

Η ενσωμάτωση της Υπολογιστικής Σκέψης στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Γεώργιος Φεσάκης

Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του
Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστημίου Αιγαίου
gfsak@aegean.gr

Μαρία-Αναστασία Μουστάκα

Υποψήφια Διδάκτωρ, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του
Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστημίου Αιγαίου
psed24013@aegean.gr

Περίληψη

Το παρόν άρθρο αποτελεί δοκίμιο τοποθέτησης που εξετάζει την έννοια της Υπολογιστικής Σκέψης (ΥΣ) μέσα από την ιστορική της εξέλιξη και την προοπτική της ενσωμάτωσής της στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η ΥΣ, μια πρακτική της Πληροφορικής, αφορά τη διατύπωση και επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια υπολογιστικών συστημάτων. Ο Papert προώθησε την ΥΣ μέσω της γλώσσας προγραμματισμού LOGO. Η Jeanette Wing επανέφερε τον όρο το 2006, δίνοντάς του νέα διάσταση ως κρίσιμη δεξιότητα για την επίλυση προβλημάτων και τον σχεδιασμό συστημάτων. Συγκρίνουμε την ΥΣ με τη μαθηματική σκέψη, αναδεικνύοντας τις κοινές πτυχές στην επίλυση προβλημάτων. Τα μαθηματικά αποτελούν συχνά κατάλληλο πλαίσιο της εφαρμογής ΥΣ. Προτείνονται μέθοδοι ενσωμάτωσης της ΥΣ στη διδασκαλία των Μαθηματικών (όπως η εκπαιδευτική ρομποτική, η μοντελοποίηση, και η χρήση ψηφιακών παιχνιδιών) και αναλύονται οι δυνατότητες και τα οφέλη της χρήσης περιβαλλόντων προγραμματισμού. Η έρευνα τονίζει την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση της ενσωμάτωσης της ΥΣ στα Προγράμματα Σπουδών, καθώς και της αξιοποίησης μεθόδων της Τεχνητής Νοημοσύνης για τη δημιουργία προσαρμοστικών διαδραστικών ψηφιακών εγχειριδίων με δραστηριότητες κώδικα.

Λέξεις κλειδιά: Υπολογιστική Σκέψη, Μαθηματική Σκέψη, διεπιστημονικότητα

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΚΑΙ Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗ

Η Υπολογιστική Σκέψη (ΥΣ) αναδύεται ως όρος με αυξανόμενη παρουσία στην επιστημονική εκπαιδευτική κοινότητα και στα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) σε διεθνές επίπεδο. Η έννοια αυτή συνδέεται με τις νοητικές διαδικασίες που σχετίζονται με τη διατύπωση και την επίλυση προβλημάτων, με τρόπο που επιτρέπει την αποτελεσματική υλοποίησή τους από υπολογιστικά συστήματα ή διαμεσολαβητές (agents) επεξεργασίας πληροφοριών (Wing, 2011). Η πορεία από τη σύλληψη της ιδέας, μέχρι την εφαρμογή της στα σχολεία διαρκεί χρόνια επιστημονικής έρευνας, η οποία συνεχίζεται δυναμικά έως σήμερα.

Σύμφωνα με τους Φεσάκης κ.ά. (2020), οι πρωτοπόροι της Πληροφορικής στην εκπαίδευση Alan Perlis και Seymour Papert υποστήριξαν τη γενική παιδαγωγική αξία της διδασκαλίας του προγραμματισμού υπολογιστών, ήδη από τις δεκαετίες 1950–1990 (Grover & Pea, 2013). Πρώτη πρόταση ήταν εκείνη του Perlis το 1962, που εισηγούνταν τη διδασκαλία του προγραμματισμού σε όλους/ες τους/τις μαθητές/ήτριες, ώστε να κατανοήσουν την υπολογιστική θεωρία και να μελετήσουν αποτελεσματικά μία πληθώρα θεμάτων (Guzdial, 2008). Έπειτα, ο Papert, το 1967, δημιούργησε τη γλώσσα προγραμματισμού LOGO, με την οποία πραγματοποιούνταν ο έλεγχος μιας ρομποτικής χελώνας, προωθώντας με αυτόν τον τρόπο τη διδασκαλία του προγραμματισμού, για την ανάπτυξη της αλγοριθμικής σκέψης (Papert, 1991). Ο ίδιος εισήγαγε, μάλιστα, στην εκπαίδευση τον όρο «Υπολογιστική Σκέψη», όταν διερευνούσε την επιρροή που έχει ο προγραμματισμός με τη γλώσσα LOGO στην παιδική σκέψη (Papert, 1996).

Το 2006, η Jeanette Wing, με το άρθρο της *Computational Thinking* στο *Communications of the ACM*, επανέφερε τον όρο ΥΣ στο προσκήνιο (Wing, 2006). Η ΥΣ, σύμφωνα με τη Wing, εμπεριέχει την επίλυση προβλημάτων, τον σχεδιασμό συστημάτων και την κατανόηση της ανθρώπινης συμπεριφοράς, στηριγμένη στις θεμελιώδεις έννοιες της Επιστήμης Υπολογιστών. Επιπλέον, περιλαμβάνει ένα σύνολο νοητικών εργαλείων που αντικατοπτρίζουν το εύρος αυτής της επιστήμης. Η Wing υποστήριξε ότι η ΥΣ αποτελεί μια στάση και ένα σύνολο δεξιοτήτων που οφείλουν να καλλιεργούν όλοι/ες, ανεξαρτήτως επιστημονικού πεδίου (Wing, 2006). Αυτό πυροδότησε έναν διεθνή διάλογο για τη φύση και την εκπαιδευτική

αξία της ΥΣ, ο οποίος συνεχίζεται έως σήμερα (Barr & Stephenson, 2011· Grover & Pea, 2013· Kalelioğlu κ.ά., 2016).

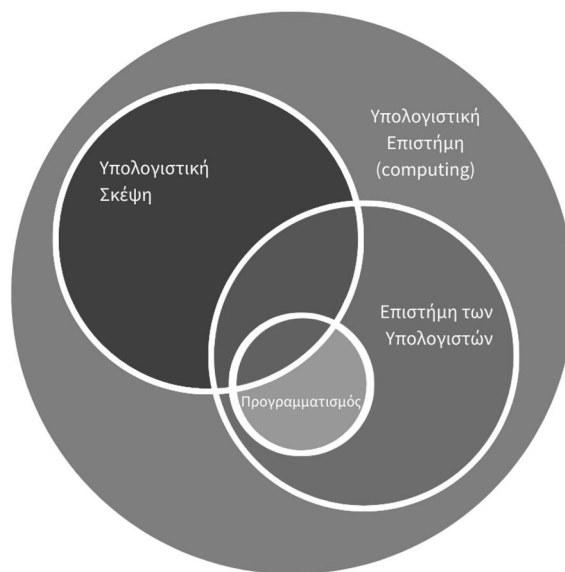
Παρά τις προσπάθειες που έγιναν σε εργαστήρια που διοργανώθηκαν από το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας των ΗΠΑ (US National Research Council· NRC) και οργανισμούς, όπως η Computer Science Teachers Association (CSTA) και η International Society for Technology in Education (ISTE) (CSTA & ISTE, 2011· NRC, 2010), η έλλειψη καθολικής συναίνεσης όσον αφορά τον ορισμό, τους σκοπούς και τη φύση της ΥΣ παρέμενε εμφανής (NRC, 2010). Το 2011, η Wing επανήλθε με μία νέα πρόταση για τον ορισμό της ΥΣ, εστιάζοντας στις διαδικασίες σκέψης που διαμορφώνουν προβλήματα και λύσεις σε μορφή επεξεργάσιμη από διαμεσολαβητές (agents) επεξεργασίας πληροφοριών (Wing, 2011). Επίσης, υποστήριξε την ΥΣ ως πηγή δεξιοτήτων, τεχνικών και μεθόδων, για την επίλυση μίας πληθώρας προβλημάτων, τονίζοντας παράλληλα την πρόκληση της Τεχνητής Νοημοσύνης και την ανάγκη κατανόησης των αμοιβαίων δυνατών και αδύναμων σημείων ανθρώπων και υπολογιστών.

Η εξέλιξη του διαλόγου γύρω από την ΥΣ οδήγησε σε ένα ευρύ πλήθος ορισμών. Οι CSTA και ISTE (2011) εστίασαν σε ένα σύνολο χαρακτηριστικών, όπως η διατύπωση προβλημάτων για την επίλυσή τους από υπολογιστές, η ανάλυση δεδομένων μέσω μοντέλων, η αλγοριθμική σκέψη και η γενίκευση λύσεων (CSTA & ISTE, 2011). Η Royal Society (2012) πρότεινε μία ευρύτερη οπτική, θεωρώντας τον υπολογισμό ως τον μετασχηματισμό της συμβολικής αναπαράστασης πληροφοριών και την ΥΣ παρούσα τόσο στον άνθρωπο όσο και στη φύση. Με τον τρόπο αυτό η Πληροφορική επεκτείνεται και αφορά την αναγνώριση και κατανόηση υπολογιστικών διαδικασιών στη φύση (π.χ. συμβολική μεταγραφή του DNA) όσο και στα τεχνητά συστήματα. Τέλος, η CSTA (2016) όρισε την ΥΣ ως μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων από την Επιστήμη Υπολογιστών, για την ανάπτυξη λύσεων σε ένα ευρύ φάσμα πεδίων, εστιάζοντας στην αφαίρεση, την αυτοματοποίηση και την ανάλυση.

Η έλλειψη ενός κοινά αποδεκτού ορισμού για την ΥΣ (Fessakis κ.ά., 2018· Rose κ.ά., 2017· Weintrop κ.ά., 2016) αφήνει ανοικτά ερωτήματα σχετικά με την έννοια, τις διαστάσεις, τις πρακτικές και το ανθρώπινο δυναμικό που εμπλέκεται (Barr & Stephenson, 2011· Fessakis κ.ά., 2018· Lye & Koh, 2014). Παρόλα αυτά, η ΥΣ αναγνωρίζεται ολοένα και περισσότερο ως κρίσιμο ζήτημα στην εκπαίδευση (Διαρκής Επιτροπή Μορφωτικών

Υποθέσεων της Βουλής, 2016· Freeman κ.ά., 2017), απαιτώντας συστηματική και πολυδιάστατη έρευνα.

Παρά τη μελέτη που έχει διεξαχθεί γύρω από την έννοια αυτή, συχνά παρατηρείται σύγχυση μεταξύ της ΥΣ, της Υπολογιστικής Επιστήμης, της Επιστήμης των Υπολογιστών και του προγραμματισμού. Η Υπολογιστική Επιστήμη, όπως επισημαίνει το Digital Promise, υπερβαίνει τις δεξιότητες και τις πρακτικές που σχετίζονται με την απλή χρήση υπολογιστών και περιλαμβάνει δεξιότητες και πρακτικές που εκτείνονται στην Επιστήμη των Υπολογιστών και την ΥΣ. Η Επιστήμη των Υπολογιστών αποτελεί μία διακριτή ακαδημαϊκή επιστήμη, ενώ η ΥΣ εστιάζει στην επίλυση προβλημάτων και υιοθετείται σε διάφορες δραστηριότητες. Ο προγραμματισμός, από την άλλη, αφορά τη δημιουργία και εκτέλεση εντολών από υπολογιστές, την ανίχνευση σφαλμάτων και την εφαρμογή κώδικα για την επίλυση προβλημάτων (Digital Promise, n.d.).



Σχήμα 1. Η σχέση μεταξύ της Υπολογιστικής Επιστήμης, της Επιστήμης των Υπολογιστών, της ΥΣ και του προγραμματισμού (Digital Promise, n.d.).

Οι πιο σύγχρονες προσεγγίσεις της ΥΣ στον εκπαιδευτικό σχεδιασμό θεωρούν την ΥΣ μια νοοτροπία προσέγγισης των προβλημάτων με πολλές συνιστώσες που διαφοροποιούνται ανάλογα το πεδίο εφαρμογής παρά μια διακριτή νοητική ικανότητα όπως π.χ. η χωρική σκέψη, η λογική σκέψη κ.ά. (Fessakis κ.ά., 2018). Η προσέγγιση αυτή αναδεικνύει την Υπολογιστική

Σκέψη ως βασική πρακτική της Πληροφορικής που αφορά την αξιοποίηση των εργαλείων και των μεθόδων της επιστήμης αυτής στην επίλυση προβλημάτων τόσο επιστημονικών όσο και καθημερινής ζωής. Για τον λόγο αυτό και στο τρέχον ΠΣ για το μάθημα της Πληροφορικής Γυμνασίου (Υπ. Απόφαση 152738/2021· Υπ. Απόφαση 48564/2023 · Υπ. Απόφαση 49728/2023) συμπεριλαμβάνεται η ΥΣ ανάμεσα στις Βασικές Πρακτικές της Πληροφορικής. Οι Βασικές Πρακτικές της Πληροφορικής, οι οποίες θεωρούνται σημαντικές οριζόντιες δεξιότητες, οι οποίες συμπληρώνουν τις ήδη καθορισμένες από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ).

Σύμφωνα με τα σύγχρονα διεθνή πρότυπα και τα ΠΣ της Πληροφορικής, οι Βασικές Πρακτικές είναι συμπεριφορές που οι μαθητές/ήτριοι χρησιμοποιούν για να ασχοληθούν με τις βασικές έννοιες της Πληροφορικής και των Ψηφιακών Τεχνολογιών. Αυτές οι πρακτικές αλληλεπικαλύπτονται σκόπιμα με πρακτικές άλλων επιστημονικών πεδίων και χρησιμοποιούν κοινή ορολογία. Για παράδειγμα η Υπολογιστική Σκέψη συνδέεται άμεσα με την μαθηματική μοντελοποίηση και την Αλγοριθμική επίλυση προβλημάτων. Οι έννοιες και οι πρακτικές μέθοδοι συνδυάζονται για να παρέχουν στους/τις μαθητές/ήτριοις ολοκληρωμένες εμπειρίες ενασχόλησης με την Πληροφορική σε συνδυασμό με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

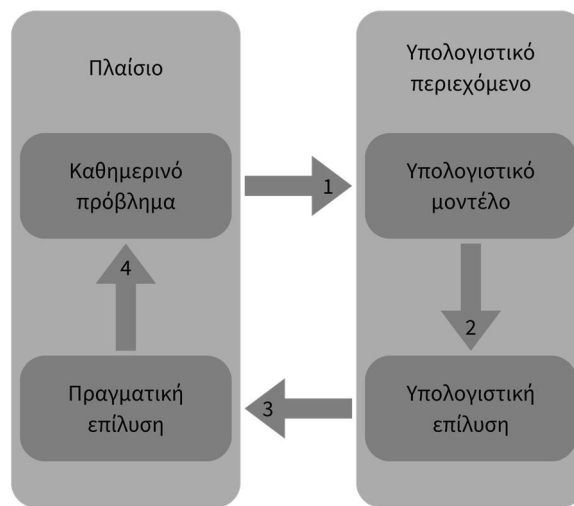
Η προφανής σχέση της Πληροφορικής με τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση και η σύνδεσή τους μέσω της Υπολογιστικής Σκέψης αναλύεται συστηματικότερα στην επόμενη ενότητα.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ, ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΚΑΙ Ο ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Βασικό στοιχείο της Υπολογιστικής Σκέψης (ΥΣ) είναι η επίλυση προβλημάτων. Η Kallia κ.ά. (2021) διακρίνει τέσσερις κατηγορίες γνωστικών δραστηριοτήτων στην ΥΣ κατά την επίλυση προβλημάτων:

1. Μετάφραση καθημερινού προβλήματος σε υπολογιστικό μοντέλο: Αφορά την αναπαράσταση του προβλήματος σε μορφή κατανοητή από υπολογιστή.
2. Συλλογισμός και επίλυση με χρήση υπολογιστικών μοντέλων: Περιλαμβάνει την ανάπτυξη αλγορίθμων και δομών δεδομένων για την αντιμετώπιση του προβλήματος.

3. Μετάφραση υπολογιστικού αποτελέσματος στο πλαίσιο του προβλήματος: Ερμηνεία των αποτελεσμάτων που παράγονται από τον υπολογιστή σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα.
4. Επαλήθευση της υπολογιστικής λύσης: Εκτίμηση της ορθότητας και της αποτελεσματικότητας της λύσης.



Σχήμα 2. Υπολογιστική Σκέψη στην επίλυση προβλημάτων (Kallia κ.ά., 2021).

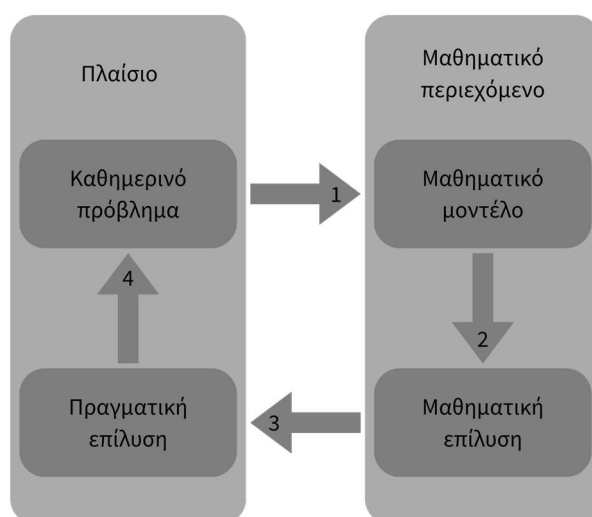
Σύμφωνα με την Kallia κ.ά. (2021) μπορούν να διακριθούν τέσσερις κατηγορίες γνωστικών δραστηριοτήτων στη Μαθηματική Σκέψη κατά την επίλυση προβλημάτων:

1. Μετάφραση καθημερινού προβλήματος σε μαθηματικό μοντέλο: Αφορά την αναπαράσταση του προβλήματος σε μορφή μαθηματικών εννοιών και σχέσεων και χαρακτηρίζεται ως οριζόντια μαθηματικοποίηση.
2. Συλλογισμός και επίλυση με χρήση μαθηματικών: Περιλαμβάνει την ανάπτυξη μαθηματικών στρατηγικών και την εφαρμογή τους για την επίτευξη λύσης και χαρακτηρίζεται ως κάθετη μαθηματικοποίηση.
3. Μετάφραση μαθηματικού αποτελέσματος στο πλαίσιο του προβλήματος: Ερμηνεία των λύσεων σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα και την πραγματική του εφαρμογή και χαρακτηρίζεται ως οριζόντια μαθηματικοποίηση.

4. Επαλήθευση της μαθηματικής λύσης: Εκτίμηση της ορθότητας και της λογικότητας της λύσης.

Η μαθηματοποίηση ορίζεται ως η θεώρηση πως τα μαθηματικά είναι η ανθρώπινη ικανότητα οργάνωσης και δόμησης του κόσμου με μαθηματικούς όρους (Freudenthal, 1973). Η οριζόντια μαθηματοποίηση διαμορφώνει τη σύνδεση μεταξύ του πραγματικού και του συμβολικού κόσμου, ενώ η κατακόρυφη εστιάζει σε δραστηριότητες πειραματισμού, εικασίας και οργάνωσης, στηριζόμενη στην οριζόντια (Rasmussen κ.ά., 2005).

Η ολοκληρωμένη εφαρμογή αυτών των τεσσάρων κατηγοριών, οι οποίες αλληλεπιδρούν οριζόντια και κατακόρυφα, συνιστά θεμελιώδες στοιχείο της μαθηματικής σκέψης και λειτουργεί ως αλγόριθμος επίλυσης προβλημάτων (Drijvers, 2015).

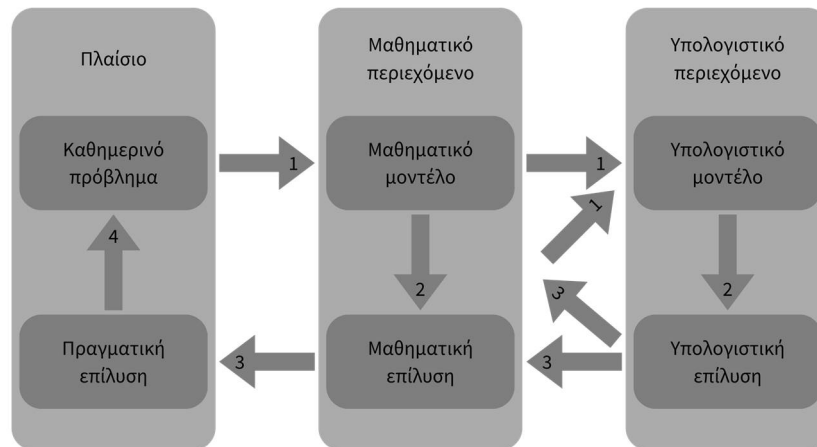


Σχήμα 3. Μαθηματική Σκέψη στην επίλυση προβλημάτων (Kallia κ.ά., 2021).

Συγκρίνοντας τα Σχήματα 2 και 3, αναδεικνύεται η διαφορά ανάμεσα στους δύο τρόπους σκέψης, η οποία έγκειται στη χρήση του μοντέλου και στον τρόπο επίλυσης της λύσης του προβλήματος. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο τα σχήματα αυτά μπορούν να διαμορφωθούν στη συνένωση των δύο τρόπων σκέψης.

Τόσο η υπολογιστική όσο και η μαθηματική σκέψη εστιάζουν στην επίλυση προβλημάτων, αξιοποιώντας γνωστικές και μεταγνωστικές διαδικασίες.

Επιπλέον, αμφότερες προσφέρουν ευκαιρίες για κοινωνικοπολιτισμική μάθηση μέσω της αντιμετώπισης προβλημάτων της καθημερινότητας.



Σχήμα 4. ΥΣ στα Μαθηματικά κατά την επίλυση προβλημάτων (Kallia κ.ά., 2021).

Συμπερασματικά, η ΥΣ δύναται να διευρύνει τις βασικές διαδικασίες των μαθηματικών, αναδιατυπώνοντας και προσδιορίζοντας νέες λύσεις σε προβλήματα. Επιπλέον, εάν ο συνδυασμός υπολογιστικής και μαθηματικής σκέψης ερμηνευθεί ως τρόπος πλαισίωσης της επιστήμης, τα μαθηματικά αναδεικνύονται ως το πλαίσιο της ΥΣ. Τα μαθηματικά αντικείμενα, που προκύπτουν από την οριζόντια μαθηματοποίηση, και οι μαθηματικές δραστηριότητες, που εστιάζουν στην κατακόρυφη μαθηματοποίηση, μπορούν να αποτελέσουν αφετηρία για την ΥΣ. Ταυτόχρονα η ΥΣ μπορεί να εμπλουτίσει και να ενισχύσει και τα δύο είδη μαθηματοποίησης αυτοματοποιώντας διαδικασίες στην κατακόρυφη μαθηματοποίηση και παρέχοντας νέα συστήματα συμβολικής αναπαράστασης για την οριζόντια. Για τη σύνδεση της ΥΣ με τη ρεαλιστική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης αξίζει να τονίσουμε επίσης την επέκταση του συνόλου των αυθεντικών προβλημάτων τα οποία μπορούν να ενταχθούν στα σχολικά μαθηματικά με την αξιοποίηση των Η/Υ να επεξεργάζονται μεγάλες ποσότητες δεδομένων με ταχύτητα πολύ μεγαλύτερη από τον άνθρωπο.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Από παιδαγωγική σκοπιά, η Υπολογιστική Σκέψη (ΥΣ) στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, και αντιστρόφως (Wilensky, 1995). Τα μαθηματικά παρέχουν ένα ουσιαστικό πλαίσιο με μια σειρά από προβλήματα στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί η ΥΣ (Jona κ.ά., 2014). Επιπλέον, η χρήση δυναμικών μαθηματικών περιβαλλόντων, όπως τα λογισμικά που επιτρέπουν στους/τις μαθητές/ήτριες να διερευνούν μαθηματικές έννοιες μέσω αλληλεπιδραστικών και οπτικών αναπαραστάσεων μπορούν να τους/τις βοηθήσουν να κατανοήσουν καλύτερα τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (Noss & Hoyles, 2012). Αυτή η μορφή σκέψης φαίνεται να προάγει την αυτονομία των μαθητών/τριών και να συντελεί στη δημιουργία θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά και γενικότερα στην εκπαίδευση στα πεδία STEM (Leonard κ.ά., 2016). Μέσω της ΥΣ, επιτυγχάνεται πιο αποτελεσματική διδασκαλία στα βασικά γνωστικά αντικείμενα, όπως τα μαθηματικά, ενώ διευκολύνεται η μεταφορά δεξιοτήτων μεταξύ διαφόρων γνωστικών πεδίων, όπως η Πληροφορική, τα Μαθηματικά, οι Φυσικές Επιστήμες και η Βιολογία, ενθαρρύνοντας περισσότερους/ες μαθητές/ήτριες να επιλέξουν καριέρες στους τομείς των πεδίων STEM (Barcelos & Silveira, 2012). Η εισαγωγή της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι, επίσης, κρίσιμη για την προσέγγιση όσο το δυνατόν μεγαλύτερης μερίδας μαθητριών, με στόχο την αντιμετώπιση της υποεκπροσώπησης των γυναικών και των μειονοτήτων σε τεχνολογικά πεδία (National Science Foundation, 2013).

Πέρα από την παιδαγωγική αξία, δεν μπορεί να παραβλεφθεί η επιστημονική συνεισφορά της ΥΣ στα μαθηματικά. Όπως αναφέρουν οι Weintrop κ.ά. (2016), οι υπολογιστικές μέθοδοι έχουν συμβάλει στη μελέτη των μη γραμμικών φαινομένων μέσω της χρήσης μαθηματικών μοντέλων και προσομοιώσεων, κάτι που είναι ιδιαίτερα σημαντικό δεδομένου ότι ο κόσμος και η φύση ακολουθούν και μη γραμμική συμπεριφορά και μπορούν να κατανοηθούν πιο ολοκληρωμένα με τον συνδυασμό της αναλυτικής με την συστημική προσέγγιση. Επίσης, οι επιστημονικοί τομείς βιώνουν μια αναγέννηση στις πειραματικές προσεγγίσεις, κυρίως λόγω της ύπαρξης ισχυρότερων υπολογιστών, της πρόσβασης σε νέες αναλυτικές μεθόδους και της ανάπτυξης λεπτομερών υπολογιστικών μοντέλων. Αυτές οι εξελίξεις έχουν αυξήσει την ανάγκη για κατάρτιση των μαθητών/τριών σε υπολογιστικές μεθόδους και τεχνικές, προκειμένου να υποστηρίξουν την

ταχεία πρόοδο της έρευνας στα μαθηματικά και τις επιστήμες (Weintro κ.ά., 2016).

Παράλληλα, πρόσφατες έρευνες καταγράφουν ακόμη παρανοήσεις μεταξύ των εκπαιδευτικών που δυσχεραίνουν την ενσωμάτωση της ΥΣ στην εκπαιδευτική διαδικασία (Πραντσούδη κ.ά., 2018). Αποτελέσματα από έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε εκπαιδευτικούς μαθηματικών και δασκάλους/ες, έδειξαν ότι ένας αποτελεσματικός τρόπος για να πειστούν να χρησιμοποιήσουν τον προγραμματισμό και γενικότερα την ΥΣ στα μαθηματικά, ήταν η ιδέα ότι μπορούν να αποτελέσουν ένα νέο εργαλείο για τη διδασκαλία του μαθηματικού συλλογισμού (Jenkins κ.ά., 2012).

Τρεις κύριες πτυχές της ΥΣ που είναι απαραίτητες στην εκπαίδευση των μαθηματικών περιλαμβάνουν την επίλυση προβλημάτων, τις γνωστικές διαδικασίες και την ικανότητα μετασχηματισμού (transposition) ενός μαθηματικού προβλήματος σε μια μορφή που μπορεί να κατανοηθεί και να χρησιμοποιηθεί από άλλο άτομο ή μηχανή (Kallia κ.ά., 2021). Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί έναν κεντρικό στόχο στην εκπαίδευση των μαθηματικών, στην οποία η ΥΣ είναι ενσωματωμένη.

Μάλιστα, ο Wolfram (2020) προωθεί την ιδέα της εκπαίδευσης στα μαθηματικά που βασίζεται στους H/Y (Computer-Based Maths), που ενσωματώνει τη χρήση της τεχνολογίας στην εκμάθηση μαθηματικών. Αυτός ο τύπος εκπαίδευσης στοχεύει στη διδασκαλία των μαθηματικών αξιοποιώντας συστηματικά την ΥΣ και της επίλυσης καθημερινών προβλημάτων, κάτι που θεωρείται πιο σχετικό και χρήσιμο για τους/τις μαθητές/ήτριες στη σύγχρονη κοινωνία. Για τον λόγο αυτόν, ο Wolfram υποστηρίζει ότι η εκπαίδευση στα μαθηματικά πρέπει να αναμορφωθεί, ώστε να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις της εποχής της Τεχνητής Νοημοσύνης και της υπολογιστικής επιστήμης. Προτείνει τη χρήση H/Y για την επίλυση σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων, γεγονός που θα καταστήσει τα μαθηματικά πιο συναφή και προσιτά στους/τις μαθητές/ήτριες. Επιπλέον, υποστηρίζει ότι η παραδοσιακή έμφαση στους χειροκίνητους υπολογισμούς στα μαθηματικά είναι ξεπερασμένη και δεν αντανακλά τις πραγματικές ανάγκες του σύγχρονου κόσμου. Ακόμα, υποστηρίζει θερμά την ιδέα πως αντί οι μαθητές/ήτριες να διδάσκονται πώς να υπολογίζουν χειροκίνητα, πρέπει να μάθουν πώς να χρησιμοποιούν υπολογιστές για να εκτελούν τους υπολογισμούς, επιτρέποντάς τους να επικεντρωθούν στην κατανόηση και την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών (Wolfram, 2020).

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τους Φεσάκης κ.ά. (2020), οι προτεινόμενες στη βιβλιογραφία μέθοδοι για την ενσωμάτωση ΥΣ και των σχετικών διαστάσεων της στη διδασκαλία περιλαμβάνουν δραστηριότητες εκπαιδευτικής ρομποτικής (Atmatzidou & Demetriadis, 2016), καθώς και τον συνδυασμό ψηφιακών (Leonard κ.ά., 2016) και παραδοσιακών παιχνιδιών (Lee κ.ά., 2011· Wu & Richards, 2011). Επίσης, συνιστάται η χρήση μοντελοποίησης και προσομοίωσης στο πλαίσιο της εκπαίδευσης στα πεδία STEM, για να αναδειχθεί η διεπιστημονική φύση της ΥΣ (Sengupta κ.ά., 2013). Επιπλέον, προτείνεται η χρήση λογισμικών ψηφιακής αφήγησης, ο προγραμματισμός παιχνιδιών σε τρισδιάστατα περιβάλλοντα (Werner κ.ά., 2012), οι δραστηριότητες κιναισθητικής αντίληψης και η δημιουργία διαδραστικών αφισών (Mannila κ.ά., 2014). Τέλος, επισημαίνεται η αξία των αποσυνδεδεμένων δραστηριοτήτων πληροφορικής (unplugged programming activities), για να αντιμετωπιστεί η αντίληψη ότι η ΥΣ είναι μόνο συνδεδεμένη με τη χρήση υπολογιστών (Rodriguez κ.ά., 2017). Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν σενάρια και προσεγγίσεις που διδάσκουν βασικές έννοιες της ΥΣ με τρόπους προσιτούς και ευέλικτους, ενισχύοντας την κατανόηση μέσω μη ψηφιακών μέσων (Bell, 2021).

Σχετικά με την ενσωμάτωση της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών, υπάρχουν ποικίλες μέθοδοι που μπορούν να βοηθήσουν τους/τις εκπαιδευτικούς. Πολλές από αυτές τις μεθόδους χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της ΥΣ, ανεξάρτητα από το αν είναι ενσωματωμένες στο μάθημα των μαθηματικών.

Η διδασκαλία περιλαμβάνει πολλές κατηγορίες για την ενσωμάτωση της ΥΣ στα μαθηματικά, όπως η μάθηση βάσει έργου και η επίλυση προβλημάτων (αντίστοιχα, project-based learning και problem-solving learning method· Menolli & Neto, 2021). Επίσης, περιλαμβάνει τη μάθηση βάσει σχεδιασμού (design-based learning· Matere κ.ά., 2021), την εφαρμογή μοντέλων ανεστραμμένης τάξης (flipped classroom· Fang κ.ά., 2017) και την κιναισθητική μάθηση (Sung & Black, 2020).

Η χρήση του προγραμματισμού στη διδασκαλία είναι μια από τις πιο συχνά εφαρμοζόμενες μεθόδους για την ανάπτυξη της ΥΣ στα μαθηματικά. Ο προγραμματισμός φαίνεται να ενισχύει τις δεξιότητες της ΥΣ (Critten κ.ά.,

2021) και μπορεί να υλοποιηθεί μέσω διαφόρων λογισμικών και δραστηριοτήτων, με και χωρίς τη χρήση υπολογιστή.

Σύμφωνα με τον Weintrop κ.ά. (2016), οι πρακτικές ενσωμάτωσης της ΥΣ στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις κύριες κατηγορίες. Αυτές οι κατηγορίες περιλαμβάνουν τις πρακτικές που σχετίζονται με δεδομένα, τις πρακτικές μοντελοποίησης και προσομοίωσης, τις πρακτικές υπολογιστικής επίλυσης προβλημάτων και τις πρακτικές συστημικής σκέψης. Κάθε κατηγορία περιλαμβάνει διάφορες υποκατηγορίες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Αν και η συγκεκριμένη ταξινόμηση παρουσιάζει αυτές τις κατηγορίες ως διακριτές, στην πραγματικότητα οι πρακτικές αυτές είναι αλληλένδετες και αλληλεξαρτώμενες.

Πρακτικές σχετικές με δεδομένα	Πρακτικές μοντελοποίησης και προσομοίωσης	Πρακτικές υπολογιστικής επίλυσης προβλημάτων	Πρακτικές συστημικής σκέψης
Συλλογή δεδομένων	Χρήση υπολογιστικών μοντέλων για κατανόηση εννοιών	Προετοιμασία προβλημάτων για υπολογιστικές λύσεις	Διερεύνηση ενός σύνθετου συστήματος ως μία ολότητα
Δημιουργία δεδομένων	Χρήση υπολογιστικών μοντέλων για εύρεση και έλεγχο λύσεων	Προγραμματισμός	Κατανόηση των σχέσεων μέσα σε ένα σύστημα
Διαχείριση δεδομένων	Αξιολόγηση υπολογιστικών μοντέλων	Επιλογή αποτελεσματικών υπολογιστικών εργαλείων	Σκέψη σε επίπεδα
Ανάλυση δεδομένων	Σχεδιασμός υπολογιστικών μοντέλων	Αξιολόγηση διαφορετικών προσεγγίσεων/λύσεων σε ένα πρόβλημα	Επικοινωνία πληροφοριών για ένα σύστημα
Οπτικοποίηση δεδομένων	Κατασκευή υπολογιστικών μοντέλων	Ανάπτυξη αρθρωτών υπολογιστικών λύσεων	Καθορισμός συστημάτων και διαχείριση πολυπλοκότητας
	Διόρθωση σφαλμάτων μοντέλων	Δημιουργία υπολογιστικών αφαιρέσεων	Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων
		Αντιμετώπιση προβλημάτων και αποσφαλμάτωση	

Σχήμα 5. Ταξινόμηση κύριων πρακτικών της ΥΣ στα μαθηματικά.
Διασκευή από Weintrop κ.ά. (2016).

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ΥΣ μπορεί να ενσωματωθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών με ποικιλία λογισμικών ανάλογα με την ηλικία. Από την προσχολική εκπαίδευση και το Νηπιαγωγείο ακόμα τα παιδιά μπορούν να προγραμματίσουν είτε με εκπαιδευτικά ρομπότ, είτε με ειδικά λογισμικά προγραμματισμού (Fessakis κ.ά., 2013). Σύγχρονες εκδοχές λογισμικού προγραμματισμού για τα Νήπια έχουν αναπτυχθεί πρόσφατα στο πλαίσιο του έργου ΕΛΠΕΙΔΑ του ΙΕΠ (<https://elpeida.github.io/>).

Για μεγαλύτερες τάξεις είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν ειδικά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, όπως η Χελωνόσφαιρα (<http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/>), το <colette/> (<http://www.colette-project.eu/>) (Stäter & Ludwig, 2023) και τα StarLogo TNG, Scratch, LightBot, bockly, micro:bit, pencilcode.net, xlogo (<https://xlogo.inf.ethz.ch/>) κ.ά. ή να αξιοποιηθούν περιβάλλοντα επιστημονικού προγραμματισμού γενικής χρήσης.

Ο επιστημονικός προγραμματισμός παρέχει ένα σημαντικό υπόδειγμα και αποτελεί κρίσιμο περιβάλλον για την ενσωμάτωση της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών. Υπάρχουν πολλά λογισμικά που διευκολύνουν τον επιστημονικό προγραμματισμό και προσφέρουν ισχυρές δυνατότητες για την ανάλυση δεδομένων, την προσομοίωση και την επίλυση σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων. Ανάμεσα στα πιο διαδεδομένα λογισμικά για επιστημονικό προγραμματισμό περιλαμβάνονται το Matlab, το GNU Octave, το NetLogo, το Wolfram Mathematica/Alpha, η γλώσσα προγραμματισμού R, η Julia και η Python.

Το Matlab είναι ένα ισχυρό περιβάλλον προγραμματισμού και αριθμητικής ανάλυσης που χρησιμοποιείται ευρέως σε επιστημονικούς και τεχνικούς τομείς. Παρέχει εργαλεία για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, τη μοντελοποίηση συστημάτων και την ανάλυση δεδομένων. Η ενσωμάτωση του Matlab στη διδασκαλία των μαθηματικών επιτρέπει στους/τις μαθητές/ήτριες να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες μέσω της προσομοίωσης και της οπτικοποίησης.

Το GNU Octave είναι ένα λογισμικό ανοιχτού κώδικα που προσφέρει παρόμοιες δυνατότητες με το Matlab. Χρησιμοποιείται για αριθμητικούς υπολογισμούς και είναι ιδανικό για την ανάπτυξη αλγορίθμων και την επίλυση γραμμικών και μη γραμμικών προβλημάτων. Λόγω της δωρεάν

πρόσβασής του, αποτελεί μια εξαιρετική εναλλακτική για εκπαιδευτικούς που επιθυμούν να ενσωματώσουν την ΥΣ στη διδασκαλία χωρίς πρόσθετα κόστη.

Το NetLogo είναι ένα περιβάλλον προσομοίωσης που χρησιμοποιείται κυρίως για τη μοντελοποίηση πολύπλοκων συστημάτων και τη μελέτη φαινομένων από τα κοινωνικά, φυσικά και βιολογικά συστήματα. Προσφέρει μια προσιτή γλώσσα προγραμματισμού που επιτρέπει στους/τις μαθητές/ήτριες να δημιουργούν και να αναλύουν μοντέλα με ευκολία.

Το Wolfram Mathematica και η πιο σύγχρονη εκδοχή του ως γλώσσα Alpha είναι περιβάλλοντα επιστημονικού προγραμματισμού που προσφέρουν εργαλεία για τη συμβολική και αριθμητική ανάλυση, τη γραφική απεικόνιση και την επεξεργασία δεδομένων. Είναι γνωστά για εκτενείς δυνατότητες υπολογισμών.

Η R είναι μια γλώσσα προγραμματισμού και ένα περιβάλλον λογισμικού που χρησιμοποιείται κυρίως για στατιστικούς υπολογισμούς και γραφική απεικόνιση. Προσφέρει ισχυρά εργαλεία για την ανάλυση δεδομένων και την εφαρμογή μαθηματικών μοντέλων. Στη διδασκαλία των μαθηματικών, η R μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση πραγματικών δεδομένων και την ανάπτυξη στατιστικών αλγορίθμων.

Η Julia είναι μια γλώσσα προγραμματισμού που έχει σχεδιαστεί για υψηλές επιδόσεις και αριθμητικούς υπολογισμούς. Συνδυάζει την ταχύτητα των γλωσσών χαμηλού επιπέδου με την ευκολία χρήσης γλωσσών υψηλού επιπέδου. Η χρήση της Julia στη διδασκαλία των μαθηματικών επιτρέπει στους/τις μαθητές/ήτριες να εκμεταλλευτούν τις δυνατότητες ταχείας εκτέλεσης και να αναπτύξουν αποδοτικούς αλγορίθμους.

Η Python είναι μια από τις πιο δημοφιλείς γλώσσες προγραμματισμού, λόγω της απλότητας και της ευελιξίας της. Διαθέτει εκτεταμένες βιβλιοθήκες για μαθηματικούς και επιστημονικούς υπολογισμούς, όπως οι NumPy, SciPy, και Matplotlib. Η Python είναι ιδανική για τη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς επιτρέπει στους/τις μαθητές/ήτριες να επικεντρωθούν στις μαθηματικές έννοιες, χωρίς να αντιμετωπίζουν την πολυπλοκότητα του προγραμματισμού.

Η χρήση αυτών των λογισμικών στην εκπαιδευτική διαδικασία, όχι μόνο προάγει την ΥΣ, αλλά βοηθά τους/τις μαθητές/ήτριες να αναπτύξουν δεξιότητες που είναι πλέον απαραίτητες. Για αυτόν τον λόγο, η ενσωμάτωση

της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί μια παγκόσμια τάση και πολλές χώρες έχουν αναγνωρίσει τη σημασία της.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΜΠΕΙΡΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

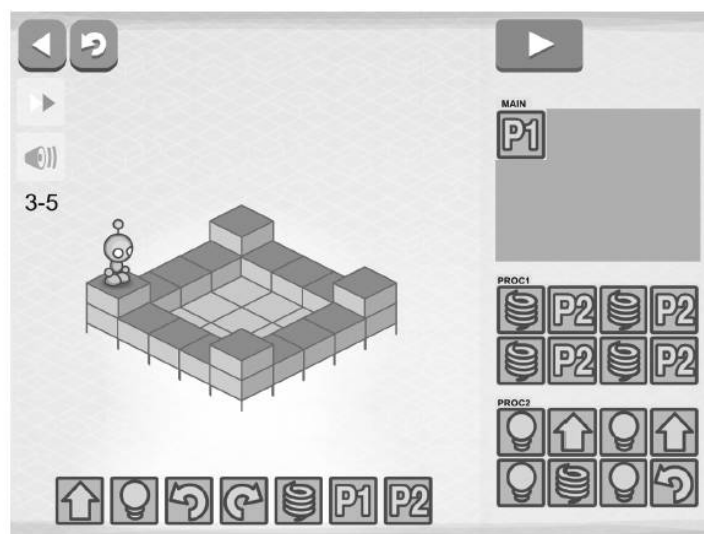
Αν και η ιδέα της ενσωμάτωσης Υπολογιστικής Σκέψης (ΥΣ) στη διδασκαλία των μαθηματικών με την αξιοποίηση σύγχρονων εργαλείων δεν είναι τόσο παλιά, σε χώρες όπως οι Σκανδιναβικές έχει ήδη προχωρήσει η υλοποίηση της ενσωμάτωσης σε μεγάλη κλίμακα και συσσωρεύεται σχετική εμπειρία. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται επιλεγμένες έρευνες σχετικά με την ενσωμάτωση της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Στη Σουηδία έχουν υιοθετήσει την ενσωμάτωση του προγραμματισμού στο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) των μαθηματικών, εντός του βασικού περιεχομένου της άλγεβρας σε όλα τα επίπεδα, γεγονός που καθιστά τη σουηδική προσέγγιση μοναδική διεθνώς (Bråting & Kilhamn, 2020). Το ΠΣ εστιάζει στη διδασκαλία του προγραμματισμού στο μάθημα των μαθηματικών και την εφαρμογή του στο μάθημα της τεχνολογίας. Υπογραμμίζεται δε η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μέσω αλγορίθμων.

Μια επιλεγμένη δραστηριότητα περιλαμβάνει τον αλγόριθμο εύρεσης πρώτων αριθμών, ο οποίος διδάσκεται σε μαθητές/ήτριες από την Α΄ έως τη Γ΄ Γυμνασίου. Στο πλαίσιο αυτό, οι μαθητές/ήτριες αρχικά εργάζονται αποσυνδεδεμένα στο χαρτί, αναζητώντας γενικά πρότυπα. Ορισμένοι μαθητές/ήτριες φτάνουν στο συμπέρασμα ότι αρκεί να εξεταστούν οι αριθμοί μέχρι το $\sqrt{n}$ για να βρεθούν οι πρώτοι αριθμοί. Στη συνέχεια, υπό την καθοδήγηση του/της εκπαιδευτικού, δημιουργούν έναν αλγόριθμο σε ψευδοκώδικα που ελέγχει αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή όχι. Στο τρίτο βήμα, οι μαθητές προχωρούν στη μετάφραση του ψευδοκώδικα στη γλώσσα προγραμματισμού Python ή σε μια παρόμοια γλώσσα προγραμματισμού (Misfeldt κ.ά., 2020).

Στην έρευνα των Bråting και Kilhamn (2020) εξετάζεται ο τρόπος εισαγωγής του προγραμματισμού στα σχολεία στη Σουηδία και διερευνάται πώς επηρεάζει τη μαθηματική σκέψη, με έμφαση στην αλγεβρική σκέψη. Συγκεκριμένα, αναλύονται τρεις δραστηριότητες προγραμματισμού που μπορούν να ενσωματωθούν στο μάθημα των μαθηματικών σε διάφορα εκπαιδευτικά επίπεδα. Αυτές οι δραστηριότητες έχουν αντληθεί από το αναθεωρημένο σουηδικό ΠΣ και αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα του προγράμματος.

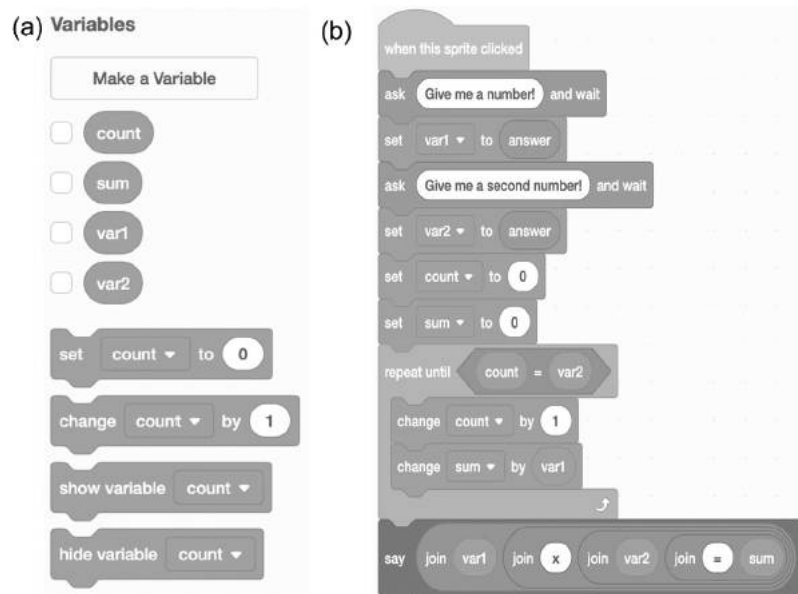
Η πρώτη δραστηριότητα απευθύνεται στις τρεις πρώτες τάξεις του Δημοτικού και με την οποία οι μαθητές/ήτριες εισάγονται στις βασικές έννοιες του προγραμματισμού μέσω οδηγιών. Χρησιμοποιείται η διαδικτυακή εφαρμογή Lightbot, στην οποία οι μαθητές/ήτριες καθοδηγούν ένα ψηφιακό ρομπότ που κινείται σε πλακίδια χρησιμοποιώντας εικονικά σύμβολα.



Εικόνα 1. Το περιβάλλον του Lighthouse στην πρώτη δραστηριότητα (Bråting & Kilhamn, 2020).

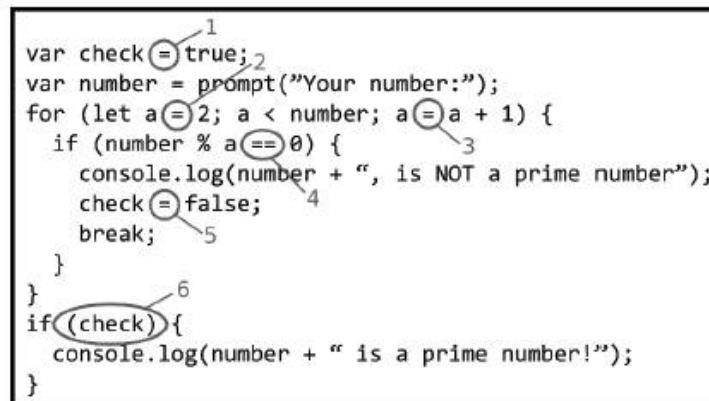
Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, οι μαθητές/τριες πρέπει να αναγνωρίσουν ένα μοτίβο και να δημιουργήσουν δύο συναρτήσεις που θα ακολουθούν συγκεκριμένους αλγόριθμους. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η έννοια του αλγορίθμου και της συνάρτησης χρησιμοποιείται τόσο στα μαθηματικά όσο και στον προγραμματισμό, με κάποιες ουσιαστικές διαφορές. Επιπλέον, ένα σημαντικό στοιχείο της δραστηριότητας είναι η ανάγκη μετασχηματισμού και συμπύκνωσης συμβολικών αναπαραστάσεων, οι οποίες αποτελούν βασικές δραστηριότητες στα μαθηματικά.

Η δεύτερη δραστηριότητα αφορά τις τάξεις Δ'–ΣΤ' Δημοτικού και στοχεύει στη δημιουργία ενός προγράμματος που μπορεί να πολλαπλασιάσει δύο αριθμούς. Για τη δραστηριότητα αυτή, χρησιμοποιείται το λογισμικό οπτικού προγραμματισμού Scratch.



Εικόνα 2. Η δεύτερη δραστηριότητα, με τη χρήση του Scratch (Bråting & Kilhamn, 2020).

Η τρίτη δραστηριότητα απευθύνεται στις τάξεις Α'– Γ' Γυμνασίου και απαιτεί από τους/τις μαθητές/ήτριες να δημιουργήσουν έναν αλγόριθμο για την εύρεση πρώτων αριθμών χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού JavaScript. Σε αυτή τη δραστηριότητα, δίνεται έμφαση στη διαφορά της έννοιας της μεταβλητής στα μαθηματικά και στον προγραμματισμό. Συγκεκριμένα, επισημαίνεται ότι στον προγραμματισμό, οι μεταβλητές μπορούν να δεχθούν διαφορετικούς τύπους τιμών, όχι μόνο αριθμητικές και η τιμή τους μπορεί να αλλάξει κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του προγράμματος. Αυτό διαφέρει από τη σχολική αλγεβρική σημειογραφία, στην οποία οι μεταβλητές έχουν σταθερές τιμές.



```

var check = true;
var number = prompt("Your number:");
for (let a = 2; a < number; a = a + 1) {
  if (number % a == 0) {
    console.log(number + ", is NOT a prime number");
    check = false;
    break;
  }
}
if (check) {
  console.log(number + " is a prime number!");
}

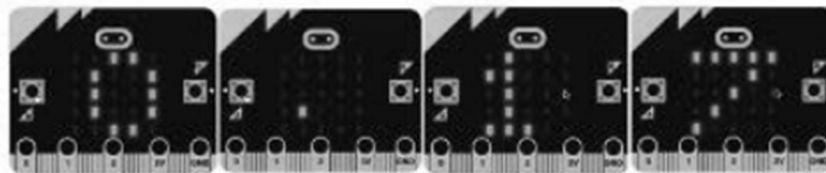
```

Εικόνα 3. Η τρίτη δραστηριότητα με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού JavaScript (Bråting & Kilhamn, 2020).

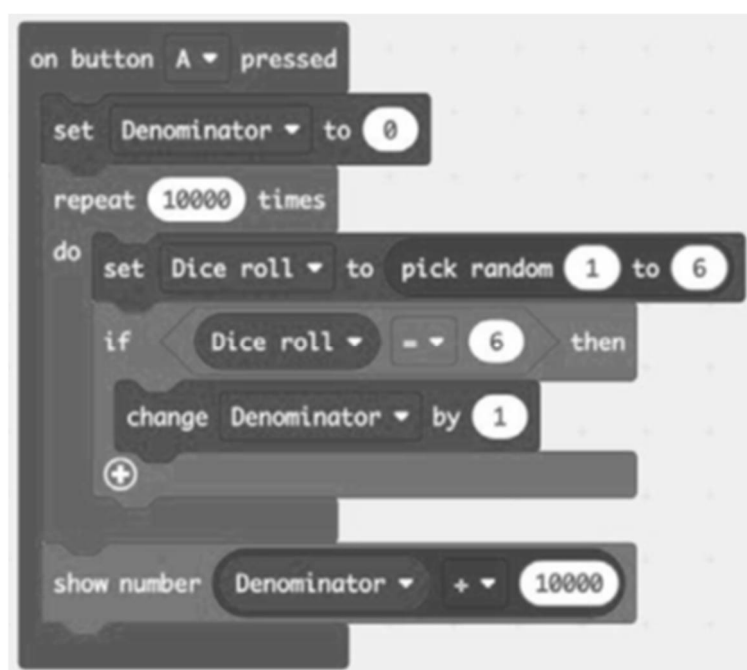
Στη Νορβηγία, πραγματοποιήθηκε η έρευνα του Andersen (2022) που διερευνά τους τρόπους ενσωμάτωσης του γραφικού προγραμματισμού με μπλοκ σε ένα μάθημα μαθηματικών και τα αποτελέσματα που μπορεί να έχει. Στην έρευνα συμμετείχαν 43 χαρισματικοί/ές μαθητές/ήτριες, ηλικίας 12-16 ετών.

Το άρθρο αυτό επικεντρώνεται σε μία από τις τέσσερις παρεμβάσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια της έρευνας, με έμφαση στην έννοια της πιθανότητας. Στην αρχή της παρέμβασης, ο/η εκπαιδευτικός παρουσίασε το θέμα και στη συνέχεια χώρισε τους/τις μαθητές/ήτριες σε ομάδες των τριών ή τεσσάρων ατόμων, τοποθετώντας τους/τις σε διαφορετικές αίθουσες στο λογισμικό τηλεδιασκέψεων Zoom. Χρησιμοποιήθηκε ο μικροελεγκτής micro:bit, τον οποίο προγραμματίσαν μέσω του λογισμικού MakeCode της Microsoft, που επιτρέπει τη συγγραφή κώδικα με μπλοκ. Σκοπός της δραστηριότητας ήταν η δημιουργία ενός ζαριού και ο υπολογισμός της πιθανότητας να φέρει το ζάρι τον αριθμό έξι μετά από συγκεκριμένο αριθμό ρίψεων.

Τα κύρια ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι η ενσωμάτωση του προγραμματισμού με μπλοκ στα μαθηματικά ενισχύει την ενεργή και συνεργατική μάθηση, αναπτύσσει την ΥΣ και διευκολύνει την κατανόηση των μαθηματικών.



Εικόνα 4. Στιγμιότυπα του micro:bit με την πιθανότητα να έρθει η πλευρά του ζαριού με αριθμό 6 (Andersen, 2022).



Εικόνα 5. Στιγμιότυπο κώδικα από τη δραστηριότητα υπολογισμού της πιθανότητας να έρθει η πλευρά του ζαριού με αριθμό 6, με το λογισμικό MakeCode (Andersen, 2022).

Στην Αγγλία, σύμφωνα με την έρευνα των Misfeldt κ.ά. (2020), το Πρόγραμμα Σπουδών έχει ως στόχο την ανάπτυξη ψηφιακής παιδείας από την ηλικία των πέντε ετών, ενισχύοντας τις δεξιότητες των μαθητών/τριών στην ΥΣ. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, συνηθισμένες δραστηριότητες περιλαμβάνουν τον 'προγραμματισμό σε ζευγάρια', που οι μαθητές/ήτριες συνεργάζονται για τη δημιουργία προγραμμάτων, την 'αποσφαλμάτωση/προγραμματισμός', κατά την οποία διορθώνουν σφάλματα στον κώδικα, και την 'πρόβλεψη και δοκιμή', που προβλέπουν τα

αποτελέσματα κώδικα πριν την εκτέλεσή του. Στην εν λόγω έρευνα, το ενδιαφέρον εστιάζεται σε μια αποσυνδεδεμένη δραστηριότητα, που προέρχεται από το ScratchMaths και απευθύνεται σε μαθητές/ήτριες τελευταίων τάξεων του Δημοτικού. Σε αυτήν, οι μαθητές/ήτριες χορηγούνται με τρία διαφορετικά κείμενα, που οδηγούν στην κατασκευή ενός τετραγώνου και καλούνται να σχεδιάσουν το αποτέλεσμα των οδηγιών που παρέχονται. Ως αποτέλεσμα αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές/ήτριες ανέπτυξαν την ΥΣ και σημειώθηκε σημαντική βελτίωση στις δεξιότητές τους στην επίλυση προβλημάτων.

Στη Δανία, το Πρόγραμμα Σπουδών επικεντρώνεται στην ένταξη του προγραμματισμού με τη μέθοδο δύο επιπέδων και εστιάζει σε έξι κύριους τομείς: ψηφιακός σχεδιασμός, μοντελοποίηση, προγραμματισμός, αλγόριθμοι και δομές δεδομένων, επανασχεδιασμός και συστήματα υπολογιστών (Misfeldt κ.ά., 2020). Στόχος του προγράμματος είναι η συμμετοχή των μαθητών/τριών στην ψηφιακή παραγωγή, η ανάπτυξη και αξιολόγηση ψηφιακών λύσεων καθώς και η κατανόηση του ρόλου της Πληροφορικής στον μετασχηματισμό της κοινωνίας. Η επιλεγμένη δραστηριότητα εστιάζει στο γνωστό παιχνίδι ‘πέτρα-ψαλίδι-χαρτί’ και σκοπός της είναι να χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα που παράγονται από αυτό, για να κατανοήσουν πώς αυτά μπορούν να βοηθήσουν στην πρόβλεψη μελλοντικών αποτελεσμάτων. Στο πρώτο στάδιο, οι μαθητές/ήτριες αναπτύσσουν ένα απλοποιημένο σενάριο σε Python, στο οποίο ο/η παίκτης/τρια και ο υπολογιστής επιλέγουν τυχαία ανάμεσα σε τρεις επιλογές. Στη συνέχεια, εξετάζουν πώς η γνώση πιθανοτήτων επηρεάζει το παιχνίδι, λαμβάνοντας υπόψη δεδομένα από προηγούμενες παρτίδες. Στο δεύτερο στάδιο, συνεχίζουν τη συλλογή δεδομένων για να μελετήσουν την αλλαγή της πιθανότητας ως αποτέλεσμα των προηγούμενων παιχνιδιών και εργάζονται με μεγαλύτερα σύνολα δεδομένων. Στο τρίτο στάδιο, δημιουργούν ένα νέο παιχνίδι, με το οποίο συλλέγουν και χρησιμοποιούν δεδομένα για να κάνουν προβλέψεις, με στόχο την επιτυχία στο παιχνίδι. Σκοπός του τελευταίου σταδίου είναι να καταδείξει πώς ένα παιχνίδι, το οποίο βασίζεται στην τύχη, μπορεί να προγραμματιστεί, ώστε οι πιθανότητες εμφάνισης ορισμένων αποτελεσμάτων να αλλάζουν συναρτήσει δεδομένων προηγούμενων παιχνιδιών. Τέλος, οι μαθητές/ήτριες παρουσιάζουν το πρόγραμμά τους και λαμβάνουν σχόλια από τους/τις υπόλοιπους/ες συμμαθητές/ήτριές τους.

Στη Γαλλία, το Πρόγραμμα Σπουδών που εισήχθη το 2016, ενσωματώνει την ΥΣ στα μαθηματικά, με πληθώρα δραστηριοτήτων, που σκοπό έχουν την

ανάπτυξή της (Rocha, 2018). Στα σύγχρονα διαδραστικά ψηφιακά εγχειρίδια της ένωσης Sésamath υπάρχουν ασκήσεις από προβλήματα της καθημερινής ζωής καθώς και διεπιστημονικές ασκήσεις. Παράδειγμα αποτελεί η άσκηση που βρίσκεται στην ακόλουθη εικόνα, στην οποία γίνεται διδασκαλία πολυνόμων με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Python.

The image shows two pages from the Sésamath website. The left page, titled 'Préparer le BAC Je me teste', contains a list of exercises under the heading 'Je dois être capable de...'. The right page, titled 'Préparer le BAC Je révisé', contains a section 'Utiliser la forme algébrique' with exercises 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200. Below the exercises, there is a section 'Python' with a code snippet for polynomial factorization.

Python

```
def factoriser(n):
    for i in range(2, n):
        if n % i == 0:
            return i, n // i
    return n, 1
```

Εικόνα 6. Διδασκαλία πολυνόμων με αλγοριθμικές ασκήσεις στο Sésamath. Ανακτήθηκε από το https://manuel.sesamath.net/numerique/index.php?ouvrage=mstsexp_2020&page_gauche=37.

Ωστόσο, η επιτυχία της ενσωμάτωσης της ΥΣ στα μαθηματικά εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την προετοιμασία των εκπαιδευτικών (Gal-Ezer & Stephenson, 2010) και συνεπώς απαιτείται αυξημένη εστίαση στην κατάρτισή τους σε αυτόν τον τομέα (Kravik κ.ά., 2022). Η συνεργασία με πανεπιστήμια και ερευνητικά κέντρα αποτελεί μία στρατηγική που έχει υιοθετηθεί σε χώρες του εξωτερικού. Στο άρθρο της, η Angeli κ.ά. (2016) αναφέρει για ένα Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών σχετικό με τις ΤΠΕ, το οποίο διαθέτει μάθημα διδασκαλίας της ΥΣ. Στο μάθημα αυτό οι συμμετέχοντες/ουσες ασχολούνται με δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, προγραμματισμού με το περιβάλλον Scratch και σχεδιασμού

μοντέλων. Επιπλέον, έχουν υλοποιηθεί πολύωρα σεμινάρια που απευθύνονται σε δασκάλους/ες και εκπαιδευτικούς μαθηματικών, με σκοπό τη διεξαγωγή έρευνας (Nordby κ.ά., 2022· Reichert κ.ά., 2020). Στην έρευνα των Reichert κ.ά. (2020) το σεμινάριο που υλοποιήθηκε σε μαθηματικούς κάλυψε εισαγωγικές έννοιες της ΥΣ, αποσυνδεδεμένες δραστηριότητες πληροφορικής, δραστηριότητες προγραμματισμού με τη χρήση του Scratch, παρουσίαση βασικών εννοιών ρομποτικής, προγραμματισμό με τη χρήση μπλοκ κώδικα με το λογισμικό ArduBlock καθώς και χρήση ηλεκτρονικών εξαρτημάτων και του μικροελεγκτή Arduino. Ωστόσο, οι έρευνες που στοχεύουν στην κατάρτιση των εκπαιδευτικών είναι περιορισμένες και αυτό χρειάζεται να αλλάξει (Barcelos κ.ά., 2018).

Μέσω των εκπαιδευτικών πρωτοβουλιών και των προγραμμάτων, οι εκπαιδευτικοί εξοπλίζονται με απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες, για να διδάξουν μαθηματικά με την ενσωμάτωση της ΥΣ, προσφέροντας στους/τις μαθητές/ήτριες μια ολοκληρωμένη εκπαιδευτική προσέγγιση που ανταποκρίνεται στη σύγχρονη πραγματικότητα. Η επιτυχία της ενσωμάτωσης της Πληροφορικής μέσω των μαθηματικών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την υποστήριξη και την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών. Οι στρατηγικές που έχουν εφαρμόσει επιτυχώς παρέχουν ένα πλαίσιο για χώρες που επιθυμούν να ενσωματώσουν την Πληροφορική στα ΠΣ των μαθηματικών.

Πέρα από τις μεταρρυθμίσεις στα ΠΣ, όπως της Σουηδίας και της Φινλανδίας (Bråting & Kilhamn, 2020), αλλά και τις έρευνες που πραγματοποιούνται σχετικά με την ενσωμάτωση της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών, υπάρχουν και ερευνητικά προγράμματα που στοχεύουν στη διερεύνηση αυτής της προσέγγισης. Τέτοιο πρόγραμμα αποτελεί η διδασκαλία της ΥΣ με το λογισμικό <Colette/>. Το ερευνητικό αυτό πρόγραμμα υλοποιήθηκε από έξι χώρες της Ευρώπης και πιο συγκεκριμένα τη Γερμανία, την Αυστρία, την Ολλανδία, τη Γαλλία και τη Σλοβακία (Stäter κ.ά., 2023). Το παραπάνω πρόγραμμα προτείνει μια προσιτή προσέγγιση για τη διδασκαλία της ΥΣ μέσω της ιστοσελίδας και της εφαρμογής <colette/>. Η ιστοσελίδα παρέχει στους/τις εκπαιδευτικούς έναν εύκολο τρόπο για τη δημιουργία ασκήσεων, ενώ η εφαρμογή επιτρέπει στους/τις μαθητές/ήτριες να τις επιλύουν και να τις αναθεωρούν. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δημιουργούν προσαρμοσμένα μονοπάτια μάθησης με την προσαρμογή των προκαθορισμένων προτύπων ασκήσεων, καθεμία από τις οποίες στοχεύει σε μια συγκεκριμένη δεξιότητα της ΥΣ.



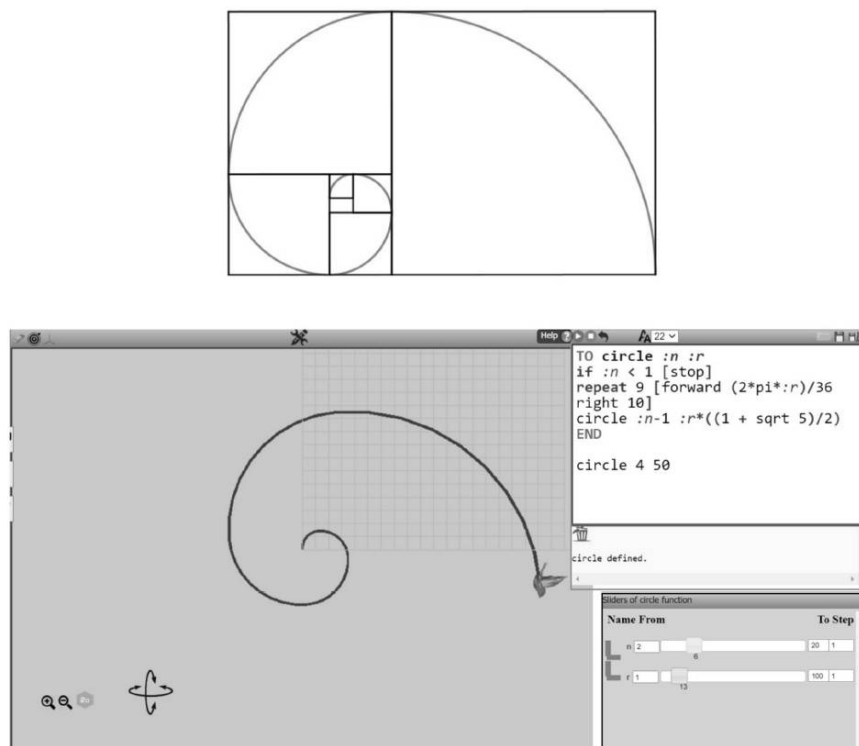
Εικόνα 7. Στιγμιότυπα οθονών από την προβολή, επίλυση και επανεξέταση μιας εργασίας με την εφαρμογή <colette/> (Stäter κ.ά., 2023).

Στην Ελλάδα, η ενσωμάτωση της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών με τη μορφή του προγραμματισμού δεν συμβαίνει σε μεγάλη έκταση αν και έχει αρχίσει να μελετάται εδώ και αρκετά χρόνια (Kynigos, 2001). Ιδιαίτερα η ιδέα του μισοψημένου μικρόκοσμου (Kynigos & Kalogeria, 2012) έχει επηρεάσει αρκετά τη δημιουργία των εμπλουτισμένων ψηφιακών σχολικών εγχειριδίων και των μαθησιακών αντικειμένων στο εθνικό αποθετήριο *Φωτόδεντρο*. Στο πλαίσιο της προσέγγισης αυτής, οι μαθητές διερευνούν και κατασκευάζουν μαθηματικά μέσω προγραμματισμού για να επεκτείνουν ημιτελείς μικρόκοσμους ή/και να λύσουν προβλήματα αξιοποιώντας τον

κώδικα ως ένα σημειωτικό σύστημα νοητικού εργαλείου με την έννοια που το περιγράφει ο Cobb (2002).

Οι μισοψηφισμένοι μικρόκοσμοι και τα μικροπειράματα (Κυνηγός κ.ά., 2019) αξιοποιούν τον προγραμματισμό ως μέσο εκμάθησης μαθηματικών με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που είχε προταθεί με την γλώσσα LOGO (Hoyles & Sutherland, 1989) με τη διαφορά ότι παρέχουν ισχυρές νοητικές σκαλωσιές, ώστε να εργάζονται οι μαθητές/ήτριοι στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης που αναλογεί στην εκάστοτε διδακτική κατάσταση. Με την έννοια αυτή αποτελούν σημαντική παιδαγωγική πρόοδο στην πορεία αναζήτησης των κατάλληλων πρακτικών για την αξιοποίηση του προγραμματισμού στη μαθηματική εκπαίδευση.

Ενδεικτική, πρόσφατη, μελέτη που έχει διεξαχθεί στην κατηγορία αυτή και σημειώνεται εδώ ως παράδειγμα για την αποσαφήνιση των εννοιών, είναι των Kynigos και Diamantidis (2022). Η έρευνα διερευνά τη δημιουργικότητα των μαθητών/τριών στη διαμόρφωση μαθηματικών μοντέλων μέσω προγραμματισμού. Στην έρευνα, οι μαθητές/ήτριοι εργάστηκαν σε ομάδες, προκειμένου να αναπτύξουν προγράμματα με δυναμικά μεταβλητά γεωμετρικά μοντέλα, αναλύοντας τις μαθηματικές τους ιδιότητες. Για να δημιουργήσουν και να αναλύσουν μαθηματικά μοντέλα, χρησιμοποίησαν τεχνικές προγραμματισμού και υπολογιστικά εργαλεία. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές/ήτριοι μπορούν να επιδείξουν δημιουργική δράση ακόμη και σε αυστηρά μαθηματικά πλαίσια, χρησιμοποιώντας θεωρία αριθμών και αναδρομή για την επίλυση προβλημάτων και τη δημιουργία μοντέλων, όπως η χρυσή σπείρα.



Εικόνα 8. Η πάνω εικόνα είναι η έμπνευση των μαθητών/τριών να φτιάξουν μια σπείρα. Η κάτω εικόνα δείχνει τη σπείρα που δημιούργησαν χρησιμοποιώντας την αναδρομή (Kynigos & Diamantidis, 2022).

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Παρά τις παγκόσμιες τάσεις και τα οφέλη που παρέχει η Υπολογιστική Σκέψη (ΥΣ) σε μαθητές/ήτριες σε διάφορες χώρες, η έρευνα και η εφαρμογή της στην Ελλάδα παραμένουν περιορισμένες. Είναι ουσιαστική η ανάγκη να γίνουν συστηματικές και οργανωμένες προσπάθειες για να εξεταστεί η ενσωμάτωση της ΥΣ στο εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας, ώστε να διαπιστωθούν τα πιθανά οφέλη και οι προκλήσεις που συνεπάγεται. Η διεξαγωγή τέτοιων ερευνών θα μπορούσε να συμβάλλει σημαντικά στη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης και να προσφέρει νέες ευκαιρίες για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών/τριών. Ειδικά τώρα που οι εφαρμογές της Μηχανικής Μάθησης και της Τεχνητής Νοημοσύνης γενικότερα απαιτούν νέους επιστήμονες με αντίστοιχο μαθηματικό και υπολογιστικό υπόβαθρο.

Θα ήταν σημαντικό να αξιολογηθεί, επίσης, η δυνατότητα δημιουργίας ενός ολοκληρωμένου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) που να ενσωματώνει την ΥΣ στα Μαθηματικά. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να διερευνηθούν οι απόψεις και οι στάσεις των εκπαιδευτικών και των μαθητών/τριών σχετικά με αυτό το ΠΣ. Τέλος, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί η δυνατότητα χρήσης μεθόδων Τεχνητής Νοημοσύνης για την αυτόματη προσαρμογή των σχολικών εγχειριδίων στις ανάγκες των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Συμπερασματικά, διαπιστώνεται ανάγκη να αξιολογηθεί η δυνατότητα δημιουργίας ενός ολοκληρωμένου ΠΣ που να ενσωματώνει την ΥΣ στα μαθηματικά. Μια τέτοια αξιολόγηση θα μπορούσε να περιλαμβάνει την ανάλυση της αποτελεσματικότητας του προγράμματος στην ενίσχυση της δεξιότητας της ΥΣ των μαθητών/τριών και τη βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Επιπλέον, είναι απαραίτητο να διερευνηθούν οι απόψεις και οι στάσεις των εκπαιδευτικών και των μαθητών/τριών σχετικά με αυτό το ΠΣ. Οι αντιλήψεις και οι εμπειρίες των εκπαιδευτικών θα μπορούσαν να παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες για τις πρακτικές διδασκαλίας και τις μεθόδους που είναι πιο αποτελεσματικές. Αντίστοιχα, οι απόψεις των μαθητών/τριών θα μπορούσαν να αποκαλύψουν πώς αντιλαμβάνονται και πώς ανταποκρίνονται στις νέες διδακτικές προσεγγίσεις που ενσωματώνουν την ΥΣ.

Τέλος, όσον αφορά τη δημιουργία κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού για την ενσωμάτωση της ΥΣ στη διδασκαλία των μαθηματικών με ελάχιστες απαιτήσεις και χρονική επιβάρυνση για την εκτέλεση κώδικα, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί η δυνατότητα χρήσης διαδραστικών ψηφιακών εγχειριδίων με τη δυνατότητα άμεσης δοκιμής κώδικα. Η σύγχρονη τεχνολογία επιτρέπει τη δημιουργία αναδομήσιμων μέσων αναπαράστασης στα οποία ο κώδικας είναι μια ομαλή επέκταση τους συστήματος γραφής που επιτρέπει τη διατύπωση υπολογιστικής σκέψης σε διαδραστικά δοκίμια με την έννοια που τα έχει περιγράψει ο DiSessa (2000). Επιπλέον με τη χρήση μεθόδων Τεχνητής Νοημοσύνης και Μηχανικής Μάθησης θα μπορούσε να επιτευχθεί αυτόματη προσαρμογή των σχολικών εγχειριδίων στις ανάγκες των μαθητών/τριών και των εκπαιδευτικών. Η εφαρμογή της Τεχνητής Νοημοσύνης μπορεί να προσφέρει προσωποποιημένες διδακτικές εμπειρίες και να διευκολύνει την προσαρμογή του περιεχομένου στις ατομικές ανάγκες των μαθητών/τριών, βελτιώνοντας έτσι την εκπαιδευτική διαδικασία και την απόδοσή τους. Η διερεύνηση αυτών των πτυχών μπορεί να οδηγήσει σε

σημαντικές βελτιώσεις στην εκπαιδευτική πρακτική και να ενισχύσει τη συνολική ποιότητα της εκπαίδευσης στα μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Andersen, R. (2022). Blokkbasert programmering og algoritmisk tenkning i en samarbeidslæringskontekst: En case-studie av programmering integrert i et matematikkfag. *Acta Didactica Norden*, 16(4), 1–22. <https://doi.org/10.5617/adno.9169>
- Angeli, C., Voogt, J., Fluck, A., Webb, M., Cox, M., Malyn-Smith, J., & Zagami, J. (2016). A K-6 computational thinking curriculum framework: Implications for teacher knowledge. *Educational Technology & Society*, 19(3), 47–57.
- Atmatzidou, S., & Demetriadis, S. (2016). Advancing students' computational thinking skills through educational robotics: A study on age and gender relevant differences. *Robotics and Autonomous Systems*, 75, Part B, 661–670. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2015.10.008>
- Barcelos, T. S., & Silveira, I. F. (2012). Teaching Computational Thinking in initial series: An analysis of the confluence among mathematics and Computer Sciences in elementary education and its implications for higher education. In Y. E. Donoso Meisel (Ed.), *2012 XXXVIII Conferencia Latinoamericana En Informatica (CLEI)* (pp. 1–8). IEEE. <https://doi.org/10.1109/CLEI.2012.6427135>
- Barcelos, T., Munoz, R., Villarroel, R., Merino, E., & Silveira, I. (2018). Mathematics Learning through Computational Thinking Activities: A Systematic Literature Review. *Journal of Universal Computer Science*, 24(7), 815–845.
- Barr, V., & Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community? *ACM Inroads*, 2(1), 48–54. <https://doi.org/10.1145/1929887.1929905>
- Bell, T. (2021). CS unplugged or coding classes? *Communications of the ACM*, 64(5), 25–27. <https://doi.org/10.1145/3457195>
- Bråting, K., & Kilhamn, C. (2020). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(2), 1–16. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1779012>

- Cobb, P. (2002). Reasoning With Tools and Inscriptions. *Journal of the Learning Sciences*, 11(2-3), 187–215. <https://doi.org/10.1080/10508406.2002.9672137>
- Computer Science Teachers Association (CSTA), & International Society for Technology in Education (ISTE) (2011). Computational Thinking: Leadership Toolkit (1st ed.).
- Computer Science Teachers Association (CSTA). (2016). A Model Curriculum for K-12 Computer Science: Final Report of the ACM K-12 Task Force Curriculum Committee.
- Critten, V., Hagon, H., & Messer, D. (2021). Can preschool children learn programming and coding through guided play activities? A case study in computational thinking. *Early Childhood Education Journal*, 50(4). <https://doi.org/10.1007/s10643-021-01236-8>
- Διαρκής Επιτροπή Μορφωτικών Υποθέσεων της Βουλής - ΔΕΜΥΒ (2016). Εθνικός και κοινωνικός διάλογος. Διαπιστώσεις, προτάσεις και χρονοδιάγραμμα υλοποίησης. Ανακτήθηκε από https://www.minedu.gov.gr/publications/docs2016/morfotikwn_porisma.pdf
- Digital Promise. (n.d.). What is Computational Thinking? Digital Promise. Retrieved November 4, 2023, from <https://digitalpromise.org/initiative/computational-thinking/computational-thinking-for-next-generation-science/what-is-computational-thinking/>
- DiSessa, A. A. (2000). *Changing minds: Computers, learning, and literacy*. Mit Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/1786.001.0001>
- Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT. Euclides*, 90(7), 4–10.
- Fang, A. D., Chen, G. L., Cai, Z. R., Cui, L., & Harn, L. (2017). Research on blending learning flipped class model in colleges and universities based on computational thinking - “Database principles” for example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(8), 5747–5755. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01024a>
- Fessakis, G., Gouli, E., & Mavroudi, E. (2013). Problem solving by 5–6 years old kindergarten children in a computer programming environment: A case

- study. *Computers & Education*, 63, 87–97. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.11.016>
- Fessakis, G., Komis, V., Mavroudi, E., & Prantsoudi, S. (2018). Exploring the scope and the conceptualization of Computational Thinking at the K-12 classroom level curriculum, In M. S. Khine (Ed.), 2018. *Computational Thinking in the STEM Disciplines: Foundations and Research Highlights. Switzerland: Springer*.
- Freeman, A., Adams Becker, S., Cummins, M., Davis, A., & Hall Giesinger, C. (2017). NMC/CoSN Horizon Report: 2017 K–12 Edition. Austin, Texas: The New Media Consortium.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Gal-Ezer, J., & Stephenson, C. (2010). *Computer science teacher preparation is critical. ACM Inroads*, 1 (1), 61–66. <https://doi.org/10.1145/1721933.1721953>
- Grover, S., & Pea, R. (2013). Computational Thinking in K–12. *Educational Researcher*, 42(1), 38–43. <https://doi.org/10.3102/0013189x12463051>
- Guzdial, M. (2008). Paving the way for computational thinking. *Communications of the ACM*, 51(8), 25–27. <https://doi.org/10.1145/1378704.1378713>
- Hoyles, C., & Sutherland, R. (1989). *Logo Mathematics in the Classroom*. Routledge, Lon
- Jenkins, J.T., Jerkins, J.A., & Stenger, C.L. (2012). A plan for immediate immersion of computational thinking into the high school math classroom through a partnership with the Alabama math, science, and technology initiative. *ACM-SE '12*. <https://doi.org/10.1145/2184512.2184547>
- Jona, K., Wilensky, U., Trouille, L., Horn, M., Orton, K., Weintrop, D., & Beheshti, E. (2014). Embedding Computational Thinking in Science, Technology, Engineering, and Math (CT-STEM). *Future Directions in Computer Science Education Summit Meeting*, 2002, 1–5. <https://doi.org/10.2967/jnumed.114.144386>
- Κυνηγός, Χ., Γριζιώτη, Μ., Λάτση, Μ., & Φακούδης, Β. (2019). Πλαίσιο για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μικροπειραμάτων μαθηματικών. Στο Γ. Κουτρομάνος & Α. Γαλάνη (Επιμ.), *Πρακτικά Εργασιών του Πανελληνίου*

- Συνεδρίου «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία» (272–283), ΕΤΠΕ.
<https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/3648>
- Kalelioğlu, F., Gülbahar, Y., & Kukul, V. (2016). A framework for computational thinking based on a systematic research review. *Baltic Journal of Modern Computing*, 4(3), 583–596.
- Kallia, M., Van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study. *Research in Mathematics Education*, 23(2), 159–187. <https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1852104>
- Kravik, R., K. Berg, T., & Siddiq, F. (2022). Teachers’ understanding of programming and computational thinking in primary education – A critical need for professional development. *Acta Didactica Norden*, 16(4), 23 sider. <https://doi.org/10.5617/adno.9194>
- Kynigos, C. (2001). E-Slate Logo as a Basis for Constructing Microworlds with Mathematics Teachers. In G. Futschek (Ed.), *Proceedings of the Ninth Eurologo Conference* (pp. 65–74).
- Kynigos, C., & Kalogeria, E. (2012). Boundary crossing through in-service online mathematics teacher education: the case of scenarios and half-baked microworlds. *ZDM Mathematics Education*, 44, 733–745. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0455-5>
- Kynigos, C., & Diamantidis, D. (2022). Creativity in engineering mathematical models through programming. *ZDM–Mathematics Education*, 54(1), 149–162. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01314-6>
- Lee, I., Martin, F., Denner, J., Coulter, B., Allan, W., Erickson, J., & Werner, L. (2011). Computational thinking for youth in practice. *ACM Inroads*, 2(1), 32–37. <https://doi.org/10.1145/1929887.1929902>
- Leonard, J., Buss, A., Gamboa, R., Mitchell, M., Fashola, O. S., Hubert, T., & Almughyirah, S. (2016). Using Robotics and Game Design to Enhance Children’s Self-Efficacy, STEM Attitudes, and Computational Thinking Skills. *Journal of Science Education and Technology*, 25(6), 860–876. <https://doi.org/10.1007/s10956-016-9628-2>
- Lye, S. Y., & Koh, J. H. L. (2014). Review on teaching and learning of computational thinking through programming: what is next for K-12?

- Computers in Human Behavior, 41, 51-61. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2014.09.012>
- Mannila, L., Dagienė, V., Demo, B., Grgurina, N., Mirolo, C., Rolandsson, L., & Settle, A. (2014). Computational Thinking in K-9 Education. In *Proceedings of the Working Group Reports of the 2014 on Innovation & Technology in Computer Science Education Conference* pp. 1–29. New York, NY, USA: ACM. <https://doi.org/10.1145/2713609.2713610>
- Matere, I. M., Weng, C., Astatke, M., Hsia, C. H., & Fan, C. G. (2021). Effect of design-based learning on elementary students computational thinking skills in visual programming maker course. *Interactive Learning Environments*, 1–14. <https://doi.org/10.1080/10494820.2021.1938612>
- Menolli, A., & Neto, J. C. (2021). Computational thinking in computer science teacher training courses in Brazil: A survey and a research roadmap. *Education and Information Technologies*, 27(1). <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10667-0>
- Misfeldt, M., Thomas Jankvist, U., Geraniou, E., & Bråting, K. (2020). Relations between mathematics and programming in school: juxtaposing three different cases. In A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, Z. Lavicza, R. Weinhandl, A. Clark-Wilson, & H.-G. Weigand (Eds.), *Proceedings of the 10th ERME Topic Conference MEDA 2020* pp. 255–262.
- National Research Council (NRC). (2010). Committee for the Workshops on Computational Thinking: Report of a workshop on the scope and nature of computational thinking. Washington, DC: National Academies Press.
- National Science Foundation. (2013). *Common Guidelines for Education Research and Development*. Institute of Education Sciences.
- Nordby, S. K., Bjerke, A. H., & Mifsud, L. (2022). Primary Mathematics Teachers’ Understanding of Computational Thinking. *KI - Künstliche Intelligenz*, 36(1), 35–46. <https://doi.org/10.1007/s13218-021-00750-6>
- Noss, R., & Hoyles, C. (2012). *Windows on Mathematical Meanings*. Springer Science & Business Media.
- Πραντσούδη, Σ., Φεσάκης, Γ., & Μαυρουδή Ε. (2018). Αντιλήψεις, πεποιθήσεις και στάσεις εκπαιδευτικών Πληροφορικής για την Υπολογιστική Σκέψη. Στο Στ. Δημητριάδης, Β. Δαγδιλέλης, Θρ. Τσιάτσος, Ι. Μαγνήσαλης, Δ. Τζήμας (Επιμ.), *Πρακτικά του 9ου*

- Πανελλήνιου Συνεδρίου «Διδακτική της Πληροφορικής» (σ. 86–93) ΑΠΘ-ΠΑΜΑΚ, Θεσσαλονίκη, 19-21 Οκτωβρίου 2018.
- Papert, S. (1991). *Νοητικές θύελλες: Παιδιά, ηλεκτρονικοί υπολογιστές και δυναμικές ιδέες - Τα πάντα γύρω από τη LOGO* (Γ. Κωτσάνης, Επιμ.; Α. Σταματίου, Μετ.). Οδυσσέας.
- Papert, S., (1996). An Exploration in the Space of Mathematics Educations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(1), 95–123. <https://doi.org/10.1007/BF00191473>
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51–73. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_4
- Reichert, J. T., Couto Barone, D. A., & Kist, M. (2020). Computational Thinking in K-12: An analysis with Mathematics Teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(6). <https://doi.org/10.29333/ejmste/7832>
- Rocha, K. de M. (2018). Uses of Online Resources and Documentational Trajectories: The Case of Sésamath. In L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds.), *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources: Advances and Issues* (pp. 1–377). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4>
- Rodriguez, B., Kennicutt, S., Rader, C., & Camp, T. (2017). Assessing Computational Thinking in CS Unplugged Activities. In *Proceedings of the 2017 ACM SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education* (pp. 501–506). ACM. <https://doi.org/10.1145/3017680.3017779>
- Rose, S., Habgood, J., & Jay, T. (2017). An exploration of the role of visual programming tools in the development of young children's computational thinking. *Electronic Journal of e-learning*, 15(4), 297–309. <https://doi.org/10.34190/ejel.15.4.2368>
- Royal Society (2012). *Shut down or restart? The way forward for computing in UK schools*. <https://royalsociety.org/~media/education/computing-in-schools/2012-01-12-computing-in-schools.pdf>
- Sengupta, P., Kinnebrew, J. S., Basu, S., Biswas, G., & Clark, D. (2013). Integrating computational thinking with K-12 science education using

- agent-based computation: A theoretical framework. *Education and Information Technologies*, 18(2), 351–380. <https://doi.org/10.1007/s10639-012-9240-x>
- Stäter, R. S., Läufer, T., & Ludwig, M. (2023). Teaching Computational Thinking with <colette/>. In M. Ludwig, S. Barlovits, A. Caldeira, & A. Moura (Eds.), *Research On STEM Education in the Digital Age*. Proceedings of the ROSEDA Conference (pp. 123–130). WTM. <https://doi.org/10.37626/GA9783959872522.0.15>
- Stäter, R., & Ludwig, M. (2023). Designing a Digital Learning Environment for Computational Thinking: The Four Pillars of <colette/>. In D. Diamantidis, M. Karavakou, M. Grizioti & C. Kynigos (Eds.), *Proceedings of the 16th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT)*. NKUA
- Sung, W., & Black, J. B. (2020). Factors to consider when designing effective learning: Infusing computational thinking in mathematics to support thinking-doing. *Journal of Research on Technology in Education*, 53(4), 404–426. <https://doi.org/10.1080/15391523.2020.1784066>
- Υπ. Απόφαση 152738/2021, Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος της Πληροφορικής των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γυμνασίου, Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (ΦΕΚ Β 5659/03.12.2021).
- Υπ. Απόφαση 48564/2023, Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος της Πληροφορικής των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου, Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (ΦΕΚ Β 2951/04.05.2023).
- Υπ. Απόφαση 49728/2023, Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα Πληροφορική και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στο Δημοτικό Σχολείο, Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (ΦΕΚ Β 3022/08.05.2021).
- Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, 25(1), 127–147. <https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5>
- Werner, L., Denner, J., Campe, S., & Kawamoto, D. C. (2012). The Fairy Performance Assessment: Measuring Computational Thinking in Middle School. In *Proceedings of the 43rd ACM Technical Symposium on*

- Computer Science Education* (pp. 215–220). ACM. <https://doi.org/10.1145/2157136.2157200>
- Wilensky, U. (1995). Paradox, programming, and learning probability: a case study in a connected mathematics framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(2), 253–280. [https://doi.org/10.1016/0732-3123\(95\)90010-1](https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90010-1)
- Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33–35. <https://doi.org/10.1145/1118178.1118215>
- Wing, J. (2011). Research notebook: Computational thinking –What and why? *The Link Magazine, Spring*. Carnegie Mellon University.
- Wolfram, C. (2020). *The math(s) fix: an education blueprint for the AI age*. Wolfram Media, Inc.
- Wu, M. L., & Richards, K. (2011). Facilitating Computational Thinking Through Game Design. In *Proceedings of the 6th International Conference on E-learning and Games, Edutainment Technologies* pp. 220–227. Springer-Verlag.
- Φεσάκης, Γ., Πραντσούδη, Σ., Κόμης, Β., Παπανικολάου, Σ., & Δημητρακοπούλου, Α. (2020). Η σημασία της ενσωμάτωσης της ΥΣ στην εκπαίδευση και ο διαγωνισμός Κάστορας (Bebras-GR) ως πρωτοβουλία προώθησης της ΥΣ στην Ελλάδα. Στο Μ. Ιωσηφίδου (Επιμ.), *Πρακτικά Εισηγήσεων του 10ου Πανελλήνιου Συνεδρίου των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ “Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη”* (σ. 499–518). Ρόδος.

Ο Γεώργιος Φεσάκης είναι πτυχιούχος του Τμήματος Πληροφορικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και μεταπτυχιακού τίτλου στην πληροφορική από το ίδιο Πανεπιστήμιο. Είναι διδάκτωρ Διδακτικής της Πληροφορικής (Πανεπιστήμιο Αιγαίου). Είναι Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου, όπου υπηρετεί από το 2004. Στα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εντάσσεται η υπολογιστική σκέψη και η διδακτική των μαθηματικών. Είναι μέλος του ACM CSE-SIG. Περισσότερες πληροφορίες για το έργο του στο <http://ltee.aegean.gr/gfesakis>

Η Μαρία-Αναστασία Μουστάκα είναι υποψήφια διδάκτωρ του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Είναι απόφοιτη της Πολυτεχνικής Σχολής, των Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Έχει ολοκληρώσει το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα της Διδακτικής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και Τηλεπικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση, του Τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού της Σχολής Ανθρωπιστικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Στη διπλωματικής της εργασία διερεύνησε τον σχεδιασμό και την υλοποίηση διαδραστικού ψηφιακού βιβλίου για τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω του προγραμματισμού. Τα ερευνητικά της ενδιαφέροντα επικεντρώνονται στη διδασκαλία και μάθηση για την ανάπτυξη της ΥΣ, τη διδακτική της Πληροφορικής και την ολοκληρωμένη εκπαιδευτική προσέγγιση της Πληροφορικής και των Μαθηματικών για την ανάπτυξη της ΥΣ.

The integration of Computational Thinking in the teaching of Mathematics

Georgios Fessakis

Professor, Department of Sciences of Preschool Education and Educational Design, University of the Aegean
gfesakis@aegean.gr

Maria-Anastasia Moustaka

PhD Candidate, Department of Sciences of Preschool Education and Educational Design, University of the Aegean
psed24013@aegean.gr

Abstract

This position essay examines the concept of Computational Thinking (CT) through its historical development and the perspective of its integration into teaching Mathematics. Computer Science, a practice of Computer Science concerned with formulating and solving problems with the help of computer systems, was first introduced by pioneers such as Alan Perlis and Seymour Papert. Papert promoted CT through the LOGO programming language. Jeanette Wing brought the term back in 2006, giving it a new dimension as a critical skill for problem-solving and systems design. The article compares CT with mathematical thinking, highlighting their common aspects in problem-solving. Mathematics is often an appropriate context for the application of CT. Methods of integrating CT in the teaching of mathematics are proposed (such as educational robotics, modelling, and digital games), while the possibilities and benefits of using programming environments are also discussed. The research highlights the need for further investigation of the integration of CT into the curricula and the utilization of Artificial Intelligence methods to create adaptive interactive digital textbooks with code activities.

Keywords: Computational Thinking, Mathematical Thinking, interdisciplinarity

Georgios Fesakis holds a B.Sc. and a M.Sc. in Informatics from University of Athens and a PhD in Informatics Didactics from University of the Aegean. He serves as professor at the University of the Aegean where he is teaching since 2004. His research interests include Computational Thinking & Didactics of Mathematics. He is member of ACM CSE-SIG. Detailed information at: <http://ltee.aegean.gr/gfesakis>

Maria-Anastasia Moustaka is a PhD candidate at the University of the Aegean. She is a graduate of the Polytechnic School of Computer Engineering and Informatics Department of the University of Patras. He has completed the Master's Program in the Didactics of Mathematics, Science and Information and Communication Technologies in Education: Interdisciplinary Approach, of the Department of Sciences of Pre-school Education & Educational Design of the Faculty of Humanities of the University of the Aegean. In her thesis she explored the design and implementation of an interactive digital book for teaching mathematics through programming. Her research interests focus on teaching and learning for the development of Computation Thinking (CT), the pedagogy of Information Technology and the integrated educational approach of Information Technology and Mathematics for the development of CT.