οπτικά, αλλά αποδεικνύεται μέσω λογικής επιχειρηματολογίας. Έτσι, καλλιεργείται η ανάπτυξη τη γεωμετρικής σκέψης, καθώς οι μαθητές και οι μαθήτριες μεταβαίνουν από την παρατήρηση στη μαθηματική αιτιολόγηση.

Το έργο στην Εικόνα 13 ζητά από τους μαθητές και τις μαθήτριες να αποδείξουν ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια και στη συνέχεια να υπολογίσουν το άγνωστο μήκος x μιας πλευράς του ενός τριγώνου (Γ.Μ.9.4 και Γ.Μ.9.5). Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται αρχικά να εφαρμόσουν το κριτήριο ομοιότητας τριγώνων που έχουν διδαχθεί και στη συνέχεια να αξιοποιήσουν την αναλογία των πλευρών που προκύπτει για να βρουν το x . Η επίλυση του έργου απαιτεί ένα συλλογισμό πολλών βημάτων: αναγνώριση γωνιών → απόδειξη ομοιότητας → αναγνώριση ανάλογων πλευρών → χρήση λόγων → σχηματισμός εξίσωσης → επίλυση εξίσωσης.



Εικόνα 13. Έργο απόδειξης της ομοιότητας δύο τριγώνων και υπολογισμού της άγνωστης πλευράς (βιβλίο μαθητή Γ΄ Γυμνασίου, σελ. 223).

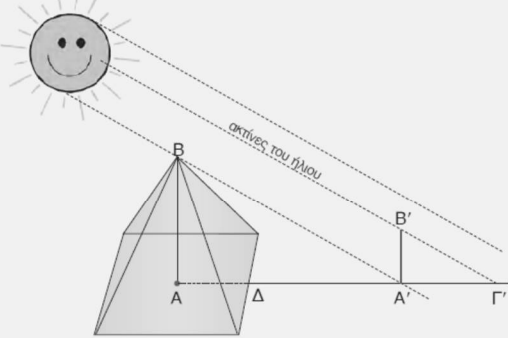
Μέσα από την εμπλοκή τους με το έργο, οι μαθητές και οι μαθήτριες ενισχύουν την ικανότητα τους να αιτιολογούν και να αποδεικνύουν, ενώ παράλληλα δίνεται η δυνατότητα αναγνώρισης της ομοιότητας ως μιας έννοιας που ξεπερνά το θεωρητικό επίπεδο και μπορεί να αξιοποιηθεί ως μεθοδολογικό εργαλείο επίλυσης προβλημάτων.

Στην Εικόνα 14, το έργο παρουσιάζει ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών για το πώς ο Θαλής κατάφερε να υπολογίσει το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων (Γ.Μ.9.4 και Γ.Μ.9.5).

Το έργο αυτό συνδέει την έννοια της ομοιότητας με ένα ιστορικό πρόβλημα μέτρησης, αναδεικνύοντας έτσι τη χρησιμότητα της έννοιας ήδη από την αρχαιότητα. Για να βρεθεί το ζητούμενο, το έργο απαιτεί τη μετάβαση από το φυσικό πρόβλημα (ύψος πυραμίδας) σε αφηρημένη γεωμετρική αναπαράσταση (δύο όμοια τρίγωνα) και στη συνέχεια σε αλγεβρικό πρόβλημα (σχηματισμός λόγων και επίλυση εξίσωσης): δίνεται, δηλαδή, η ευκαιρία στους μαθητές και τις μαθήτριες για μαθηματική μοντελοποίηση. Το έργο προσφέρει ένα διερευνητικό πλαίσιο της έννοιας της ομοιότητας ως εργαλείου επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7ου αιώνα π.Χ. Με τη βοήθεια της θεωρίας αυτής ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624 - 547 π.Χ.), ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της, αποσπώντας το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου, του Άμασι.

Δε γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σ' αυτό το επίτευγμά του. Ο Πλούταρχος, ωστόσο, μας διηγείται τα εξής:



«Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δύο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ο ίδιος με τον λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

Ο Διογένης ο Λαέρτιος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι ο Θαλής μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν το μήκος της ράβδου έγινε ίσο με το μήκος της σκιάς της.

Μπορείτε να εξηγήσετε, πώς ο Θαλής υπολόγισε τελικά το ύψος της πυραμίδας, αφού μπορούσε να μετρήσει το μήκος της πλευράς της τετραγωνικής βάσης της πυραμίδας και της σκιάς ΔΑ'.

Εικόνα 14. Έργο ομοιότητας από την Ιστορία των Μαθηματικών (βιβλίο μαθητή Γ' Γυμνασίου, σελ. 224).

Το έργο στην Εικόνα 15 εστιάζει στην κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στον λόγο ομοιότητας δύο επιπέδων σχημάτων και στον λόγο των εμβαδών τους, εισάγοντας την έννοια της τετραγωνικής σχέσης εξάρτησης (Γ.Ε.9.3). Αξιοποιώντας γνωστά γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, ρόμβος), οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να εντοπίσουν τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα που συνδέει τα εμβαδά όμοιων σχημάτων όταν οι πλευρές τους μεταβάλλονται κατά συγκεκριμένο πολλαπλασιαστικό τρόπο.

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Αν τριπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται φορές μεγαλύτερο.
- β) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται φορές μεγαλύτερο.
- γ) Αν ένας ρόμβος έχει πλευρά 6 cm και ένας άλλος όμοιός του ρόμβος έχει πλευρά 3 cm, τότε ο δεύτερος ρόμβος έχει εμβαδόν φορές μικρότερο από το εμβαδόν του πρώτου ρόμβου.

Εικόνα 15. Ερωτήσεις κατανόησης της σχέσης των εμβαδών όμοιων σχημάτων (βιβλίο μαθητή Γ΄ Γυμνασίου, σελ. 227).

Μέσα από την ποσοτική αυτή διερεύνηση, οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να μεταβούν από την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας στη χρήση και εφαρμογή της ως εργαλείο υπολογισμού, προχωρώντας από γραμμικές σε πιο σύνθετες (μη γραμμικές) μορφές εξάρτησης. Πρόκειται για μια κρίσιμη προέκταση του γεωμετρικού μετασχηματισμού της ομοιότητας, καθώς δίνει την ευκαιρία ανακάλυψης της τετραγωνικής σχέσης ανάμεσα στον λόγο των πλευρών και τον λόγο των εμβαδών όμοιων σχημάτων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη είχε ως στόχο να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο η έννοια της ομοιότητας αναπτύσσεται στα Μαθηματικά του Δημοτικού και του Γυμνασίου, εξετάζοντας τη συνάφεια μεταξύ του μαθηματικού ορισμού της ομοιότητας, του νέου Προγράμματος Σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων. Όπως παρουσιάστηκε στο πρώτο μέρος της μελέτης, η ομοιότητα περιγράφεται τυπικά ως γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου που προκύπτει από σύνθεση ομοιοθεσίας και ισομετρίας. Η κατανόηση αυτού του μετασχηματισμού απαιτεί τόσο οπτικοχωρικές ικανότητες όσο και ανάπτυξη αναλογικού συλλογισμού, που σταδιακά οδηγούν στον παραγωγικό γεωμετρικό συλλογισμό.

Η ανάλυση των Προγραμμάτων Σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων του Δημοτικού και του Γυμνασίου δείχνει ότι, ήδη από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, παρέχονται στους μαθητές και τις μαθήτριες οι πρώτες ευκαιρίες για την κατανόηση της ομοιότητας, μέσα από την εμπλοκή τους με έργα ισότητας, χωρικής αναπαράστασης, μεγεθύνσεων και σμικρύνσεων. Τα έργα αυτά, αν και δεν εισάγουν τον όρο ρητά, συμβάλλουν στη διαισθητική

κατανόηση του μετασχηματισμού ενός σχήματος και προετοιμάζουν τους μαθητές και τις μαθήτριες για πιο σύνθετες έννοιες και διαδικασίες. Η χρήση της κλίμακας σε πραγματικά πλαίσια (όπως αρχιτεκτονικά σχέδια) και οι μεγεθύνσεις/σμικρύνσεις εικόνων (όπως η μεγέθυνση ενός σχήματος σε πλέγμα) βοηθά την ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού, στη βάση του οποίου στηρίζεται η μαθηματική γενίκευση που ακολουθεί.

Η ανάλυση δείχνει ότι στο Δημοτικό το ΠΣ και τα σχολικά εγχειρίδια συγκλίνουν σε μεγάλο βαθμό, τόσο ως προς τη δομή των μαθηματικών έργων όσο και ως προς τους μαθησιακούς στόχους που επιδιώκονται, αν και η σύγκλιση αυτή δεν είναι απόλυτη. Το ΠΣ φαίνεται να δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη εννοιολογική κατανόηση των μετασχηματισμών (για παράδειγμα, αναγνώριση και περιγραφή των αναλλοίωτων (ή μη) χαρακτηριστικών), ενώ στα σχολικά εγχειρίδια τα έργα παραμένουν σε μεγάλο βαθμό σε διαδικαστικό επίπεδο, χωρίς να ενθαρρύνεται συστηματικά η περιγραφή, η ερμηνεία και η αιτιολόγηση.

Στο Γυμνάσιο, και ιδιαίτερα στη Γ' τάξη, παρατηρείται σύγκλιση του ΠΣ και των εγχειριδίων με τον τυπικό μαθηματικό ορισμό. Οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν τον μετασχηματισμό της ομοιοθεσίας, να διερευνήσουν αναλλοίωτα στοιχεία και ιδιότητες (γωνίες, λόγοι πλευρών), να γνωρίσουν και να εφαρμόσουν κριτήρια ομοιότητας πολυγώνων και τριγώνων, καθώς και να επιχειρηματολογήσουν μέσω αποδεικτικών διαδικασιών. Επιπλέον, μέσα από δραστηριότητες με εφαρμογές σε προβλήματα της καθημερινότητας ή παραδείγματα που αντλούν από την Ιστορία των Μαθηματικών μπορούν να συνδέουν τη γεωμετρική θεωρία με πρακτικές καταστάσεις, αναδεικνύοντάς την ως εργαλείο κατανόησης και επίλυσης προβλημάτων. Έτσι, δημιουργούνται οι προϋποθέσεις για τη μετάβαση στην τυπική και αυστηρή γνώση που θα συναντήσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες στο Λύκειο. Εκεί, η ομοιότητα συνδέεται με πιο σύνθετα αποδεικτικά σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και εφαρμογές σε θεωρήματα και τυπικά κριτήρια που συνδέονται με ισότητα γωνιών, λόγους, αναλογίες.

Ωστόσο, η μετάβαση από την προ-εννοιολογική κατανόηση της ομοιότητας (η οποία συμβαίνει κυρίως στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού· στην Α' Γυμνασίου οι αναφορές είναι ελάχιστες και στη Β' ανύπαρκτες) στον αποδεικτικό συλλογισμό που προωθείται στη Γ' Γυμνασίου μπορεί να θεωρηθεί μάλλον απότομη, καθώς δεν έχει δοθεί ευκαιρία για έναν βαθύτερο πειραματισμό με την έννοια στις ενδιάμεσες τάξεις.

Παρά τις γνωστικές ασυνέχειες που εντοπίζονται, η πορεία που προτείνει το ΠΣ σε συνδυασμό με τα μαθηματικά έργα των εγχειριδίων δημιουργεί ένα συνεκτικό μαθησιακό μονοπάτι για τη νοηματοδότηση της έννοιας. Οι μαθητές και οι μαθήτριες ξεκινούν από απλές οπτικές αναγνωρίσεις στο Δημοτικό, αναπτύσσουν προοδευτικά τον αναλογικό συλλογισμό και τη γεωμετρική σκέψη στο Γυμνάσιο και στο πέρας της υποχρεωτικής εκπαίδευσης έχουν οικοδομήσει μια γνωστική πορεία κατάλληλη να μπορεί να ανταποκριθεί στις αυστηρά πλαισιωμένες αποδείξεις και γενικεύσεις που απαιτεί το Λύκειο.

Σημειώνεται ότι, στο παρόν άρθρο, τα Προγράμματα Σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια μελετήθηκαν μόνο ως ανθρώπινα τεχνουργήματα, χωρίς να εξετάζεται η χρήση τους από τους εκπαιδευτικούς και τις εκπαιδευτικούς, τους μαθητές και τις μαθήτριες. Στην τάξη των Μαθηματικών, η χρήση αυτών των τεχνουργημάτων από τους εκπαιδευτικούς και τις εκπαιδευτικούς μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, από την αυστηρή ευθυγράμμιση με το περιεχόμενο (*teaching by the book*) έως την προσαρμογή ή ακόμη και την αυτοσχέδια δημιουργία νέου διδακτικού υλικού (Rezat κ.ά., 2021). Από την άλλη, ένα σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών στα χέρια των μαθητών και των μαθητριών μπορεί να είναι απλώς ένα γραπτό προϊόν με μαθηματικό περιεχόμενο και εικόνες (Macintyre & Hamilton, 2010) και να μείνει γνωστικά ανεκμετάλλευτο αν δεν πυροδοτήσει μαθηματικό ενδιαφέρον ή μαθηματική συζήτηση. Ο ρόλος των εκπαιδευτικών Μαθηματικών είναι κρίσιμος για την αξιοποίηση αυτών των πόρων σε συγκεκριμένη σχολική τάξη και μονάδα.

Συνοψίζοντας, τονίζεται ότι η υιοθετείσα οπτική εστίασε σε θεσμικά κείμενα και εκπαιδευτικούς πόρους, χωρίς να επιτρέπει την επιστημονικά τεκμηριωμένη συμπερασματολογία για τις πραγματικές διδακτικές πρακτικές και τις μαθησιακές εμπειρίες στην τάξη των Μαθηματικών. Συνεπώς, προτείνεται περαιτέρω έρευνα σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζονται στην τάξη, ώστε να προκύψουν ερευνητικά συμπεράσματα τόσο για τον τρόπο, όσο και για τον βαθμό σύνδεσης των ευρημάτων της έρευνας με τη σχολική βιωμένη πραγματικότητα. Οι συγκλίσεις ή οι αποκλίσεις, οι συμβατότητες και οι ασυμβατότητες, μεταξύ του θεσμικά προτεινόμενου, του εφαρμόσιμου, του πραγματοποιούμενου και του επιθυμητού (Μούτσιος-Ρέντζος & Καλαβάσης, 2021) αποτελεί σημαντικό παράγοντα συναγωγής τεκμηριωμένων και αξιοποιήσιμων συμπερασμάτων για την αποτελεσματική στήριξη της διδασκαλίας και της μάθησης σχετικά με την έννοια της ομοιότητας στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Arıcan, M., & Özçakir, B. (2021). Facilitating the development of Preservice teachers' proportional reasoning in geometric similarity problems using augmented reality activities. *Education and Information Technologies*, 26(2), 2327–2353. <https://doi.org/10.1007/s10639-020-10359-1>
- Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Biber, A. Ç. (2020). Students' difficulties in similar triangle questions. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 15(5), 1146–1159. <https://doi.org/10.18844/cjes.v15i5.5161>
- Cai, J., & Howson, G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. In K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 949–974). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_29
- Christou, C., Eliophotou-Menon, M. & Philippou, G. (2004). Teachers' concerns regarding the adoption of a new mathematics curriculum: An application of CBAM. *Educational Studies in Mathematics* 57(2), 157–176. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000049271.01649.dd>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2025). Systematic review of learning trajectories in early mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 57, 637–650. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01644-1>
- Cox, D. C. (2013). Similarity in Middle School Mathematics: At the Crossroads of Geometry and Number. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(1), 3–23. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.738377>
- Dietiker, L. (2015). Mathematical story: A metaphor for mathematics curriculum. *Educational Studies in Mathematics*, 90(3), 285–302. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9627-x>
- Edwards, L. D. (2003). The nature of mathematics as viewed from cognitive science. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3)* (pp. 1–10). Bellaria, Italy. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/cerme3_TG1.zip

- Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: A five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003–1024. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849>
- Hegg, M., Papadopoulos, D., Katz, B., & Fukawa-Connelly, T. (2018). Preservice teacher proficiency with transformations-based congruence proofs after a college proof-based geometry class. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 56–70. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.07.002>
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From Intended Curriculum to Written Curriculum: Examining the “Voice” of a Mathematics Textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344–369. <http://www.jstor.org/stable/30034878>
- Hollebrands, K. F. (2003). High school students’ understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55–72. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00004-X](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00004-X)
- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2022α). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό* (2η έκδ.). Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. <https://www2.iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide-datefilters/view-file?fid=5bc38bcb6fc9ed52ea6bc8dbc741123bfe4aacc57b97f48370886426d7e4ed31>
- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2022β). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α', Β' και Γ' τάξεις Γυμνασίου* (2η έκδ.). Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. <https://www2.iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide-datefilters/view-file?fid=234f9e36aaf85b15d8afa947c37d1ba3d7126638861bd973ca2907394a4b36ae>
- Judson, T. W. (2024). *Abstract algebra: Theory and applications* (Annual Edition 2024). Stephen F. Austin State University. <https://judsonbooks.org/aata-files/aata-20240706.pdf>

- Καφούση, Σ. (2024). Συζητώντας τους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών. *Ευκλείδης γ'* (τεύχος 100). Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. https://hms.gr/wp-content/uploads/2025/02/3_0_14_INPRESS_Kafousi_20.pdf
- Kaskaouti, P., & Moutsios–Rentzos, A. (2024). Similarity in Greek mathematics textbook series. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Educational resources in the mathematics classroom* (pp. 50–60). Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego. <https://cme.ur.edu.pl/wp-content/uploads/2025/06/cme-2024.pdf>
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (Fourth edition). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003008057>
- Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom—the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 129–156. <https://doi.org/10.7146/nomad.v20i3-4.148695>
- Μοδέστου, Μ. Σ. (2007). *Μαθηματική αναλογική σκέψη: Ένα πολυδιάστατο γνωστικό μοντέλο* (Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου). <https://gnosis.library.ucy.ac.cy/handle/7/39188>
- Macintyre, T., & Hamilton, S. (2010). Mathematics learners and mathematics textbooks: A question of identity? Whose curriculum? Whose mathematics? *The Curriculum Journal*, 21(1), 3–23. <https://doi.org/10.1080/09585170903558224>
- Mashingaidze, S. (2012). The Teaching of Geometric (Isometric) Transformations at Secondary School Level: What Approach to Use and Why? *Asian Social Science*, 8(15). <https://doi.org/10.5539/ass.v8n15p197>
- Mbatha, M., & Bansilal, S. (2023). Using the Van Hiele Theory to Explain Pre-Service Teachers' Understanding of Similarity in Euclidean Geometry. *Education Sciences*, 13(9), 861. <https://doi.org/10.3390/educsci13090861>
- Μοδέστου, Μ. Σ. (2007). *Μαθηματική αναλογική σκέψη: Ένα πολυδιάστατο γνωστικό μοντέλο* (Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου). <https://gnosis.library.ucy.ac.cy/handle/7/39188>
- Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Καλαβάσης, Φ. (2021). Συστημικές προσεγγίσεις και πολυπλοκότητα στον διεπιστημονικό εκπαιδευτικό σχεδιασμό για τα

- μαθηματικά στην εκπαιδευτική μονάδα. Στο Α. Κοντάκος & Φ. Καλαβάσης (Επ.), *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού 12* (σελ. 282-313). Διάδραση.
- Mullis, I. V. S. (2019). Introduction. In I. V. S. Mullis & M. O. Martin (Eds.), *TIMSS 2019 assessment frameworks* (pp. 1–10). TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/download-center/T19-Assessment-Frameworks.pdf>
- Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου. 2η Έκδοση*. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. <https://www2.iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide-datefilters/view-file?fid=aead5643b8da249d4e803df6707494dd52373f7e9250ffb50af9838c1bb54dd8>
- Remillard, J. T. (2005). Examining Key Concepts in Research on Teachers' Use of Mathematics Curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246. <https://doi.org/10.3102/00346543075002211>
- Remillard, J. T., Harris, B., & Agodini, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM*, 46(5), 735–749. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0585-z>
- Rezat, S., Fan, L., & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM – Mathematics Education*, 53(6), 1189–1206. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3>
- Σακονίδης, Χ., Κασσώτη, Ό., Καφούση, Σ., Κλιάπης, Π., Κλώθου, Ά., Λάτση, Μ., & Τριανταφυλλίδης, Τ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Δημοτικού. 2η Έκδοση*. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. <https://www2.iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide-datefilters/view-file?fid=817db4b3b9602fc985880c05c02c5a584512d1308bd1e526da853cde6ecd14b9>
- Santos, L., & Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 153–185). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_5

- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T. & Wiley, D. E. (2002). *Many Visions, Many Aims. A Cross-national Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics. Vol. 2*. Kluwer academic publishers. <https://doi.org/10.1007/978-0-306-47208-4>
- Schmidt, W. H., Wang, H. C., & McKnight, C. C. (2005). Curriculum coherence: An examination of US mathematics and science content standards from an international perspective. *Journal of Curriculum Studies*, 37(5), 525–559. <https://doi.org/10.1080/0022027042000294682>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Yao, X., & Manouchehri, A. (2019). Middle school students' generalizations about properties of geometric transformations in a dynamic geometry environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 100703. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.04.002>
- Young, M. (2014). What is a curriculum and what can it do? *The Curriculum Journal*, 25(1), 7–13. <https://doi.org/10.1080/09585176.2014.902526>
- Weinberg, A., & Wiesner, E. (2011). Understanding mathematics textbooks through reader-oriented theory. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 49–63. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9264-3>
- Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D., & Gagatsis, A. (2014). Estructura y niveles de habilidad en estudiantes de escuela primaria sobre geometría transformacional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-1), 149–160. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33553644007>

Η Κασκαούτη Παναγιώτα είναι υποψήφια διδακτόρισα στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Είναι κάτοχος πτυχίου Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης «Επιστήμες της Αγωγής» του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου. Διδάσκει Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τα ερευνητικά της ενδιαφέροντα εστιάζουν στην επιμόρφωση εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν Μαθηματικά.

*Ο Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος είναι Αναπληρωτής Καθηγητής Διδακτικής των Μαθηματικών στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (Ε.Κ.Π.Α.). Είναι κάτοχος Πτυχίου Μαθηματικών (Ε.Κ.Π.Α.), MSc in Mathematics Education του Πανεπιστημίου του Warwick, PhD in Mathematics Education του Πανεπιστημίου του Warwick (με υποτροφία από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών), ενώ έχει εκπονήσει μεταδιδακτορική έρευνα σε συστημικές προσεγγίσεις και πολυπλοκότητα στις συνδέσεις της επιστημολογίας με την ψυχολογία της μάθησης και της διδασκαλίας με τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό για την μαθηματική εκπαίδευση στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Είναι Συντονιστής του επιστημονικού περιοδικού *Ευκλείδης γ'* και μέλος της Συντακτικής της Επιτροπής του *International Journal for Mathematics in Education (HMS i-JME)*. Είναι μέλος της Διεθνούς Επιτροπής *International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching (CIEAEM)*, Ταμίας του Δ.Σ. της Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών. Το δημοσιευμένο επιστημονικό του έργο εμφανίζεται σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά, συλλογικούς τόμους και πρακτικά συνεδρίων. Στο ερευνητικό του έργο επικεντρώνεται στη πολυπλοκότητα της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών, συμπεριλαμβάνοντας συστημικές, διεπιστημονικές και πολυτροπικές προσεγγίσεις (βλ. <https://amoutsiosrentzos.com>).*

Constructing the Concept of Similarity in Primary and Lower Secondary Education: Institutional Discourse in the Greek Educational System

Panagiota Kaskaouti

PhD Candidate, Department of Pedagogy and Primary Education
National and Kapodistrian University of Athens
jkaskaouti@primedu.uoa.gr

Andreas Moutsios-Rentzos

Associate Professor, Department of Pedagogy and Primary Education
National and Kapodistrian University of Athens
moutsiosrent@primedu.uoa.gr

Abstract

The concept of similarity is a fundamental geometric notion that plays a significant role in the development of students' geometric reasoning and proportional reasoning. In the present study, similarity is mathematically defined as a transformation of the plane, and we investigate the way in which it is introduced and developed within the Greek educational context, based on the new Curriculum for Primary School and Middle School and the corresponding school textbooks. The findings of the study suggest that in Primary Education, the first empirical foundations are provided through mathematical transformation tasks that foster spatial perception and multiplicative thinking. In Middle School, the study of the concept becomes more systematic with the explicit introduction of similarity through similarity criteria and proof-based processes.

Keywords: similarity, curriculum, school textbooks, Primary School, Middle School

Kaskaouti Panagiota is a PhD Candidate at the Department of Primary Education, National and Kapodistrian University of Athens. She holds a Ptychio in Mathematics from the Aristotle University of Thessaloniki and a Master's Degree in Education Sciences from the Hellenic Open University. She teaches Mathematics in secondary education. Her research interests lie on the professional development of primary education teachers in Mathematics education.

Andreas Moutsios-Rentzos is an Associate Professor of Mathematics Education in the Department of Pedagogy and Primary Education at the National and Kapodistrian University of Athens (NKUOA). He holds a Ptychio in Mathematics (NKUOA), MSc in Mathematics Education (University of Warwick) and PhD in Mathematics Education (University of Warwick). His postdoctoral research is entitled "Mathematics education: Systemic approaches and complexity in the links of epistemology with the psychology of learning and of the teaching with educational design". He is Editor-in-chief of *Euclides γ'*. He is the current Editor-in-Chief of *Euclides γ'* and member of the Editorial Board of the *International Journal of Mathematics Education (HMS-iJME)*. He is a permanent member of the *International Commission for Study and Improvement of Mathematics Teaching (CIEAEM)* and the current Treasurer of the *Greek Association for Research in Mathematics Education*. His published work has appeared in international scientific journals, edited volumes, and conference proceedings. His research investigates the complexity of teaching and learning mathematics, including interdisciplinary and multimodal approaches. See <https://amoutsiosrentzos.com>