L'intérêt de ne pas négliger de débattre sur ce qu'il est nécessaire d'enseigner en mathématiques parce qu'utile à la vie en société

Jean Dhombres
Directeur d'études, EHESS, Paris
jean.dhombres@ehess.fr

Abstract

Je cherche à retrouver l'esprit de débats à propos de sujets mathématiques destinés à l'enseignement lorsqu'est en vue une transformation de la société. Explicitement, je cherche à ne pas effacer, sous le prétexte des nécessités dites mathématiques, toute discussion des enseignants sur le rôle des mathématiques dans le façonnement des esprits à vivre ensemble. Je choisis deux exemples seulement, l'un sur les nombres décimaux, l'autre sur la limitation à l'algèbre cartésienne, lorsqu'est refusé le calcul différentiel à un certain niveau de l'enseignement élémentaire.

Mots clés: débats dans l'enseignement des mathématiques, des nombres décimaux, de l'algèbre cartésienne.

OBJECTIFS

Des débats sur les mathématiques ont existé, et non seulement des directives, dès lors que l'enseignement est devenu une affaire politique au sens du dépassement d'un seul établissement dans une seule ville. Ce fut le cas chez les Jésuites au début du XVII^{e} siècle qui furent débordés par le succès de leurs collèges peu souhaités pourtant par Ignace de Loyola : ils cherchèrent à créer un état d'esprit de type sociétal catholique des élites, et il leur apparut utile de viser à construire en mathématiques une discipline rigoureusement structurée, mais à destination de certains seulement en vue d'une excellence et d'une concurrence. Des débats sont également nets en France depuis la création des lycées en 1802, dans la mesure où l'Etat se trouvait engagé par la définition d'un programme national et qu'il y avait l'idée de la formation d'un citoyen organisé et compétent. Débats dans le corps enseignant bien sûr, mais au-delà, sur ce qu'il fallait attendre des mathématiques, un monde isolé, scolaire donc, dont à tort on pouvait penser que sa technicité même le rendait peu sensible aux modes et aux idéologies. Le propos jésuite, quoique différent, aboutit au même façonnement, sauf qu'avec la République il est voulu pour tous. Ces débats sont une richesse, malheureusement mal envisagée ou mal travaillée par les historiens, aussi bien que les mathématiciens, car le plus souvent elle est seulement mesurée à l'aune de cette nouveauté paradoxale du XVI^{e} siècle qu'était la notion même de « réforme des mathématiques » en vue de s'adapter à ce qu'on appelle progrès depuis le XVIII^{e} siècle, voire mathématiques modernes depuis les années 1960, ou si l'on préfère l'usage américain, les *New math*. Si on lie le mot réforme à la Réforme religieuse elle-même, comment ne pas relier les New math à l'avènement de l'ère numérique. Je ne dénigre certainement pas l'existence d'ouvrages de qualité sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, ayant contribué à certains, mais je remarque que, bien souvent, est passée sous silence l'existence même de tels débats, portant notamment sur le fait qu'il faille oublier certaines théories, pourtant longtemps reines ou en tout cas majeures dans l'enseignement. Non seulement parce que les temps le veulent ainsi par l'évolution de l'antique science d'Euclide bien à tort réputée immobile, mais en outre compte tenu d'une adéquation voulue avec les besoins d'une société, besoins techniques aussi bien qu'idéologiques ou spirituels, souvent mal définis. Je me souviens, directeur d'un département de mathématiques dans les années 1980, de la totale absence de réponses d'industriels du numérique devant ce qu'ils attendaient des formés en mathématiques à l'Université, estimant *in petto* qu'ils s'en fichaient du moment qu'une discipline, et une concurrence, étaient effectivement en jeu. C'étaient les ingrédients pensés bien plus tôt par les jésuites. Le disant ainsi j'omets sans doute l'essentiel qui est le contexte. Ainsi, parmi les choses oubliées au XIXe siècle, voire passées à d'autres disciplines comme la physique, il faut citer la théorie des proportions tant vantée par des jésuites comme Clavius à la fin du XVIe siècle, mais disparue par algébrisation et numérisation des grandeurs. De même, la théorie des coniques, est disparue de l'enseignement secondaire aujourd'hui en France. Une question comme celle de la similitude de toutes les paraboles paraît obsolète, avec celle de famille de courbes et de paramètre. A l'inverse, ne peut-on manifester la permanence - est-ce bien le mot ? - d'une question comme la complexité algorithmique exemplaire de la recherche du *pgcd* de deux nombres qui se trouve chez Euclide ? Si de telles questions ont fait débat, il importe de s'apercevoir qu'en mathématiques le débat n'a pas grand' chose à voir avec un régime d'assemblée.

Il ne s'agit pas pour moi, on le devine d'emblée par la taille modeste de mon intervention, de vouloir discuter telle ou telle réforme ou pleurer sur tel ou tel abandon de choses autrefois favorites des maîtres. Je cherche à retrouver l'esprit de débats à propos de sujets mathématiques pour l'enseignement lorsqu'est en vue une transformation de la société. Explicitement, je cherche à ne pas effacer, sous le prétexte des nécessités dites mathématique, toute discussion des enseignants sur le rôle des mathématiques dans le façonnement des esprits à vivre ensemble. Mais bien sûr je ne peux pas, faute de place, retracer les expérimentations et les échanges, et je vais utiliser le jeu du questionnement : c'est-à-dire vérifier que loin de vouloir toujours imposer un programme, une réforme, des mathématiciens se sont quelquefois interrogés à haute voix sur telle ou telle réforme, au-delà même de l'opinion arrêtée qu'ils pouvaient avoir. Ils se placent loin donc de la rhétorique dogmatique des manuels, aussi talentueux soient-ils ! Si le mathématicien Henri Lebesgue avançait que le mathématicien est homme d'action, le professeur de mathématiques n'est pas à considérer comme un pion neutre dans une société, et il convient de savoir écouter ses façons propres de mises en doute, que j'ai appelées débats.

Si je veux redonner la parole à ces pédagogues, sans devoir lasser le lecteur ou entrer dans une description trop précise, je dois ici discriminer des exemples mathématiques simples et suffisamment précis, où ce sont des mathématiciens qui se sont posés eux-mêmes en organisateurs de questions. Ces exemples ne seront qu'au nombre de deux, les nombres décimaux et le maintien de l'algèbre cartésienne. Si les nombres décimaux paraissent l'exemple type de ce qui fut objectivement utile dans la société, malgré les dénégations anglaises sur plus d'un siècle, paraîtra moins évident le second sujet sur l'algèbre cartésienne, mais cet exemple me permettra d'affiner le sens de ce que j'appelle débat en mathématiques. J'entreprends donc un voyage, pour lequel je me suis volontairement limité, dans les notes, à donner quelques références seulement, afin de mieux faire valoir les questionnements, là où on a plutôt l'habitude de lire des dogmatismes, c'est-à-dire l'absence de débat.

NOMBRES DECIMAUX ET EXPRIT D'EXACTITUDE

C'est de façon symptomatique un débat officiel, car organisé et avec prise en notes des interventions, qui met en confrontation non seulement Lagrange et Laplace un 30 janvier 1795, deux savants reconnus, le second n'ayant pas atteint la cinquantaine alors que le second va sur la soixantaine, mais encore des élèves. Ces derniers, plus d'un millier, sont destinés à être les futurs « instituteurs » de la République en cette école « révolutionnaire » dite école normale de l'an III, car elle s'étendit sur quelques mois. Dès le début des cours, un 20 janvier, Laplace mentionne « l'avantage que toutes les divisions de l'unité soient décimales », et sans état d'âme il justifie l'adoption par la Convention Nationale du « système de la division de toutes les unités en parties décimales »[1]. C'est la première fois qu'un cours de mathématiques générales signale de la sorte une décision gouvernementale ! Après tout, dans le dernier roman publié de son vivant, *Quatre-vingt treize*, malgré la déchéance des Girondins, la Terreur et la Vendée, Victor Hugo louera la Convention d'avoir créé le « système métrique décimal républicain ». Mon intérêt ici ne porte pourtant pas sur l'universalité du système, pris dans la Nature - la longueur de la circonférence terrestre - mais sur le véritable débat qui fut alors lancé. En épistémologue, Lagrange ouvre la confrontation des idées et s'adresse aux élèves venus débattre, qu'il appelle citoyens.

> Vous avez dû voir, citoyens, que la facilité, la régularité et l'uniformité des opérations d'arithmétique viennent de l'idée heureuse que l'on a eue de donner aux chiffres une valeur locale, en

[1] Première Leçon de Laplace, in Jean Dhombres (dir.), *L'Ecole normale de l'an III. Leçons de mathématiques: Lagrange-Laplace-Monge*, Dunod, 1992, p. 49. L'ouvrage est abrégé en : *L'Ecole normale de l'an III.*

> faisant valoir dix fois d'avantage chaque chiffre, à mesure qu'il est plus avancé à gauche.
>
> Cette idée, toute simple qu'elle est, a cependant échappé longtemps, non seulement aux hommes en général, mais encore aux savants et aux géomètres. Elle n'est connue en Europe que depuis le dixième siècle ; le moine français Gerber, paraît l'avoir apprise des Arabes qui dominaient alors en Espagne, et il passe pour le premier qui l'ait répandue, ainsi que les règles de l'arithmétique, qui en dépendent naturellement.[2]

Un élève, dont on n'a pas retenu le nom, prend la parole, pour reprocher aux deux enseignants mathématiciens, Lagrange et Laplace, leurs positions trop théoriques, puisque l'un et l'autre ont parlé du système binaire, et également du système de base 12, pour lequel il faut inventer deux nouveaux noms pour 10 et 11.

> En balançant les avantages et les désavantages du calcul décimal avec ceux du calcul duodécimal, vous vous êtes étendus, avec une certaine complaisance, sur le calcul duodécimal et vous en avez fait voir tous les avantages.
>
> Cependant, après avoir compensé ces avantages et désavantages, vous vous êtes décidés pour le calcul décimal, et n'y aurait-il pas eu un certain courage à devenir législateurs en ce genre car toutes les nations vous auraient suivis ?
>
> Je vous demanderai donc citoyen si vous avez réellement cru le calcul duodécimal plus parfait.[3]

Lagrange, bien sûr, vante du point de vue de la théorie le système basé sur 12, parce que ce nombre a beaucoup de diviseurs - 2, 3, 4 et 6 - ce qui permet les fractions « naturelles » que sont la moitié, le tiers, le quart, et le sixième. Il fait allusion au système sexagésimal, toujours en usage chez les astronomes, mais Lagrange ne mentionne pas le grade révolutionnaire, les 100 grades au lieu des 90 degrés pour l'angle droit. Laplace maintiendra toute sa vie le grade dans son *Traité de mécanique célest*e qui paraîtra à partir de 1799. La discussion se fait plus concrètement sociétale. En ce que Lagrange estime que

[2] Premier débat, *L'Ecole normale de l'an III*, p. 193.
[3] *Idem*, p. 199.

« l'arithmétique décimale », ce qu'il appelle les « fractions décimales », ont la capacité pédagogique de forcer les esprits à l'exactitude.

> Par exemple, on vous demande de faire un habit, deux aunes et un tiers de drap ; vous trouverez qu'un tiers c'est trop, et vous ne prendriez qu'un quart ; mais vous n'avez pas une idée nette de combien un tiers est plus grand qu'un quart. […] On vous demande trois mètres et trois décimètres d'une étoffe, et qu'on trouve qu'il n'y en a pas assez, on prendra quatre ou cinq décimètres etc. à la place de trois, et on saura toujours au juste de combien vous augmentez, ce que vous ne savez pas dans les fractions ordinaires.[4]

Lagrange d'un coup établit le vocabulaire nouveau du système métrique, le centimètre comme centième du mètre, ce qui donne la mesure de l'approximation voulue et favorise le sens de l'exactitude. Si celle-ci est le thème majeur de cette Ecole normale, même avec la géométrie descriptive de Monge qui permet à l'ouvrier d'avoir le même langage que l'ingénieur, le débat n'est pas pour autant clos. Laplace adopte en effet un argument que des Anglais déploieront au XXe siècle : l'habitude d'avoir à calculer en six et douze contraint l'esprit à être en éveil contre le « confort » paresseux du décimal. La pratique du débat est ici de ne pas craindre d'expliciter des points de vie divers, voire contradictoires, alors même qu'une direction a été arrêtée.

Mon second exemple cherche à préciser cette idée d'un choix qui ne cache pas qu'il y a délibération, et n'omet pas de donner les raisons du choix.

LE MAINTIEN DE L'ALGEBRE CARTESIENNE

C'est donc encore à un professeur de mathématiques que je m'adresse en second, même s'il est plus connu comme concepteur du système philosophique que l'on appelle le positivisme. Auguste Comte publia en effet le début de son *Cours de philosophie positive* en 1830, mais je le lis dans son *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux ou trois dimensions*, sorti en 1843, et pour lequel je dois publier en 2025 une édition critique chez Hermann dans la série des œuvres complètes de Comte. On ne peut que craindre, chez un tel auteur, un dogmatisme de l'exposé, lorsqu'il entend pousser philosophiquement à son bout la manière de Descartes, exprimée en 1637 dans un complément au fameux *Discours de la Méthode*.

[4] *Idem*, p. 200.

> *La géométrie analytique*, telle que Descartes l'a fondée, est essentiellement destinée à généraliser le plus possible les diverses théories géométriques, d'après leur intime subordination à des conceptions analytiques, en soumettant les différentes questions à autant de méthodes uniformes, nécessairement applicables à toutes les figures convenablement définies ; soit qu'on se borne à la géométrie plane, qui doit ici constituer notre première et principale étude, soit que l'on considère, comme nous le ferons ensuite, des surfaces quelconques.[5]

Comte décrit cette géométrie, qui par l'usage de l'algèbre polynomiale et des équations des courbes, doit pouvoir faire

> sentir que la nouvelle méthode géométrique instituée par Descartes a pour caractère essentiel, en isolant chaque condition d'un problème, de l'assujettir à une solution pleinement générale, d'après une convenable réduction du concret à l'abstrait.[6]

Cette réduction est l'expression d'un point de vue en vue sur ce que doit être une formation qualifiée d'élémentaire, mais je n'essaie pas plus de préciser ce que Comte développe au terme de plus de cinq cents pages. Car justement je veux insister sur la mise en jeu particulière d'un débat. D'une part, Comte précise que son travail ne peut avoir de sens que pour des esprits ayant déjà reçu une certaine formation, loin donc de la *tabula rasa*. Il faut avoir déjà suivi :

> 1° quinze leçons environ sur l'arithmétique proprement dite ; 2° trente leçons sur la partie vraiment usuelle de l'algèbre, composée de l'examen complet des deux premiers degrés, de la formule du binôme, du calcul des radicaux, de la théorie des deux progressions les plus simples, et de la théorie des logarithmes, complétée par la résolution des équations exponentielles correspondantes ; 3° trente leçons sur la géométrie élémentaire, judicieusement assistée du calcul algébrique dans les cas qui le réclament naturellement ; 4° quinze leçons sur la trigonométrie complète, sans excepter la résolution des triangles

[5] Auguste Comte, *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux ou trois dimensions, contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire,* Paris, Carilian-Goeury et Victor Dalmont, 1843 (n° 1).
[6] *Idem*, n° 2.

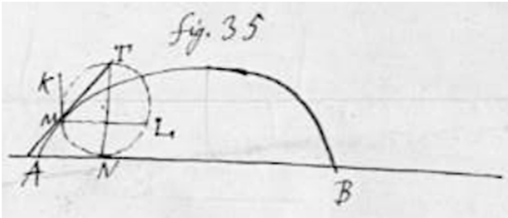
> sphériques ; 5° dix leçons sur les éléments de la géométrie descriptive ; 6° enfin, vingt leçons sur la statique élémentaire.[7]

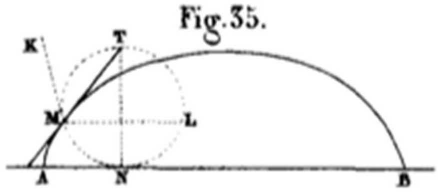
D'autre part, la démarche à laquelle Comte s'astreint en vue d'une théorie des courbes est un refus tout à fait explicite d'utiliser la notion de dérivation, celle de limite et donc l'infinitésimal comme calcul. Car Descartes a mis au point la méthode des coefficients indéterminés pour déterminer les contacts d'ordre au moins deux, donc pour comprendre le fait tangentiel. Son débat consiste ainsi à montrer que des méthodes, celle notamment de Roberval vers 1640 pour trouver les tangentes à certaines courbes non algébriques comme la cycloïde, reviennent à tabler sur la dérivée ; elles sont donc impropres à la finalité que Comte s'est donnée. Le ton est dur, mais à tout le moins il y a description d'une autre voie.

> Avant d'abandonner l'étude des tangentes, je crois devoir caractériser sommairement la méthode historiquement remarquable, par laquelle Roberval, tout en combattant, avec une aveugle obstination, la grande rénovation cartésienne, rendit, à sa manière, un témoignage involontaire du besoin de généralisation qui préoccupait alors l'esprit mathématique, en tenant un effort, plus estimable qu'heureux, pour constituer, sans le secours des conceptions analytiques, une théorie générale des tangentes.[8]

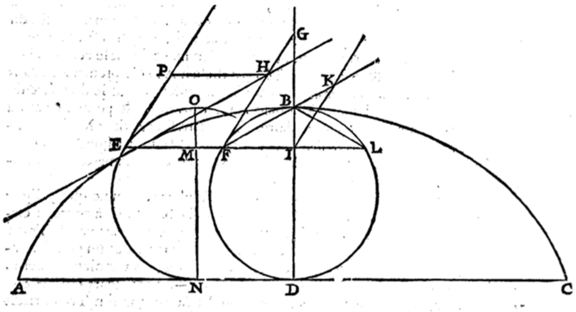
Le débat, et je maintiens ce mot, tient à la démonstration qu'il n'y a pas d'alternative à la voie de Leibniz si l'on veut généraliser : je ne vais pas la reprendre. Quelques figures - quatre en fait - y suffisent. Les deux premières (ill. 1 et 2) sont d'une part le dessin médiocre du manuscrit de Comte, et en face, la même figure 35, la mise au propre par l'éditeur de Comte en 1843 pour la construction de la tangente *MT*, le point *T* se trouvant à l'opposé diamétral de *N*, point de contact du cercle avec l'horizontale *AB* lorsqu'il y roule sans glisser. Ce que Comte indique est seulement que *MT* est bissectrice de l'angle *KML*, sachant que *MK* est la tangente au cercle mobile en *M*. Comte ne veut pas user de l'astuce de Roberval qui construit un losange sur l'horizontale et la tangente au cercle (ill. 3), ni de celle de Descartes, mais pas dans la *Géométrie* de ce dernier, où une rotation instantanée est à l'œuvre (ill. 4).

[7] *Idem*, Avertissement de l'auteur.
[8] *Idem*, n° 47.

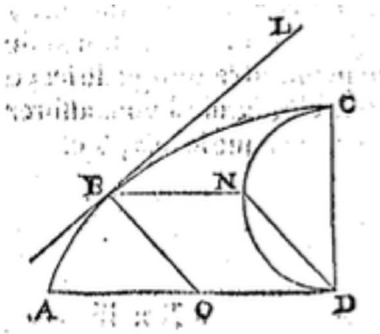




Ill. 1 et 2 : Deux dessins de Comte en 1843 pour construire la tangente à la cycloïde.



Ill. 3. La tangente à la cycloïde construite par un losange *EFHP* chez Roberval. Ceci est publié en 1693, mais disponible sur manuscrit dans les années 1640.



Ill. 4. Même question résolue par Descartes en 1638 : le point *O* de contact du cercle, immobile, est centre instantané de rotation, et donc la tangente *BL* est perpendiculaire à *BO*, ce qui donne ensuite le fait que *BL* est parallèle à *NC*.

CONCLUSION

Je ne prêche évidemment pas pour un enseignement des mathématiques où tout serait discutable. La tradition n'a pas tort de faire remarquer qu'avec le mot « mathématiques » se profile un environnement d'imposition de règles qu'il prendrait trop de temps à discuter. Mais le pluriel même indique une certaine flexibilité, que la violence du mot « pureté » dément quelquefois, même s'il a été employé à la fin du XIX^{e} siècle par David Hilbert, un parengon par excellence de la méthode axiomatique. J'ai tenu à montrer que des exemples de débats réussis ont pu avoir lieu, pour le profit des élèves, et qu'ils peuvent encore survenir dans les classes. N'est-ce pas, paradoxalement, la leçon même des Eléments d'Euclide?

Mathematician and historian of science, ***Jean Dhombres*** *is former head of a CNRS laboratory (UPR 21), and director of studies at EHESS. A specialist in functional equations and their uses in mathematics, he has studied scientific communities and the diffusion of scholarly ideas from Antiquity to the present day, without restriction to Europe alone, without neglecting the development of mathematical teaching, that is a direct inspiration from Euclid.*

Two recent publications

Pour le bicentenaire de la Théorie analytique de la chaleur. L'offre d'analyse de Fourier, La Gazette des mathématiciens, janvier 2023, n° 175, p. 9-24.

A new Cycloid Narrative centered on Torricelli and Roberval to Understand the Diverse Ways of the Mathematical Revolution, in Raffaele Pisano, … (ed.), Homage to Evangelista Torricelli's Opera, Geometrica, 1644-2024, Springer Verlag, 2024, p. 1-98.