

Σημαντικές μαθηματικές δεξιότητες για μαθητές και μαθήτριες στην εποχή της παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης: κατανόηση και αξιολόγηση της απόδειξης, και ChatGPT

Ανδρέας Ι. Στυλιανίδης

Professor, Faculty of Education, University of Cambridge, UK
as899@cam.ac.uk

Γαβριήλ Ι. Στυλιανίδης

Professor, Department of Education, University of Oxford, UK
gabriel.stylianides@education.ox.ac.uk

Απόδοση στα ελληνικά

Μαρία Γιακουμή¹ & Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος²

¹Υποψήφια Διδασκίσσα Ε.Κ.Π.Α., ²Επίκουρος Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Περίληψη

Η ταχεία ανάπτυξη και η δημοτικότητα της παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης έχουν επηρεάσει όλες τις πτυχές της ζωής και της εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, τα παραγωγικά Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα (Large Language Models: LLMs), ιδιαίτερα το ChatGPT, γίνονται όλο και πιο δημοφιλή μεταξύ των μαθητών και μαθητριών, αλλάζοντας το τοπίο ως προς τις μαθηματικές δεξιότητες που χρειάζονται ώστε να λειτουργούν αποτελεσματικά στην εποχή της παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης και να αλληλεπιδρούν παραγωγικά με τις νέες τεχνολογίες. Πιστεύουμε ότι τα εκπαιδευτικά συστήματα δεν έχουν άλλη επιλογή από το να αναθεωρήσουν τις προτεραιότητές τους και να αναδιοργανώσουν τόσο τα αναλυτικά προγράμματα όσο και την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών. Σε αυτή την εργασία, εστιάζουμε στη διαρκώς αυξανόμενη σημασία δύο δεξιοτήτων στον τομέα της απόδειξης, την κατανόηση της απόδειξης και την αξιολόγηση της απόδειξης, καθώς οι μαθητές και μαθήτριες αλληλεπιδρούν με το ChatGPT. Η συζήτησή μας για αυτές τις δεξιότητες απόδειξης αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα που

αναδεικνύει την επιτακτική ανάγκη για τους ερευνητές και τις ερευνήτριες της Διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και για τους/τις επαγγελματίες της μαθηματικής εκπαίδευσης, να αξιολογήσουν ποιες δεξιότητες είναι σημαντικές για τους μαθητές και τις μαθήτριες στην εποχή της παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης. Αυτή η αξιολόγηση είναι θεμελιώδους σημασίας, καθώς μπορεί να αποτελέσει τη βάση για συζητήσεις γύρω από τον επαναπροσδιορισμό του μελλοντικού προσανατολισμού και του ρόλου της μαθηματικής εκπαίδευσης στην κοινωνία, καθώς και της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών.

Λέξεις-κλειδιά: Απόδειξη, Κατανόηση της απόδειξης, Αξιολόγηση της απόδειξης, Δεξιότητα απόδειξης, Τεχνητή νοημοσύνη, ChatGPT

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΚΑΙ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Η έννοια της *απόδειξης* έχει προσελκύσει την προσοχή των ερευνητών και ερευνητριών της Διδακτικής των Μαθηματικών για δεκαετίες, κυρίως λόγω του κεντρικού της ρόλου στην αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα (Α. Ι. Στυλιανίδης κ.ά., 2022· Weber & Melhuish, 2022) και της αναγνώρισης ότι η διδασκαλία και η μάθηση της απόδειξης είναι δύσκολη για πολλούς/πολλές εκπαιδευτικούς και μαθητές/μαθήτριες, αντίστοιχα (π.χ., Harel & Sowder, 2007· G. J. Stylianides κ.ά., 2017, 2024). Ενώ υπάρχουν διάφορες απόψεις σχετικά με το νόημα της απόδειξης στη μαθηματική εκπαίδευση (π.χ., Balacheff, 2002), στην ερευνητική κοινότητα υπάρχει γενική συμφωνία ότι η *απόδειξη* περιγράφει μια ειδική κατηγορία μαθηματικών επιχειρημάτων τα οποία είναι ισχυρά από μαθηματική σκοπιά (αναφορικά με τις υποστηρικτικές δηλώσεις τους και τους τρόπους συλλογισμού και αναπαράστασής τους) αλλά και εννοιολογικά προσβάσιμα στα μέλη της αντίστοιχης κοινότητας μάθησης (Α. Ι. Στυλιανίδης, 2007). Αυτή η προσέγγιση της απόδειξης βοηθά να εντοπιστεί ένα σημαντικό πρόβλημα στη μάθηση των μαθητών και μαθητριών σε αυτόν τον τομέα: η συχνή αναντιστοιχία μεταξύ των επιχειρημάτων που οι μαθητές και μαθήτριες θεωρούν ως αποδείξεις και αυτών που πράγματι πληρούν το πρότυπο της απόδειξης από μαθηματική άποψη (Harel & Sowder, 2007· G. J. Stylianides κ.ά., 2017).

Αυτό το πρόβλημα της εκμάθησης της απόδειξης από τους μαθητές και τις μαθήτριες παίρνει τρεις βασικές μορφές, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί σε μια σημαντική δεξιότητα σχετική με την απόδειξη: (1) μαθητές και μαθήτριες *κατασκευάζουν επιχειρήματα* υπέρ ή κατά μαθηματικών προτάσεων που δεν πληρούν το πρότυπο της απόδειξης (δεξιότητα *κατασκευής απόδειξης*)· (2) μαθητές και μαθήτριες *αποτυγχάνουν να κατανοήσουν σημαντικές πτυχές των επιχειρημάτων που πληρούν το πρότυπο της απόδειξης*, όπως αποδείξεις σε σχολικά εγχειρίδια (δεξιότητα *κατανόησης της απόδειξης*)· και (3) μαθητές και μαθήτριες *αποτυγχάνουν να αξιολογήσουν επιχειρήματα που δεν είναι αποδείξεις* (non-proof arguments) ως μη αποδείξεις ή επιχειρήματα που πληρούν το πρότυπο της απόδειξης (proof-standard arguments) ως αποδείξεις, όταν τους παρουσιάζονται επιχειρήματα που διαφέρουν ως προς τη μαθηματική τους ποιότητα (δεξιότητα *αξιολόγησης της απόδειξης*). Από αυτές τις τρεις δεξιότητες, η δεξιότητα κατασκευής της απόδειξης έχει προσελκύσει την περισσότερη προσοχή στην ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών μέχρι στιγμής. Αυτό αντικατοπτρίζεται, για παράδειγμα, στα πολυάριθμα

θεωρητικά πλαίσια που ανέπτυξαν οι ερευνητές και ερευνήτριες για να κατηγοριοποιήσουν τα επιχειρήματα που κατασκευάζονται από τους μαθητές και τις μαθήτριες (για μια επισκόπηση τέτοιων πλαισίων, βλ. Harel & Sowder, 2007· G. J. Stylianides κ.ά., 2017).

Η δεξιότητα αξιολόγησης της απόδειξης έλαβε σημαντική προσοχή, με τους ερευνητές και τις ερευνήτριες να παρουσιάζουν συχνά σε μαθητές και μαθήτριες επιχειρήματα που διαφέρουν ως προς τη μαθηματική τους ποιότητα και να ζητούν από τους μαθητές και τις μαθήτριες να κρίνουν ποια επιχειρήματα θεωρούν ως αποδείξεις. Η προσοχή στη δεξιότητα κατανόησης της απόδειξης είναι η πιο περιορισμένη μεταξύ των τριών δεξιοτήτων απόδειξης στη σχετική βιβλιογραφία. Οι ερευνητές και ερευνήτριες ανέπτυξαν πλαίσια κατανόησης της απόδειξης (π.χ., Mejía-Ramos κ.ά., 2012· Yang & Lin, 2008, 2012), τα οποία χρησιμοποίησαν για να κρίνουν πώς οι μαθητές και μαθήτριες κατανοούν επιχειρήματα τα οποία πληρούν το πρότυπο της απόδειξης. Ωστόσο, από όσο γνωρίζουμε, η δεξιότητα κατανόησης της απόδειξης δεν υπήρξε μαθησιακός στόχος σε έρευνες που αποσκοπούσαν στη βελτίωση των δεξιοτήτων απόδειξης των μαθητών και μαθητριών στη διδακτική πράξη, γεγονός που υποδηλώνει ότι η δεξιότητα κατανόησης της απόδειξης μπορεί να λαμβάνει περιορισμένη προσοχή τόσο στη διδακτική πράξη όσο και στα αναλυτικά προγράμματα.

Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΩΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΜΕ ΤΟ CHATGPT ΣΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Η ταχεία ανάπτυξη και δημοτικότητα της τεχνητής νοημοσύνης έχουν επηρεάσει όλες τις πτυχές της ζωής και της εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένου του τρόπου με τον οποίο σκεφτόμαστε για τη μαθηματική εκπαίδευση (για έναν επιμελημένο τόμο σε αυτή την περιοχή, βλ. Richard κ.ά., 2022). Συγκεκριμένα, τα παραγωγικά Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα (Large Language Models· LLMs), ιδιαίτερα το ChatGPT, γίνονται ολοένα και πιο δημοφιλή μεταξύ των μαθητών και μαθητριών και, είτε μας αρέσει είτε όχι, το ChatGPT αρχίζει να αλλάζει το εκπαιδευτικό τοπίο (Lo, 2023), συμπεριλαμβανομένων των αντιλήψεών μας για το νόημα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών (Wardat κ.ά., 2023). Δεδομένου του μεγάλου εύρους ικανοτήτων του ChatGPT σε όλα σχεδόν τα μαθηματικά θέματα και της εξαιρετικά φιλικής προς τον χρήστη και διαδραστικής φύσης του, ο δυνητικός αντίκτυπός του στο πώς

αντιλαμβανόμαστε τη μαθηματική εκπαίδευση αναμένεται να είναι μεγαλύτερος από ό,τι ο αντίκτυπος που έχει παρατηρηθεί από προηγούμενες τεχνολογικές εξελίξεις, όπως οι αριθμομηχανές, τα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας (computer algebra systems), τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας (dynamic geometry software), και οι αυτοματοποιημένοι παραγωγοί απόδειξης θεωρημάτων (automated theorem provers). Πιστεύουμε ότι τα εκπαιδευτικά συστήματα δεν έχουν άλλη επιλογή από το να αξιολογήσουν σοβαρά ποιες μαθηματικές δεξιότητες είναι απαραίτητο να αποκτήσουν οι μαθητές και μαθήτριες στο πλαίσιο των αλληλεπιδράσεών τους με το ChatGPT. Αυτή η αξιολόγηση δύναται να αποτελέσει τη βάση για συζητήσεις σχετικά με τον επαναπροσδιορισμό του μελλοντικού πλαισίου και του ρόλου της μαθηματικής εκπαίδευσης στην κοινωνία κατά την εποχή της παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης, καθώς και για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών.

Οι προτεραιότητες της μαθηματικής εκπαίδευσης που σχετίζονται με τις δεξιότητες απόδειξης δεν είναι ανεξάρτητες από τις νέες πραγματικότητες που δημιουργήθηκαν από το ChatGPT. Συγκεκριμένα, οι δεξιότητες κατανόησης και αξιολόγησης της απόδειξης, οι οποίες όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα έχουν λάβει λιγότερη προσοχή στην έρευνα και διδακτική πράξη σε σχέση με τη δεξιότητα κατασκευής της απόδειξης, αναδύονται ως ιδιαίτερα σημαντικές στις σχετιζόμενες με την απόδειξη αλληλεπιδράσεις των μαθητών και μαθητριών με το ChatGPT. Αυτό δεν σημαίνει ότι η δεξιότητα κατασκευής της απόδειξης έχει πάψει να είναι σημαντική. Προτείνουμε ότι οι άλλες δύο δεξιότητες, και ιδιαίτερα η κατανόηση της απόδειξης, δεν μπορούν πλέον να παραμένουν στο περιθώριο.

Το ChatGPT μπορεί να δημιουργήσει όχι μόνο επιχειρήματα που πληρούν το πρότυπο της απόδειξης, όπως οι αυτοματοποιημένοι παραγωγοί απόδειξης θεωρημάτων, αλλά και κατανοητές εξηγήσεις, καλύπτοντας έτσι τις προϋποθέσεις τόσο μιας *μηχανής συλλογισμού* (*reasoning engine*) όσο και ενός *επεξηγητή* (*explainer*), σύμφωνα με την ταξινόμηση των συστημάτων τεχνητής νοημοσύνης για τη μαθηματική εκπαίδευση από τους Van Vaerenbergh και Pérez-Suay (2022). Αν μπορούσε να διασφαλιστεί ότι όλα τα επιχειρήματα που παράγονται από το ChatGPT είναι αποδεκτές μαθηματικές αποδείξεις, τότε η δεξιότητα αξιολόγησης της απόδειξης θα μπορούσε να θεωρηθεί παρωχημένη και η έμφαση θα μπορούσε να δοθεί στη δεξιότητα κατανόησης της απόδειξης. Ωστόσο, δεν συμβαίνει αυτό: το ChatGPT κατασκευάζει μερικές φορές λανθασμένα επιχειρήματα (Frieder κ.ά., 2023· Wardat κ.ά., 2023). Σύμφωνα με τους Frieder κ.ά. (2023), η

μαθηματική επίδοση του ChatGPT είναι προς το παρόν πολύ χαμηλότερη από το επίπεδο ενός μεταπτυχιακού φοιτητή ή μιας μεταπτυχιακής φοιτήτριας μαθηματικών. Παρόλο που η δεξιότητα κατασκευής της απόδειξης του ChatGPT πιθανόν να βελτιωθεί δραματικά στο άμεσο μέλλον, αυτό δεν ανατρέπει το γεγονός ότι, προκειμένου ένας μαθητής ή μια μαθήτρια να αλληλεπιδράσει παραγωγικά και να μάθει από/με το ChatGPT όταν ζητά από το ChatGPT να αποδείξει μία μαθηματική πρόταση, πρέπει να διαθέτει τη δεξιότητα να κρίνει την προτεινόμενη απόδειξη του ChatGPT: Είναι το επιχείρημα που παρουσιάζεται έγκυρο; Είναι οι υποστηρικτικές του υποθέσεις σχετικές και κατάλληλες; Έχει εφαρμοστεί σωστά η μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιήθηκε (π.χ., εις άτοπον απαγωγή, μαθηματική επαγωγή) και είναι κατάλληλη για τον συγκεκριμένο σκοπό; Αυτά και άλλα ερωτήματα που μπορεί να θέσει κάποιος βρίσκονται στο επίκεντρο των δεξιοτήτων αξιολόγησης και κατανόησης της απόδειξης. Η δεξιότητα κατασκευής της απόδειξης παίζει συγκριτικά μικρότερο ρόλο από την οπτική του μαθητή ή της μαθήτριας που αλληλεπιδρά με το ChatGPT, αφού το βάρος της κατασκευής της απόδειξης μεταφέρεται στο ChatGPT.¹

ΔΥΟ «ΣΥΖΗΤΗΣΕΙΣ» ΜΕ ΤΟ CHATGPT ΓΙΑ ΝΑ ΑΠΟΤΥΠΩΘΕΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Για να αποτυπώσουμε τη σημασία των δεξιοτήτων κατανόησης και αξιολόγησης της απόδειξης στην εποχή της παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης, αναφέρουμε δύο «συζητήσεις» που είχαμε με το ChatGPT από την οπτική ενός μαθητή ή μιας μαθήτριας που έχει μάθει για τη μέθοδο απόδειξης της μαθηματικής επαγωγής και θέλησε να εφαρμόσει αυτή τη μέθοδο για να αποδείξει μαθηματικές προτάσεις για τις οποίες η μέθοδος είναι αδόκιμη ή ακατάλληλη. Έχουμε μακροχρόνιο ενδιαφέρον στην κατανόηση των μαθητών και μαθητριών για την απόδειξη μέσω μαθηματικής επαγωγής (G. J. Stylianides κ.ά., 2007, 2016), το πλαίσιο της οποίας (αποτελούμενο από το βασικό βήμα, την επαγωγική υπόθεση, και το επαγωγικό βήμα) είναι επιρρεπές σε λάθη και παρανοήσεις μαθητών και μαθητριών. Η λεπτομερής ανάλυση των συζητήσεών μας με το ChatGPT υπερβαίνει το σκοπό αυτής της σύντομης εργασίας. Θα περιγράψουμε απλώς

¹ Τα ερωτήματα γίνονται ακόμη πιο σχετικά όταν μια εντολή στο ChatGPT να αποδείξει μία μαθηματική πρόταση αποκλίνει από τυπικούς τρόπους έκφρασης ή τις συνήθεις μεθόδους απόδειξης της πρότασης. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το ChatGPT είναι πιο πιθανό να δημιουργήσει εσφαλμένα ή μπερδεμένα επιχειρήματα.

τις δύο συζητήσεις και θα παρουσιάσουμε κάποια σημαντικά αποσπάσματα των συζητήσεων στα Σχήματα 1-3. Επίσης, θα παραθέσουμε συνδέσμους για τα πλήρη κείμενα των συζητήσεων, ώστε οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες και οι ενδιαφερόμενες αναγνώστριες να μπορέσουν να ασχοληθούν πληρέστερα με τις απαντήσεις του ChatGPT στις εντολές μας και με τα διάφορα ζητήματα που εγείρουν αυτές οι απαντήσεις από μαθηματική και εκπαιδευτική άποψη.

Η πρώτη συζήτηση για το άπειρο των πρώτων αριθμών

Στην πρώτη μας συζήτηση με το ChatGPT,² πρώτα εξακριβώσαμε ότι το ChatGPT ήταν εξοικειωμένο με τη μέθοδο απόδειξης της μαθηματικής επαγωγής κι έπειτα προκαλέσαμε το ChatGPT να χρησιμοποιήσει αυτή τη μέθοδο απόδειξης για να αποδείξει τη μαθηματική πρόταση ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. Η απάντηση του ChatGPT (μεταφρασμένη από τα αγγλικά) ήταν η εξής:

Η απόδειξη ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί βασίζεται στην πραγματικότητα σε ένα επιχείρημα εις άτοπον απαγωγής (contradiction argument) παρά στη μαθηματική επαγωγή. Ωστόσο, μπορώ σίγουρα να εξηγήσω αυτή την κλασική απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή, η οποία αρχικά αποδόθηκε στον Ευκλείδη.

Στη συνέχεια το ChatGPT περιέγραψε και επεξήγησε την τυπική απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή. Μετά από αυτό, θέσαμε ξανά την πρόκλησή μας στο ChatGPT: «Σ' ευχαριστώ, γνωρίζω την απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή [για αυτή την πρόταση] αλλά αναρωτιέμαι αν μπορείς να με βοηθήσεις να βρω μια άλλη απόδειξη χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.» Η νέα απάντηση του ChatGPT παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.

Όπως φαίνεται στο σχήμα, το ChatGPT αναγνώρισε ότι «η μαθηματική επαγωγή συνήθως δεν χρησιμοποιείται για να αποδείξει με άμεσο τρόπο το άπειρο των πρώτων αριθμών», αλλά μετά δέχτηκε την πρόκλησή μας: Σημείωσε ότι «υπάρχει μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση η οποία χρησιμοποιεί ένα σχετικό επαγωγικό επιχείρημα για να δείξει κάτι το οποίο υπαινίσσεται το άπειρο των πρώτων αριθμών», και προχώρησε περιγράφοντας «μια προσαρμογή που χρησιμοποιεί γεύση επαγωγής».

² Το πλήρες κείμενο της πρώτης συζήτησης είναι διαθέσιμο εδώ: <https://chatgpt.com/share/63c4d59a-7a87-4475-baea-ef62b7c0659e>



Mathematical induction is typically not used to prove the infinitude of primes directly, but there is an interesting approach that uses a related inductive argument to show something that implies the infinitude of primes. Here's an adaptation that uses an inductive flavor:

Inductive Proof Concept: There Exists a Prime Greater Than Any Given Number

1. **Statement to Prove:** For any natural number n , there exists a prime number p such that $p > n$.
2. **Base Case:** For $n = 1$, the next prime number is 2, which is greater than 1. So, the statement holds for $n = 1$.
3. **Inductive Step:**
 - **Inductive Hypothesis:** Assume that for some $k \geq 1$, there exists a prime number p such that $p > k$. Let p be this prime number.
 - **Inductive Conclusion:** We need to show that there exists a prime number q such that $q > k + 1$.

Consider the number $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_m + 1$, where $p_1, p_2, \dots, p_m$ are all the primes less than or equal to $k + 1$. Note that N is constructed to be greater than $k + 1$ and is not divisible by any of $p_1, p_2, \dots, p_m$.

- If N is prime, then $N > k + 1$, and we have found a prime $q = N$ such that $q > k + 1$.
- If N is not prime, then N must have a prime factor q . This prime factor q must be greater than $k + 1$, because N is not divisible by any of the primes $p_1, p_2, \dots, p_m$ (all of which are less than or equal to $k + 1$).

Therefore, in either case, we have shown that there exists a prime number q such that $q > k + 1$.

4. **Conclusion:** By the principle of mathematical induction, for every natural number n , there exists a prime number greater than n . This implies that there are infinitely many prime numbers because for any given number, we can always find a prime number larger than it.

This proof combines elements of induction with the construction used in Euclid's proof to demonstrate that there cannot be a largest prime, thus showing that there are infinitely many primes.

Σχήμα 1. Η απάντηση του ChatGPT στην πρόκλησή μας να αποδείξει τη μαθηματική πρόταση ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Το ChatGPT ολοκλήρωσε αποκαλώντας το επιχείρημα «απόδειξη» που «συνδυάζει στοιχεία επαγωγής με την κατασκευή που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Ευκλείδη για να δείξει ότι δεν μπορεί να υπάρξει μεγαλύτερος πρώτος αριθμός, δείχνοντας έτσι ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί». Ορισμένα σημαντικά ερωτήματα προκύπτουν σε αυτό το σημείο. Υλοποιεί πράγματι αυτό το μαθηματικό επιχείρημα τους ισχυρισμούς του ChatGPT; Αποτελεί το επιχείρημα απόδειξη του απείρου των πρώτων αριθμών; Θεμελιώνει το επιχείρημα του ChatGPT την ισοδυναμία ανάμεσα στη μαθηματική πρόταση που του ζητήσαμε να αποδείξει και σε αυτή που έθεσε ως στόχο να αποδείξει; Είναι κατάλληλη η χρήση του πλαισίου της μαθηματικής επαγωγής σε αυτή την περίπτωση, και εάν ναι, εφαρμόστηκε σωστά; Ελπίζουμε ότι ένας μαθητής ή μια μαθήτρια (ή οποιοσδήποτε άλλος χρήστης) που λαμβάνει αυτή την απάντηση από το ChatGPT θα θέσει στον εαυτό του/της τέτοια ερωτήματα. Οι δεξιότητες κατανόησης και αξιολόγησης της απόδειξης βρίσκονται στο επίκεντρο αυτών των ερωτημάτων.³

Η δεύτερη συζήτηση για το Πυθαγόρειο θεώρημα

Στη δεύτερη, ξεχωριστή συζήτησή μας με το ChatGPT,⁴ υιοθετήσαμε και πάλι την οπτική ενός μαθητή ή μιας μαθήτριας που θεωρεί τη μαθηματική επαγωγή ως πανάκεια για την απόδειξη όλων των μαθηματικών προτάσεων. Συγκεκριμένα, ρωτήσαμε αν το ChatGPT μπορούσε να μας βοηθήσει να αποδείξουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Το ChatGPT απάντησε με ενθουσιασμό «Σίγουρα!» και εξήγησε:

Για να αποδείξουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, χρειάζεται να καθορίσουμε ένα κατάλληλο πλαίσιο για τη διαδικασία της επαγωγής. Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το ίδιο το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι μια γεωμετρική πρόταση και παραδοσιακά αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας γεωμετρικές μεθόδους. Παρ' όλα αυτά, θα

³ Στην πρώτη μας συνομιλία με το ChatGPT, το προκαλέσαμε επίσης να χρησιμοποιήσει τη μαθηματική επαγωγή για να αποδείξει ένα ανοιχτό πρόβλημα στα μαθηματικά, χωρίς να του αποκαλύψουμε το όνομα της εικασίας. Ήμασταν περίεργοι να δούμε αν θα επιχειρούσε να βρει έναν τρόπο να εφαρμόσει τη μαθηματική επαγωγή. Το ChatGPT ορθά αναγνώρισε το ανοιχτό πρόβλημα ως την Εικασία του Goldbach και εξήγησε ότι μια απόδειξη χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή (ή κάποια άλλη μέθοδο) δεν είναι δυνατή αυτή τη στιγμή.

⁴ Το πλήρες κείμενο της δεύτερης συζήτησης είναι διαθέσιμο εδώ: <https://chatgpt.com/share/356c5236-86e8-4e01-a06d-274df09a28cc>

παρουσιάσω μια δομημένη απόδειξη χρησιμοποιώντας την επαγωγή σε ένα ελαφρώς διαφορετικό πλαίσιο, για να βοηθήσω στην αποσαφήνιση του θεωρήματος.

Η αναφορά του ChatGPT σε «μια δομημένη απόδειξη χρησιμοποιώντας την επαγωγή σε ένα ελαφρώς διαφορετικό πλαίσιο, για να βοηθήσω στην αποσαφήνιση του [Πυθαγορείου] θεωρήματος» είναι διφορούμενη ως προς το αν πράγματι ισχυρίστηκε ότι είχε μια απόδειξη για το Πυθαγόρειο θεώρημα που ικανοποιούσε τις απαιτήσεις μας. Το ChatGPT προχώρησε με μια διατύπωση του Πυθαγορείου θεωρήματος και παράθεση ενός επιχειρήματος που παρουσιάζουμε στο Σχήμα 2. Όπως φαίνεται στην τελευταία παράγραφο της απάντησης, κάτω από την ενότητα με τίτλο «Συμπέρασμα» (Conclusion), το ChatGPT θεώρησε το επιχείρημα αυτό ως απόδειξη μαθηματικής επαγωγής:

Αποδεικνύοντας το βασικό και το επαγωγικό βήμα, έχουμε δείξει μέσω μαθηματικής επαγωγής ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει για όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που κατασκευάζονται αυξάνοντας σταδιακά τη μία κάθετη πλευρά, ενώ η άλλη παραμένει σταθερή. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη με χρήση επαγωγής.

Ωστόσο, είναι ασαφές αν το ChatGPT θεώρησε αυτό που παρουσίασε ως απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος για όλα τα ορθογώνια τρίγωνα ή απλώς για αυτά που κατασκευάστηκαν με τη διαδικασία της σταδιακής αύξησης που περιέγραψε το ChatGPT. Αυτή η νέα απόδειξη από το ChatGPT εγείρει πολλά ερωτήματα τα οποία ελπίζουμε ότι ένας μαθητής ή μια μαθήτρια (ή οποιοσδήποτε άλλος χρήστης) που λαμβάνει αυτή την απάντηση από το ChatGPT θα ρωτούσε τον εαυτό του/της: Τι ακριβώς ισχυρίζεται το ChatGPT ότι αποδεικνύει; Αποδεικνύει πράγματι αυτό που λέει ότι αποδεικνύει; Είναι η χρήση του πλαισίου της μαθηματικής επαγωγής κατάλληλη σε αυτήν την περίπτωση, και εάν ναι, εφαρμόστηκε σωστά; Όπως και στην πρώτη συζήτηση με το ChatGPT, οι δεξιότητες κατανόησης και αξιολόγησης της απόδειξης βρίσκονται στο επίκεντρο αυτών των ερωτημάτων, καθώς και της απόφασης για νέα ερωτήματα που πιθανόν να τεθούν στο ChatGPT. Καλούμε τους αναγνώστες και τις αναγνώστριες να διαβάσουν ολόκληρη τη συζήτηση και να ασχοληθούν με τέτοια ερωτήματα.

Pythagorean Theorem Statement:

For any right triangle with legs of lengths a and b , and hypotenuse of length c , the relationship $a^2 + b^2 = c^2$ holds.

Induction Framework:

We'll use induction on the dimension of an increasing sequence of geometric constructions that maintain the properties of right triangles.

Base Case:

Consider a right triangle with legs of length 1 and 1. The hypotenuse, by the Pythagorean theorem, should be $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Let's prove this base case geometrically:

A 1x1 right triangle is half of a square with side length 1. The hypotenuse of this right triangle forms the diagonal of the square. The length of the diagonal of a square with side length 1 is $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, which fits the Pythagorean theorem.

Induction Step:

Assume the Pythagorean theorem holds for a right triangle with legs a and b . This means we assume $a^2 + b^2 = c^2$, where c is the hypotenuse.

We need to prove that the theorem holds for the next increment in the geometric sequence, specifically for legs $a + 1$ and b .

Inductive Step Construction:

Consider a right triangle with legs of lengths $a + 1$ and b . According to our assumption:

1. For the triangle with legs a and b , we have $a^2 + b^2 = c^2$.

Now consider a new right triangle where one leg is increased by 1, i.e., with legs $a + 1$ and b .

Using the Pythagorean theorem on this new triangle, the hypotenuse c' should satisfy:

$$(a + 1)^2 + b^2 = c'^2$$

Expand and simplify the left side:

$$(a + 1)^2 + b^2 = (a^2 + 2a + 1) + b^2$$

Using our inductive hypothesis $a^2 + b^2 = c^2$:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2) + 2a + 1 = c^2 + 2a + 1$$

Thus, we need to prove that:

$$c^2 + 2a + 1 = c'^2$$

Therefore:

$$c'^2 = c^2 + 2a + 1$$

Taking the square root on both sides, we get:

$$c' = \sqrt{c^2 + 2a + 1}$$

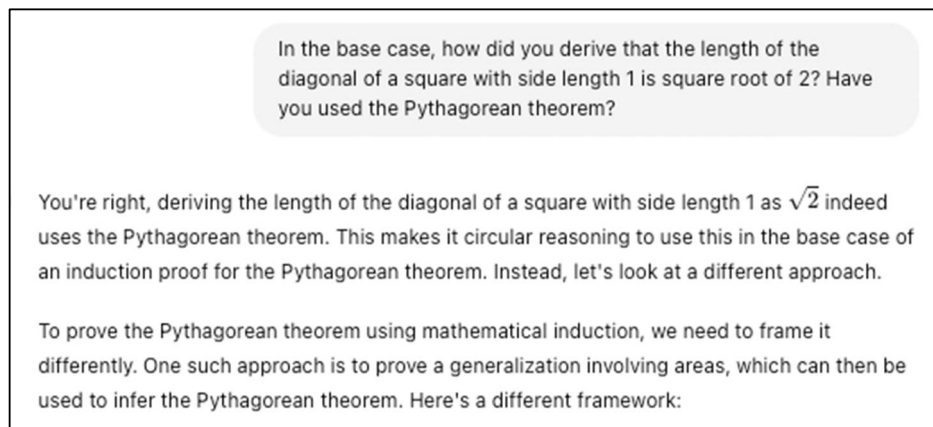
This shows that the hypotenuse length c' for the new right triangle with legs $a + 1$ and b maintains the relationship defined by the Pythagorean theorem, proving the inductive step.

Conclusion:

By proving the base case and the inductive step, we have shown through mathematical induction that the Pythagorean theorem holds for all right triangles constructed by incrementally increasing one leg while keeping the other leg constant. This completes the proof using induction.

Σχήμα 2. Η απάντηση του ChatGPT στην πρόκλησή μας για αυτό να αποδείξει το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Ολοκληρώνουμε την ενδεικτική μας συζήτηση περιγράφοντας το νέο ερώτημα που θέσαμε στο ChatGPT κατά τη διάρκεια της δεύτερης συζήτησής μας, η οποία επικεντρώθηκε στη δουλειά του στο βασικό βήμα της υποτιθέμενης απόδειξης (στο πάνω μέρος του Σχήματος 2). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, το ChatGPT απάντησε στο νέο μας ερώτημα με μια παραδοχή ότι χρησιμοποίησε κυκλικό συλλογισμό και προθυμοποιήθηκε να προσφέρει μια νέα προσέγγιση στο πρόβλημα, η οποία φαίνεται στο πλήρες κείμενο της συνομιλίας μας. Σε σχέση με τη νέα προσέγγιση του ChatGPT, την οποία το ChatGPT θεώρησε απόδειξη με μαθηματική επαγωγή του Πυθαγορείου θεωρήματος για όλα τα ορθογώνια τρίγωνα, ρωτήσαμε ρητά το ChatGPT για τα ορθογώνια τρίγωνα με δεκαδικά μήκη κάθετων πλευρών. Το ChatGPT δεν είδε κάποιο πρόβλημα σε σχέση με αυτό το σύνολο των ορθογωνίων τριγώνων και παρέιχε μια καθησυχαστική απάντηση, όπως φαίνεται στην πλήρη συζήτηση. Η διατύπωση τέτοιων ερωτημάτων και η κριτική ενασχόληση με τις απαντήσεις του ChatGPT αποτελούν μια επιπλέον αποτύπωση της σημασίας των ικανοτήτων κατανόησης και αξιολόγησης της απόδειξης, στο πλαίσιο των αλληλεπιδράσεων με το ChatGPT που σχετίζονται με την απόδειξη.



Σχήμα 3. Το συμπληρωματικό μας ερώτημα στο ChatGPT σχετικά με τη δουλειά του στο βασικό βήμα της υποτιθέμενης απόδειξης, και η παραδοχή του ChatGPT για κυκλικό συλλογισμό.

ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στις καταληκτικές παρατηρήσεις του επιμελημένου τόμου τους για τους συσχετισμούς μεταξύ της τεχνητής νοημοσύνης (AI) και της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι Richard κ.ά. (2022) ανέφεραν τη δυσκολία τους «να

προβλέψουν τις εξελίξεις (της τεχνητής νοημοσύνης) που μπορούν να αναμένονται σε 5 χρόνια, 2 χρόνια ή ακόμη και κατά τη διάρκεια του τρέχοντος έτους» (σελ. 436). Πράγματι, λίγοι θα μπορούσαν να προβλέψουν την κυκλοφορία του ChatGPT μόλις λίγους μήνες μετά τη δημοσίευση του τόμου των Richard κ.ά. και τον αντίκτυπο που ήδη έχει το ChatGPT στο πώς αντιλαμβανόμαστε τη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών και μαθητριών. Η εμφάνιση του ChatGPT καθιστά τις ακόλουθες σκέψεις των Richard κ.ά. (2022), συμπεριλαμβανομένης της ανησυχίας τους για την αργή προσαρμογή της εκπαίδευσης στις τεχνολογικές εξελίξεις, ακόμη πιο επίκαιρες σήμερα:

Νέα εργαλεία απαιτούν νέα αναλυτικά προγράμματα και νέες δεξιότητες τόσο για τους εκπαιδευτικούς και τις εκπαιδευτικούς όσο και για τους μαθητές και τις μαθήτριες. Ωστόσο, στον τομέα της εκπαίδευσης, αυτή η μεταμόρφωση είναι πολύ αργή, σαν να υστερεί συχνά σε σχέση με την ανάπτυξη της κοινωνίας. Παρ' όλα αυτά, εκπαιδεύουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες του αύριο, όχι του χθες, σε μια εποχή που η νεολαία εισέρχεται στην τεχνολογική πολυπλοκότητα με μια ευχέρεια που προκαλεί απορία σε πολλούς ενήλικες.

(Richard κ.ά., 2022, σελ. 435)

Η συζήτησή μας σε αυτή την εργασία σχετικά με την αυξημένη σημασία των δεξιοτήτων κατανόησης και της αξιολόγησης της απόδειξης, ενώ οι μαθητές και μαθήτριες αλληλεπιδρούν με το ChatGPT, αποτελεί παράδειγμα της πιεστικής ανάγκης οι ερευνητές και ερευνήτριες της Διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και οι επαγγελματίες της μαθηματικής εκπαίδευσης, να αξιολογήσουν ποιες δεξιότητες είναι σημαντικές για τους μαθητές και τις μαθήτριες στην εποχή της παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης. Κατά την άποψή μας, αυτή η αξιολόγηση είναι θεμελιώδους σημασίας, καθώς μπορεί να αποτελέσει τη βάση για συζητήσεις γύρω από τον επαναπροσδιορισμό του μελλοντικού προσανατολισμού και του ρόλου της μαθηματικής εκπαίδευσης στην κοινωνία, καθώς και της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών (τόσο των μελλοντικών όσο και των εν ενεργεία), ώστε να είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι για την καλλιέργεια αυτών των σημαντικών δεξιοτήτων. Γνωρίζουμε, φυσικά, ότι τόσο οι ερευνητές και ερευνήτριες όσο και οι εκπαιδευτικοί δεν είναι συχνά οι κύριοι λήπτες αποφάσεων σχετικά με τη μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αντίθετα, οι αποφάσεις πολιτικής συνήθως επηρεάζονται περισσότερο από πολιτικές διαδικασίες και ιδεολογίες (Wright, 2012). Ωστόσο, ο λόγος τόσο των ερευνητών και

ερευνητριών όσο και των εκπαιδευτικών μπορεί να είναι ισχυρός, ιδιαίτερα όταν είναι καλά τεκμηριωμένος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. In F. L. Lin (Ed.), *Proceedings of the 2002 International Conference on Mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 23–44). Taipei, Taiwan: NSC and NTNU. Prepublication version retrieved November 25, 2011, from www.tpp.umassd.edu/proofcolloquium07/reading/Balachef_Taiwan2002.pdf
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Information Age.
- Frieder, S., Pinchetti, L., Chevalier, A., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T., Petersen, P. C., & Berner, J. (2023). Mathematical capabilities of ChatGPT. arXiv:2301.13867v2 <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.13867>
- Lo, C. K. (2023). What is the impact of ChatGPT on education? A rapid review of the literature. *Education Sciences*, 13, 410. <https://doi.org/10.3390/educsci13040410>
- Mejía-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3–18. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9349-7>
- Richard, P. R., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (Eds.). (2022). *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289–321. <https://doi.org/10.2307/30034869>
- Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K., & Stylianides, G. J. (2022). Teaching and learning authentic mathematics: the case of proving. In M.

- Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 727–761). Cham, Switzerland: Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9
- Stylianides, G. J., Sandefur, J., & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. *Journal of Mathematical Behavior*, 43, 20–34. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.04.002>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 56(1), 47–59. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-023-01518-y>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145–166. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). NCTM.
- Van Vaerenbergh, S., & Pérez-Suay, A. (2022). A classification of artificial intelligence systems for mathematics education. In P. R. Richard, M. P. Vélez, S. & Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning* (pp. 89–106). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_5
- Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., & Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7), em2286. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>
- Weber, K., & Melhuish, K. (2022). Can we engage students in authentic mathematical activity while embracing critical pedagogy? A commentary on the tensions between disciplinary activity and critical education. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22, 305–314. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00221-6>
- Wright, P. (2012). The math wars: Tensions in the development of school mathematics curricula. *For the Learning of Mathematics*, 32(2), 7–13.

- Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59–76. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9080-6>
- Yang, K. L., & Lin, F. L. (2012). Effects of reading-oriented tasks on students' reading comprehension of geometry proof. *Mathematics Education Research Journal*, 24(2), 215–238. <https://doi.org/10.1007/s13394-012-0039-2>

Ο Ανδρέας Στυλιανίδης είναι Καθηγητής Διδακτικής των Μαθηματικών στο University of Cambridge, Υπότροφος (Fellow) του Cambridge Hughes Hall College, καθώς και Συντονιστής της Ερευνητικής Ομάδας Μαθηματικής Παιδείας στο Faculty of Education του ίδιου πανεπιστημίου. Είναι επίσης Επίτιμος Ερευνητικός Συνεργάτης (Honorary Research Fellow) στο Department of Education του University of Oxford. Πρόσφατα ολοκλήρωσε πενταετή θητεία ως Επισκέπτης Καθηγητής στο Norwegian University of Science and Technology (NTNU). Έχει δημοσιεύσει εκτενώς στον τομέα της μαθηματικής παιδείας και πέρα από αυτόν, και είναι μέλος των συντακτικών επιτροπών αρκετών διεθνών επιστημονικών περιοδικών.

Ο Γαβριήλ Στυλιανίδης είναι Καθηγητής Διδακτικής των Μαθηματικών στο University of Oxford, Υπότροφος (Fellow) του Oxford Worcester College, καθώς και Συντονιστής της Ερευνητικής Ομάδας Διδακτικής Μεθοδολογίας στο Department of Education του ίδιου πανεπιστημίου. Είναι επίσης Μέλος (Fellow) της Βρετανικής Ακαδημίας Κοινωνικών Επιστημών (UK Academy of Social Sciences). Έχει δημοσιεύσει εκτενώς, ενώ η έρευνά του έχει λάβει χρηματοδότηση από το National Science Foundation των ΗΠΑ, το Institute of Educational Sciences των ΗΠΑ, το Education Endowment Foundation, το Υπουργείο Παιδείας της Αγγλίας, το Spencer Foundation, και το Norwegian Research Council.

Important mathematical competences for students in the age of generative artificial intelligence: proof comprehension and evaluation, and ChatGPT

Andreas J. Stylianides

Professor, Faculty of Education, University of Cambridge, UK
as899@cam.ac.uk

Gabriel J. Stylianides

Professor, Department of Education, University of Oxford, UK
gabriel.stylianides@education.ox.ac.uk

Abstract

The rapid growth and popularity of generative artificial intelligence has influenced all aspects of life and education, including mathematics education. Specifically, generative Large Language Models (LLMs), notably ChatGPT, are becoming increasingly popular among students and are changing the landscape of what mathematical competences students need in order to function effectively in the age of generative artificial intelligence and interact productively with the new technologies. We contend that educational systems must adapt to the new realities by resetting priorities, reorganizing curricula, and retraining teachers. In this paper, we call attention to the increased importance gained by two competences in the area of proof, proof comprehension and proof evaluation, as students interact with ChatGPT. We view our discussion of these proof competences as a case in point of the pressing need for mathematics education researchers and practitioners to reflect on what constitute important mathematical competences for students in the age of generative artificial intelligence. This is a foundational step that can serve as the basis for discussions about reimagining the future shape and role of mathematics education in society, including the training of teachers.

Keywords: Proof; Proof comprehension; Proof evaluation; Proof competence; Artificial intelligence; ChatGPT

***Andreas Stylianides** is Professor of Mathematics Education at the University of Cambridge, a Fellow of Cambridge's Hughes Hall College, and the Chair of the Mathematics Education Research Group at Cambridge's Faculty of Education. He is also an Honorary Research Fellow at the Department of Education, University of Oxford. He recently completed a 5-year appointment as a Visiting Professor at the Norwegian University of Science and Technology (NTNU). He has published widely in mathematics education and beyond, and he serves on the editorial boards of several international journals.*

***Gabriel Stylianides** is Professor of Mathematics Education at the University of Oxford, a Fellow of Oxford's Worcester College, and the Convenor of the Subject Pedagogy Research Group at Oxford's Department of Education. He is also a Fellow of the UK Academy of Social Sciences. He has published widely, and his research received funding support from the US National Science Foundation, the US Institute of Educational Sciences, the Education Endowment Foundation, the Department for Education in England, the Spencer Foundation, and the Norwegian Research Council.*