

Πυθαγόρειες Τριάδες: από την ανακάλυψη μιας “κανονικότητας” στη διατύπωση και την απόδειξη μιας πρότασης

Δημήτριος Ντρίζος

π. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Σεραφείμ Σαμορέλης

Καθηγ. Μαθηματικών, 8^ο Γεν. Λύκ. Τρικάλων
sersam@sch.gr

Εμμανουήλ Κοβάνογλου

Καθηγ. Μαθηματικών, 3^ο Γυμν. Καρδίτσας
manoskov@sch.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε μια πρόταση που αναφέρεται στην ακολουθία που δημιουργούν τα μήκη των υποτεινουσών των πρωτογενών Πυθαγορείων Τριάδων (ΠΤ). Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι τα μήκη των υποτεινουσών των πρωτογενών ΠΤ είναι οι ακέραιοι της μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$, που είναι είτε πρώτοι, είτε σύνθετοι με πρώτους παράγοντες μόνο της μορφής $4\lambda + 1$.

Λέξεις κλειδιά: Πυθαγόρειες τριάδες, υποτείνουσα, κανονικότητες, απόδειξη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ¹

Θεωρούμε γνωστό ότι οι Πυθαγόρειες Τριάδες (ΠΤ) που παράγονται από τα ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα μήκους μικρότερου του 30, είναι οι:

$$(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (8, 15, 17), (12, 16, 20), \\ (7, 24, 25), (15, 20, 25), (10, 24, 26), (20, 21, 29)$$

Στη συνέχεια, από αυτές κρατάμε μόνο τις πρωτογενείς, δηλαδή εκείνες τις τριάδες (β, γ, α) για τις οποίες είναι $ΜΚΔ(\beta, \gamma, \alpha) = 1$.

Αυτές είναι οι: $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29)$.

Εστιάζοντας την προσοχή μας στην ακολουθία των υποτείνουσών: 5, 13, 17, 25, 29, ... των παραπάνω πρωτογενών ΠΤ, θέτουμε το ερώτημα αν θα μπορούσαμε να βρούμε μια “κανονικότητα”, δηλαδή έναν μοτίβο (pattern) που να διέπει τους όρους της.

Κατά το στάδιο της ανασκόπησης σχετικών βιβλιογραφικών πηγών (βλ. Αντωνιάδης & Κοντογιώργης, 2015· Μάκρας, 2010· Ρόλυα, 1985) μάς απασχόλησε μια αναφορά την οποία σχολιάζουμε:

Ο George Pólya που θεωρείται εμπνευστής του επαγωγικού τρόπου προσέγγισης της γνώσης, επιχειρεί να εντοπίσει κάποια κανονικότητα η οποία διέπει τα μήκη των υποτείνουσών των πρωτογενών ΠΤ (Ρόλυα, 1985). Οι υποτείνουσες 5, 13 και 17, στις οποίες εστίασε την προσοχή του είναι πράγματι πρώτοι αριθμοί. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο για τις υποτείνουσες με μήκος μικρότερο του 20. Όμως σε μια κάπως ευρύτερη λίστα ΠΤ εντοπίζουμε και τις τριάδες $(7, 24, 25), (16, 63, 65), (36, 77, 85)$, που οι υποτείνουσές τους δεν είναι πρώτοι αριθμοί. Οι υποτείνουσες 5, 13, 17 και 29, πράγματι, όπως εικάζει ο Ρόλυα, προκύπτουν από τη μορφή $4κ + 1$, δίνοντας στο $κ$ τις τιμές 1, 3, 4, και 7 αντιστοίχως.

Οι τιμές του $κ$ εξελίσσονται με έναν τρόπο που δεν είναι σαφής. Αυτός ήταν βασικά ένας από τους λόγους που μας παρακίνησε να αναζητήσουμε κάποια “κανονικότητα” που να διέπει τα μήκη των υποτείνουσών των πρωτογενών ΠΤ.

¹ Η εργασία βασίζεται σε εργασία που παρουσιάστηκε στο 34^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της Ε.Μ.Ε.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Από γνωστό θεώρημα, η απόδειξη του οποίου περιλαμβάνεται στα “Στοιχεία” του Ευκλείδη (βιβλίο 1^ο, πρόταση 29), έχουμε ότι όλες οι πρωτογενείς ΠΤ δίνονται από τους τύπους:

$$\alpha = x^2 + y^2, \beta = 2xy \text{ και } \gamma = x^2 - y^2$$

όπου x, y φυσικοί πρώτοι μεταξύ τους και διαφορετικής αριτιότητας με $x > y$. Προφανώς ο β είναι άρτιος και οι γ, α περιττοί. Έτσι, ο περιττός α θα είναι της μορφής $4\lambda + 1$ ή $4\lambda + 3$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ακόμη ότι η εύρεση των υποτεινουσών των πρωτογενών ΠΤ ανάγεται στην εύρεση εκείνων των ακεραίων που μπορούν να γραφούν ως άθροισμα δύο τετραγώνων, ενός θετικού άρτιου και ενός θετικού περιττού, πρώτων μεταξύ τους. Από τους παραπάνω τύπους προκύπτουν εύκολα και οι κάθετες πλευρές.

Υποθέτουμε ότι ο x είναι άρτιος και ο y περιττός. Τότε προφανώς $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ και $y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, οπότε θα έχουμε $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, συνεπώς $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$.

Έχουμε λοιπόν ότι οι περιττοί αριθμοί της μορφής $4\lambda + 3$ δεν μπορούν να είναι υποτεινουσες πρωτογενών ΠΤ, οπότε οι υποτεινουσες των πρωτογενών ΠΤ είναι τελικά αριθμοί μόνο της μορφής $4\lambda + 1$.

Αν πάρουμε υπόψη ότι ο λ μπορεί να πάρει τη μορφή 3τ ή $3\tau + 1$ ή $3\tau + 2$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο περιττός α θα είναι της μορφής

$$12\tau + 1 \text{ ή } 12\tau + 5 \text{ ή } 12\tau + 9: (1)$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το τετράγωνο κάθε ακεραίου διαιρούμενου με το 3 δίνει υπόλοιπο 0 ή 1.

Πίνακας 1. Ισοϋπόλοιπα τετραγώνων όταν διαιρεθούν με το 3.

$x^2 \backslash y^2$	$y^2 \equiv 0 \pmod{3}$	$y^2 \equiv 1 \pmod{3}$
$x^2 \equiv 0 \pmod{3}$	$\alpha \equiv 0 \pmod{3}$	$\alpha \equiv 1 \pmod{3}$
$x^2 \equiv 1 \pmod{3}$	$\alpha \equiv 1 \pmod{3}$	$\alpha \equiv 2 \pmod{3}$

Η περίπτωση να είναι $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ και $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ αποκλείεται, επειδή αν $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ και $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, τότε $x \equiv 0 \pmod{3}$ και $y \equiv 0 \pmod{3}$ (αφού ο 3 είναι πρώτος και οι x, x^2 καθώς και οι y, y^2 έχουν τους ίδιους πρώτους διαιρέτες).

Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή οι x και y είναι πρώτοι μεταξύ τους. Άρα, οι υποτείνουσες των πρωτογενών ΠΤ είναι αριθμοί της μορφής $3\lambda + 1$ ή $3\lambda + 2$.

Επίσης, αν πάρουμε υπόψη ότι ο λ μπορεί να πάρει και τη μορφή 4τ ή $4\tau + 1$ ή $4\tau + 2$ ή $4\tau + 3$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο περιττός α θα είναι της μορφής:

$$12\tau + 1 \text{ ή } 12\tau + 5 \text{ ή } 12\tau + 7 \text{ ή } 12\tau + 11: (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) βρίσκουμε τελικά ότι όλες οι υποτείνουσες των πρωτογενών ΠΤ είναι της μορφής $12\tau + 1$ ή $12\tau + 5$.

Επομένως οι περιττοί αριθμοί που δεν είναι της μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$ αποκλείεται να είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤ.

Στο σημείο αυτό αναδύεται το ερώτημα: Ισχύει το αντίστροφο του προηγούμενου συμπεράσματος, δηλαδή κάθε ακέραιος της μορφής $12\tau + 1$ ή $12\tau + 5$ αντιστοιχεί σε υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤ; Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το αντίστροφο, για παράδειγμα, οι αριθμοί $49 = 12 \cdot 4 + 1$ και $77 = 12 \cdot 6 + 5$ ενώ είναι της μορφής $12\lambda + 1$ και $12\lambda + 5$ αντίστοιχα, εντούτοις δεν είναι όροι της ακολουθίας των υποτείνουσών των πρωτογενών ΠΤ:

5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97, 101, 109, 113, 125, ...

Απομένει λοιπόν να αναζητήσουμε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί της μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$, ώστε οι αριθμοί αυτοί να είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤ.

Με δεδομένη τη μορφή των ΠΤ που αναφέρονται στα “Στοιχεία”, μάς ενδιαφέρει να αναζητήσουμε εκείνους τους αριθμούς της μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$ οι οποίοι γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων δυο αριθμών πρώτων μεταξύ τους (η αρτιότητά τους θα είναι οπωσδήποτε διαφορετική, καθώς το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι περιττός αριθμός).

Επειδή όπως είδαμε οι περιττοί ακέραιοι της μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$ είναι υποσύνολο των ακεραίων της μορφής $4\nu + 1$, αυτοί θα είναι είτε πρώτοι, είτε σύνθετοι με πρώτους παράγοντες μόνο μορφής $4\mu + 1$, είτε θα έχουν έστω και έναν πρώτο παράγοντα μορφής $4\kappa + 3$.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΟΡΦΗΣ $4\nu + 1$ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΕΣΤΩ ΚΑΙ ΕΝΑ ΠΡΩΤΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ ΜΟΡΦΗΣ $4\kappa + 3$

Γνωρίζουμε ότι, αν q πρώτος μορφής $4\kappa + 3$ και $q|(a^2 + b^2)$, τότε $q|a$ και $q|b$ (βλ. Zagier, 1990).

Έστω $a = 4n + 1$ με πρώτο παράγοντα q της μορφής $q = 4\lambda + 3$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πρώτοι μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί x, y τέτοιοι, ώστε $a = x^2 + y^2$. Τότε όμως $q|a$, άρα $q|(x^2 + y^2)$, οπότε προκύπτει ότι $q|x$ και $q|y$, που είναι άτοπο αφού οι αριθμοί x, y είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι αριθμοί μορφής $4n + 1$ που έχουν έστω και ένα πρώτο παράγοντα μορφής $4k + 3$ δεν μπορούν να γραφούν ως άθροισμα τετραγώνων δυο αριθμών πρώτων μεταξύ τους. Αυτοί λοιπόν οι αριθμοί, άρα και οι αριθμοί μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$ που έχουν έστω και ένα πρώτο παράγοντα μορφής $4k + 3$ δεν είναι υποτείνουσες ΠΤ.

Για παράδειγμα, οι αριθμοί $8281 = 12 \cdot 690 + 1 = 13^2 \cdot 7^2$ και $77 = 12 \cdot 6 + 5 = 7 \cdot 11$ δεν μπορεί να είναι υποτείνουσες ΠΤ.

ΛΙΠΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΟΡΦΗΣ $4m + 1$ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΡΩΤΟΙ

Γνωρίζουμε ότι κάθε πρώτος αριθμός p με την ιδιότητα $p \equiv 1 \pmod{4}$ δηλαδή της μορφής $4m + 1$, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δυο τετραγώνων φυσικών αριθμών (βλ. Sierpiński, 2004).

Έτσι, αν ο αριθμός $a = 4m + 1$ είναι πρώτος, τότε υπάρχουν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί x, y τέτοιοι, ώστε $a = x^2 + y^2$. Προφανώς οι x, y έχουν διαφορετική αρτιότητα αφού a περιττός. Επίσης, οι x, y είναι και πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν $\text{ΜΚΔ}(x, y) = \delta$, τότε $\delta|x, \delta|y, \delta \leq x < a$ και $q|(x^2 + y^2)$. Οπότε $\delta|a$ και επειδή a πρώτος, προκύπτει $\delta = 1$.

Συνεπώς, οι αριθμοί μορφής $4m + 1$ που είναι πρώτοι, άρα και οι αριθμοί μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$ που είναι πρώτοι, γράφονται ως άθροισμα δύο τετραγώνων μη μηδενικών πρώτων μεταξύ τους, οπότε οι αριθμοί αυτοί αντιστοιχούν σε υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤ και μάλιστα μόνο μιας πρωτογενούς ΠΤ, π.χ. $5 = 2^2 + 1^2, 13 = 3^2 + 2^2, 17 = 4^2 + 1^2, 29 = 5^2 + 2^2$.

ΛΙΠΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΟΡΦΗΣ $4m + 1$ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΜΟΝΟ ΜΟΡΦΗΣ $4n+1$

Ένα γνωστό θεώρημα του Dirichlet (βλ. Ζαχαρίου & Ζαχαρίου, 1982) μας βεβαιώνει ότι, αν ο αριθμός a έχει πρώτους παράγοντες μόνο της μορφής $4\lambda + 1$, τότε ο αριθμός a είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤ.

Μάλιστα, αν d είναι το πλήθος αυτών των διαιρετών, τότε υπάρχουν ακριβώς 2^{d-1} πρωτογενείς ΠΤ με υποτείνουσα a .

Έτσι οι αριθμοί της μορφής $4m + 1$, επομένως και οι αριθμοί της μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$, που είναι σύνθετοι με πρώτους παράγοντες μόνο της μορφής $4n + 1$ είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤ.

Στον Πίνακα 2 δίνονται δύο τέτοια παραδείγματα.

Πίνακας 2. Υποτείνουσες ΠΤ μορφής $4n + 1$.

$\alpha = x^2 + y^2$	x	y	$\beta = 2xy$	$\gamma = x^2 - y^2$	Πρωτογενής ΠΤ (β, γ, α)
$65 = 5 \cdot 13 = \begin{cases} 8^2 + 1^2 \\ 7^2 + 4^2 \end{cases}$	8	1	16	63	(16, 63, 65)
	7	4	56	33	(56, 33, 65)
$125 = 5^3 = \begin{cases} 11^2 + 2^2 \\ 10^2 + 5^2 \end{cases}$	11	2	44	117	(44, 117, 125)
	οι αριθμοί 10 και 5 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε δεν προκύπτει ΠΤ				

Παραδείγμα 1^ο

Για τον $65 = 5 \cdot 13 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ επειδή το πλήθος των πρώτων παραγόντων μορφής $4\lambda + 1$ είναι $\delta = 2$ θα υπάρχουν δυο μόνο πρωτογενείς ΠΤ με υποτείνουσα τον αριθμό 65: οι (16, 63, 65) και (56, 33, 65).

Παραδείγμα 2^ο

Για τον $125 = 5^3 = 11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2$ και επειδή $\delta = 1$ υπάρχει μόνο μια πρωτογενής ΠΤ η $(2^{1-1} = 1)$ με υποτείνουσα τον αριθμό 125: η (44, 117, 125).

Η ΝΕΑ ΠΡΟΤΑΣΗ

Έπειτα από τις επισημάνσεις, διερευνήσεις και αποδείξεις που προηγήθηκαν, καταλήγουμε στη διατύπωση της πρότασής μας:

Ένας θετικός ακέραιος είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤ, αν και μόνο αν διαιρούμενος με το 12 δίνει υπόλοιπο 1 ή 5 και είναι είτε πρώτος, είτε σύνθετος με πρώτους παράγοντες μόνο της μορφής $4\lambda + 1$.

Σχόλιο

Οι αριθμοί μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$ προκύπτουν και από τον τύπο $6n + (-1)^n$, όπου n θετικός ακέραιος, καθώς:

$$12\lambda + 1 = 6 \cdot (2\kappa) + 1 = 6 \cdot (2\kappa) + (-1)^{2\kappa}$$

και

$$12\lambda + 5 = 6 \cdot (2\kappa + 1) - 1 = 6 \cdot (2\kappa + 1) + (-1)^{2\kappa + 1}$$

Παραδείγματα

1. Ο αριθμός $\alpha = 59$ δεν είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤ επειδή $59 = 12 \cdot 4 + 11$, δηλαδή διαιρούμενος με το 12 δίνει υπόλοιπο 11.
2. Ο αριθμός $\alpha = 12 \cdot 1315 + 5 = 15785$ δεν μπορεί να είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤ, επειδή η ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι $\alpha = 15785 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41$ που περιέχει και πρώτους παράγοντες της μορφής $4\lambda + 3$.
3. Ο αριθμός $\alpha = 12 \cdot 460 + 5 = 5525$ είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤ, επειδή η ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι $\alpha = 5525 = 5^2 \cdot 13 \cdot 17$ που περιέχει μόνο πρώτους παράγοντες της μορφής $4\lambda + 1$. Μάλιστα, επειδή το πλήθος των διαφορετικών πρώτων παραγόντων είναι $d = 3$, θα υπάρχουν μόνο $2^{3-1} = 4$ πρωτογενείς ΠΤ με υποτείνουσα τον αριθμό αυτό, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3. Πλήθος ΠΤ με δεδομένη υποτείνουσα.

$\alpha = x^2 + y^2$	x	y	$\beta = 2xy$	$\gamma = x^2 - y^2$	Πρωτογενής ΠΤ (β, γ, α)
$\alpha = 5525$					
$\alpha = 5^2 \cdot 13 \cdot 17$	74	7	1036	5427	(1036, 5427, 5525)
$\alpha = \begin{cases} 74^2 + 7^2 \\ 73^2 + 14^2 \\ 71^2 + 22^2 \\ 62^2 + 41^2 \\ 70^2 + 25^2 \\ 55^2 + 50^2 \end{cases}$	73	14	2044	5133	(2044, 5133, 5525)
	71	22	3124	4557	(3124, 4557, 5525)
	62	41	5084	2163	(5084, 2163, 5525)
	οι αριθμοί 70, 25 καθώς και οι 55, 50 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε δεν προκύπτει πρωτογενής ΠΤ.				

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αντωνιάδης, Ι., & Κοντογεώργης, Α. (2015). *Θεωρία Αριθμών και Εφαρμογές* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-882>

- Μάκρας, Σ., (2010). Πυθαγόρειες Τριάδες Ακεραίων. *Εκθέτης: Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας, Φύλλο 13*. <http://ekthetis.gr/Ekthetis006.pdf>
- Ρόλυα, G., (1985). Επαγωγή στη Θεωρία Αριθμών. *Ευκλείδης γ', 7*, 29–46. <http://niobe.hms.gr/apothema/?s=sa&i=2371>
- Sierpiński, W. (2004). *250 Προβλήματα της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών* (Μτφρ. Σ. Μάκρας). Κάτοπτρο.
- Zagier, D. (1990). A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ is a sum of two squares. *The American Mathematical Monthly*, 97(2), 144. <https://doi.org/10.1080/00029890.1990.11995565>
- Ζαχαρίου, Α. & Ζαχαρίου Ε. (1982), *Άρθρο στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια* (τ. 29). Εκδόσεις Ακάδημος.

Ο Δημήτριος Ντρίζος είναι πρώην Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών (2007 - 2018). Έχει μεταπτυχιακό δίπλωμα στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών (Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ). Μέλος της επιστημονικής επιτροπής για την εκπόνηση και αξιολόγηση της Τράπεζας Θεμάτων του Υπουργείου Παιδείας και του Ι.Ε.Π. για τα Μαθηματικά του Λυκείου (2014-2016). Διετέλεσε τακτικό και έκτακτο μέλος (θεματοδότης) Κεντρικών Επιτροπών πανελλαδικών εξετάσεων Λυκείου. Μέλος της συντακτικής επιτροπής του περιοδικού Ευκλείδης Γ' της ΕΜΕ από το 2009 και εντεύθεν. Μέλος της επιστημονικής επιτροπής όλων των ετήσιων συνεδρίων της ΕΜΕ από το 2008 και εντεύθεν. Μέλος επιτροπής του Ερευνητικού Κέντρου Αξιολόγησης και Επιμόρφωσης της ΕΜΕ, η οποία εκπόνησε Τράπεζα με «Επαναληπτικά Θέματα Μαθηματικών Γ' Λυκείου». Πρόεδρος του 49ου Βαθμολογικού Κέντρου (Τρικάλων) ανελλιπώς από το 2009 μέχρι το 2022. Έγραψε πολλά άρθρα για τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους στο Λύκειο, τα οποία δημοσιεύτηκαν σε περιοδικά της Ε.Μ.Ε. (Ευκλείδης Γ', Μαθηματική Επιθεώρηση, Ευκλείδης Β').

Ο Σεραφείμ Σαμορέλης εργάζεται στη δημόσια εκπαίδευση από το 2001 και τα τελευταία χρόνια είναι υποδιευθυντής στο 8ο ΓΕΛ Τρικάλων. Έχει μεταπτυχιακό δίπλωμα σπουδών του Τμήματος Δασολογίας, Επιστημών Ξύλου και Σχεδιασμού της Σχολής Τεχνολογίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Ορίσθηκε αρκετές φορές τα τελευταία έτη ως συντονιστής ειδικότητας ΠΕ03 στο 49ο Βαθμολογικό Κέντρο (Τρικάλων). Ήταν επιμορφωτής για το βιβλίο της Γ' Γυμνασίου το 2007, ενώ εκπόνησε και διδακτικά σενάρια για το Ι.Ε.Π. και για πειραματικές διδασκαλίες και σεμινάρια που οργανώθηκαν από τους σχολικούς συμβούλους του Ν. Τρικάλων.

Ο Εμμανουήλ Κοβάνογλου έχει πτυχίο Μαθηματικών από το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, πτυχίο Μηχανικού Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών (Τ.Ε. Λάρισας) και έχει μεταπτυχιακό δίπλωμα από το Ε.Α.Π., Σπουδές στην Εκπαίδευση. Έχει εικοσαετή εμπειρία διδασκαλίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση ως Μαθηματικός και ως καθηγητής Πληροφορικής και είναι εκπαιδευτικός εν ενεργεία. Έχει παρουσιάσει πάνω από 10 εργασίες δημοσιευμένες σε Πρακτικά συνεδρίων της Ε.Μ.Ε., σε Πανελλήνια Συνέδρια των Εκπαιδευτικών για τις Τ.Π.Ε. και σε Συνέδρια για την Εκπαιδευτική Καινοτομία.

Pythagorean triples: from the discovery of a pattern to the formulation and the proof of a proposition

Dimitrios Ntrizos

f. Mathematics School Advisor of Trikala and Karditsa
drizosdim@yahoo.gr

Serafim Samorelis

Mathematics teacher, 8th General Lykeio Trikala
sersam@sch.gr

Emmanouil Kovanoglou

Mathematics teacher, 3rd Gymnasio Karditsa
manoskov@sch.gr

Abstract

In this paper, we present a proposition that refers to the sequence generated by the lengths of the hypotenuses of the primitive Pythagorean Triples. Specifically, we prove that the lengths of the hypotenuses of the primitive Pythagorean triples have the form $12\lambda + 1$ or $12\lambda + 5$, which are either prime or composite with prime factors only of the form $4\lambda + 1$.

Keywords: Pythagorean triples, hypotenuses, regularities, proof.

Dimitrios Ntrizos is a former Mathematics School Advisor (2007 - 2018). He holds a Masters degree in the Didactics and Methodology of Mathematics (Department of Mathematics, NKUA). He has been a member of the scientific committee for the creation and evaluation of the Ministry of Education's and IEP's Subject Bank for high school mathematics (2014-2016). He served as a regular and substitute member (exam setter) of the Central Committees for the National Exams. He has been a member of the editorial board of the journal "Euclides Γ" of the Hellenic Mathematical Society (HMS) since 2009. He has been a member of the scientific committee for all annual conferences of the HMS since 2008. He served on the committee of the HMS Research Center for Assessment and Training, which developed a bank of “Revision Topics for Third Year High School Mathematics.” He was president of the 49th Grading Center (Trikala) from 2009 until 2022. He has written many articles on mathematics and its teaching in high school, published in HMS journals (Euclides Γ, Mathematical Review, Euclides B).

Serafeim Samorelis has been working in public education since 2001 and in recent years has been Deputy Principal at the 8th General High School (GEL) of Trikala. He holds a Masters degree from the Department of Forestry, Wood Science and Engineering, School of Technology, University of Thessaly. In recent years, he has served several times as a PE03 subject coordinator at the 49th Grading Center (Trikala). He was a trainer for the Third Year Gymnasium (lower secondary school) math book in 2007 and has also developed teaching scenarios for IEP, as well as for experimental teaching sessions and seminars organized by the school advisors of the Trikala prefecture.

Emmanouil Kovanoglou holds a Mathematics degree from the University of Ioannina, a Computer Engineering and Telecommunications Engineering degree (TE Larisa), and a postgraduate diploma from Hellenic Open University (HOU), in Education Studies. He has twenty years' experience teaching in secondary education both as a mathematician and as an informatics teacher and is currently active in education. He has presented over 10 papers published in the proceedings of the Hellenic Mathematical Society's conferences, in National Conferences of Teachers for ICT, and in Conferences on Educational Innovation.