

Η συμβολή της Διδακτικής των Μαθηματικών στη συνεκτικότητα του *Ευκλείδη γ'* και στη συστημική προσέγγιση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Φραγκίσκος Καλαβάσης

Καθηγητής Διδακτικής Μαθηματικών και Εκπαιδευτικής Μηχανικής
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kalabas@aegean.gr

Περίληψη

Η συμβολή της Διδακτικής των Μαθηματικών υπήρξε καθοριστική για την κατανόηση των μονιμότερων παραγόντων και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ τους που καθιστούν τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών στα σχολεία ένα ιδιαιτέρως πολύπλοκο ζήτημα μηχανικής του εκπαιδευτικού σχεδιασμού. Η παγκόσμια εγρήγορση για βελτίωση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης με κύριο άξονα την επικαιροποίηση του περιεχομένου κατά τη δεκαετία του '60 και η νέα εγρήγορση των ημερών μας με κύριους άξονες τη διεπιστημονικότητα, την ψηφιακότητα και τη συμπεριληπτικότητα απασχολεί όλες τις μαθηματικές και εκπαιδευτικές κοινότητες και οι δημοσιεύσεις στον *Ευκλείδη γ'* αντανακλούν τις προσπάθειες της κοινότητας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Οι ποικίλες μεταρρυθμιστικές προσεγγίσεις κινδυνεύουν εντούτοις να αποβούν άκαρπες χωρίς τη συνεκτική συμβολή της Διδακτικής των Μαθηματικών και την ένταξή τους σε μια συστημική προοπτική.

Λέξεις κλειδιά: Διδακτική Μαθηματικών, συστημική προσέγγιση, πολυπλοκότητα.

Ο σχεδιασμός της Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι πολύπλοκος, κι έχει δυσκολίες συχνά διαφορετικές από εκείνες που συνδέονται με την εξέλιξη και τη διαμόρφωση της Μαθηματικής επιστήμης.

Η αλληλεπίδραση του μαθηματικού περιεχομένου με το παιδαγωγικό περιβάλλον της Μαθηματικής Εκπαίδευσης δεν προσδιορίζεται αποκλειστικά από τη διάταξη των *σχολικών μαθηματικών* σε ένα πρόγραμμα σπουδών και στον τρόπο περιγραφής προτύπων διαδρομών διδασκαλίας στα σχολικά εγχειρίδια.

Πρόκειται για μια αλληλεπίδραση ευαίσθητη στις γνωστικές προϋποθέσεις, στις συναισθηματικές προδιαθέσεις και στις κοινωνικοπολιτισμικές προδιαγραφές τόσο των εκπαιδευόμενων και του οικογενειακού τους περιβάλλοντος, όσο και των ίδιων των εκπαιδευτικών που διδάσκουν το μάθημα των Μαθηματικών στις διαφορετικές βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Προϋποθέσεις, προδιαθέσεις και προδιαγραφές οι οποίες συχνά λειτουργούν ως εμπόδια στην σχολική πρόσβαση και μάθηση των Μαθηματικών για πολλές μαθήτριες και μαθητές, ενώ ενίοτε περιορίζουν τις ερμηνευτικές και παρεμβατικές δυνατότητες των εκπαιδευτικών κατά τη διδασκαλία.

Μια ακόμη μεταβλητή που εμπλέκεται στην αλληλεπίδραση ανάμεσα στο περιεχόμενο και το περιβάλλον της Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι η αξιακή πρόσληψη των Μαθηματικών και η λειτουργική σύνδεση της τυπικής γλώσσας των Μαθηματικών –που αναπτύσσεται ως νοητική αναγκαιότητα της ανάπτυξης και της διδασκαλίας-μάθησης των Μαθηματικών– με την συχνά διαφορετική χρήση της σημειογραφίας της κατά την παρουσίαση και διδασκαλία των φυσικών επιστημών, της πληροφορικής, των οικονομικών σπουδών και των πεδίων της μηχανικής.

Η υποβαθμισμένη αξιακή πρόσληψη και η ανεπαρκής σημειογραφική σύνδεση συχνά λειτουργούν ως εμπόδια στην κατανόηση της θεμελιώδους σημασίας των Μαθηματικών για την οικοδόμηση της επιστημονικής σκέψης, της τεχνικής, τεχνολογικής και της καλλιτεχνικής δημιουργίας.

Η ποικιλία των μεταβλητών και η μηχανική των αλληλεπιδράσεών τους στον σχεδιασμό της Μαθηματικής Εκπαίδευσης δημιουργούν την ανάγκη συγκρότησης μιας συνεκτικής θεωρίας (Kalavasis, 2021) που να συνδέει τις ενδογενείς με τις εξωγενείς μεταβλητές, τις ατομικές με τις συλλογικές, τις οικογενειακές με τις κοινωνικές και τις πολιτισμικές.

Ο προβληματισμός για την αποτυχία στα *σχολικά μαθηματικά*, ως παγκόσμιο φαινόμενο με έντονα τοπικά χαρακτηριστικά, δεν αρκεί πλέον να

ερμηνεύεται αποκλειστικά σε ορατά δεδομένα καταγραφής απαντήσεων σε διαγωνισμούς, ούτε στο πλαίσιο όσων φαίνονται να συμβαίνουν ή προγραμματίζεται να συμβούν στη σχολική τάξη στο πλαίσιο αναλυτικών οδηγιών με τις αξιολογικές προδιαγραφές τους.

Η επιστημονική παρατήρηση της *σχολικής αποτυχίας* στο σύνολο της εκπαιδευτικής μαθηματικής σχολικής διαδρομής, η διερεύνηση δηλαδή των αρνητικών μαθησιακών συνεπειών των αλληλεπιδράσεων στη συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης κάθε ατόμου, δεν μπορεί παρά να συνδυάζει την παρατήρηση με τον πειραματισμό, την έρευνα με τη δράση, τη διδακτική πράξη με τον παιδαγωγικό και επιστημολογικό αναστοχασμό.

Πρόκειται για τον εντοπισμό των επιστημολογικών εμποδίων και των δυσκολιών στις μεταβάσεις μιας γνωστικής πορείας με ασυνέχειες και συγκρουσιακά χαρακτηριστικά, που διαδέχεται την πορεία οικοδόμησης της *λογικομαθηματικής* σκέψης κατά την νοητική ανάπτυξη στην προσχολική και πρωτοσχολική ηλικία.

Κι εδώ ακριβώς είναι το σημείο που διακρίνεται η συνεκτική συμβολή, αλλά και οι δυσκολίες επικοινωνίας της Διδακτικής των Μαθηματικών στην εξέλιξη των μελετών για την Μαθηματική Εκπαίδευση, για τη βελτίωση του σχεδιασμού περιεχομένου, του εκπαιδευτικού υλικού, των παιδαγωγικών μεθόδων και των μαθησιακών αποτελεσμάτων της.

Ενδεικτικό της δυνατότητας συνεκτικής συμβολής από τη Διδακτική των Μαθηματικών είναι ότι η συγκρότησή της θεμελιώθηκε στη *σύνδεση της έρευνας με τη διδασκαλία*, καθώς η έρευνα ενσωματώθηκε στη διδασκαλία και αντίστροφα, ώστε να μπορέσει να δημιουργεί συνθήκες μάθησης των Μαθηματικών που *προσμοιάζουν* με τις συνθήκες της μαθηματικής έρευνας (Νεγρεπόντης, 1992).

Ο *Ευκλείδης γ'* είχε πάντα μια πολλαπλή υπόσταση. Ιδρύθηκε με απόφαση του ΔΣ της ΕΜΕ για να λειτουργήσει ως έντυπη επιμόρφωση των μαθηματικών που απασχολούνται στην εκπαίδευση και ως βήμα για δημοσιεύσεις τεκμηριωμένων κριτικών απόψεων των μελών της μαθηματικής κοινότητας για τις επίσημες κατευθύνσεις των Αναλυτικών Προγραμμάτων, για το περιεχόμενο των βιβλίων και των σχετικών διδακτικών ή εξεταστικών οδηγιών.

Ταυτόχρονα όμως επιδιώχτηκε να φιλοξενεί μικρές ερευνητικές εργασίες ή/και επιστημονικές δημοσιεύσεις σχετικές με την επιστημονική παρατήρηση διδασκαλιών και την επεξεργασία διαγνωστικών τεστ πριν και

μετά τη διδασκαλία, καθώς και με σχεδιασμό και υλοποίηση πειραματικών ή καινοτόμων διδακτικών πρακτικών από μαθηματικούς και εκπαιδευτικούς που διδάσκουν Μαθηματικά όχι μόνο στη δευτεροβάθμια αλλά και στην προσχολική, στην πρωτοβάθμια και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Η παρατήρηση διδασκαλιών ανέδειξε τη σύνδεση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά και τις δυνατότητες μάθησης με τις διδακτικές πρακτικές, αλλά ταυτόχρονα προκάλεσε και εκδηλώσεις επιφυλακτικότητας, έως και καχυποψίας για τη δεοντολογία και τη σκοπιμότητα ερευνών που θέτουν σε αμφισβήτηση την αυθεντία του εκπαιδευτικού της τάξης, είτε σε μαθηματικές γνώσεις είτε σε παιδαγωγική ετοιμότητα.

Σε ένα διαφορετικό επίπεδο, η ένταξη των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στη θεματολογία της ΕΜΕ και ειδικότερα του *Ευκλείδη γ'* και των ετήσιων Συνεδρίων Μαθηματικής Παιδείας δημιούργησε ένα αμοιβαίο ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και της εκπαιδευτικής κοινότητας του Νηπιαγωγείου και του Δημοτικού για τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση. Ταυτόχρονα δημιούργησε επιφυλάξεις ή και αντιδράσεις, όπως στην περίπτωση των αποφάσεων της ΕΜΕ για έκδοση του *Μικρού Ευκλείδη*, του διαγωνισμού *Μαθηματικά και Παιχνίδι* και πιο πρόσφατα του *Πυθαγόρα*.

Η ανάπτυξη και διδασκαλία των θεωρητικών προσεγγίσεων της Διδακτικής των Μαθηματικών επέτρεψε σε σημαντικό βαθμό τη λείανση –αλλά όχι την εξάλειψη– των επιφυλάξεων και συχνών αντιπαραθέσεων σε αυτά τα ζητήματα και συνέβαλε στην ενθάρρυνση της ΕΜΕ να αναπτύσσει ένα ευρύτερο πεδίο ευθύνης για τη Μαθηματική Εκπαίδευση σε όλες τις βαθμίδες και χωρίς διακρίσεις ή αποκλεισμούς.

Με αυτόν τον τρόπο ο *Ευκλείδης γ'* συγκρότησε έναν έντυπο χώρο τακτικής επιστημονικής-παιδαγωγικής ενημέρωσης και ανταλλαγής απόψεων για τις θεωρίες και τις πρακτικές της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών και ανέπτυξε πολλές διακριτές και συχνά αποσιωπημένες ειδικές θεματικές χωρίς να διαταράσσεται η συνοχή της επιστημονικής σκέψης και χωρίς τυπολατρικές διακρίσεις μέσα στην διευρυμένη πλέον εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα των συγγραφέων, αναγνωστών και αναγνωστρίων του.

Μια σημαντική δυσκολία και ταυτόχρονα εγγύηση σε αυτή την πορεία διεύρυνσης σε επίπεδο βαθμίδων και σε επίπεδο συνεργατών, ήταν και παραμένει η τήρηση των επιστημονικών κριτηρίων που τεκμηριώνουν την

εγκυρότητα των δημοσιεύσεων και η κατ' αναλογία συγκρότηση των Επιτροπών κρίσης των εργασιών. Το γεγονός ότι η κατοχή θέσης ΔΕΠ ή Διδακτορικού στα Μαθηματικά εξασφάλιζε μεν την εγκυρότητα της κρίσης στο μαθηματικό περιεχόμενο των εργασιών, αλλά δεν επαρκούσε ούτε για τον έλεγχο της παιδαγωγικής οργάνωσης αυτού του περιεχομένου, ούτε για την καταλληλότητα και πληρότητα της μεθοδολογίας των πειραματικών ή ερευνητικών εργασιών που αφορούσαν την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης σε διαφορετικές ηλικίες και διαφοροποιημένες σχολικές συνθήκες ήταν από τα πιο σημαντικά θέματα που απασχόλησαν την ΕΜΕ, καθώς αφορούσε και αφορά την ακαδημαϊκή αναγνώριση των δημοσιευμένων εργασιών και τη διοικητική αντιστοίχιση στο προσοντολόγιο των εκπαιδευτικών συγγραφέων.

Οι κοινωνικές και πολιτισμικές συνθήκες στα τέλη του 20^{ου} αιώνα, με την έντονη *εκμαθηματίκευση* της αντίληψης και οργάνωσης του διεθνοποιημένου κόσμου και της επικοινωνίας, διεύρυναν την εμβέλεια της ορατής χρήσης των Μαθηματικών και κατά συνέπεια τους στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Η προτεραιότητα στην ένταξη της αλγοριθμικής σκέψης, των ΤΠΕ και των διαστάσεων της *ψηφιακότητας* στην εκπαίδευση, καθώς και η αναγκαιότητα *διεπιστημονικής* πλέον προσέγγισης των πολύπλοκων φαινομένων της φύσης και του περιβάλλοντος, ενδυνάμωσαν τη δυνατότητα της *συμπεριληπτικής* παιδαγωγικής για την εκπαιδευτική ένταξη όλων –χωρίς καμία διάκριση ή αποκλεισμό– στην Μαθηματική Εκπαίδευση, κάτι που προϋποθέτει θεμελιώδεις αλλαγές στην αντίληψη και τις πρακτικές της μαθηματικής κοινότητας, όχι μόνο στην εκπαίδευση, αλλά και στην έρευνα και την επαγγελματική ζωή.

Η μετάβαση από την εγκυρότητα του μαθηματικού περιεχομένου στην μεθοδολογικά έγκυρη διερεύνηση των αλληλεπιδράσεων της μαθηματικής σκέψης ανάμεσα σε ανθρώπους, αλλά και σε τεχνολογίες και σε γνωστικά πεδία που έως τώρα θεωρούνταν επιστημολογικά μακρινά για την μαθηματική κοινότητα, κατέστησε αναγκαία την αναπροσαρμογή του σχεδιασμού της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και κατά συνέπεια τη στελέχωση και τις κατευθύνσεις του *Ευκλείδη γ'*.

Καταλυτικό ρόλο στην επίτευξη επιστημολογικής συνοχής ανάμεσα στο νέο *ψηφιακό*, *διεπιστημονικό*, *συμπεριληπτικό* περιβάλλον και στο αναπροσαρμοσμένο περιεχόμενο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης κατά την εξέλιξη της πολλαπλής υπόστασης του *Ευκλείδη γ'* είχε και έχει η Διδακτική

των Μαθηματικών και οι ερευνητές και ερευνήτριες που έχουν αφιερωθεί στη μελέτη της φαινομενολογίας της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών και μετέχουν σε αυτό το συνεχώς εξελισσόμενο διεθνές πεδίο έρευνας και διδασκαλίας.

Η συνεκτική δυνατότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών συνδέεται με το γεγονός ότι διαδέχθηκε μεν ιστορικά, αλλά και ήρθε σε επιστημολογική ρήξη με το ρεύμα της μεταρρύθμισης των Μοντέρνων ή/και Νέων Μαθηματικών της δεκαετίας του '60.

Αν η μεταρρύθμιση των Μοντέρνων ή/και Νέων Μαθηματικών έθεσε το ζήτημα της «διπλής επικαιροποίησης του περιεχομένου» των σχολικών μαθηματικών, είτε με την μετατόπιση της θεμελίωσής τους από την Ευκλείδεια Γεωμετρία προς τη Θεωρία Συνόλων, είτε με την μετατόπιση από την αναγκαιότητα των Μαθηματικών στην χρησιμότητά τους και από τα θεωρητικά ερωτήματα προς τα προβλήματα της καθημερινής ζωής, η Διδακτική των Μαθηματικών έθεσε το ζήτημα του σχολικού μετασχηματισμού του μαθηματικού περιεχομένου με την ενσωμάτωση της γενετικής και κατασκευαστικής προσέγγισης της νόησης και της μαθηματικής γνώσης στη διδασκαλία μέσα από τον σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων, την αλλαγή πλαισίων και την αναστοχαστική θεσμοθέτηση της γνώσης.

Η μεταρρύθμιση των Μοντέρνων ή/και Νέων Μαθηματικών είχε αναδείξει μεν την αναγκαιότητα μελέτης παιδαγωγικών και κοινωνιολογικών μεταβλητών, αλλά οι μαθηματικές προσωπικότητες και οι επιτροπές που πρωταγωνιστούσαν δεν διέθεταν τη διεπιστημονική και θεωρητική υποστήριξη που ήταν αναγκαία για να μελετηθούν και να ενταχθούν αυτές οι μεταβλητές στην εκπαιδευτική μηχανική της μεταρρύθμισης.

Οι αντιδράσεις εντούτοις της εκπαιδευτικής και μαθηματικής κοινότητας σε αυτές τις μεταρρυθμιστικές προσπάθειες φάνηκε να σχετίζονται περισσότερο με την *εικόνα για τα Μαθηματικά*, παρά με τις διατάσεις της διδασκαλίας και μάθησής τους.

Αναφέρει ενδεικτικά ο Hans Freudenthal ένας εκ των πρωταγωνιστών τόσο της μεταρρύθμισης όσο και της συγκρότησης του πεδίου της Διδακτικής των μαθηματικών:

Πριν από είκοσι περίπου χρόνια έδωσα μια διάλεξη με τίτλο *Διδασκαλία των σύγχρονων μαθηματικών ή σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών*. Εκείνη την εποχή η φήμη μου είχε ήδη αμαυρωθεί. Δεν ήταν η πρώτη φορά που οι συνάδελφοί μου μαθηματικοί

σκανδαλίστηκαν και οι καθηγητές Μαθηματικών που με άκουγαν ήταν σε σύγχυση από την παράξενη συμπεριφορά ενός ερευνητή μαθηματικού που έθετε σε αμφισβήτηση τη διδασκαλία των Μαθηματικών ως κωδικοποιημένου αντικείμενου και τοποθετούσε τον εκσυγχρονισμό της διδασκαλίας ως ζήτημα επικαιροποίησης του προς διδασκαλία αντικείμενου των Μαθηματικών στο σημερινό επίπεδο της μαθηματικής επιστήμης.

(Freudenthal, 1979, σελ. 321)

Η βιαστική υιοθέτηση και προσπάθεια επιβολής της συγκεκριμένης μεταρρύθμισης από τον ΟΟΣΑ τη δεκαετία του '60 σε όλες τις χώρες με τα πιο διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα και χωρίς καμία ουσιαστική προετοιμασία, συνέβαλε στην αποτυχία και στην επιφυλακτικότητα που διατηρείται ακόμη σήμερα.

Σύμφωνα με την αναφορά της διεθνούς συνάντησης που οργάνωσε ο ΟΟΣΑ στην Αθήνα τον Νοέμβριο του 1963, οι αναζητήσεις διαμορφώθηκαν ανάμεσα σε δύο αντιτιθέμενους πόλους (Furinghetti & Menghini, 2023):

- την επικαιροποίηση του παραδοσιακού Αναλυτικού Προγράμματος, ώστε να διατηρείται μεν η ίδια σειρά των κεφαλαίων αλλά να εισάγονται και κεφάλαια με τις σύγχρονες έννοιες και προσεγγίσεις,
- τη σύνταξη ενός νέου Αναλυτικού Προγράμματος, με πλήρη ανακατασκευή του προγράμματος σπουδών, απόλυτα σύγχρονου σε περιεχόμενο και σε αναφορές.

Και στις δύο εκδοχές, το μαθηματικό περιεχόμενο θα έπρεπε να έχει προσανατολισμό τα Σύνολα, τις Σχέσεις και Συναρτήσεις, τους Διανυσματικούς Χώρους, τον Λογισμό των Πιθανοτήτων, τη Στατιστική, τη χρήση Υπολογιστών, τη Μαθηματική Λογική, καθώς και την επικαιροποίηση των συμβολισμών και των ορισμών.

Εντούτοις οι μεταρρυθμιστές των Μοντέρνων ή/και Νέων Μαθηματικών υπογράμμιζαν την ανάγκη για παιδαγωγική έρευνα και πληροφόρηση για τις διδακτικές πρακτικές, για πειραματισμούς στις τάξεις και την αξιολόγηση τους, για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, καθώς και τη σύνδεση με άλλους κλάδους και εφαρμογές.

Μετά την εμπειρία των Μοντέρνων ή/και Νέων Μαθηματικών, στα μέσα της δεκαετίας του '70 αναδύεται –σύμφωνα με τον όρο που χρησιμοποιεί ο Guy Brousseau– το επιστημονικό πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών και διαφοροποιείται από παλαιότερες προσπάθειες μεταρρυθμίσεων της

Μαθηματικής Εκπαίδευσης, καθώς προσεγγίζει με *συστημικό* τρόπο τη φαινομενολογία της μάθησης και της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Η *ανάδυση* της Διδακτικής των Μαθηματικών συγκροτεί με αυτή τη συστημική προσέγγιση μια συνεκτική, κυκλικού χαρακτήρα επιστημολογία ανάμεσα σε διακριτές και ενδεχομένως συγκρουόμενες επιστημολογίες και πρακτικές που εντούτοις συνυπάρχουν στο μάθημα των Μαθηματικών, συνδέοντας το αποσυνδεδεμένο *τι* (το περιεχόμενο) με το *πώς* (τη μέθοδο) της διδασκαλίας (Brousseau, 2004).

Παράλληλα, με τις προσεγγίσεις της έννοιας των *διδακτικών καταστάσεων*, η Διδακτική των Μαθηματικών επιχειρεί την αποδόμηση του *διδακτικού συμβολαίου*, δηλαδή των κανόνων και των ρόλων (δηλωμένων και υπονοούμενων) ενός συστήματος της διδασκαλίας που είχε επίκεντρο την παραδοχή της αυθεντίας και την αντίληψη περί μετάδοσης της γνώσης, ώστε να μπορέσει να επιτύχει μια νέα σύνθεση ανοιχτής ερευνητικής κατάστασης που θα συνδέει τη διδασκαλία με τις ψυχολογικές, γνωσιακές, εκφραστικές και κοινωνικές διεργασίες της μάθησης.

Το αφιέρωμα του *τεύχους 29* του *Ευκλείδη γ'* στο *1^ο Συνέδριο Διδακτικής Μαθηματικών* που οργανώθηκε από το Πανεπιστήμιο Αιγαίου στη Ρόδο το 1990 έχει κατά τη γνώμη μου μια συμβολική σημασία για τη μετάβαση της πολλαπλής υπόστασης του *Ευκλείδη γ'* σε ένα συνεκτικό πεδίο, που *συνδέει χωρίς να συγχέει* τις προσεγγίσεις από τη σκοπιά του μαθηματικού περιεχομένου με τις προσεγγίσεις από τη σκοπιά της μάθησης και της παιδαγωγικής και που διευκολύνει με αυτόν τον τρόπο την άρση των ελιτίστικων προκαταλήψεων και των στερεοτυπικών αρνητικών διακρίσεων που συνιστούσαν και ίσως ακόμη συνιστούν εμπόδια στην πρόσβαση όλων στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Μέσα σε αυτό το νέο πλαίσιο ερευνητικής συνεργασίας και συγγραφικής ενθάρρυνσης που συμβάδιζε και συμβαδίζει με τις θεματικές και τις ανακοινώσεις των ετήσιων Συνεδρίων Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ, παρατηρούμε τη μεταβολή των προσεγγίσεων για τη βελτίωση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης από τη δεοντολογία της διδασκαλίας στον πειραματισμό και τη μελέτη των δυσκολιών της μάθησης.

Η παρατήρηση διδασκαλιών, τα διαγνωστικά τεστ και οι λανθασμένες απαντήσεις δεν πρέπει πλέον να αποφεύγονται ή να αποσιωπούνται διότι δεν είναι ορθό να συνδέονται με οιασδήποτε μορφής αξιολογική κρίση ικανοτήτων, αλλά αντίθετα συνιστούν πολύτιμες πηγές γνώσης για την *κατανόηση των δυσκολιών κατανόησης* των Μαθηματικών σε συγκεκριμένες

και περιγράψιμες συνθήκες διδασκαλίας και αλληλεπίδρασης με το σχολικό και οικογενειακό περιβάλλον.

Το θεμελιώδες ερώτημα της σχέσης της νόησης με τη λογικο-μαθηματική σκέψη και τον ρόλο των αλληλεπιδράσεων της μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών με το σχολικό, το οικογενειακό και το ψηφιακό πλέον περιβάλλον αποκτά νέες διαστάσεις που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Οι παράγοντες που επηρεάζουν τη Μαθηματική Εκπαίδευση είναι περισσότεροι από τα αναλυτικά προγράμματα και τα βιβλία, τις παιδαγωγικές πρακτικές και τα ψηφιακά περιβάλλοντα που συλλειτουργούν στην τάξη των μαθηματικών.

Οι πεποιθήσεις, οι στάσεις και οι προσδοκίες των γονέων και των ίδιων των εκπαιδευτικών σχετικά με τις ικανότητες ή τις δυνατότητες μάθησης των παιδιών, των μαθητριών και των μαθητών αναδεικνύονται σε εξίσου σημαντικούς παράγοντες, καθοριστικούς για την ποιότητα και αποτελεσματικότητα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Άρχισαν να αναδεικνύονται και να επανεξετάζονται οι αποσιωπημένες πρακτικές που ενσωμάτωναν και ενσωματώνουν τις διακρίσεις και πιέζουν τη Μαθηματική Εκπαίδευση προς την ασκησιολογία.

Σε αυτό το νέο πλαίσιο εντάχθηκε από τη Διδακτική των Μαθηματικών η «ερευνητική νομιμοποίηση» του πεδίου των σχέσεων ανάμεσα στο σχολείο, τις οικογένειες και τη *σκιώδη εκπαίδευση*. Γρήγορα αποκαλύφθηκε ότι το φαινόμενο των φροντιστηρίων, τα ιδιαίτερα μαθήματα και άλλες μορφές παράλληλης ή συμπληρωματικής εκπαίδευσης δεν είναι ένα τοπικό φαινόμενο, αλλά αναπτύσσεται στη σκιά των εκπαιδευτικών συστημάτων με τα οποία αλληλοεπιδρά, σε πολλές χώρες (Bray, 2015· Collonges, 1994· Glasman, 1994).

Αναπλαισιώθηκε κατά συνέπεια η μελέτη των οικογενειακών στάσεων, προσδοκιών, επιλογών και πρακτικών σχετικά με τη Μαθηματική Εκπαίδευση και την αντίληψη περί σχολικής επίδοσης με συνέπεια τη διεύρυνση του πεδίου της έρευνας για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών σε εξωσχολικές μεταβλητές, με τη συμμετοχή στις έρευνες και τις συγγραφικές ομάδες, εκπαιδευτικών που απασχολούνται στη *σκιώδη εκπαίδευση*.

Οι εργασίες της Διδακτικής των Μαθηματικών για τις ευρύτερες και βαθύτερες γνωστικές, αξιακές και συναισθηματικές αλληλεπιδράσεις των οικογενειακών πρακτικών με τη Μαθηματική Εκπαίδευση, καθώς και για τη

συμπτωματολογία στις στάσεις και σχολικές επιδόσεις των παιδιών ως μαθητών/τριών στο μάθημα των Μαθηματικών, έφερε τη συστηματική προσέγγιση στα ερευνητικά εργαλεία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και κατά συνέπεια στο περιεχόμενο των επιμορφωτικών και ερευνητικών δημοσιεύσεων του *Ευκλείδη γ'*.

Στο πρώτο τέταρτο του 21^{ου} αιώνα, από τη μια μεριά οι διαδοχικές κρίσεις της οικονομίας, των πανδημιών, της κλιματικής αλλαγής, των πολέμων και των προσφυγικών ροών κι από την άλλη η ραγδαία ψηφιακή μεγέθυνση της πραγματικότητας, διαταράσσουν τα εκπαιδευτικά συστήματα σε παγκόσμιο και τοπικό επίπεδο.

Η εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα έχει να αντιμετωπίσει το πρωτόγνωρο στις διεθνείς του διαστάσεις πρόβλημα της *ασυνέχειας* στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Οι διεθνείς οργανισμοί καλούν σε εγρήγορση, καθώς εκτιμούν πως το *κενό* καθίσταται *μαθησιακά ανυπέρβλητο*.

Η *παιδαγωγική ασυνέχεια* συνδυάστηκε με αποδυνάμωση της μαθησιακής διάθεσης, ενώ οι διεθνείς τάσεις απομάκρυνσης των παιδιών από το σχολείο φαίνεται να λαμβάνουν μόνιμα τοπικά χαρακτηριστικά και να συνδέονται με φαινόμενα οργανωμένων βίαιων, κακοποιητικών συμπεριφορών, με ρατσιστικές διακρίσεις κατά παιδιών λόγω καταγωγής, φύλου, χρώματος, αναπηρίας ή ακόμη μοναχικότητας.

Το χρονικά ακανόνιστο κλείσιμο των σχολείων και η μαζική καταφυγή σε ψηφιακές εφαρμογές και δικτυακές περιπλανήσεις χωρίς παιδαγωγική πλαισίωση οδήγησαν σε μαζικά φαινόμενα *γνωσιακής ασυνέχειας* με ιδιαίτερη ένταση στα πεδία των μαθηματικών και της γλώσσας.

Ταυτόχρονα, αυτές τις συνθήκες ανέδειξαν τα Μαθηματικά σε κυρίαρχη γλώσσα επιστημονικής επικοινωνίας και τεχνολογικής δυνατότητας υπολογισμών και συλλογισμών, ταχύτατης συλλογής και επεξεργασίας πελώριου αριθμού δεδομένων που μπορούν να συμβάλλουν στη βέλτιστη παρατήρηση και κατανόηση πολύπλοκων καταστροφικών φαινομένων, όσο και στην προληπτική δράση για ελάττωση των επιπτώσεών τους στην ανθρώπινη ζωή και το περιβάλλον.

Το δικαίωμα και η δυνατότητα όλων στη Μαθηματική Εκπαίδευση, ανεξάρτητα από φύλο, καταγωγή, χρώμα, κοινωνική τάξη, αναγνωρίζεται πλέον ως ανθρώπινο δικαίωμα από την UNESCO και θέτει νέα, δύσκολα

ζητήματα σχεδιασμού συμπεριληπτικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης από την προσχολική ηλικία.

Ταυτόχρονα, με την *εθνομαθηματική* έρευνα επανεκτιμάται η ανάπτυξη εναλλακτικών μοντέλων μαθηματικής σκέψης και υπολογιστικών πρακτικών σε κοινότητες, φυλές και περιθωριοποιημένες κοινωνικές ομάδες και αξιοποιείται σε σχεδιασμούς συμπεριληπτικής εκπαίδευσης.

Ενδεικτικά, η UNESCO (2018) στην ανακήρυξη της *14ης Μαρτίου* κάθε *έτους* σε *Παγκόσμια Ημέρα Μαθηματικών* ή *μέρα του π*, είχε επισημάνει:

- Η μεγαλύτερη παγκόσμια ευαισθητοποίηση και η ενισχυμένη εκπαίδευση στις μαθηματικές επιστήμες είναι ζωτικής σημασίας για την αντιμετώπιση προκλήσεων σε τομείς όπως η τεχνητή νοημοσύνη, η κλιματική αλλαγή, η ενέργεια και η βιώσιμη ανάπτυξη, η βελτίωση της ποιότητας ζωής τόσο στον ανεπτυγμένο όσο και στον αναπτυσσόμενο κόσμο.
- Οι εφαρμογές των μαθηματικών επιστημών είναι ζωτικής σημασίας για την πρόοδο σε όλους τους τύπους της μηχανικής και της επιστήμης των υπολογιστών, ενώ ανταποκρίνονται στις αυξανόμενες ανάγκες αυτοματισμού και παροχής πρόσβασης σε πληροφορίες μέσω του Διαδικτύου (τον Παγκόσμιο Ιστό) για την ευημερία της κοινωνίας.

Στην ίδια διακήρυξη η UNESCO υπογραμμίζει τη σημασία της δημιουργίας συνθηκών που ευνοούν την ισότητα των φύλων στις μαθηματικές επιστήμες:

Προωθώντας επιτυχημένα γυναικεία πρότυπα στην επιστήμη, από την Υπατία της Αλεξάνδρειας έως τη Maryam Mirzakhani, χωρίς να ξεχνάμε την Emmy Noether, τη Sophie Germain ή τη Mary Winston Jackson [...], τη συμβολή όλων των πολιτισμών στην πρόοδο των μαθηματικών επιστημών, στην οικουμενικότητά τους, ήδη από την Ανώτερη Παλαιολιθική εποχή στην Αφρική με τα οστά Ishango, που μπορεί να είναι το αρχαιότερο ίχνος ανθρώπινων μαθηματικών αναπαραστάσεων.

(UNESCO, 2018, σελ. 1)

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία έχει έγκαιρα επισημάνει τους κινδύνους για την μαθηματική καλλιέργεια των πολιτών κατά τη διάρκεια των μεγάλων κρίσεων, καθώς, σύμφωνα με διεθνείς μελέτες, όταν οι σχολικές συνθήκες διαταράσσονται όπως στις μέρες μας με την κλιματική αλλαγή, δημιουργούνται ρήγματα στη μαθησιακή διεργασία και παιδαγωγικό κενό

στην εκπαιδευτική διαδικασία, με απρόβλεπτες συνέπειες σε ατομικό και σε κοινωνικό επίπεδο.

Τίθενται επομένως νέα ζητήματα, τα οποία καθιστούν περισσότερο πολύπλοκο τον σχεδιασμό της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και κατά συνέπεια πιο δύσκολη την παρακολούθηση και επιμορφωτική πλαισίωσή της, που αποτελεί την κεντρική επιδίωξη του *Ευκλείδη γ'* και των ετήσιων συνεδρίων Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ.

Μια μόνιμη δυσκολία της έρευνας για τη Μαθηματική Εκπαίδευση αφορά την καταγραφή της αποτελεσματικότητάς της, δηλαδή της επίδρασης των ερευνητικών αποτελεσμάτων που δημοσιεύονται μέσω περιοδικών ή πρακτικών συνεδρίων στις διδακτικές πρακτικές σε πραγματικές σχολικές συνθήκες.

Μια συναφής, αντίστροφης κατεύθυνσης δυσκολία αφορά τη συστηματική άντληση, συλλογή και επεξεργασία των δεδομένων από το σχολικό –αλλά και το οικογενειακό– περιβάλλον αναφορικά με τις κοινωνικοπολιτισμικές αξίες ενθαρρύνουν ή αποθαρρύνουν τις πολύπλοκες διεργασίες συμμετοχής των παιδιών σε μαθηματικές δραστηριότητες στις σχολικές συνθήκες.

Η συνεκτική συμβολή της Διδακτικής των Μαθηματικών στον *Ευκλείδη γ'* στις τρέχουσες συνθήκες θα μπορούσε να προσανατολιστεί σε δυο κατευθύνσεις.

Αφενός στην προσπάθεια *συστημικής διερεύνησης και ερμηνείας* των παραγόντων που δυσχεραίνουν τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών σε πραγματικές σχολικές συνθήκες, μεταφέροντας πιο συστηματικά στην αρθρογραφία του *Ευκλείδη γ'* τη σχετική θεματολογία των ερευνητών και ερευνητριών της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Αφετέρου στην επέκταση των μελετών σε κοινωνικές ομάδες και άτομα περιθωριοποιημένα ή χωρίς πρόσβαση στο εκπαιδευτικό σύστημα αξιοποιώντας τις μεθοδολογίες των *εθνομαθηματικών* και τις έρευνες για *προσαρμοσμένο εκπαιδευτικό υλικό*, ενθαρρύνοντας πειραματισμούς για συμπεριληπτικές πρακτικές στη Μαθηματική Εκπαίδευση μέσα από τη συνομιλία και συνεργασία με τις επιστήμες της Ειδικής Αγωγής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bray, M. (2015). Symbiosis which Complements or Parasitism which Weakens? International perspectives on relationships between the Shadow Education and Schooling. Στο Α. Κοντάκος και Φ. Καλαβάσης (Επ.),

- Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού τ.7, Σκιάδες εκπαιδευτικό σύστημα: μοντέλα διαχείρισης των συνόρων της Εκπαιδευτικής Μονάδας με τις δομές της εκπαιδευτικής αγοράς (σελ. 109–129). Εκδόσεις Διάδραση
- Brousseau, G. (2004). L'émergence d'une science de la didactique des mathématiques, *Repères IREM*, 55, 19–34.
- Collonges, G. (1994). Το φαινόμενο των ιδιαίτερων μαθημάτων στη Γαλλία. Στο Φ. Καλαβάσης και Μ. Μεϊμάρης (Επ.), *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών II: Σχολείο-φροντιστήριο-ιδιαίτερο* (σελ. 101–114), Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Freudenthal, H. (1979). *New math or new education? Prospects*, 9, 321–331. <https://doi.org/10.1007/BF02220274>
- Furinghetti, F., & Menghini, M. (2023). The Royaumont Seminar as a Booster of Communication and Internationalization in the World of Mathematics Education. In D. De Bock (Eds.), *Modern Mathematics. History of Mathematics Education* (pp. 55–78). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_4
- Glasman, D. (1994). Ιδιαίτερα μαθήματα: σχολικές στρατηγικές και η ανάπτυξη μιας αγοράς. Στο Φ. Καλαβάσης και Μ. Μεϊμάρης (Επ.), *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών II: Σχολείο-φροντιστήριο-ιδιαίτερο* (σελ. 183–190), Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Kalavasis, F. (2021), Mathematics and the real world in a systemic perspective of the school, *Cahiers de recherche Larequoi*, 2, 45–63. https://www.larequoi.uvsq.fr/medias/fichier/cahier-recherche-2021-2_1644489658910-pdf
- Νεγρεπόντης, Σ. (1992). Θέματα της Διδακτικής Μαθηματικών και Προτάσεις για τη Μαθηματική Εκπαίδευση. Στο Φ. Καλαβάσης & Μ. Μεϊμάρης (Επ.), *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών I* (σελ. 15–24), Εκδόσεις Προτάσεις.
- UNESCO (2018). *International Day of Mathematics, Executive Board 205th, 1918*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000265647_eng

Ο Φραγκίσκος Καλαβάσης είναι Καθηγητής Διδακτικής Μαθηματικών και Εκπαιδευτικής Μηχανικής στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Συνεργάτης Ερευνητής του Ερευνητικού Εργαστηρίου Ερευνών στην Ποιότητα, Οργάνωση, Νοημοσύνη (LAREQUOI) του Πανεπιστημίου Paris Saclay, UVSQ, Διευθυντής του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική των Θετικών Επιστημών και ΤΠΕ στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση" (2014-2024). Μέλος της EME, της ENEΔΙΜ και της CIEAEM (Διεθνής Επιτροπή για την Έρευνα και Βελτίωση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης) έχει επιμεληθεί σειρές επιστημονικών εκδόσεων και έχει οργανώσει συνέδρια και ημερίδες για τη Διδακτική των Μαθηματικών στο σύγχρονο εκπαιδευτικό περιβάλλον. Στο ερευνητικό του έργο εμβαθύνει στις σχέσεις παρουσίασης-κατανόησης των Μαθηματικών σε περιγράψιμες διδακτικές καταστάσεις και επιχειρεί την αναζήτηση συστημικών αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στις διεργασίες κατασκευής μαθηματικών γνώσεων και την οργανωσιακή κουλτούρα και νοημοσύνη των εκπαιδευτικών μονάδων. Με αφορμή τα 100 χρόνια της EME επιμελήθηκε τη συλλογική έκδοση "Σκέψεις για τα Μαθηματικά" (EME, 2018).

The contribution of Didactics of Mathematics to the coherence of Euclides γ' and to a systemic approach to Mathematics Education

Fragkiskos Kalavasis

Professor of Didactics of Mathematics and Educational Engineering
University of the Aegean
kalabas@aegean.gr

Abstract

The contribution of Didactics of Mathematics has been decisive for the understanding of the most permanent factors and the interactions between them that make the teaching and learning of Mathematics in schools a particularly complex issue of educational design engineering. The global awareness for the improvement of mathematics education with the main axis of updating the content during the 1960s and the new awareness of our days with the main axes of interdisciplinarity, digitality and inclusiveness concerns all mathematical and educational communities and the publications in Euclid III reflect the efforts of the community of the Hellenic Mathematical Society. The various reform approaches risk, however, being fruitless without the coherent contribution of Didactics of mathematics and their integration into a systemic perspective.

Keywords: Didactics of Mathematics, systemic approach, complexity.

***Frangiskos Kalavasis** is Professor of Mathematics Education and Educational Engineering at the University of the Aegean, Associate Researcher at the Research Laboratory for Research in Quality, Organization, Intelligence (LAREQUOI) of the University of Paris Saclay, UVSQ, Director of the Masters' Program "Teaching of Science and ICT in Education: An Interdisciplinary Approach" (2014-2024). A member of the Hellenic Mathematical Association (HMS), the Greek National Association of researchers in Mathematics Education. In his research work, he delves into the relationships between presentation and understanding of Mathematics in describable teaching situations and attempts to search for systemic interactions between the processes of constructing mathematical knowledge and the organizational culture and intelligence of educational units. On the occasion of the 100th anniversary of HMS, he edited the collective publication "Thoughts on Mathematics" (HMS, 2018).*