

Οι διαδραστικοί βοηθοί απόδειξης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση: η περίπτωση του Lean

Αθηνά Θωμά

University of Southampton, Ηνωμένο Βασίλειο

a.thoma@soton.ac.uk

Περίληψη

Το παρόν άρθρο εξετάζει τους διαδραστικούς βοηθούς απόδειξης, εστιάζοντας ειδικότερα στο Lean και στη χρήση του στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης στο πανεπιστήμιο. Τα ευρήματα από τις πρώτες έρευνες στον τομέα αυτό δείχνουν ότι το Lean μπορεί να συμβάλει στην ενίσχυση της δομής και της ακρίβειας των αποδείξεων που συντάσσουν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες, καλλιεργώντας παράλληλα μεγαλύτερη επίγνωση σχετικά με την ορθότητα και τη σαφήνεια των επιχειρημάτων τους, καθώς έρχονται σε επαφή με τυπικές μορφές απόδειξης. Ωστόσο, επισημαίνονται και δυσκολίες που σχετίζονται με τη συντακτική πολυπλοκότητα του εργαλείου και την ανάγκη για κατάλληλη διδακτική υποστήριξη και εγχειρίδια. Τέλος, το άρθρο αναφέρεται στην ενεργή κοινότητα του Lean, στη σημερινή συμβολή του Lean στη συζήτηση γύρω από τις αποδείξεις που παράγονται με τη βοήθεια Μεγάλων Γλωσσικών Μοντέλων (Large Language Models). Επίσης, αναδεικνύει την ανάγκη για διεξαγωγή περαιτέρω εκπαιδευτικής έρευνας σχετικά με τον ρόλο και τις δυνατότητες των διαδραστικών βοηθών απόδειξης στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: Διαδραστικοί βοηθοί απόδειξης, Lean, Τριτοβάθμια εκπαίδευση, Τεχνολογία στη διδασκαλία Μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση έχει γνωρίσει σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια, καθώς τα ψηφιακά εργαλεία αποκτούν ολοένα και πιο ενεργό ρόλο στην εκπαίδευση (Geraniou κ.ά., 2024). Πέρα από τη χρήση τέτοιων εργαλείων για την αξιολόγηση των φοιτητών και των φοιτητριών, όπως το STACK (Sangwin, 2023), στα προγράμματα σπουδών περιλαμβάνονται επίσης μαθήματα που παρέχουν στους φοιτητές και τις φοιτήτριες τη δυνατότητα να εμβαθύνουν σε γλώσσες προγραμματισμού ή σε δραστηριότητες που συνδυάζουν προγραμματισμό και εφαρμογές των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια των σπουδών τους (Buteau κ.ά., 2020).

Παράλληλα εμφανίζεται ένα νέο εργαλείο, το οποίο, αν και χρησιμοποιείται εδώ και δεκαετίες στη μαθηματική έρευνα (de Bruijn, 1980), μόλις πρόσφατα έχει αρχίσει να εισάγεται πιο συστηματικά στη διδασκαλία των Μαθηματικών: οι διαδραστικοί βοηθοί απόδειξης (Interactive Theorem Provers· Avigad, 2019). Πρόκειται για λογισμικά που επιτρέπουν στους χρήστες να συντάσσουν αποδείξεις με αυστηρό και τυπικό τρόπο, ώστε να μπορούν να επαληθεύονται αυτόματα από τον υπολογιστή.

Ένα χαρακτηριστικό και δημοφιλές παράδειγμα διαδραστικού βοηθού απόδειξης είναι το Lean. Στην έρευνα των Μαθηματικών, το Lean χρησιμοποιείται ήδη για την τυποποίηση σημαντικών θεωρημάτων, όπως το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat (Buzzard, 2022). Παράλληλα όλο και περισσότεροι¹ πανεπιστημιακοί διεθνώς το εντάσσουν στη διδασκαλία τους είτε σε τμήματα Μαθηματικών είτε σε τμήματα Πληροφορικής. Πρόσφατες μελέτες από την πλευρά της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν εξετάσει την εμπειρία των φοιτητών που χρησιμοποιούν το Lean είτε μέσα από εισαγωγικά μαθήματα με κυρίως στόχο τη διδασκαλία της απόδειξης (π.χ. Iannone κ.ά., 2025· Thoma & Iannone, 2022) είτε στο πλαίσιο σεμιναρίων (Hanna κ.ά., 2024). Τα ευρήματα αυτών των μελετών αναδεικνύουν τις δυνατότητες του Lean ως προς τη διδασκαλία και κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης, ενώ παράλληλα επισημαίνουν τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά τη χρήση του (π.χ. Iannone & Thoma, 2024).

¹ Από το σημείο αυτό και εξής, για λόγους οικονομίας χώρου και μόνο, χρησιμοποιείται ένα μόνο γραμματικό γένος.

Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε στους διαδραστικούς βοηθούς απόδειξης, με κεντρικό παράδειγμα το Lean. Παρουσιάζουμε τι είναι γνωστό μέχρι σήμερα για τη χρήση του στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο και συζητούμε πιθανά πλεονεκτήματα και προκλήσεις που προκύπτουν από την ενσωμάτωσή του.

ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΟΙ ΒΟΗΘΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Η μαθηματική απόδειξη αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο του μαθηματικού λόγου και βασικό αντικείμενο μελέτης στη Διδακτική των Μαθηματικών. Η σχετική βιβλιογραφία αναδεικνύει τις πολλαπλές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στην κατανόηση και σύνταξη αποδείξεων (π.χ. Stylianides κ.ά., 2024). Παρά τις προσπάθειες των διδασκόντων και την εφαρμογή παιδαγωγικών παρεμβάσεων, οι φοιτητές συνεχίζουν να δυσκολεύονται σε διάφορες πτυχές της αποδεικτικής διαδικασίας, όπως δείχνουν πλήθος ερευνών (π.χ. Selden, 2012· Weber & Alcock, 2004). Πρόσφατες μελέτες έχουν αρχίσει να διερευνούν κατά πόσο η χρήση διαδραστικών βοηθών απόδειξης μπορεί να συμβάλει στην υποστήριξη των φοιτητών σε σχέση με ορισμένες από τις δυσκολίες που συναντούν (π.χ. Thoma & Iannone, 2022· Yan & Hanna, 2023).

Στην ερευνητική κοινότητα των Μαθηματικών, η έννοια της απόδειξης έχει εξελιχθεί σημαντικά με την ανάπτυξη της τυπικής (formal) απόδειξης. Η τυπική απόδειξη είναι ένα κείμενο που ακολουθεί αυστηρούς συντακτικούς και σημασιολογικούς κανόνες, το οποίο μπορεί να ελεγχθεί από υπολογιστή (Weir, 2016). Μέσω της διαδικασίας τυποποίησης (formalisation), οι παραδοσιακές, άτυπες αποδείξεις μετασχηματίζονται σε τυπικές, με κάθε βήμα να διατυπώνεται με ακρίβεια και σαφήνεια. Οι διαδραστικοί βοηθοί απόδειξης (interactive theorem provers) προσφέρουν ένα υπολογιστικό περιβάλλον στο οποίο ο χρήστης συντάσσει την απόδειξη σταδιακά, ενώ το σύστημα ελέγχει αυτόματα την ορθότητα κάθε βήματος. Σε αντίθεση με τα συστήματα αυτόματης επίλυσης θεωρημάτων (automated theorem provers), οι διαδραστικοί βοηθοί στηρίζονται στη συνεργασία ανθρώπου και μηχανής: ο χρήστης καθορίζει τη στρατηγική και τα ενδιάμεσα βήματα, ενώ το σύστημα επαληθεύει την εγκυρότητά τους. Το τελικό αποτέλεσμα είναι μια απόδειξη που συνδυάζει την ανθρώπινη διαίσθηση με την υπολογιστική αυστηρότητα, διασφαλίζοντας πλήρη τυπική ορθότητα (Avigad, 2019).

Πέρα από την ακρίβεια και την ορθότητα, η τυποποίηση και η χρήση διαδραστικών βοηθών απόδειξης έχουν και μια ακόμη σημαντική διάσταση. Οι βοηθοί αυτοί βασίζονται σε μια ψηφιακή βιβλιοθήκη. Κάθε ορισμός και

κάθε απόδειξη που τυποποιείται δεν αποτελεί απλώς μια νέα προσθήκη στη βιβλιοθήκη, αλλά ένα στοιχείο που μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί, να επεκταθεί και να συνδεθεί με άλλους ορισμούς και αποδείξεις. Ένα ακόμη ενδιαφέρον στοιχείο αφορά τη συνεργατική φύση αυτών των περιβαλλόντων, καθώς οι αποδείξεις μπορούν να χωριστούν σε επιμέρους τμήματα στα οποία διαφορετικοί χρήστες συνεισφέρουν με δικό τους κώδικα.

Ένα από τα πρώτα συστήματα αυτού του είδους ήταν το Automath του de Bruijn (de Bruijn, 1980). Στη συνέχεια αναπτύχθηκαν τα Isabelle, Rocq (παλαιότερα γνωστό ως Coq), Lean και άλλα. Με τη βοήθειά τους έχουν επιτευχθεί σημαντικά επιτεύγματα, όπως η τυπική απόδειξη του Θεωρήματος των Τεσσάρων Χρωμάτων (Gonthier, 2008 – χρησιμοποιώντας το Rocq), ενώ, όπως έχει ήδη αναφερθεί, βρίσκεται σε εξέλιξη η τυποποίηση της απόδειξης του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat (Buzzard, 2022 – χρησιμοποιώντας το Lean).

Το ενδιαφέρον για τους διαδραστικούς βοηθούς απόδειξης έχει αναζωπυρωθεί τα τελευταία χρόνια, τόσο χάρη στην ενεργή υποστήριξη γνωστών προσωπικοτήτων της μαθηματικής κοινότητας, όπως των Kevin Buzzard (π.χ. Buzzard, 2022) και Terence Tao (Tao, 2025), όσο και λόγω της ταχύτατης προόδου της Τεχνητής Νοημοσύνης. Τα Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα (Large Language Models) έχουν εντυπωσιάσει με τις επιδόσεις και τις δυνατότητές τους, ωστόσο συχνά παράγουν αποδείξεις ή λύσεις που στερούνται εγκυρότητας. Σε αυτό το πλαίσιο, οι διαδραστικοί βοηθοί απόδειξης μπορούν να διαδραματίσουν κρίσιμο ρόλο, επιτρέποντας τον αυστηρό έλεγχο της ορθότητας των επιχειρημάτων που παράγονται από την Τεχνητή Νοημοσύνη (Tao, 2025).

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ LEAN

Ένα από τα πιο γνωστά και ευρέως χρησιμοποιούμενα περιβάλλοντα αυτή τη στιγμή είναι το Lean. Το Lean δημιουργήθηκε από τον Leonardo de Moura (de Moura κ.ά., 2015) και βασίζεται στη Θεωρία Τύπων (Type Theory). Πρόκειται για ένα εργαλείο ανοιχτού κώδικα, σχεδιασμένο ώστε να συνδέει τη διαδραστική με την αυτοματοποιημένη απόδειξη. Πιο συγκεκριμένα, ενώ ενσωματώνει στοιχεία αυτοματοποίησης, δίνει στον χρήστη τη δυνατότητα να γράφει αποδείξεις βήμα προς βήμα, ελέγχοντας κάθε γραμμή κώδικα και τη λογική σύνδεσή της με τις προηγούμενες. Αν υπάρχει κάποιο λάθος ή ασάφεια, το Lean ενημερώνει τον χρήστη, επισημαίνοντας τη γραμμή κώδικα στην οποία εντοπίζεται η ασυνέπεια ή το σφάλμα.

Το Lean διαθέτει μια ενεργή διεθνή κοινότητα που αναπτύσσει συνεχώς υλικό και επεκτείνει τη βιβλιοθήκη *mathlib*², η οποία περιλαμβάνει ήδη τυποποιημένους ορισμούς και αποδείξεις από διάφορους τομείς των Μαθηματικών (π.χ. Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Ανάλυση, Γεωμετρία). Ο χρήστης μπορεί να αξιοποιήσει τα υπάρχοντα αρχεία της βιβλιοθήκης – δηλαδή τους ορισμούς και τις αποδείξεις – στη σύνταξη των δικών του αποδείξεων.

Το περιβάλλον του Lean υποστηρίζει δύο βασικούς τρόπους γραφής αποδείξεων: τη λειτουργία όρων (*term mode*) και τη λειτουργία μέσω οδηγιών (*tactic mode*). Στην πρώτη περίπτωση, η απόδειξη γράφεται ως μια λογική έκφραση, η οποία συνήθως δεν είναι εύκολα κατανοητή από τον χρήστη. Στη δεύτερη, η απόδειξη βασίζεται σε μια ακολουθία οδηγιών (*tactics*), όπως *rewrite* (αντικαθιστά ισοδύναμες εκφράσεις) ή *induction* (απόδειξη με επαγωγή)³. Κάθε οδηγία μετασχηματίζει τον τρέχοντα στόχο σε απλούστερους στόχους, μέχρι να ολοκληρωθεί η απόδειξη. Το Lean εμφανίζει σε κάθε στάδιο της απόδειξης τις διαθέσιμες μεταβλητές, τις υποθέσεις και τον ενεργό στόχο, επιτρέποντας στον χρήστη να καθοδηγεί τη ροή του συλλογισμού (Yan & Hanna, 2023). Στο παρόν άρθρο εστιάζουμε αποκλειστικά σε αποδείξεις γραμμένες μέσω οδηγιών (*tactic mode*).

Η διαδικασία απόδειξης στο Lean μπορεί να ακολουθεί δύο βασικές στρατηγικές: *backward* και *forward* (Avigad κ.ά., 2017). Στην πρώτη, ο χρήστης ξεκινά από το συμπέρασμα και εργάζεται προς τα πίσω, αναλύοντας τον στόχο σε επιμέρους βήματα μέχρι να φτάσει σε γνωστά ή προφανή αποτελέσματα, ενώ στη δεύτερη, η απόδειξη ξεκινά από τις υποθέσεις και προχωρά προς τον στόχο. Οι χρήστες μπορούν να αλληλεπιδρούν με το Lean είτε διαδικτυακά, μέσω της αντίστοιχης πλατφόρμας⁴, είτε εγκαθιστώντας το τοπικά στον υπολογιστή τους. Η κοινότητα του Lean είναι ιδιαίτερα ενεργή και υποστηρικτική και παρέχει διάφορα εγχειρίδια και υποστηρικτικό υλικό με διαφορετικά επίπεδα εξοικείωσης.

² Για μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των μαθηματικών περιοχών που ήδη περιλαμβάνονται στη βιβλιοθήκη *mathlib*, ο αναγνώστης μπορεί να επισκεφθεί τον ακόλουθο σύνδεσμο: <https://leanprover-community.github.io/mathlib-overview.html>

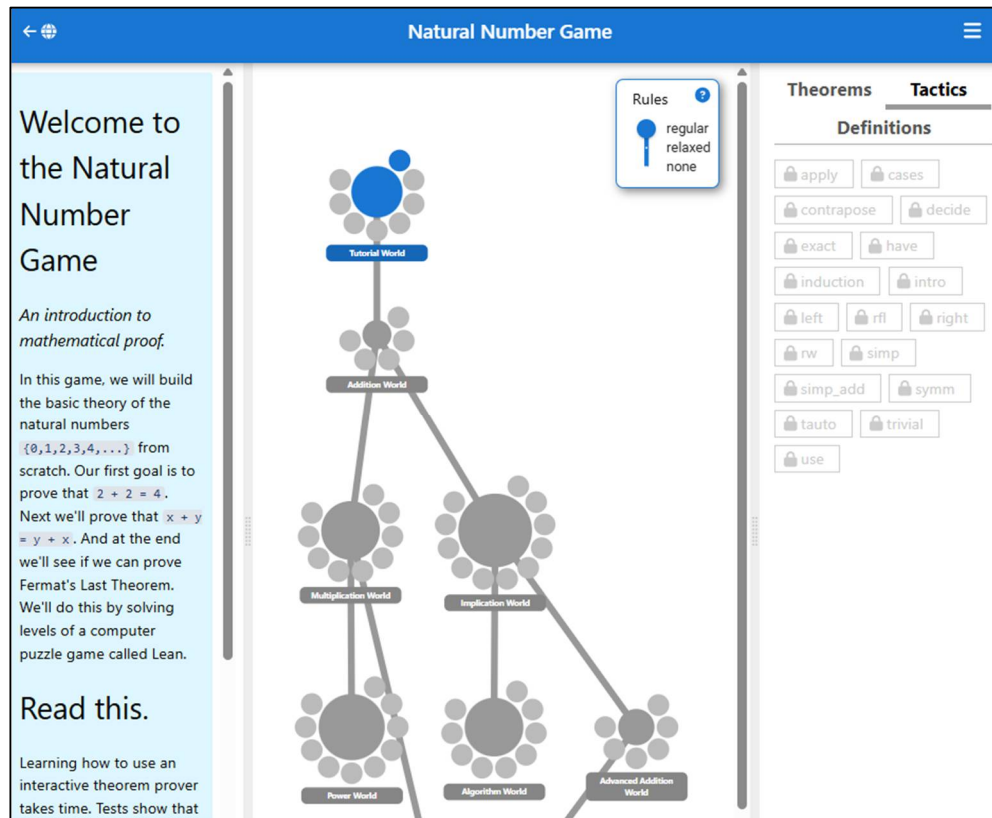
³ Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις οδηγίες (*tactics*), ο αναγνώστης μπορεί να επισκεφθεί τη σελίδα: https://lean-lang.org/theorem_proving_in_lean4/Tactics/

⁴ Διαδικτυακή πλατφόρμα για Lean 4: <https://live.lean-lang.org/>

Με στόχο την εξοικείωση με τη λογική της τυπικής απόδειξης, έχουν επίσης αναπτυχθεί διαδραστικά παιχνίδια. Το πιο γνωστό από αυτά είναι το Natural Number Game⁵, ένα διαδικτυακό εργαλείο που καθοδηγεί τους χρήστες μέσα από αποδείξεις που βασίζονται στους φυσικούς αριθμούς (Εικόνα 1). Ο χρήστης καλείται να αποδείξει βασικά θεωρήματα – όπως η αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης δύο φυσικών αριθμών (Εικόνα 2 και 3) – χρησιμοποιώντας το Lean. Μέσω αυτού του εργαλείου, ο χρήστης εξοικειώνεται σταδιακά με τις διάφορες οδηγίες (tactics) και συντάσσει αποδείξεις στο Lean, λαμβάνοντας άμεση ανατροφοδότηση από το σύστημα για την ορθότητα και τη σαφήνεια των αποδείξεών του.

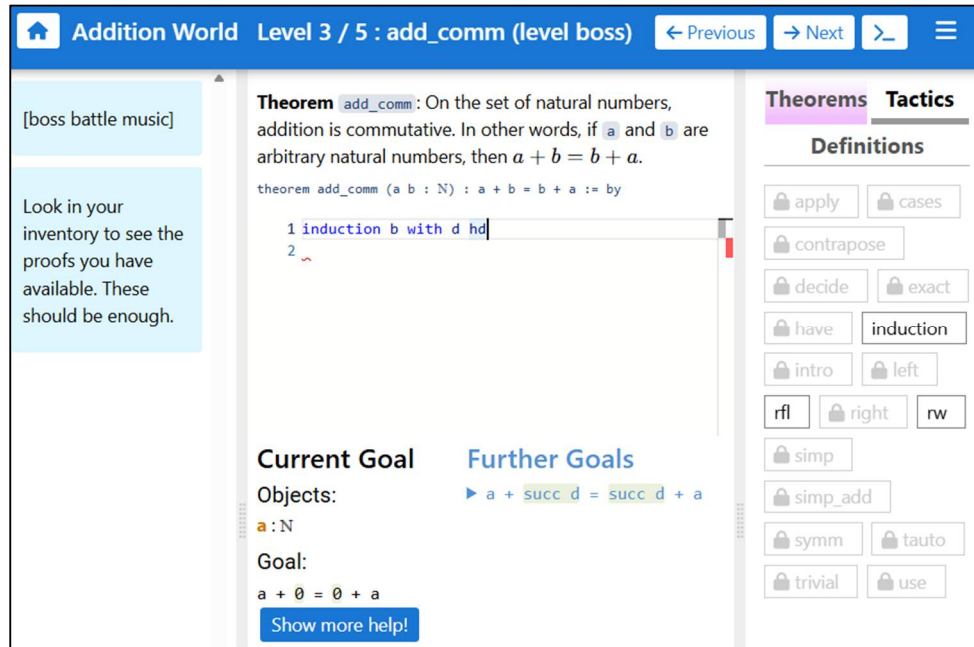
Το παιχνίδι είναι σχεδιασμένο ώστε να εισάγει σταδιακά τους χρήστες στη σύνταξη και τη δομή των τυπικών αποδείξεων. Εστιάζει στους φυσικούς αριθμούς, ώστε το μαθηματικό περιεχόμενο να είναι όσο το δυνατόν πιο οικείο, και οργανώνεται σε «κόσμους», δηλαδή θεματικές ενότητες όπως η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός ή η λογική (Εικόνα 1). Πιο συγκεκριμένα, στα αριστερά εμφανίζονται πληροφορίες για το παιχνίδι, στο κέντρο προβάλλονται οι «κόσμοι» του παιχνιδιού, οι οποίοι γίνονται πράσινοι όσο ο χρήστης προχωρά στα επίπεδα. Καθώς ο χρήστης προχωρά στα επίπεδα του παιχνιδιού, «ξεκλειδώνει» νέα θεωρήματα και οδηγίες, τις οποίες μπορεί να χρησιμοποιήσει σε επόμενες αποδείξεις (Εικόνα 1, δεξιά πλευρά). Στην αριστερή πλευρά του περιβάλλοντος (Εικόνα 1, Εικόνα 2, αριστερά) εμφανίζονται επιπλέον πληροφορίες και παρέχεται η δυνατότητα στον χρήστη να ζητήσει βοήθεια σε περίπτωση που έχει δυσκολευτεί (Εικόνα 2, το κουμπί «Show more help!» στο κάτω μέρος της οθόνης). Στη δεξιά πλευρά προβάλλονται οι οδηγίες και οι αποδείξεις που έχουν ήδη ξεκλειδωθεί (Εικόνα 2, δεξιά πλευρά), ενώ ο χρήστης μπορεί ανά πάσα στιγμή να δει περισσότερες πληροφορίες για καθεμία από αυτές. Στο κεντρικό τμήμα της οθόνης, ο χρήστης γράφει τον κώδικα και λαμβάνει ανατροφοδότηση για κάθε γραμμή που προσθέτει, βλέποντας άμεσα τόσο την εγκυρότητα όσο και την επίδραση που έχει η συγκεκριμένη γραμμή στις υποθέσεις και στον τρέχοντα στόχο (Εικόνα 2, όπου παρουσιάζονται οι δύο επιμέρους στόχοι της απόδειξης με επαγωγή καθώς και οι μεταβλητές· Εικόνα 3, όπου εμφανίζεται το μήνυμα που υποδεικνύει την ολοκλήρωση της απόδειξης).

⁵ Natural Number Game in Lean 4: <https://adam.math.hhu.de/#/g/leanprover-community/nng4>



Εικόνα 1. Η αρχική οθόνη του Natural Number Game.

Πιο συγκεκριμένα, η παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2), από το επίπεδο 3 του «Κόσμου της Πρόσθεσης» (Addition World), παρουσιάζει το περιβάλλον εργασίας. Στο κέντρο, ο χρήστης γράφει τον κώδικα για να αποδείξει ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Στα αριστερά εμφανίζονται επεξηγηματικά σχόλια και οδηγίες, ενώ στα δεξιά παρουσιάζονται οι διαθέσιμες οδηγίες (tactics), καθώς και οι ορισμοί και τα θεωρήματα που είναι διαθέσιμα στον χρήστη.



Εικόνα 2. Η οθόνη του επιπέδου 3 από τον «Κόσμο της Πρόσθεσης» (Addition World) του Natural Number Game.

Όταν ο χρήστης ολοκληρώσει την απόδειξη, λαμβάνει συγχαρητήριο μήνυμα από το Lean (Εικόνα 3) και μπορεί να επεξεργαστεί περαιτέρω την απόδειξη, μετακινώντας τον κέρσορα και επισκεπτόμενος τις διαφορετικές γραμμές του κώδικα, ώστε να παρακολουθήσει σε κάθε σημείο τις αλλαγές που συμβαίνουν στις μεταβλητές, στις υποθέσεις που διαθέτει και στους επιμέρους στόχους.

Theorem `add_comm`: On the set of natural numbers, addition is commutative. In other words, if `a` and `b` are arbitrary natural numbers, then $a + b = b + a$.

```
theorem add_comm (a b : N) : a + b = b + a := by

  1 induction b with d hd
  2 rw [add_zero]
  3 rw [zero_add]
  4 rfl
  5 rw [add_succ]
  6 rw [succ_add]
  7 rw [hd]
  8 rfl
```

Level completed! 🎉

No Goals

Εικόνα 3. Η ολοκληρωμένη απόδειξη της αντιμεταθετικής ιδιότητας στον «Κόσμο της Πρόσθεσης» (Addition World) του Natural Number Game.

Το περιβάλλον του παιχνιδιού αυτού χρησιμοποιεί μια πιο ελεγχόμενη και περιορισμένη έκδοση του Lean, ώστε να διευκολύνει τον χρήστη στην εκμάθηση των βασικών αρχών. Η αντίστοιχη απόδειξη στη διαδικτυακή πλατφόρμα του Lean παρουσιάζεται παρακάτω (Εικόνα 4). Παρατηρούνται ορισμένες μικρές διαφορές όσον αφορά τον κώδικα, καθώς και την τοποθέτηση της ανατροφοδότησης από το Lean, η οποία εμφανίζεται στη δεξιά πλευρά της οθόνης. Παρόμοια, όπως και στο περιβάλλον του Natural Number Game, ο χρήστης μπορεί να βλέπει σε κάθε γραμμή της απόδειξης τις μεταβλητές, τις υποθέσεις και τον τρέχοντα στόχο.

```

1 import Init.Data.Nat.Basic
2 open Nat
3
4 theorem add_comm' (a b : Nat) : a + b = b + a := by
5   induction b with
6   | zero =>
7     -- a + 0 = 0 + a
8     rw [Nat.add_zero, Nat.zero_add]
9   | succ d hd =>
10    -- a + (d+1) = (d+1) + a
11    rw [Nat.add_succ, Nat.succ_add, hd]

```

▼ MathlibDemo.lean:9:16
▼ Tactic state
1 goal
▼ case succ
a d : Nat
hd : a + d = d + a
└ a + (d + 1) = d + 1 + a
► All Messages (0)

Εικόνα 4. Η απόδειξη του `add_comm` (αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης στους φυσικούς αριθμούς) όπως παρουσιάζεται στην πλατφόρμα Lean.

ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ LEAN ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Το Lean χρησιμοποιείται ήδη σε διεθνή τμήματα Μαθηματικών και Πληροφορικής⁶. Στα τμήματα Μαθηματικών, χρησιμοποιείται κυρίως σε μαθήματα που εστιάζουν στη διδασκαλία της απόδειξης. Όπως σημειώνει ο Avigad (2019), τέτοια περιβάλλοντα μπορούν να βοηθήσουν τους φοιτητές να αντιληφθούν την απόδειξη όχι ως ένα στατικό τελικό προϊόν, αλλά ως μια δυναμική διαδικασία ελέγχου, αναστοχασμού και λογικής διερεύνησης. Πιο συγκεκριμένα, ο Avigad (2019) περιγράφει ένα μάθημα στο Πανεπιστήμιο Carnegie Mellon, στο οποίο δίνεται έμφαση σε τρεις διαφορετικές «γλώσσες»: την άτυπη μαθηματική γλώσσα (informal mathematical language), την τυπική συμβολική λογική γλώσσα (formal symbolic logic), καθώς και την υπολογιστική γλώσσα αποδείξεων (computational proof language). Μέσω της διδασκαλίας αυτού του μαθήματος και της έμφασης σε αυτές τις τρεις διαφορετικές γλώσσες, οι φοιτητές κατανόησαν τις μεταξύ τους διαφορές αλλά και τις συνδέσεις, γεγονός που συνέβαλε ουσιαστικά στην κατανόηση της έννοιας της απόδειξης.

Η έρευνα στον χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών σχετικά με τη χρήση του Lean από φοιτητές βρίσκεται ακόμη σε πρώιμο στάδιο. Ωστόσο, τα μέχρι τώρα δεδομένα (π.χ. Thoma & Iannone, 2022), καθώς και η αυξανόμενη διάδοσή του σε περισσότερα πανεπιστημιακά τμήματα, υποδεικνύουν το ενδιαφέρον που παρουσιάζει το πεδίο και αναδεικνύουν τη σημασία περαιτέρω μελετών. Η Thoma και η Iannone (2022) διερεύνησαν τη χρήση του Lean σε ένα εισαγωγικό μάθημα με έμφαση στην απόδειξη, όπου οι πρωτοετείς φοιτητές είχαν τη δυνατότητα, εφόσον το επιθυμούσαν, να

⁶ Η λίστα με τα μαθήματα όπου διδάσκεται το Lean: <https://leanprover-community.github.io/teaching/courses.html>

έρθουν σε επαφή με το περιβάλλον του Lean. Εξέτασαν την επίδραση της χρήσης του Lean στην ικανότητα σύνταξης αποδείξεων σε χαρτί. Οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα περιλάμβαναν τόσο άτομα που είχαν χρησιμοποιήσει το Lean όσο και φοιτητές που δεν το είχαν χρησιμοποιήσει. Και οι δύο ομάδες κλήθηκαν να συντάξουν αποδείξεις μη οικείες προς το περιεχόμενο των σπουδών τους (όπως αποδείξεις για *abundant numbers*). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι φοιτητές που είχαν χρησιμοποιήσει το Lean παρήγαγαν αποδείξεις με μεγαλύτερη σαφήνεια και πιο ξεκάθαρη δομή. Ωστόσο, η χρήση του Lean δεν ήταν εύκολη, ιδίως εκείνη την περίοδο, καθώς δεν υπήρχαν πολλά εγχειρίδια ή οδηγίες για τους χρήστες.

Στο πλαίσιο ευρύτερης έρευνάς τους, οι Iannone και Thoma (2024) διερεύνησαν τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι φοιτητές κατά τη χρήση του Lean, καθώς και τους παράγοντες που, σύμφωνα με τους ίδιους, δυσχέραιναν την αποτελεσματική αξιοποίησή του. Εκτός από ζητήματα κατανόησης και χρήσης του κώδικα, οι φοιτητές ανέφεραν δυσκολίες στη σύνδεση ανάμεσα στις αποδείξεις γραμμένες σε Lean και στις παραδοσιακές αποδείξεις με μολύβι και χαρτί, μορφή με την οποία ήταν ήδη εξοικειωμένοι. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι φοιτητές που χρησιμοποίησαν το Lean φάνηκαν να προσεγγίζουν τη φύση των μαθηματικών με διαφορετικό τρόπο, επιδεικνύοντας μια βαθύτερη επίγνωση της δομής και της τεκμηρίωσης των αποδείξεων.

Ως επόμενο βήμα πέρα από τη διερεύνηση της επίδρασης του Lean στη σύνταξη αποδείξεων με μολύβι και χαρτί (Thoma & Iannone, 2022), οι Thoma και Iannone εξέτασαν τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές συντάσσουν αποδείξεις απευθείας σε κώδικα Lean (Thoma & Iannone, 2023). Στο πλαίσιο αυτό, ζήτησαν από φοιτητές να ασχοληθούν με το Natural Number Game⁷ και να συντάξουν αποδείξεις σε κώδικα Lean. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ορισμένοι φοιτητές συνέτασσαν αποδείξεις παρόμοιες με εκείνες που θα έγραφαν στο χαρτί, ενώ άλλοι βασίζονταν περισσότερο στην αυτοματοποίηση, χωρίς να κατανοούν πλήρως τη λειτουργία του κώδικα που χρησιμοποιούσαν. Επεκτείνοντας αυτή τη γραμμή έρευνας, οι Hanna και συνεργάτες (2024) εστίασαν στις αντιλήψεις των φοιτητών για τη φύση της απόδειξης και στα πιθανά οφέλη από τη χρήση του Lean. Στο πλαίσιο αυτό, εξέτασαν τις αποδείξεις των συμμετεχόντων και κατέγραψαν τις εμπειρίες τους. Οι φοιτητές ανέφεραν ότι το Lean τους βοήθησε να αντιληφθούν την απόδειξη ως αλληλουχία βημάτων, όπου κάθε βήμα πρέπει να είναι

⁷ Εκείνη την περίοδο το Natural Number Game χρησιμοποιούσε Lean 3.

αιτιολογημένο και επαληθεύσιμο. Επιπλέον, η άμεση ανατροφοδότηση τούς ενθάρρυνε να πειραματιστούν με διαφορετικές στρατηγικές και να εξερευνήσουν εναλλακτικές τακτικές.

Συνολικά, η παρούσα ερευνητική δραστηριότητα δείχνει ότι, παρόλο που η ενασχόληση των φοιτητών με το Lean δεν είναι εύκολη, λόγω της γλώσσας και της σύνταξης που χρησιμοποιεί, το περιβάλλον αυτό φαίνεται να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της δομής, της ακρίβειας και της λογικής συνοχής των αποδείξεων, προσφέροντας μια διαφορετική οπτική για τη φύση της μαθηματικής σκέψης (Iannone & Thoma, 2024· Hanna κ.ά., 2024). Νεότερες έρευνες (Garnelo & Liebendörfer, 2025) εστιάζουν στις αρχές σχεδίασης που είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη κατά τη δημιουργία δραστηριοτήτων ή μαθησιακών περιβαλλόντων, ώστε οι φοιτητές να μπορούν να αντιλαμβάνονται πιο εύκολα τη σύνδεση μεταξύ τυπικής και άτυπης απόδειξης. Παράλληλα, έχουν αναπτυχθεί νέα εργαλεία, όπως το Verbose Lean, το οποίο μετατρέπει τις τακτικές του Lean σε φυσική γλώσσα (Massot, 2024), επιχειρώντας να γεφυρώσει την απόσταση μεταξύ άτυπης και τυπικής απόδειξης και να καταστήσει τη διαδικασία πιο προσιτή στους φοιτητές. Τέλος, πρόσφατες έρευνες διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο οι διδάσκοντες ενσωματώνουν τους διαδραστικούς βοηθούς απόδειξης στα μαθήματά τους, τη μορφή αυτής της ενσωμάτωσης, καθώς και τα αντιλαμβανόμενα οφέλη και περιορισμούς (Thoma & Iannone, 2025).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ενσωμάτωση του Lean στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε πανεπιστημιακό επίπεδο δεν αποτελεί απλώς την εισαγωγή μιας τεχνολογικής καινοτομίας που προσφέρει στους φοιτητές τη δυνατότητα να λαμβάνουν άμεση ανατροφοδότηση και να εξετάζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια την ορθότητα των συλλογισμών τους. Παράλληλα, τους δίνει την ευκαιρία να εξοικειωθούν με ένα ψηφιακό εργαλείο που χρησιμοποιείται ήδη στη σύγχρονη μαθηματική έρευνα. Μελέτες έχουν δείξει ότι, αν και οι μαθηματικοί αξιοποιούν ψηφιακά εργαλεία στις ερευνητικές τους δραστηριότητες, σπάνια παρουσιάζουν αυτή τη χρήση στους φοιτητές τους (Broley κ.ά., 2018). Μέσω του Lean, ωστόσο, οι φοιτητές μπορούν να ασχοληθούν ενεργά με ένα τέτοιο εργαλείο, να συνεργαστούν με τους διδάσκοντές τους και, σε ορισμένες περιπτώσεις, να συμβάλουν σε ερευνητικές δημοσιεύσεις, όπως δείχνει το παράδειγμα του Buzzard και των συνεργατών του σχετικά με την τυποποίηση αποτελεσμάτων πάνω στους δακτυλίους (Buzzard κ.ά., 2022). Όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα:

Χρήση του Lean στην διδασκαλία της απόδειξης, ευρήματα από την έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών δείχνουν ότι η χρήση του Lean μπορεί να συμβάλει στην αντιμετώπιση ορισμένων δυσκολιών των φοιτητών στη σύνταξη αποδείξεων, δίνοντας έμφαση στη δομή και τη σαφήνεια, ενώ παράλληλα προσφέρει άμεση ανατροφοδότηση που τους επιτρέπει να ελέγχουν την ορθότητα του συλλογισμού τους σε πραγματικό χρόνο.

Παρά τα σημαντικά αυτά οφέλη, η χρήση του Lean στη διδασκαλία των Μαθηματικών συνοδεύεται και από προκλήσεις. Οι φοιτητές αντιμετωπίζουν συχνά συντακτικές δυσκολίες, γεγονός που αναδεικνύει την ανάγκη για κατάλληλα σχεδιασμένα διδακτικά εγχειρίδια και δραστηριότητες που να γεφυρώνουν την τυπική με την άτυπη μορφή απόδειξης. Μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να εξετάσει σε μεγαλύτερο βάθος τη χρήση του Lean από φοιτητές σε διαφορετικά περιβάλλοντα, για παράδειγμα μέσω του Lean Verbose (Massot, 2024) ή σε περιβάλλοντα όπως αυτά που προτείνουν οι Garnelo και Liebendörfer (2025), καθώς και τους παράγοντες που επηρεάζουν τις αποφάσεις των διδασκόντων σχετικά με την επιλογή του κατάλληλου περιβάλλοντος και τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται από τους φοιτητές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η κοινότητα του Lean είναι ιδιαίτερα ενεργή και δυναμική, με σημαντική συμμετοχή διακεκριμένων μαθηματικών, όπως ο Terence Tao, ο οποίος αναφέρει ότι χρησιμοποιεί το Lean σε συνδυασμό με Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα (Large Language Models) (Tao, 2025). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πρόσφατο κανάλι του στο YouTube⁸, όπου παρουσιάζει αυτή τη χρήση. Παράλληλα, πραγματοποιούνται εκδηλώσεις με επίκεντρο είτε τον προγραμματισμό και την ανάπτυξη στο Lean⁹, είτε τη διδασκαλία και τη μάθησή του¹⁰.

Επιπλέον, πρόσφατες εξελίξεις στον χώρο της Τεχνητής Νοημοσύνης, όπως το AlphaProof της DeepMind και το DeepSeek Prover V2 της DeepSeek, που αξιοποιούν το Lean. Παράλληλα, η πρόσφατη χρηματοδότηση για την ανάπτυξη της mathlib (Renaissance Philanthropy, n.d.), δείχνουν ότι το πεδίο βρίσκεται σε φάση ταχείας εξέλιξης και ανοίγει νέους δρόμους για τη διδασκαλία και την έρευνα στα Μαθηματικά.

⁸ <https://www.youtube.com/@TerenceTao27>

⁹ <https://leanprover-community.github.io/events.html>

¹⁰ <https://sites.google.com/view/learning-math-with-lean-events/home>

Συμπερασματικά, φαίνεται ότι η ραγδαία ανάπτυξη της κοινότητας και της ψηφιακής βιβλιοθήκης, σε συνδυασμό με την ενσωμάτωση τεχνολογιών Τεχνητής Νοημοσύνης, για παράδειγμα εργαλείων που βοηθούν τον χρήστη να εντοπίζει τον κατάλληλο ορισμό ή θεώρημα μέσα στη *mathlib*, καθιστούν το Lean ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον εργαλείο για τη μελέτη του τρόπου με τον οποίο αλλάζουν οι πρακτικές των ερευνητών μαθηματικών (Bayer κ.ά., 2024) και η διδασκαλία της απόδειξης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά και σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Avigad, J. (2019). Learning logic and proof with an interactive theorem prover. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching* (Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 14, pp. 277–290). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_13
- Avigad, J., Hua, J., Lewis, R. Y., & van Doorn, F. (2017). *Logic and proof* (Online textbook). Lean Community. https://leanprover-community.github.io/logic_and_proof/index.html
- Bayer, J., Benzmüller, C., Buzzard, K., David, M., Lampaert, L., Matiyasevich, Y., Paulson, L., Schleicher, D., Stock, B., & Zelmanov, E. (2024). Mathematical proof between generations. *Notices of the American Mathematical Society*, 71(1), 79–91. <https://www.ams.org/notices/202401/rnoti-p79.pdf>
- Broley, L., Caron, F., & Saint-Aubin, Y. (2018). Levels of programming in mathematical research and university mathematics education. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 38–55. <https://doi.org/10.1007/s40753-017-0066-1>
- Buzzard, K. (2022). What is the point of computers? A question for pure mathematicians. In D. Beliaev & S. Smirnov (Eds.), *International Congress of Mathematicians* (Vol. 2, pp. 578–688). EMS Press. <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM2022/978-3-98547-560-5-volume-2.pdf>
- Buzzard, K., Hughes, C., Lau, K., Livingston, A., Fernández Mir, R., & Morrison, S. (2022). Schemes in Lean. *Experimental Mathematics*, 31(2), 355–363. <https://doi.org/10.1080/10586458.2021.1983489>

- Buteau, C., Gueudet, G., Muller, E., Mgombelo, J., & Sacristán, A. I. (2020). University students turning computer programming into an instrument for “authentic” mathematical work. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 1020–1041. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1648892>
- de Bruijn, N. G. (1980). A survey of the project Automath. In J. P. Seldin & J. R. Hindley (Eds.), *To H. B. Curry: Essays on combinatory logic, lambda calculus and formalism* (pp. 579–606). Academic Press.
- de Moura, L., Kong, S., Avigad, J., van Doorn, F., & von Raumer, J. (2015). The Lean theorem prover (system description). In A. Felty & A. Middeldorp (Eds.), *Automated deduction – CADE-25* (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 9195, pp. 378–388). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21401-6_26
- Garnelo, I., & Liebendörfer, M. (2025). Towards design principles for learning environments based on theorem provers. In M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. Free University of Bozen-Bolzano & European Society for Research in Mathematics Education (ERME). <https://hal.science/hal-05230009v1>
- Geraniou, E., Faggiano, E., Medová, J., & Turgut, M. (2024). Guest editorial for special issue “Digital experiences in university mathematics education: Advances and expectations”. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 10(3), 683–689. <https://doi.org/10.1007/s40753-024-00260-4>
- Gonthier, G. (2008). Formal proof – the four-color theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11), 1382–1393. <https://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf>
- Hanna, G., Larvor, B., & Yan, X. K. (2024). Using the proof assistant Lean in undergraduate mathematics classrooms. *ZDM–Mathematics Education*, 56, 1517–1529. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01577-9>
- Iannone, P., & Thoma, A. (2024). Interactive theorem provers for university mathematics: An exploratory study of students’ perceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(10), 2622–2644. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2178981>

- Iannone, P., Marasingha, G., & Thoma, A. (2025). Teaching mathematics with Lean: Interactive theorem provers in the classroom. *Notices of the American Mathematical Society*, 72(7), 740–747. <https://doi.org/10.1090/moti3184>
- Massot, P. (2024). Teaching mathematics using Lean and controlled natural language. In Y. Bertot, T. Kutsia, & M. Norrish (Eds.), *Proceedings of the 15th International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP 2024)* (pp. 27:1–27:19). Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik. <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ITP.2024.27>
- Renaissance Philanthropy. (n.d.). Lean FRO and Mathlib receive £10m from XTX Markets founder Alex Gerko to further advance the use of AI for mathematical research. <https://www.renaissancephilanthropy.org/news-and-insights/lean-fro-and-mathlib-receive-10m-from-xtx-markets-founder-alex-gerko-to-further-advance-the-use-of-ai-for-mathematical-research>
- Sangwin, C. (2023). Running an online mathematics examination with STACK. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 18(3), 192–200. <https://doi.org/10.3991/ijet.v18i03.35789>
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (New ICMI Study Series, Vol. 15, pp. 391–422). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_17
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 47–59. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y>
- Tao, T. (2025). *Machine-assisted proof*. *Notices of the American Mathematical Society*, 72(1), 6–13. <https://doi.org/10.1090/noti3041>
- Thoma, A., & Iannone, P. (2022). Learning about proof with the theorem prover Lean: The abundant numbers task. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8(1), 64–93. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00140-1>
- Thoma, A., & Iannone, P. (2023). *Natural Number Game: Students’ activity using an interactive theorem prover*. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress*

of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (pp. 2543–2550). Alfred Rényi Institute of Mathematics & ERME. <https://hal.umontpellier.fr/hal-04430809v1/document>

Thoma, A., & Iannone, P. (2025). “The goal is really to have a correct proof that you can also verify in Lean”: Exploring a lecturer’s perspective of using Lean in teaching. In M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. Free University of Bozen-Bolzano & European Society for Research in Mathematics Education (ERME). <https://hal.science/hal-05314330>

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2–3), 209–234. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1>

Weir, A. (2016). Informal proof, formal proof, formalism. *The Review of Symbolic Logic*, 9(1), 23–61. <https://doi.org/10.1017/S1755020315000234>

Yan, X., & Hanna, G. (2023). Using the Lean interactive theorem prover in undergraduate mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(2), 318–331. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2227191>

Η Αθηνά Θωμά είναι Επίκουρη Καθηγήτρια στην Διδακτική των Μαθηματικών στο Παιδαγωγικό Τμήμα του Πανεπιστημίου του Southampton. Η έρευνά της εξετάζει κυρίως τη μετάβαση των μαθητών από τη δευτεροβάθμια στην πανεπιστημιακή εκπαίδευση στα Μαθηματικά, καθώς και τη χρήση Interactive Theorem Provers στη διδασκαλία και μάθηση της μαθηματικής απόδειξης στο πανεπιστήμιο. Είναι συν-επικεφαλής της ομάδας TWG 14: University Mathematics Education στο συνέδριο CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.) από το 2022 και έχει διατελέσει συν-επικεφαλής ομάδας εργασίας και στο πέμπτο συνέδριο INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics), όπου παραμένει ενεργό μέλος.

Interactive Theorem Provers in Higher Education: The Case of Lean

Athina Thoma

University of Southampton, United Kingdom

a.thoma@soton.ac.uk

Abstract

This paper discusses interactive theorem provers, focusing in particular on Lean and its use in the teaching of mathematical proof at the university level. Findings from early educational research in this area indicate that Lean contributes to strengthening the structure and precision of students' proofs, while fostering greater awareness of correctness and clarity as they engage with formal proofs. However, challenges have also been identified, particularly those related to Lean's syntax and the need for appropriate pedagogical support and development of appropriate instructional materials. The paper concludes with references to the active Lean community, its current contribution to the discussion around proofs produced with Large Language Models, and a call for further educational research on the role and potential of interactive theorem provers in the teaching and learning of mathematics.

Keywords: Interactive theorem provers, Lean, Higher education, Technology in mathematics teaching.

***Athina Thoma** is a Senior Lecturer in Mathematics Education in the School of Education at the University of Southampton. Her research mainly examines students' transition from secondary to university mathematics, as well as the use of Interactive Theorem Provers (ITPs) in the teaching and learning of mathematical proof at the university level. She has been co-leader of Thematic Working Group 14: University Mathematics Education at the CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) since 2022, and has also served as co-leader of a working group at the fifth INDRUM conference (International Network for Didactic Research in University Mathematics), where she remains an active member.*