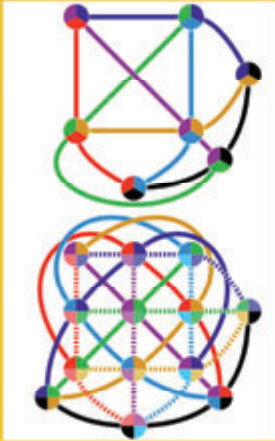


138

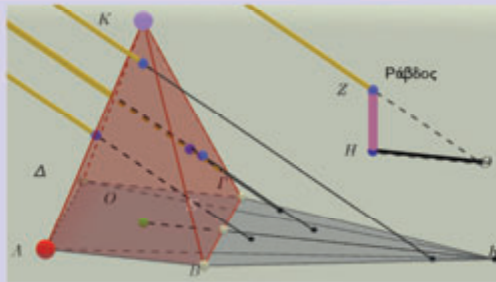


ΕΝΤΥΠΟ ΚΑΛΕΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1096/98 ΚΕΜΠΛΑΘ



Μαθηματικό περιοδικό για το ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ Ευκλείδης

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2025 ευρώ 3



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

✓ Γενικά άρθρα

Περί του χρυσού αριθμού «φ»...

Μαρία Παππά 1

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Α' Τάξη

Καθημερινά Προβλήματα

Επιμέλεια: Ειρήνη Κοτσακιάδη 7

Όταν η άλγεβρα συνάντησε τη γεωμετρία

Βαρβάρα Καμπουρίδη -Χρήστος Μπατέλης 11

• Β' Τάξη

Συναρτήσεις και συμμεταβολές γύρω μας...

Κρατημένος Αναστάσιος, Ξύδη Βηθλεέμ 14

Εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα θετικού τετράγωνου ακεραίου. Τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού

Ανδρέας Τριανταφύλλου 17

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Χρήστος Κουστέρης 21

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Γρυπάρης Παντελής 25

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Γ' Τάξη

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

Θέμις Καψή 28

Θαλής ο Μιλήσιος

Κολοβούρη Ευγενία-Θεοδώρα, Γρυπάρης Παντελής 31

Το θεώρημα του Θαλή και μια ιδιότητα των αναλογιών

Δημήτρης Διαμαντίδης και Κάτια Σχίζα 34

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Μαρία Παππά, Ειρήνη Κοτσακιάδη 37

✓ Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών 39

Τα ημερολόγια

Χριστόπουλος Π. Παναγιώτης 45

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Χριστόπουλος Π. Παναγιώτης 48

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34 Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:

Μαραγκάκης Στυλιανός

Χριστόπουλος Παναγιώτης

Συντακτική Επιτροπή

Συντονιστές:

Δρούτσας Παναγιώτης

Χριστόπουλος Παναγιώτης

Κουτσούρης Λέων

Διαμαντίδης Δημήτριος

Μέλη:

Αρδαβάνη Καλλιόπη

Βαρβεράκης Ανδρέας

Βασιλοπούλου Ιωάννα

Γαρυπάκη Γερασίουλα

Γεωργιάδου-Καμπουρίδη Βαρβάρα

Γκιουλέκα Αλεξάνδρα

Γουρνά Σωτηρία

Γρυπάρης Παντελής

Δημογιού Δημήτρα - Ζωή

Δοργιάκη Ιωάννα

Ζάγκας Κώστας

Ζιώγας Χρήστος

Καλαμπόκα Αθηνά

Καλδή Φωτεινή

Καμπουράκη Αντωνία - Ειρήνη

Καψή Θέμις

Κεϊσογλου Στέφανος

Κισκούρας Χρήστος

Κουστέρης Χρήστος

Κόσουβας Γεώργιος

Κοτσακιάδη Ειρήνη

Κρατημένος Τάσος

Κυράνας Παναγιώτης

Κυριακοπούλου Αθανασία

Κωστοπούλου Καλλιόπη

Λαγός Γεώργιος

Λαγουτάρη Ευαγγελία

Λυμπερόπουλος Γεώργιος

Μαγουλάς Αντώνιος

Μάλλιαρης Χρήστος

Μαρκάτου Γεωργία

Μπερδούσης Γεώργιος

Νικολόπουλος Ιωάννης

Ντόρβας Νικόλαος

Παπ/νου - Κωτίδης Δημήτριος

Παππά Μαρία

Πατακάκης Ιωάννης

Πούλιου Χριστίνα

Ρίζος Ιωάννης

Ρουσούλη Μαρία

Σαμπάνης Νίκος

Σιούλας Ιωάννης

Σίσκου Μαρία

Σχίζα Κάτια

Τζίφας Νικόλαος

Τριανταφύλλου Ανδρέας

Τσαπακίδης Γεώργιος

Τσιφάκης Χρήστος

Φερεντίνος Σπύρος

Χριστόπουλος Θανάσης

Συνεργάτες:

Κολοβούρη Ευγενία-

Θεοδώρα Φοιτήτρια

Κιουμουρτζή Μαρία Δασκάλα

Γράμμα της Σύναξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες

Το 2^ο τεύχος του περιοδικού μας έρχεται να προσθέσει θέματα που η ομάδα μας έκρινε ότι θα βοηθήσουν στη μελέτη σας, παράλληλα με τη διδασκαλία των καθηγητών σας, αλλά και στις αναζητήσεις σας. Θα είναι στα χέρια σας με την έλευση του νέου έτους, το οποίο είναι έτος δημιουργίας νέων ιδεών και ανακαλύψεων. Η ανθρωπότητα είναι προ των πυλών για να υποδεχτεί τα ανθρωποειδή της Τεχνητής Νοημοσύνης. Τεχνητή Νοημοσύνη σημαίνει Μαθηματικά. Το έτος 2026 θα είναι έτος δημιουργίας,

γιατί προσθέτει στο τετράγωνο μια μονάδα $45^2+1=2026$

με αριθμούς Ραμανουντζάν, το $2026=1729+297=10^3+9^3+11 \times 3^3=12^3+1^3+11 \times 3^3$

ΚΑΛΕΣ ΓΙΟΡΤΕΣ, ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων.

Α' τάξη Μαρία Παππά, Σωτηρία Γουρνά, Ζωή-Δήμητρα Δημογιού

Β' τάξη Θέμις Καψή, Αλεξάνδρα Γκιουλέκα, Αντώνης Μαγουλάς

Γ' τάξη Παντελής Γρυπάρης, Ειρήνη Κοτσακιάδη, Θανάσης Χριστόπουλος

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)

Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300

2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988

3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138

4. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της

ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:

printfair

Τηλ.: 2102469799 - 2102401695

Υπεύθυνος Τυπογραφείου:

Α. Κρέτσης

Περί του χρυσού αριθμού «φ»...

Μαρία Παππά

ΠΛΑΤΩΝΙΚΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΑΛΟΣ...

Ο Πλάτωνας επηρεασμένος από τους Πυθαγόρειους και την αγάπη τους για την ομορφιά των Μαθηματικών υποστήριζε ότι:
Ο φυσικός κόσμος είναι μια ατελής προβολή ενός πιο όμορφου κόσμου, αυτού των Ιδεών!

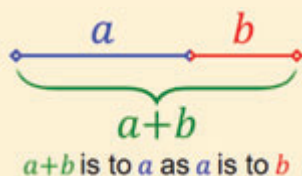


«Η Γεωμετρία έχει δύο μεγάλους θησαυρούς...
Ο ένας είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα,
ο άλλος η διαίρεση μιας γραμμής σε άκρο και μέσο λόγο.
Τον πρώτο μπορούμε να τον συγκρίνουμε με μια ποσότητα χρυσού.
Τον δεύτερο μπορούμε να τον θεωρήσουμε ως ένα πολύτιμο κόσμημα».
Johannes Kepler (1571 - 1630)



Ο πρώτος που έγραψε για τη Χρυσή τομή ήταν ο Ευκλείδης, μόνο που δεν την ονόμασε χρυσή τομή αλλά «λόγος του μεγάλου προς το μικρό» (άκρος και μέσος λόγος) στο Βιβλίο ΣΤ (6) των «Στοιχείων»/. Ο πρώτος που έγραψε γι' αυτή την αναλογία ήταν ο Ευκλείδης, αλλά ο 1^{ος} που τη χρησιμοποίησε ήταν ο Φειδίας.

Δηλαδή, η αναλογία: **«άκρον προς μέσον λόγον»** είναι όταν διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο κομμάτια - ένα μικρό και ένα μεγάλο – έτσι ώστε ο λόγος ολόκληρου του τμήματος προς το μεγαλύτερο κομμάτι να είναι ίσος με τον λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο,



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ϕ ΣΤΟ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΣΩΜΑ

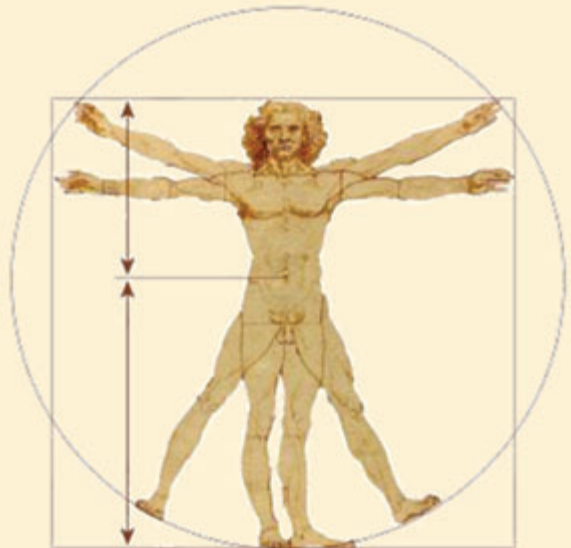
Το ανθρώπινο σώμα έχει δομηθεί και αναπτύσσεται στις αναλογίες του αριθμού Φ . Δεν είναι τυχαίο ότι πολλές ανατολικές θρησκείες και ομάδες που σχετίζονται με την αυτοσυγκέντρωση και την ψυχική αρμονία, για τον διαλογισμό, την εξάλειψη και την αποφυγή άγχους, όπως επίσης και στη Γιόγκα, η στάση του σώματος καθορίζεται κατά αυτόν τον τρόπο, έτσι ώστε τα “κεντρικά-κομβικά” σημεία του σώματος να είναι σύμφωνες με τον χρυσό κανόνα.



Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου

Στον «άνθρωπο του Βιτρούβιου», το διάσημο σχέδιο του Da Vinci, βλέπουμε, μετά από μια "σύγχρονη" παρέμβαση, τις χρυσές αναλογίες στο ανθρώπινο σώμα. Ήταν ο ίδιος ο Da Vinci που ονόμασε τον ϕ «**χρυσό αριθμό**», ενώ ο συνεργάτης του, μαθηματικός και μοναχός, Luca Pacioli, έγραψε το βιβλίο «Περί της Θείας Αναλογίας», αναφερόμενος στο λόγο της χρυσής τομής. Το θέμα του βιβλίου είναι η αναλογία στα μαθηματικά και την τέχνη, ιδίως η θεωρία της χρυσής τομής και η εφαρμογή της στην αρχιτεκτονική.

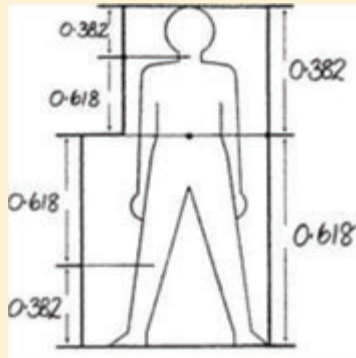
➤ Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου σχεδιάστηκε το 1840 σε ένα από τα ημερολόγια του Leonardo Da Vinci. Το συγκεκριμένο σχέδιο ονομάστηκε και ως ο Κανόνας των Αναλογιών και βασίστηκε στον χρυσό κανόνα του Fibonacci. Στο σχέδιο αυτό βλέπουμε μια ανθρώπινη, γυμνή αντρική μορφή εγγεγραμμένη ταυτόχρονα σε ένα κύκλο και σε ένα τετράγωνο. Εκτός από το σχέδιο υπήρχαν και κάποιες σημειώσεις σχετικά με τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος όπως:



- Μια παλάμη έχει πλάτος 4 δαχτύλων.
- Ένα πόδι έχει πλάτος 4 παλάμες.
- Το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 πήχεις και άρα 24 παλάμες.
- Το μήκος των χεριών ενός άντρα σε διάσταση είναι ίσο με το ύψος του.
- Το μέγιστο πλάτος των ώμων είναι το $\frac{1}{4}$ του ύψους του άντρα.
- Η απόσταση από τον αγκώνα ως την άκρη του χεριού είναι το $\frac{1}{5}$ του ύψους του άντρα κ.α.

Ο αριθμός ϕ εμφανίζεται σε πολλές από τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος. Για παράδειγμα, ο αφαλός «τέμνει» το σώμα μας, από την κορυφή του κεφαλιού μέχρι τα δάκτυλα των ποδιών, σε λόγο χρυσής τομής. Αν μετρήσετε το ύψος σας (την απόσταση από την κορυφή του κεφαλιού σας μέχρι το πάτωμα) και τη διαιρέσετε με την απόσταση από τον αφαλό μέχρι το πάτωμα, προσεγγίζεται πάντα ο αριθμός ϕ .

Αν μετρήσετε την απόσταση από τον αφαλό μέχρι το πάτωμα και τη διαιρέσετε με την απόσταση από την κορυφή του κεφαλιού σας μέχρι τον αφαλό, προσεγγίζεται πάντα ο αριθμός ϕ .



Ακόμα, το χέρι μας, από τον ώμο μέχρι τις άκρες των δακτύλων μας, διαιρείται σε λόγο χρυσής τομής ακριβώς στον αγκώνα μας.

- Αν μετρήσετε την απόσταση από τον ώμο σας μέχρι τις άκρες των δακτύλων και τη διαιρέσετε με την απόσταση από τον αγκώνα μέχρι τις άκρες των δακτύλων, προσεγγίζεται πάντα ο αριθμός ϕ .
- Αν μετρήσετε την απόσταση από τον αγκώνα μέχρι τις άκρες των δακτύλων και τη διαιρέσετε με την απόσταση από τον ώμο σας μέχρι τον αγκώνα, προσεγγίζεται πάντα ο αριθμός ϕ .
- Αντίστοιχα, ο καρπός «τέμνει» το χέρι μας, από τον αγκώνα μέχρι τις άκρες των δακτύλων, σε χρυσή τομή. Όμοια, η χρυσή τομή και η ακολουθία Fibonacci μπορούν να βρεθούν και στα δάκτυλά μας.

Η αναλογία μεταξύ του μήκους και του πλάτους του προσώπου και η αναλογία του μήκους του στόματος προς το πλάτος της μύτης είναι μερικά ακόμα παραδείγματα της εφαρμογής των αριθμών αυτών στο ανθρώπινο σώμα.

Ακόμα και σε πολλές άλλες λεπτομέρειες συναντάμε τον αριθμό ϕ , όπως στις αναλογίες των δοντιών μας ή του αυτιού μας. Φυσικά, δεν έχουμε όλοι ίδια δόντια, ίδια μύτη ή ίδια αυτιά. Απλώς, όλο και περισσότερο πλησιάζουν οι αναλογίες μας στον αριθμό ϕ .

Χρησιμοποιώντας τη μεζούρα κάντε τις μετρήσεις:

Μετράμε τις βασικές διαστάσεις του προσώπου:

Υψος προσώπου h

M: Απόσταση ματιών από το πηγούνι E

X: Απόσταση χειλιών από το πηγούνι L

Π: Πλάτος προσώπου = W

Βρείτε τις ιδανικές αναλογίες κάνοντας τις διαιρέσεις:

IM: Απόσταση ματιών E / ϕ

IX: Απόσταση χειλιών L / ϕ^2

ΙΠ: Πλάτος προσώπου W / ϕ

$$\phi \approx 1,618$$

Στη συνέχεια βρείτε το ποσοστό προσέγγισης της κάθε μέτρησης στην ιδανική τιμή:

$$\frac{\min(M, IM)}{\max(M, IM)} \times 100 =$$

$$\frac{\min(X, IX)}{\max(X, IX)} \times 100 =$$

$$\frac{\min(\Pi, ΙΠ)}{\max(\Pi, ΙΠ)} \times 100 =$$

Συνολικό ποσοστό :

Έτσι θα δείτε ότι όλοι μας έχουμε διαστάσεις που επαληθεύουν τη χρυσή τομή, «είμαστε όμορφοι».

Συμμετρία

Ευγενία Κολοβούρη

Η ομορφιά βέβαια συμπληρώνεται και με τη συμμετρία όπως παρατηρεί η φοιτήτρια **Ευγενία Κολοβούρη από την Πάτρα.**

Αν κοιτάξεις γύρω σου, θα τη βρεις παντού: σε ένα λουλούδι, σε μια πεταλούδα, ακόμα και σε ένα αρχαίο μνημείο όπως ο **Παρθενώνας!**

Ο Παρθενώνας είναι ο ναός που χτίστηκε προς τιμήν της θεάς Αθηνάς, προστάτιδας της Αθήνας, στα μέσα του 5ου π.Χ. αιώνα. Δημιουργήθηκε από τους αρχιτέκτονες Ικτίνο και Καλλικράτη και θεωρείται **ένα από τα πιο γνωστά μνημεία του κόσμου.** Από την εποχή του Διαφωτισμού, ο Παρθενώνας θαυμάζεται ως σύμβολο αρμονίας, συμμετρίας και διαχρονικών αξιών, όπως η ομορφιά, η τέχνη και η δημοκρατία. Ο Παρθενώνας συνδέεται στενά με τα μαθηματικά, καθώς στην αρχιτεκτονική του κυριαρχούν η **συμμετρία και οι αρμονικές αναλογίες.** Οι αρχαίοι Έλληνες εφάρμοσαν τη **χρυσή τομή**, ένα μαθηματικό λόγο που εκφράζει την ισορροπία και την ομορφιά, δημιουργώντας ένα μνημείο που συνδυάζει την ακρίβεια των μαθηματικών με την τελειότητα της τέχνης.

Τι είναι συμμετρία;

Στο σχολείο μάθαμε πως ένα σχήμα είναι συμμετρικό ως προς έναν άξονα όταν, διπλώνοντάς το πάνω σε αυτόν τον άξονα, τα δύο μέρη του ταιριάζουν ακριβώς.

Αυτός ο άξονας λέγεται **άξονας συμμετρίας.**

«Ο ποιητής θα έλεγε: *ό,τι φοριέται από την ανάποδη. Ό,τι διπλώνει και ταιριάζει, ό,τι στρίβει και «συμπίπτει».* Μόνο η φαντασία δεν έχει καθόλου συμμετρία. Γι' αυτό η συμμετρία χρειάζεται και λίγη φαντασία. Αν αυτή ακριβώς τη φαντασία τη φορέσουμε ανάποδα, θα μας βγει όλη η Γεωμετρία.»

Για παράδειγμα:

- Το τετράγωνο έχει 4 άξονες συμμετρίας.
- Το ισοσκελές τρίγωνο έχει 1.
- Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει 2.

Η συμμετρία στον Παρθενώνα

Αν σταθούμε μπροστά στον Παρθενώνα και τραβήξουμε νοερά μια γραμμή στη μέση, από το κέντρο της στέγης μέχρι το έδαφος, αυτή η γραμμή είναι ο **άξονας συμμετρίας του ναού.**

- Οι **στήλες** είναι τοποθετημένες **συμμετρικά δεξιά και αριστερά.**
- Το **αέτωμα** (το τρίγωνο στην κορυφή) έχει **συμμετρικό σχήμα.**
- Ακόμα και τα **γλυπτά** είχαν στηθεί έτσι ώστε η σκηνή να φαίνεται ισορροπημένη.

Ο Παρθενώνας λοιπόν είναι θαύμα αρχιτεκτονικής όπου εφαρμόζονται τα μαθηματικά η **συμμετρία και η χρυσή τομή.**

Μικρές αποκλίσεις

Οι αρχιτέκτονες του Παρθενώνα, ο Ικτίνος και ο Καλλικράτης, δεν έκαναν την συμμετρία με απόλυτα μαθηματικές ευθείες. Αν το έκαναν, ο ναός θα έδειχνε **«άψυχος».** Έτσι, πρόσθεσαν πολύ μικρές αποκλίσεις, για παράδειγμα, οι κολώνες έχουν ελαφριά κλίση προς τα μέσα και η βάση είναι λίγο κυρτή.

Αυτές οι λεπτομέρειες κάνουν τον ναό να φαίνεται τέλεια συμμετρικός στα μάτια μας, παρόλο που δεν είναι απόλυτα!



Ο Παρθενώνας μάς θυμίζει πως όταν οι αριθμοί, τα σχήματα και η φαντασία συνεργάζονται, δημιουργούν κάτι όμορφο και διαχρονικό.

Τι μας διδάσκει η συμμετρία;

Η συμμετρία δεν είναι απλώς ένα μάθημα Γεωμετρίας είναι τρόπος σκέψης!

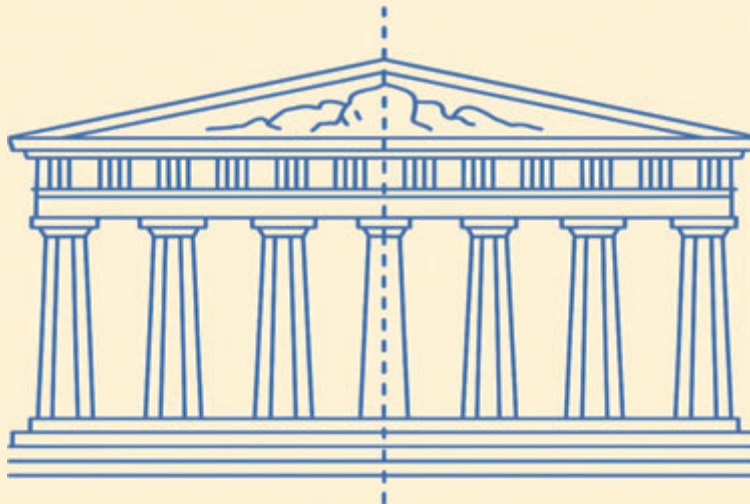
Μας μαθαίνει να ψάχνουμε **ισορροπία, οργάνωση και αρμονία** γύρω μας. Η συμμετρία είναι παντού: στη φύση, στα έργα τέχνης, στην αρχιτεκτονική.

Κάθε φορά που σχεδιάζεις έναν άξονα συμμετρίας στο τετράδιό σου, σκέψου ότι κάνεις το ίδιο που έκαναν κι οι αρχαίοι Έλληνες χτίζοντας τον Παρθενώνα, **δημιουργείς με τα μαθηματικά ομορφιά! Τα Μαθηματικά δεν περιορίζονται στους αριθμούς, είναι ταυτόχρονα τέχνη, λογική και φαντασία!**

Μικρό Εργαστήριο Συμμετρίας

Δραστηριότητα: Ο δικός σου Παρθενώνας!

- ❖ Πάρε χαρτί μιλιμετρέ.
- ❖ Σχεδίασε έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας στη μέση.
- ❖ Από τη μία πλευρά, σχεδίασε 5 κάθετες «κολώνες» και ένα τρίγωνο για τη στέγη.
- ❖ Χρησιμοποίησε τον χάρακα για να βρεις τα συμμετρικά σημεία και σχεδίασε τις ίδιες κολώνες και στην άλλη πλευρά.
- ❖ Παρατήρησε πώς δημιουργείται μια ισορροπημένη και όμορφη εικόνα!



«Και πότε θα μου χρειαστούν αυτά στη ζωή;».

Αυτή η ερώτηση γίνεται συχνά από όλους τους μαθητές, ειδικά όταν ξεκινούν το Γυμνάσιο ή όταν έρχονται σε επαφή με την επίλυση διάφορων προβλημάτων. Όμως τα μαθηματικά δεν είναι απλώς μια συλλογή τύπων και κανόνων. Είναι μια ζωντανή επιστήμη που βασίζεται στην επίλυση προβλημάτων. Τα προβλήματα αποτελούν την καρδιά της μαθηματικής σκέψης και είναι το μέσο με το οποίο οι μαθητές, οι ερευνητές και οι επαγγελματίες αναπτύσσουν βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, δεξιότητες σκέψης και κριτική ικανότητα. Ας δούμε κάποια προβλήματα βασισμένα στις μονάδες μέτρησης, τα ποσοστά και την επίλυση εξισώσεων.

Μονάδες Μέτρησης

Άσκηση 1

Ο κτηνίατρος του ζωολογικού κήπου ζύγισε μια τίγρη, έναν ρινόκερο και μια αρκούδα. Η αρκούδα και ο ρινόκερος ζυγίζουν μαζί 3,7t. Η τίγρης και ο ρινόκερος ζυγίζουν μαζί 2,3t. Η αρκούδα και η τίγρης ζυγίζουν μαζί 1.800kg. Να βρείτε πόσο ζυγίζει κάθε ζώο σε kg και t.

Λύση: Μετατρέπουμε το 1800kg: $1000=1,8t$. Το άθροισμα $3,7+2,3+1,8=7,8t$ ισούται με 2 φορές το άθροισμα του βάρους των 3 ζώων. Άρα τα 3 ζώα μαζί έχουν βάρος $7,8:2=3,9t$.

Επομένως: η τίγρης ζυγίζει : $3,9-3,7=0,2 t=200kg$

η αρκούδα ζυγίζει: $3,9-2,3=1,6t=1600kg$

ο ρινόκερος ζυγίζει: $3,9-1,8=2,1t=2100kg$

Άσκηση 2

Τρεις φίλοι πήγαν σινεμά να παρακολουθήσουν μια ταινία. Η ταινία ξεκινούσε στις 18:45 και τελείωσε στις 21:25. Αν οι διαφημίσεις και τα τρέιλερ είχαν συνολική διάρκεια 20min, πόση ήταν η διάρκεια της ταινίας;

Λύση: Θα κάνουμε την αφαίρεση για να βρούμε πόση ώρα ήταν η ταινία και οι διαφημίσεις.

$$\begin{array}{r} 20 \quad 85 \\ 21 \text{ ώρες και } 25 \text{ λεπτά} \\ - 18 \text{ ώρες και } 45 \text{ λεπτά} \\ \hline 2 \text{ ώρες και } 40 \text{ λεπτά} \end{array}$$

Αφού οι διαφημίσεις είναι 20 λεπτά, η διάρκεια της ταινίας θα είναι:

2 ώρες και 40 λεπτά $- 20 \text{ λεπτά} = 2 \text{ ώρες και } 20 \text{ λεπτά}$

Άσκηση 3

Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με μήκος 2m, πλάτος 15dm και ύψος 80cm και περιέχει 100lt νερό. Σε πόσες ώρες μια βρύση με παροχή 5lt νερό ανά λεπτό, θα γεμίσει την δεξαμενή;

Λύση: Πρώτα θα μετατρέψουμε τα μεγέθη σε ίδιες μονάδες μέτρησης για παράδειγμα σε dm. Μήκος 2m=20dm και ύψος 80cm=8dm. Ο όγκος είναι $V=20 \cdot 15 \cdot 8 = 2400dm^3$ ή lt. Άρα πρέπει να γεμίσει $2400-100=2300lt$. Αφού η βρύση παρέχει 5lt νερό ανά λεπτό, θα γεμίσει την δεξαμενή σε $2300:5=460 \text{ λεπτά} = 7 \text{ ώρες και } 40 \text{ λεπτά}$.

Εξισώσεις

Άσκηση 4

Ο Γιώργος έχει σήμερα τριπλάσια ηλικία από τον Μάριο. Μετά από 7 χρόνια, οι ηλικίες τους θα έχουν άθροισμα 62 έτη. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες του Γιώργου και του Μάριου.

Λύση: Η σημερινή ηλικία του Μάριου είναι x έτη και του Γιώργου 3x. Μετά από 7 χρόνια η ηλικία του Μάριου θα είναι x+7 έτη και του Γιώργου 3x+7. Αφού οι ηλικίες τους θα έχουν άθροισμα 62 θα έχω:

$$(x+7) + (3x+7) = 62$$

$$x+7+3x+7=62$$

$$4x+14=62$$

$$4x=62-14$$

$$4x=48$$

$$x=48:4$$

$x=12$ έτη είναι η σημερινή ηλικία του Μάριου και $3 \cdot 12=36$ έτη είναι η ηλικία του Γιώργου.

Άσκηση 5

Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 135.

Λύση: Οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί διαφέρουν κατά μια μονάδα. Επομένως, αν ο πρώτος αριθμός είναι ο x , ο επόμενος θα είναι ο $x+1$ και ο τρίτος ο $x+2$. Δεδομένου ότι έχουν άθροισμα 135 θα έχουμε:

$$x + (x+1) + (x+2) = 135$$

$$x+x+1+x+2=135$$

$$3 \cdot x + 3 = 135$$

$$3 \cdot x = 135 - 3$$

$$3 \cdot x = 132$$

$$x = 132 : 3$$

$x=44$ θα είναι ο πρώτος αριθμός, ο δεύτερος θα είναι $44+1=45$ και ο τρίτος θα είναι $44+2=46$.

Άσκηση 6

Μια τετραμελής οικογένεια ταξίδεψε με αεροπλάνο και πλήρωσαν συνολικά 450 για τα εισιτήρια τους. Το εισιτήριο του ενήλικα κοστίζει το διπλάσιο από αυτό των παιδιών. Να βρείτε πόσο κόστισε το κάθε εισιτήριο ,αν η οικογένεια αποτελείται από 2 ενήλικες και 2 παιδιά.

Λύση: Έστω ότι το εισιτήριο του ενός παιδιού κοστίζει x €. Άρα για τα εισιτήρια 2 παιδιών θα πληρώσουμε $2 \cdot x$. Του ενήλικα θα κοστίζει $2 \cdot x$. Συνολικά λοιπόν για τα εισιτήρια δυο ενηλίκων και δυο παιδιών θα πληρώσουμε $2 \cdot 2x + 2x = 450$ €.

$$4x + 2x = 450$$

$$6x = 450$$

$$x = 450 : 6$$

$x=75$ € κοστίζει το εισιτήριο κάθε παιδιού και $75 \cdot 2=150$ € κοστίζει το εισιτήριο κάθε ενήλικα.

Άσκηση 7

Οι τρεις νικητές ενός τηλεπαιχνιδιού είχαν κάνει συμφωνία για τον διαμοιρασμό των κερδών ανάλογα με τις σωστές απαντήσεις. Το ποσό που κέρδισαν ήταν 19.900 €. Αν ο Α πήρε 4.100€ περισσότερα από τον Β και ο Γ πήρε 1.900€ λιγότερα από τον Β, πόσα χρήματα πήρε ο καθένας.

Λύση: Αν ο Β πήρε x €, ο Α πήρε $(x+4.100)$ € και ο Γ πήρε $(x-1.900)$ €. Το άθροισμα των κερδών είναι:

$$x + (x+4.100) + (x-1.900) = 19.900$$

$$x+x+4.100+x-1.900=19.900$$

$$3 \cdot x + 2.200 = 19.900$$

$$3 \cdot x = 19.900 - 2.200$$

$$3 \cdot x = 17.700$$

$$x = 17.700 : 3$$

$$x = 5.900 \text{ € πήρε ο Β}$$

Ο Α νικητής πήρε $5.900 + 4.100 = 10.000$ € και ο Γ πήρε $5.900 - 1.900 = 4.000$ €.

Άσκηση 8

Ο ταμίας ενός παντοπωλείου έχει μόνο 90 χαρτονομίσματα από τα οποία κάποια είναι των 50€ και τα υπόλοιπα είναι των 20€. Αν οι συνολικές εισπράξεις είναι 1920€, να βρείτε πόσα είναι τα χαρτονομίσματα των 50€ και πόσα των 20€.

Λύση: Έστω x ο αριθμός των χαρτονομισμάτων των 50€. Επομένως ο αριθμός των χαρτονομισμάτων των 20€ είναι $(90-x)$. Οι εισπράξεις είναι :

$$50 \cdot x + (90 - x) \cdot 20 = 1920$$

$$50 \cdot x + 1800 - 20 \cdot x = 1920$$

$$50 \cdot x - 20 \cdot x = 1920 - 1800$$

$$30 \cdot x = 120$$

$$x = 120 : 30$$

$x = 4$ χαρτονομίσματα των 50€ και $(90 - 4) = 86$ χαρτονομίσματα των 20€.

Άσκηση 9

Οι μαθητές της Α' Γυμνασίου ενός σχολείου είναι συνολικά 110 παιδιά, τα οποία έχουν χωριστεί σε 4 τμήματα. Το 2ο τμήμα έχει 5 παιδιά περισσότερα από το 1ο, ενώ το 4ο έχει 3 παιδιά λιγότερα από το 1ο. Το 3ο τμήμα έχει 24 μαθητές, πόσους μαθητές έχουν τα υπόλοιπα τμήματα;

Λύση: Έστω x ο αριθμός των μαθητών του 1ου τμήματος. Άρα το 2ο τμήμα έχει $(x + 5)$ μαθητές και το 4ο τμήμα έχει $(x - 3)$ μαθητές. Αθροιστικά όλα τα τμήματα έχουν:

$$x + (x + 5) + 24 + (x - 3) = 110 \text{ μαθητές}$$

$$x + x + 5 + 24 + x - 3 = 110$$

$$3 \cdot x + 26 = 110$$

$$3 \cdot x = 110 - 26$$

$$3 \cdot x = 84$$

$$x = 84 : 3$$

$x = 28$ μαθητές έχει το 1^ο τμήμα, $28 + 5 = 33$ μαθητές έχει το 2^ο τμήμα και $28 - 3 = 25$ μαθητές έχει το 4^ο τμήμα.

Ποσοστά

Άσκηση 10

Σε μια προπόνηση, ένας παίκτης μπάσκετ έριξε 15 σουτ των 3 πόντων με ποσοστό ευστοχίας 40%, 24 σουτ των 2 πόντων με ποσοστό ευστοχίας 75% και 25 σουτ του ενός πόντου. Αν ο παίκτης πέτυχε συνολικά 65 πόντους, να βρείτε το ποσοστό ευστοχίας του στα σουτ του 1 πόντου.

Λύση: Αφού στα τρίποντα είχε ποσοστό επιτυχίας 40% πέτυχε $15 \cdot \frac{40}{100} = \frac{600}{100} = 6$ τρίποντα.

Στα δίποντα είχε ποσοστό επιτυχίας 75%, άρα πέτυχε $24 \cdot \frac{75}{100} = \frac{1800}{100} = 18$ δίποντα.

Συνολικά λοιπόν από τα δίποντα και τα τρίποντα πέτυχε $6 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 18 + 36 = 54$ πόντους. Επομένως από τα σουτ ενός πόντου πέτυχε $65 - 54 = 11$ πόντους. Το ποσοστό ευστοχίας του στα σουτ ενός πόντου ήταν $\frac{11}{25} = \frac{44}{100} = 44\%$.

Άσκηση 11

Η Μαρία αγόρασε ένα ψυγείο και έδωσε προκαταβολή το 40% της αξίας του. Το υπόλοιπο ποσό συμφώνησε να το εξοφλήσει σε 3 άτοκες μηνιαίες δόσεις, όπου κάθε δόση θα είναι 10% αυξημένη σε σχέση με την προηγούμενη. Αν το ποσό της 2ης δόσης είναι 176 €, να βρείτε την αξία του ψυγείου.

Λύση: Έστω x η πρώτη δόση και η δεύτερη θα είναι $x + \frac{10}{100} \cdot x = \frac{110}{100} x = 1,10 \cdot x$.

$$\text{Αλλά } 1,10 \cdot x = 176$$

$$x = 176 : 1,10$$

$$x = 160 \text{ €}$$

$$\text{Η τρίτη δόση θα είναι } 176 + 176 \cdot \frac{10}{100} = 176 + \frac{1760}{100} = 176 + 17,6 = 193,6.$$

Τελικά το 60% της αξίας του ψυγείου είναι το άθροισμα των 3 δόσεων: $160 + 176 + 193,6 = 529,6$ και η αξία του ψυγείου θα είναι $529,6 : \frac{60}{100} = 529,6 \cdot \frac{100}{60} = 882,67$.

Άσκηση 12

Σ' ένα κατάστημα η αξία ενός μπουφάν είναι διπλάσια από την αξία ενός σακακιού. Αν υπάρχει έκπτωση 30% στο σακάκι και 20% στο μπουφάν και συνολικά πληρώσαμε 207€, ποιες είναι οι αρχικές τιμές των 2 προϊόντων;

Λύση: Έστω x η αξία του σακακιού πριν την έκπτωση και $2x$ η αξία του μπουφάν. Πληρώσαμε για το σακάκι 70% της αρχικής του τιμής μετά την έκπτωση και για το μπουφάν 80% της αρχικής του τιμής. Τελικά έχουμε

$$x \cdot \frac{70}{100} + 2x \cdot \frac{80}{100} = 207$$

$$0,7x + 1,6x = 207$$

$$2,3x = 207$$

$$x = 207 : 2,3$$

$x = 90\text{€}$ κόστιζε το σακάκι και $2 \cdot 90 = 180\text{€}$ κόστιζε το μπουφάν.

Άσκηση 13

Η Ελένη κατέθεσε 1.000 € με ετήσιο επιτόκιο 4%. Στους τόκους προστίθεται φόρος 15%. Πόσα χρήματα θα έχει συνολικά μετά από 2 χρόνια .

Λύση: Στο τέλος του πρώτου χρόνου θα έχει πάρει τόκο $1000 \cdot \frac{4}{100} = 40\text{€}$. Όμως παρακρατείται 15% φόρος στους τόκους, $40 \cdot \frac{15}{100} = \frac{600}{100} = 6\text{€}$. Συνολικά στο τέλος του 1^{ου} έτους η Ελένη θα έχει $1.000 + 40 - 6 = 1.034\text{€}$. Το 2^ο έτος ο τόκος θα είναι $1.034 \cdot \frac{4}{100} = \frac{4136}{100} = 41,36\text{€}$.

Ο φόρος θα είναι $41,36 \cdot \frac{15}{100} = \frac{620,4}{100} = 6,204\text{€}$.

Μετά από 2 χρόνια θα έχει συνολικά $1.034 + 41,36 - 6,204 = 1069,156\text{€}$.

Άσκηση 14

Σε έναν διαγωνισμό συμμετείχαν 120 μαθητές.

- Το 30% πέρασε στην επόμενη φάση.
- Από αυτούς, το 50% πήρε βραβείο.
- Από όσους δεν πέρασαν, το 1/7 πήρε έπαινο.

Πόσοι μαθητές πήραν είτε βραβείο είτε έπαινο;

Λύση: Στην επόμενη φάση πέρασαν $120 \cdot \frac{30}{100} = \frac{3600}{100} = 36$ μαθητές.

Βραβείο πήραν οι $36 \cdot \frac{50}{100} = \frac{1800}{100} = 18$ μαθητές. Αυτοί που δεν πέρασαν ήταν $120 - 36 = 84$ μαθητές και από αυτούς έπαινο πήραν οι $84 \cdot \frac{1}{7} = \frac{84}{7} = 12$ μαθητές.

Οι μαθητές που πήρανε είτε βραβείο, είτε έπαινο ήταν $18 + 12 = 30$.

Στα παρακάτω προβλήματα να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Σε ένα σχολείο, το 60% των μαθητών είναι κορίτσια. Αν τα αγόρια είναι 120, πόσοι είναι συνολικά οι μαθητές; **A:** 200 **B:** 250 **Γ:** 300 **Δ:** 350

2. Ένα κλάσμα ισούται με $\frac{2}{5}$. Αν αυξήσουμε τον αριθμητή κατά 50% και μειώσουμε τον παρονομαστή κατά 20%, το νέο κλάσμα είναι: **A:** $\frac{3}{4}$ **B:** $\frac{3}{5}$ **Γ:** $\frac{1}{2}$ **Δ:** $\frac{5}{8}$

3. Ένας έμπορος αγόρασε ένα προϊόν 150 € και το πούλησε κερδίζοντας 30% επί της τιμής αγοράς. Ποια ήταν η τιμή πώλησης; **A:** 180 € **B:** 195 € **Γ:** 200 € **Δ:** 210 €

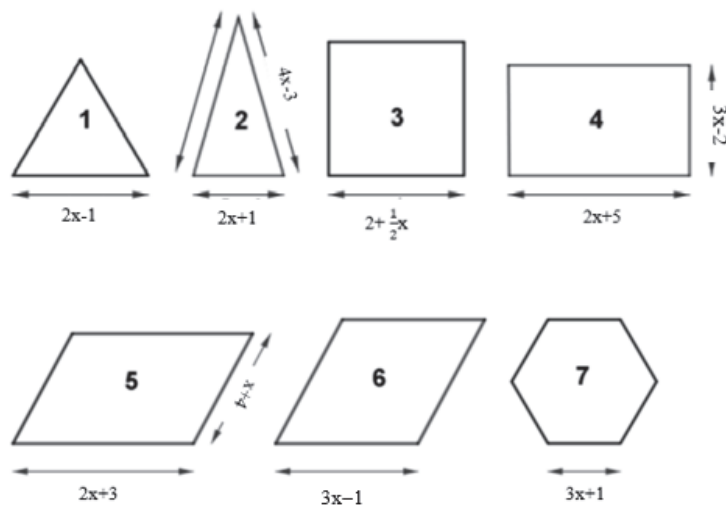
4. Ένας έμπορος αποφάσισε να ορίσει την τιμή ενός προϊόντος 40% πάνω από την τιμή αγοράς. Στις εκπτώσεις όμως αποφάσισε να το πουλήσει με 20% έκπτωση. Ποιο είναι το τελικό του κέρδος ή ζημία σε ποσοστό; **A:** 12% κέρδος **B:** 10% κέρδος **Γ:** 8% ζημία **Δ:** 5% κέρδος

5. Το 40% του μήκους μιας αίθουσας είναι 8 μέτρα περισσότερο από το 30% του πλάτους της. Αν η περίμετρος είναι 44 μέτρα, ποιο είναι το εμβαδόν της αίθουσας;

A: 96 m² **B:** 112 m² **Γ:** 120 m² **Δ:** 108 m²

6. Ένα κουτί περιέχει μπισκότα. Τα $\frac{2}{5}$ των μπισκότων είναι σοκολατένια και τα υπόλοιπα είναι βανίλια. Αν τα σοκολατένια μπισκότα ζυγίζουν 600 g και κάθε μπισκότο βανίλια ζυγίζει 25% λιγότερο από κάθε σοκολατένιο, ποιο είναι το συνολικό βάρος των μπισκότων αν τα σοκολατένια είναι 40 κομμάτια; **A:** 1,2 kg **B:** 1,35 kg **Γ:** 1,5 kg **Δ:** 1,65 kg

Βρες μία αλγεβρική παράσταση για την περίμετρο κάθε σχήματος. Κατόπιν απλοποίησέ την.



1. Ισόπλευρο τρίγωνο

Περίμετρος: $(2x-1) + (2x-1) + (2x-1) = (2x+2x+2x) + (-1-1-1) = 6x-3$ ή αλλιώς $3 \cdot (2x-1) = 3 \cdot 2x - 3 \cdot 1 = 6x-3$.

2. Ισοσκελές τρίγωνο

Περίμετρος: $(2x+1) + (4x-3) + (4x-3) = (2x+4x+4x) + (+1-3-3) = 10x-5$

3. Τετράγωνο

Περίμετρος: $4 \cdot (2 + \frac{1}{2}x) = 8 + \frac{4}{2}x = 8+2x$

4. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Περίμετρος: $(2x+5) + (2x+5) + (3x-2) + (3x-2) = (4x+10) + (6x-4) = 10x+6$ ή αλλιώς $2 \cdot (2x+5) + 2 \cdot (3x-2) = \dots = 10x+6$

5. Παραλληλόγραμμο

Περίμετρος: $(2x+3) + (x+4) + (2x+3) + (x+4) = (2x+x+2x+x) + (3+4+3+4) = 6x+14$.

6. Ρόμβος

Περίμετρος: $(3x-1) + (3x-1) + (3x-1) + (3x-1) = (3x+3x+3x+3x) + (-1-1-1-1) = 12x-4$ ή αλλιώς $4 \cdot (3x-1) = 12x-4$.

7. Κανονικό εξάγωνο

Περίμετρος: $6 \cdot (3x+1) = 18x+6$.

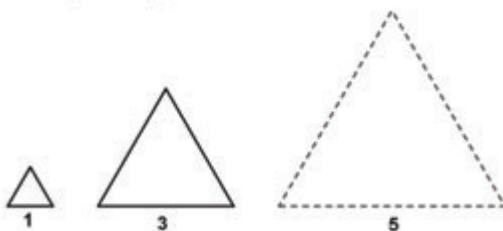
Στις παραπάνω διαστάσεις ο x είναι μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει διάφορες τιμές. Ας δούμε τώρα ποια διαφορετικά σχήματα μπορούμε να έχουμε αν αντικαταστήσουμε τα x με τιμές φυσικούς αριθμούς.

1. Για $x=0$ η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι $2 \cdot 0 - 1 = -1$ (αυτή η τιμή απορρίπτεται)

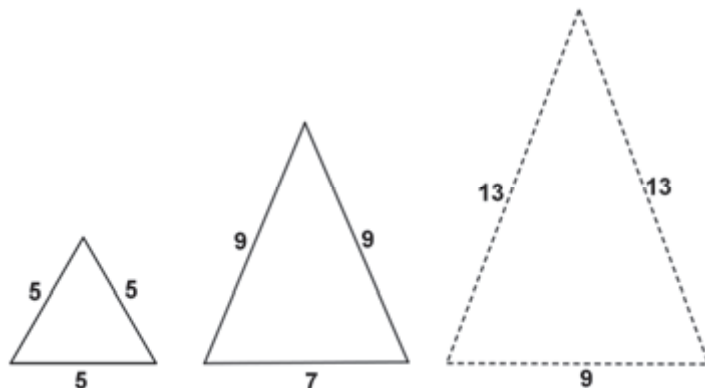
Για $x=1$ η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι $2 \cdot 1 - 1 = 1$

Για $x=2$ η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι $2 \cdot 2 - 1 = 3$.

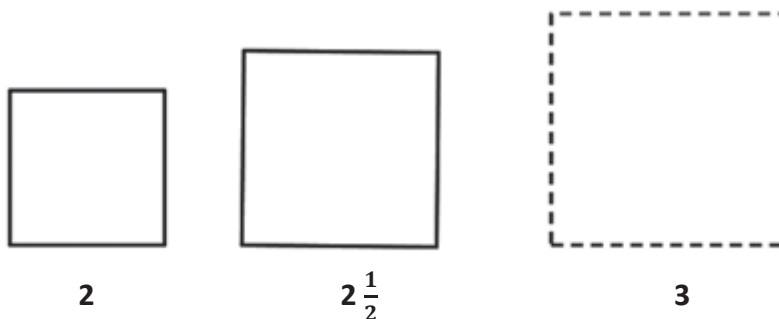
Για $x=3$ η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι $2 \cdot 3 - 1 = 5$ κ.ο.κ.



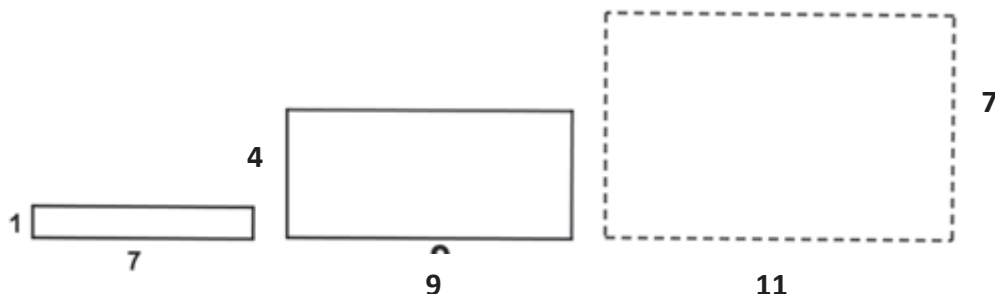
2. Για $x=0$ οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι $2 \cdot 0 + 1 = 1$ και $4 \cdot 0 - 3 = -3$ (αυτή η τιμή απορρίπτεται)
 Για $x=1$ οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι $2 \cdot 1 + 1 = 3$ και $4 \cdot 1 - 3 = 1$. Αυτή η περίπτωση απορρίπτεται διότι δεν δημιουργείται τρίγωνο.
 Για $x=2$ οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι $2 \cdot 2 + 1 = 5$ και $4 \cdot 2 - 3 = 5$ (ισόπλευρο τρίγωνο!).
 Για $x=3$ οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι $2 \cdot 3 + 1 = 7$ και $4 \cdot 3 - 3 = 9$.
 Για $x=4$ οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι $2 \cdot 4 + 1 = 9$ και $4 \cdot 4 - 3 = 13$.



3. Για $x=0$ η πλευρά του τετραγώνου είναι $2 + \frac{1}{2}x = 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$
 Για $x=1$ η πλευρά του τετραγώνου είναι $2 + \frac{1}{2}x = 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$
 Για $x=2$ η πλευρά του τετραγώνου είναι $2 + \frac{1}{2}x = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 + 1 = 3$.

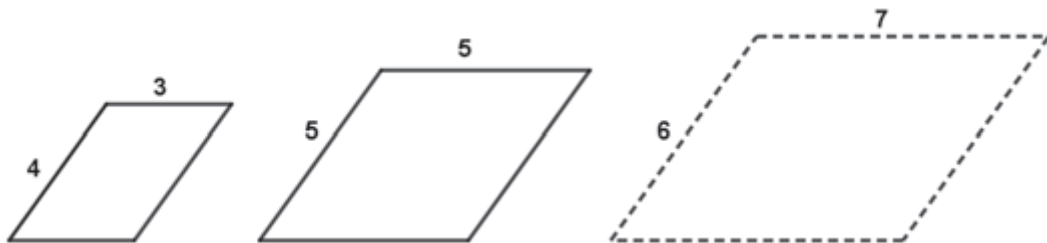


4. Για $x=0$ οι πλευρές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου είναι $2 \cdot 0 + 5 = 5$ και $3 \cdot 0 - 2 = -2$ (αυτή η τιμή απορρίπτεται)
 Για $x=1$ οι πλευρές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου είναι $2 \cdot 1 + 5 = 7$ και $3 \cdot 1 - 2 = 1$.
 Για $x=2$ οι πλευρές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου είναι $2 \cdot 2 + 5 = 9$ και $3 \cdot 2 - 2 = 4$.
 Για $x=3$ οι πλευρές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου είναι $2 \cdot 3 + 5 = 11$ και $3 \cdot 3 - 2 = 7$.
 5. Για $x=0$ οι πλευρές του παραλληλόγραμμου είναι: $2 \cdot 0 + 3 = 3$ και $0 + 4 = 4$.



Για $x=1$ οι πλευρές του παραλληλόγραμμου είναι: $2 \cdot 1 + 3 = 5$ και $1 + 4 = 5$ ρόμβος!)

Για $x=2$ οι πλευρές του παραλληλόγραμμου είναι: $2 \cdot 2 + 3 = 7$ και $2 + 4 = 6$ κ.ο.κ.



6. Για $x=0$ η πλευρά του ρόμβου είναι $3 \cdot 0 - 1 = -1$ (αυτή η τιμή απορρίπτεται)

Για $x=1$ η πλευρά του ρόμβου είναι $3 \cdot 1 - 1 = 2$

Για $x=2$ η πλευρά του ρόμβου είναι $3 \cdot 2 - 1 = 5$

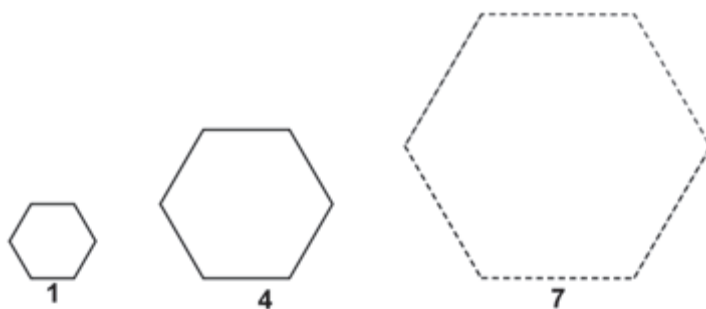
Για $x=3$ η πλευρά του ρόμβου είναι $3 \cdot 3 - 1 = 8$ κ.ο.κ.



7. Για $x=0$ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι $3 \cdot 0 + 1 = 1$

Για $x=1$ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι $3 \cdot 1 + 1 = 4$

Για $x=2$ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι $3 \cdot 2 + 1 = 7$ κ.ο.κ.



Εξάσκηση

- Κανονικό πολύγωνο πλευράς $2x+3$ έχει περίμετρο $16x+24$. Τι είδους κανονικό πολύγωνο είναι;
- Ποια είναι η πλευρά τετραγώνου με περίμετρο $10x + \frac{x}{2}$
- Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μία πλευρά $x+5$ έχει περίμετρο $6x+16$. Βρες την άλλη πλευρά του.
- Ισοσκελές τρίγωνο με βάση $2x$ έχει περίμετρο $6x+6$. Βρες την καθεμία από τις ίσες πλευρές του.
- Ισοσκελές τραπέζιο με τις δύο βάσεις του $2x+5$ και $3x+7$ έχει περίμετρο $15x+18$. Βρες την καθεμία από τις ίσες πλευρές του.

Από το κινητό μέχρι την πίτσα, όλα κρύβουν έναν μαθηματικό κανόνα.

Κρατημένος Αναστάσιος, Ξύδη Βηθλεέμ

Όσα περισσότερα άτομα τρώνε από μία pizza, τόσα λιγότερα κομμάτια θα φάει ο καθένας!

Όσα περισσότερα υλικά βάλεις σε μία κρέπα, τόσο πιο ακριβή θα είναι!

Όσα περισσότερα προϊόντα αγοράσεις, τόσο πιο πολύ θα αυξηθεί ο λογαριασμός!

Τυχαίο;;;

Μάλλον όχι! Σε όλα τα παραπάνω ένα μέγεθος-ποσό επηρεάζεται – εξαρτάται από ένα άλλο.

Όταν αλλάζει το ένα, αλλάζει και το άλλο (**συμμεταβολή**) — με έναν συγκεκριμένο τρόπο.

Αυτές οι «σχέσεις» λέγονται **συναρτήσεις**.

Η Μηχανή των Αριθμών...

Φαντάσου μια μηχανή:

Ρίχνεις μέσα έναν αριθμό **x** και η μηχανή σου δίνει έναν άλλο αριθμό **y**.

Για παράδειγμα:

Είσοδος (x)	1	2	3	4
Έξοδος (y)	3	5	7	9

πόσο αλλάζει το y κάθε φορά που το x αυξάνεται κατά 1;

Τι κάνει αυτή η μηχανή;

Δοκίμασε να ανακαλύψεις τον “κανόνα”!

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά το y μεγαλώνει κατά 2 και ξεκινάει από το 3, ή ότι το y είναι το διπλάσιο του x συν 1 κάθε φορά, επομένως ο κανόνας είναι:

$$y = 2x + 1$$

Αυτός είναι ο “μυστικός μηχανισμός” της συνάρτησης!

Διαφορετικά, μπορείς να σκεφτείς το «μοτίβο»

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

...

$$y = 2 \cdot x + 1$$

Άρα προκύπτει ο κανόνας που συνδέει το **x** με το **y**, ο οποίος στο παράδειγμά μας είναι:

$$y = 2 \cdot x + 1$$

Η παραπάνω σχέση – τύπος είναι ένας μαθηματικός τρόπος να περιγράψεις τη **συμμεταβολή** των δύο **ποσοτήτων** και μπορείς τώρα να υπολογίσεις τον αριθμό που θα πάρεις από την μηχανή αν του δώσεις οποιονδήποτε αριθμό σκεφτείς!

Τι είναι η συνάρτηση;

Είναι ένας **κανόνας** (ή μία **διαδικασία**) **αντιστοίχισης**:

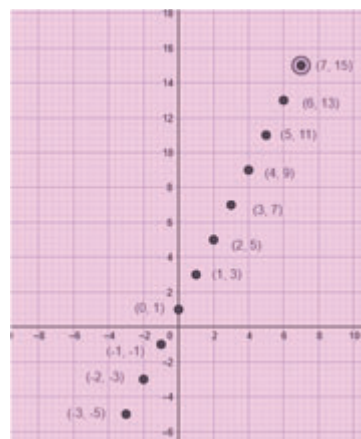
Σε κάθε τιμή μιας μεταβλητής (**x**) αντιστοιχεί **μία μόνο** τιμή μιας άλλης (**y**).

Αν από κάποια σχέση για το ίδιο **x** παίρνεις δύο διαφορετικά **y**, τότε η σχέση δεν είναι συνάρτηση

Σχεδίασε τη σχέση σου!

Με τον κανόνα **$y = 2 \cdot x + 1$** , συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Είσοδος (x)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Έξοδος (y)	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11



Πάρτε όλα τα ζεύγη των αριθμών (x, y) ως συντεταγμένες σημείων σε ένα σύστημα αξόνων.

Παρατήρησε τώρα ότι τα σημεία έχουν μία συγκεκριμένη δομή, μία σχέση ή ακόμα πιο συγκεκριμένα αν τα ενώσεις θα βρίσκονται όλα πάνω σε μία ευθεία.

Αν διευρύνουμε τον παραπάνω πίνακα τιμών (παράγοντας περισσότερα σημεία) και κάνουμε ξανά την προηγούμενη διαδικασία, τότε θα έχουμε τις παρακάτω εικόνες:



Εύκολα μπορείς να παρατηρήσεις ότι όσο πληθαίνουν τα ζεύγη αριθμών που δημιουργούνται από αυτό τον κανόνα, τα σημεία σχηματίζουν μία ευθεία γραμμή. Η ευθεία αυτή είναι αναπαράσταση της αρχικής μας συνάρτησης και λέγεται **γραφική παράσταση της συνάρτησης**.

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x , λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) .

Όπως βλέπουμε, μια συνάρτηση μπορούμε να την περιγράψουμε με λόγια, με πίνακα, με τύπο ή με γράφημα. Όλες αυτές οι αναπαραστάσεις δείχνουν την ίδια σχέση μεταξύ των μεταβλητών x, y .

Ένα παιχνίδι για εξάσκηση...

1. Το κινητό χάνει σταθερά το 8% της μπαταρίας του ανά 1 ώρα συνεχούς χρήσης. Εάν ξεκινήσεις τη μέρα σου με πλήρη φόρτιση στο 100% πόση μπαταρία θα έχεις:

- Εάν στείλεις μηνύματα για 2 ώρες συνεχόμενα;
- Εάν πάρεις τηλέφωνο και μιλήσεις μισή ώρα;
- Εάν παίζεις το αγαπημένο σου παιχνίδι για 3 ώρες;
- Εάν αποφασίσεις και να μιλήσεις στο τηλέφωνο για μισή ώρα και μετά να παίζεις το παιχνίδι σου για 3 ώρες;



Τι ποσοστό μπαταρίας θα έχεις σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις ξεχωριστά;

✓ Μπορείς να βγάλεις ένα γενικό κανόνα που να σε βοηθάει να βρίσκεις το ποσοστό της μπαταρίας μετά από κάθε ώρα συνεχούς χρήσης; αν ναι, ποιος είναι αυτός;

2. Δίνεται το μοτίβο:

x	1	2	3	4				
y	4	8	16	32				

Μπορείτε να προβλέψετε τα υπόλοιπα κενά;

3. Ένας ορειβατικός σύλλογος χρεώνει τον εξοπλισμό του με αρχική χρέωση 15ευρώ και έξτρα 2ευρώ ανά ώρα ανά άτομο.

Οι πιθανές διαδρομές μονοπατιών είναι:

- **Μονοπάτι 1:** Διάρκεια 3 ώρες (Εύκολο)
- **Μονοπάτι 2:** Διάρκεια 4 ώρες (Μέτρια Δυσκολία)
- **Μονοπάτι 3:** Διάρκεια 5 ώρες (Δύσκολο)
- **Μονοπάτι 4:** Διάρκεια 6,5 ώρες (Extreme)

Θέλετε με την ορειβατική ομάδα του σχολείου σας να ακολουθήσετε το μονοπάτι 1.

i. Πόσο θα είναι το κόστος της διαδρομής του μονοπατιού για το κάθε άτομο;

ii. Εάν αποφασίσετε ότι κάθε μαθητής θέλει να διαθέσει έως 57ευρώ ποια μονοπάτια θα μπορούσατε να ακολουθήσετε;

iii. Μπορείς να αναπαραστήσεις τη σχέση γραφικά;



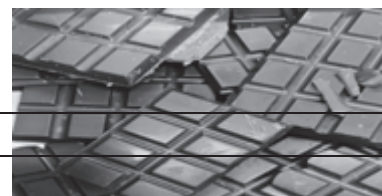
4. Μια μηχανή ενός εργοστασίου σοκολάτας λειτουργεί με τον κάτωθι μηχανισμό.

5	10	15	20	25	30
15	30	45	60	75	90



Μπορείς να μαντέψεις τον μηχανισμό – κανόνα;

0		3	4	
	3	6		
-7	45		-17	
		-33	18	



Μπορείς να κατασκευάσεις με τον ίδιο μηχανισμό (κανόνα) και τις άλλες μηχανές ώστε να παραχθούν σωστά και στη ώρα τους όλα τα προϊόντα;

5. Το ηφαίστειο της Αίτνας

Το ηφαίστειο της Αίτνας βρίσκεται στις Ανατολικές Ακτές της Σικελίας και είναι το μεγαλύτερο και ψηλότερο ενεργό ηφαίστειο στην Ευρώπη.

Η ονομασία Αίτνα πιθανώς προέρχεται από την ελληνική λέξη αίθω, που σημαίνει «καίγομαι».

Στην ελληνική μυθολογία, ο Αίολος είχε φυλακίσει τους ανέμους στις σπηλιές κάτω από την Αίτνα.

Ο Γίγαντας Εγκέλαδος καταπλακώθηκε από το όρος Αίτνα, σύμφωνα με τον ποιητή Αισχύλο, και ήταν η αιτία των ηφαιστειακών εκρήξεων.

Στη ρωμαϊκή μυθολογία, ο Βούλκαν, θεός της φωτιάς, είχε το εργαστήριό του κάτω από την Αίτνα. Η ημερομηνία τελευταίας έκρηξης ήταν 02/06/2025.

Οι Γεωλόγοι επιστήμονες θέλοντας να ερευνήσουν σε βάθος την ηφαιστειακή δραστηριότητα παρατήρησαν τα εξής:

- Το ηφαίστειο εκτοξεύει λάβα σε συγκεκριμένο ύψος ανάλογα με την ενέργεια που έχουν τα φουσαλίδια των αερίων στο μάγμα.
- Όταν η ενέργεια είναι μηδενική το μάγμα φτάνει σε ύψος 20 μέτρων.
- Για κάθε μονάδα ενέργειας το ύψος λάβας αυξάνεται κατά 7 μέτρα.

Βάσει των παραπάνω, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

- i. Σε τι ύψος θα φτάσει η λάβα του εάν η ενέργεια είναι 4 μονάδες;
- ii. Τι ενέργεια χρειάζεται ώστε η λάβα να φτάσει σε ύψος 76 μέτρων;
- iii. Μπορείτε να βρείτε τη σχέση ενέργειας και ύψους λάβας ώστε να μπορούν οι επιστήμονες σε κάθε περίπτωση να γνωρίζουν καλύτερα τα δεδομένα των καθημερινών εκρήξεων;



Β' Τάξη

Εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα θετικού τετράγωνου ακεραίου. Τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού.

Ανδρέας Τριανταφύλλου

Τετράγωνοι αριθμοί και είδη τετραπλεύρων

Ένα ορθογώνιο είναι ένα τετράπλευρο με 4 ορθές γωνίες.

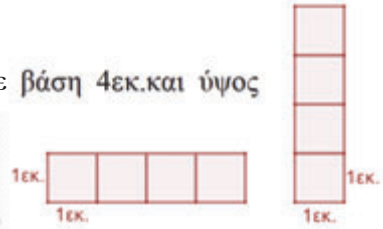
Ένα τετράγωνο έχει επίσης 4 ορθές γωνίες. Ένα παραλληλόγραμμο με βάση 4εκ. και ύψος 1εκ. είναι ίδιο με ένα ορθογώνιο με βάση 1εκ. και ύψος 4εκ.

Αυτά τα δύο ορθογώνια είναι ίσα.



Είναι κάθε τετράγωνο παραλληλόγραμμο;

Είναι κάθε ορθογώνιο τετράγωνο;



Εξηγώ:

Χρησιμοποιήστε τετράγωνα πλακάκια με πλευρά 1εκ., για να φτιάξετε τόσα διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδόν 4τ.εκ., 6τ.εκ., 8τ.εκ., 9τ.εκ., 12τ.εκ., 16τ.εκ., αντίστοιχα.

Σχεδιάστε τα ορθογώνια σε χαρτί πλέγματος, με τετραγωνάκια πλευράς 1εκ..

- ▶ Για πόσες από τις παραπάνω περιοχές μπορέσατε να φτιάξετε ένα τετράγωνο;
- ▶ Ποιο είναι το μήκος της πλευράς κάθε τετραγώνου που φτιάξατε;
- ▶ Πώς σχετίζεται το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με το εμβαδόν του;



- Βρείτε δύο περιοχές μεγαλύτερες από 14τ.εκ., που θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τετράγωνα πλακάκια πλευράς 1εκ. για να φτιάξετε ένα τετράγωνο.

- Πώς ξέρετε ότι θα μπορούσατε να φτιάξετε ένα τετράγωνο για καθεμία από αυτές τις περιοχές;



Εξηγώ:

Όταν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με τον εαυτό του, λέμε ότι υψώνουμε τον αριθμό στο τετράγωνο. Για παράδειγμα: Το 3 υψωμένο στο τετράγωνο είναι $3 \cdot 3 = 9$.

Γράφουμε: $3 \cdot 3 = 3^2$, λοιπόν $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$. Λέμε: Το τετράγωνο του 3 ή το 3 στο τετράγωνο είναι 9/.

Το 9 είναι ένας τετράγωνος αριθμός ή ένα τέλειο τετράγωνο.

Ένας τρόπος για να ελέγξετε αν ένας αριθμός είναι τετράγωνος αριθμός είναι αν μπορείτε να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με τον τετράγωνο αριθμό.

Το διπλανό σχήμα είναι ένα τετράγωνο με εμβαδόν 144τ.εκ.

Βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου:

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E = x^2$. Άρα πρέπει $x^2 = 144$.

Δηλαδή, πρέπει να βρούμε έναν αριθμό x , του οποίου το τετράγωνο να είναι 144.

Μήπως είναι $x = 10$;

Τότε όμως $x^2 = 10^2 = 100$ (θέλει πιο πολύ).

Μήπως είναι $x = 20$;

Τότε όμως $x^2 = 20^2 = 400$ (θέλει πιο λίγο).

Μήπως είναι $x = 15$;

Τότε όμως $x^2 = 15^2 = 225$ (θέλει λίγο πιο λίγο).

Μήπως είναι $x = 11$;

Τότε όμως $x^2 = 11^2 = 121$ (θέλει πιο πολύ).

Μήπως είναι $x = 12$;

—Εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα θετικού τετράγωνου ακραίου. Τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού—

Τότε $x^2 = 12^2 = 144$ (αυτό είναι!).

Έτσι, το σχήμα έχει μήκος πλευράς 12εκ.

Ο θετικός αριθμός 12, του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με 144, ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα του 144** και συμβολίζεται με $\sqrt{144}$. Δηλαδή $\sqrt{144} = 12$.

Σχόλια:

- Ρίζα αρνητικού αριθμού **δεν ορίζεται**, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνο του να είναι αρνητικός αριθμός.

Για παράδειγμα η $\sqrt{-16}$ δεν έχει νόημα, γιατί κανένας αριθμός όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα -16.

- Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας έχουμε:

○ Αν $\sqrt{a} = \chi$, όπου $a \geq 0$, τότε $\chi \geq 0$ και $\chi^2 = a$.

○ Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt{a})^2 = a$.

- Σύμφωνα με τα παραπάνω:

(α) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{25} = -5$, αν και $(-5)^2 = 25$, καθώς $-5 < 0$.

(β) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{(-5)^2} = -5$, καθώς $-5 < 0$.

Το σωστό είναι $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$,

Εκτιμώντας κατά προσέγγιση την τετραγωνική ρίζα

Γνωρίζουμε ότι μια τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού που μας δόθηκε είναι ένας αριθμός που, όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, προκύπτει ο δοσμένος αριθμός. Για παράδειγμα, $\sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 3} = 3$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού a είναι το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με αυτόν τον αριθμό. Για παράδειγμα, $\sqrt{16} = 4$.

Δραστηριότητα: Σχεδιάστε ένα αντίγραφο της παρακάτω αριθμογραμμής στο τετράδιό σας.



✓ Εδώ είναι ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, π.χ. $\sqrt{12}$

- Το 16 είναι ο πλησιέστερος στο 12 τετράγωνος αριθμός, αλλά μεγαλύτερος από το 12.

Έτσι σε τετραγωνισμένο χαρτί σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν 16. Προφανώς το μήκος της πλευράς του είναι:

$\sqrt{16} = 4$ μονάδες μήκους.

- Το 9 είναι ο πλησιέστερος στο 12 τετράγωνος αριθμός, αλλά μικρότερος από το 12.

Έτσι σε τετραγωνισμένο χαρτί σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν 9.

Προφανώς το μήκος της πλευράς του είναι: $\sqrt{9} = 3$ μονάδες μήκους.

Σχεδιάζουμε σε τετραγωνισμένο χαρτί τα τετράγωνα ώστε να επικαλύπτονται.

Ένα τετράγωνο με εμβαδόν 12 βρίσκεται ανάμεσα σε αυτά τα δύο τετράγωνα.

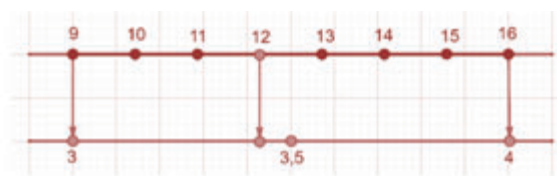
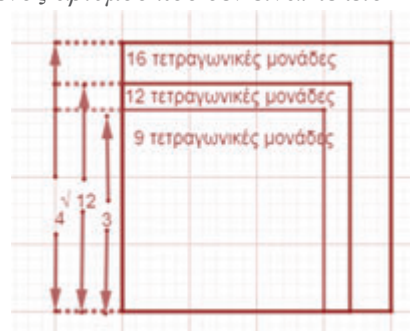
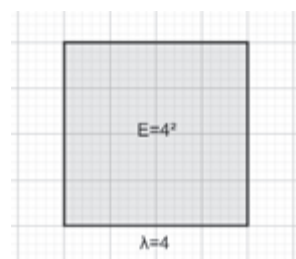
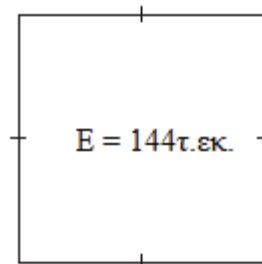
Το μήκος της πλευράς του είναι $\sqrt{12}$.

Το 12 είναι μεταξύ 9 και 16, αλλά πιο κοντά στο 9.

Αρα, το $\sqrt{12}$ είναι

μεταξύ $\sqrt{9}$ και $\sqrt{16}$,

αλλά πιο κοντά στο



—Εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα θετικού τετράγωνου ακραίου. Τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού—

$\sqrt{9}$. Άρα, το $\sqrt{12}$ είναι μεταξύ 3 και 4, αλλά πιο κοντά στο 3. Η εκτίμηση του $\sqrt{12}$ είναι 3,4 με ένα δεκαδικό ψηφίο.

Περίμετρος ενός πολυγώνου είναι η απόσταση γύρω από το σχήμα του.

Άρα, $\Pi = 12\text{εκ.} + 12\text{εκ.} + 12\text{εκ.} + 12\text{εκ.} = 48\text{εκ.}$

Οπότε η περίμετρος του παραπάνω τετραγώνου είναι 48εκ.



Το 1 είναι τέλειο τετράγωνο;
Εξηγώ:.....

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζετε την περίμετρο ενός τετραγώνου.
π.χ. 24μ.
Πώς μπορείτε να βρείτε το εμβαδόν του;



■ Οι παρακάτω τρόποι βοηθούν να διαπιστώσουμε εάν ένας αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο.

Αν μπορούμε να βρούμε μια τέλεια διαίρεση για έναν αριθμό έτσι ώστε το πηλίκο να είναι ίσο με τον διαιρέτη, ο αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο.

Για παράδειγμα, $25 : 5 = 5$, άρα ο 25 είναι τέλειο τετράγωνο.

Διαιρέτέος διαιρέτης πηλίκο

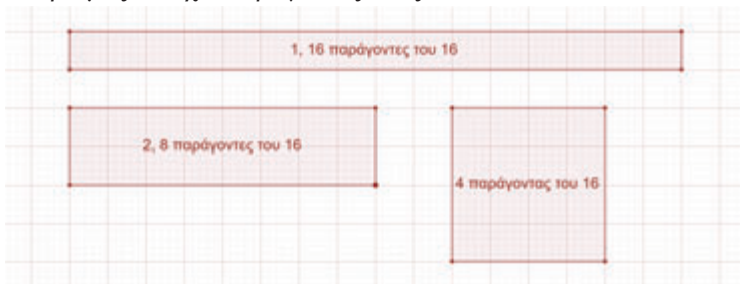
- Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση ενός αριθμού.

Οι παράγοντες ενός αριθμού εμφανίζονται σε ζεύγη, που υποδηλώνουν τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου.

Για παράδειγμα, το 1, το 2, το 3 και το 6 είναι παράγοντες του 6.

Ποιοι είναι οι παράγοντες του 10;

Ο αριθμός 16 έχει παράγοντες τους 1, 2, 4, 8 και 16



Ένας παράγοντας που εμφανίζεται δύο φορές γράφεται, μόνο μία φορά στη λίστα των παραγόντων.

Όταν ένας αριθμός έχει περιττό αριθμό παραγόντων, είναι τέλειο τετράγωνο.

Όταν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με τον εαυτό του, δημιουργούμε έναν αριθμό, που είναι τέλειο τετράγωνο. Ο τετραγωνισμός και η εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού, είναι αντίστροφες πράξεις. Δηλαδή, η μία αναιρεί την άλλη.

$$4 \cdot 4 = 16, \text{ έτσι } 4^2 = 16$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{4^2} = 4$$



- α) Το τετράγωνο του 3 είναι:
 $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
β) Το τετράγωνο του 13 είναι:
 $13^2 = 13 \cdot 13 = 169$

- α) Η τετραγωνική ρίζα του 9 είναι:
 $\sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{3^2} = 3$
β) Η τετραγωνική ρίζα του 169 είναι:
 $\sqrt{169} = \sqrt{13 \cdot 13} = \sqrt{13^2} = 13$



■ Οι παράγοντες κάθε αριθμού παρουσιάζονται τοποθετημένοι σε αύξουσα σειρά.

Ποιοι αριθμοί είναι τέλεια τετράγωνα; Πως το ξέρετε;

α) 160: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160

—Εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα θετικού τετράγωνου ακεραίου. Τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού—

β) 196: 1, 2, 4, 14, 49, 98, 196

γ) 324: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 324

δ) 500: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500

■ Προχωρήστε το παραπέρα:

A) Βρείτε i) 2^2 ii) 3^2 iii) 4^2 iv) 5^2 v) 6^2 vi) 7^2 vii) 8^2

B) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το μέρος A) βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα.

i) $2^2 + 3^2$

ii) $3^2 + 4^2$

iii) $2^2 + 4^2$

iv) $3^2 + 5^2$

v) $5^2 + 6^2$

vi) $6^2 + 7^2$

vii) $6^2 + 8^2$

viii) $7^2 + 8^2$

Γ) Ποιο από τα αθροίσματα του μέρους B) είναι τέλειο τετράγωνο;

■ Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{a}$, a , a^2 , στις 2 παρακάτω περιπτώσεις

(α) Αν $a > 1$ π.χ. $a = 4$, $a = 9$, $a = 16$, $a = 25$, ...

(β) Αν $a < 1$ π.χ. $a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{9}$, $a = \frac{1}{16}$, $a = \frac{1}{25}$, ...

Τι παρατηρείτε;

■ Βρείτε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες: (α) $\sqrt{64}$ (β) $\sqrt{0,64}$ (γ) $\sqrt{0,0064}$

Λύση: (α) Γνωρίζουμε ότι $8^2 = 64$. Άρα $\sqrt{64} = 8$.

(β) Γνωρίζουμε ότι $(0,8)^2 = 0,64$. Άρα $\sqrt{0,64} = 0,8$.

(γ) Γνωρίζουμε ότι $(0,08)^2 = 0,0064$. Άρα $\sqrt{0,0064} = 0,08$.

■ Βρείτε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{1}$,

$\sqrt{64}$,

$\sqrt{144}$,

$\sqrt{81}$,

$\sqrt{100}$,

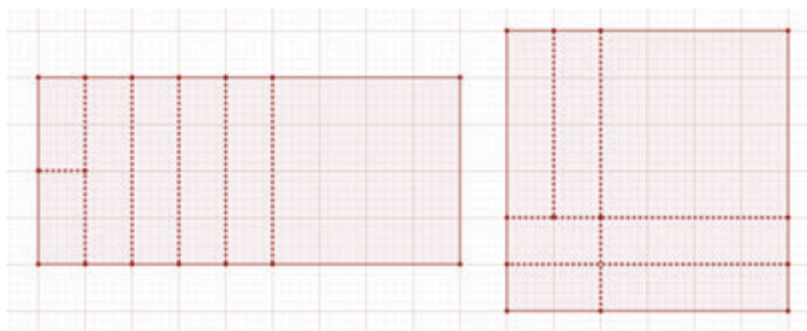
$\sqrt{225}$,

$\sqrt{625}$.

■ Ο Νικόλας έχει ένα κομμάτι έγχρωμο χαρτόνι διαστάσεων 45εκ. επί 20εκ. Ο καθηγητής του των καλλιτεχνικών, τον παροτρύνει να το κόψει σε ορθογώνια κομμάτια και στη συνέχεια να αναδιατάξει αυτά τα κομμάτια ώστε να σχηματίσουν ένα τετράγωνο ίσου εμβαδού με το αρχικό.

α) Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;

β) Ποιες και πόσες είναι οι λιγότερες κοπές, που ο Νικόλας θα μπορούσε να κάνει;



■ Ποιοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 100 και του 200 είναι τέλεια τετράγωνα;

Εξηγήστε πώς το ξέρετε.

Δραστηριότητες

■ Ένας κήπος έχει επιφάνεια 400τ.μ. Ο κήπος χωρίζεται σε 16 ίσα τετράγωνα παρτέρια.

Σχεδιάστε ένα διάγραμμα του κήπου. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς κάθε παρτεριού;

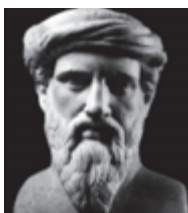
■ Είμαι ένας αριθμός, τέλειο τετράγωνο. Το άθροισμα των ψηφίων μου είναι 9. Ποιος αριθμός μπορεί να είμαι;

■ Η ψηφιακή ρίζα ενός αριθμού είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των ψηφίων του αριθμού μέχρι το αποτέλεσμα να είναι μονοψήφιος αριθμός. Για παράδειγμα, η ψηφιακή ρίζα του 158 είναι 5, αφού έχουμε $1+5+8=14$ και $1+4=5$

α) Βρείτε τις ψηφιακές ρίζες των πρώτων 10 αριθμών που είναι τέλεια τετράγωνα. Τι παρατηρείτε;

β) Τι μπορείτε να πείτε για τη ψηφιακή ρίζα ενός αριθμού που είναι τέλειο τετράγωνο;

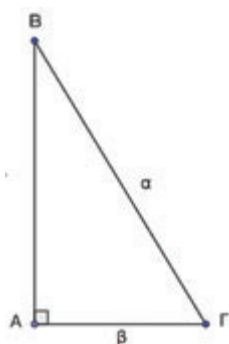
γ) Χρησιμοποιήστε τα συμπεράσματά σας στο β μέρος, για να βρείτε: ποιός από τους παρακάτω αριθμούς μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο; i) 440 ii) 2719 iii) 3008 iv) 4225 v) 634
(Η ψηφιακή ρίζα ενός τετραγωνικού αριθμού είναι είτε 1, 4, 7 ή 9. Άρα γ) 2719, 4225, 634)



Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι ίσως το μόνο που απομένει στη μνήμη των παιδιών από την επαφή τους με τα Μαθηματικά του γυμνασίου. Μέσα από την παρουσίαση που ακολουθεί θα καταλάβουμε τη χρησιμότητά του.

«ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.».

Πυθαγόρειο Θεώρημα: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει ότι: Το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ή $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$



Το Πυθαγόρειο Θεώρημα αρχικά μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου αν είναι γνωστά τα μήκη των άλλων δύο πλευρών του.

Παράδειγμα 1: Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ ($\hat{K} = 90^\circ$) ισχύει ότι ΚΛ = 6cm και ΚΜ = 8cm . Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΜΛ.

Λύση: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο τοποθετώντας κατάλληλα τα γράμματα με βάση την εκφώνηση.

Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΛΜ

$$M\Lambda^2 = K\Lambda^2 + K\Gamma^2$$

Αντικαθιστώντας έχουμε : $M\Lambda^2 = 8^2 + 6^2$, $M\Lambda^2 = 64 + 36$, $M\Lambda^2 = 100$
άρα $M\Lambda = 10\text{cm}$

Παράδειγμα 2: Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) ισχύει ότι ΕΖ = 15m και ΔΖ = 12cm . Να υπολογίσετε το μήκος της

πλευράς ΔΕ.

Λύση: Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΔΕΖ

$$E\Delta^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2$$

Αντικαθιστώντας $15^2 = \Delta E^2 + 12^2$, $225 = \Delta E^2 + 144$

Άρα $\Delta E^2 = 225 - 144$, $\Delta E^2 = 81$, $\Delta E = 9$

Αντίστροφο Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά με το μεγαλύτερο μήκος δηλαδή με ορθή γωνία αυτή που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη σε μήκος πλευρά του.

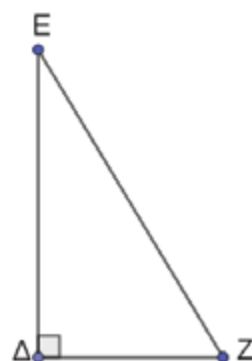
Σχόλιο: Με λίγα λόγια το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος μας επιτρέπει να εξετάσουμε αν ένα τρίγωνο με δοσμένα μήκη πλευρών είναι ή όχι ορθογώνιο.

Παράδειγμα 3: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 10cm , ΒΓ = 20cm και ΑΓ = 15cm

Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο .

Λύση: Υπολογίζουμε το τετράγωνο της πλευράς με το μεγαλύτερο μήκος και το συγκρίνουμε με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο

- $B\Gamma^2 = 20^2 = 400$



• $AB^2 + AG^2 = 10^2 + 15^2 = 100 + 225 = 325$

Αφού $AB^2 + AG^2 \neq BG^2$ το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο

ΘΕΜΑ 1: Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 7m$

, $B\Gamma = 25m$ και $B\Delta$ η διάμεσος του .

(α) Να υπολογίσετε το μήκος του $\Gamma\Delta$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του $B\Delta$

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma\Delta$

ΛΥΣΗ: (α) Η διάμεσος $B\Delta$ χωρίζει την πλευρά $A\Gamma$ σε δύο ίσα τμήματα έστω μήκους x το καθένα ,οπότε $A\Gamma = 2x$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \text{ άρα } 25^2 = 7^2 + A\Gamma^2, 625 = 49 + A\Gamma^2$$

Οπότε $A\Gamma^2 = 576$ άρα $A\Gamma = 24$ επομένως $\Gamma\Delta = 12m$.

(β) Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$

$$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 \text{ ή } B\Delta^2 = 7^2 + 12^2, B\Delta^2 = 49 + 144, B\Delta^2 = 183 \text{ άρα } B\Delta = \sqrt{183}$$

(γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ μπορεί να υπολογιστεί με 2 τρόπους

1^{ος} Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ θεωρούμε βάση την $\Gamma\Delta$ και το ύψος του το φέρνουμε από την κορυφή B

$$\text{και είναι το } BA \text{ Άρα } E = \frac{\Gamma\Delta \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42m^2.$$

2^{ος} Να βρούμε τα εμβαδά των δύο ορθογωνίων τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$,οπότε το ζητούμενο

$$\text{εμβαδόν θα είναι η διαφορά τους. } E_{AB\Gamma} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{24 \cdot 7}{2} = 84m^2 \text{ ενώ } E_{AB\Delta} = \frac{AB \cdot A\Delta}{2} = \frac{7 \cdot 12}{2} = 42m^2$$

Άρα το εμβαδόν του $B\Delta\Gamma$ θα είναι $84m^2 - 42m^2 = 42m^2$

ΘΕΜΑ 2: Με βάση τα στοιχεία που είναι σημειωμένα στο παρακάτω τρίγωνο, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ: Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο

$AB\Delta$

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 \text{ δηλαδή } 17^2 = 15^2 + B\Delta^2 \text{ Έχουμε}$$

$$289 - 225 = B\Delta^2 \text{ άρα } B\Delta^2 = 64 \text{ Επομένως } B\Delta = 8$$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ δηλαδή } 25^2 = 15^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$\text{Έχουμε } 625 - 225 = \Delta\Gamma^2 \text{ άρα } \Delta\Gamma^2 = 400$$

$$\text{Επομένως } \Delta\Gamma = 20 \text{ Άρα για το αρχικό σχήμα πλέον}$$

γνωρίζουμε τα παρακάτω: Το εμβαδόν του τριγώνου

$$AB\Gamma \text{ είναι } E = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} = \frac{27 \cdot 15}{2} = 202,5m^2$$

ΘΕΜΑ 3: Η περίμετρος ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 96m . Η πλευρά του AB είναι ίση με το 7πλάσιο ενός

αριθμού μειωμένου κατά 2. Η πλευρά του $B\Gamma$ είναι ίση με το 6πλάσιο του ίδιου αριθμού μειωμένο κατά 4 ,ενώ η πλευρά του $A\Gamma$ είναι ίση με το 4πλάσιο του προηγούμενου αριθμού .

(α) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου

(β) Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του

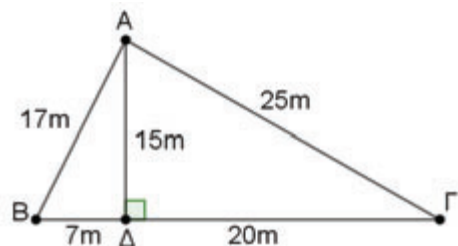
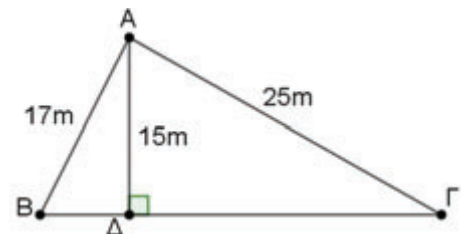
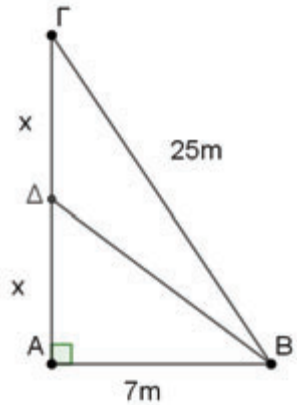
(δ) Να βρείτε το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην πλευρά AB

ΛΥΣΗ: (α) Αν συμβολίσουμε με x το αριθμό που αναφέρετε στις παραπάνω περιγραφές τότε

$$AB = 7x - 2, B\Gamma = 6x - 4 \text{ και } A\Gamma = 4x$$

$$\text{Ισχύει } AB + B\Gamma + A\Gamma = 96m \text{ άρα } 7x - 2 + 6x - 4 + 4x = 96 \text{ ή } 17x = 102 \text{ άρα } x = 6m$$

$$\text{Επομένως } AB = 7 \cdot 6 - 2 = 40m, B\Gamma = 6 \cdot 6 - 4 = 32m \text{ και } A\Gamma = 4 \cdot 6 = 24m$$



(β) Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου είναι $AB = 40m$, $B\Gamma = 32m$ και $AB = 24m$

$$AB^2 = 40^2 = 1600 \quad \text{και} \quad AB^2 + B\Gamma^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600$$

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την AB και ορθή γωνία την Γ

(γ) Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$E = \frac{a \cdot \gamma}{2} = \frac{B\Gamma \cdot A\Gamma}{2} = \frac{32 \cdot 24}{2} = 384m^2$$

(δ) Φέρνουμε το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά AB (υποτείνουσα)

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής $E = \frac{AB \cdot A\Delta}{2}$. Επειδή από το προηγούμενο ερώτημα το

εμβαδόν είναι γνωστό, αντικαθιστούμε και έχουμε $384 = \frac{40 \cdot A\Delta}{2}$ άρα $40 \cdot A\Delta = 768$ Οπότε $A\Delta = \frac{768}{40}$ ή

$$A\Delta = 19,2m.$$

ΘΕΜΑ 4: Έστω $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο με μήκος μικρής βάσης $AB = 6cm$, μήκος βάσης μεγάλης βάσης $\Gamma\Delta = 12cm$ ενώ η περίμετρός του είναι $28cm$.

Να βρείτε το εμβαδόν του τραpezίου

ΛΥΣΗ: Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο η μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες και οι γωνίες που είναι προσκείμενες σε κάθε βάση του είναι ίσες. Φέρνουμε τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B . Τα ύψη του τραpezίου είναι ίσα οπότε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα ενώ το $ABZE$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Με βάση τα δεδομένα της άσκησης σημειώνουμε πάνω στο σχήμα τι ισχύει. Άρα $\Gamma\Delta = 12$ ή $x + 6 + x = 12$ άρα $2x = 6$ οπότε $x = 3$. Η περίμετρος του τριγώνου είναι $28cm$ και επειδή $AB = 6$, $\Gamma\Delta = 12$ άρα $A\Delta + B\Gamma = 10$ και αφού είναι ίσες η καθεμία θα είναι $5cm$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta E$ ή στο τρίγωνο $B\Gamma Z$.

$$B\Gamma^2 = Z\Gamma^2 + BZ^2 \quad \text{ή} \quad 5^2 = 3^2 + BZ^2 \quad \text{ή} \quad 25 - 9 = BZ^2 \quad \text{άρα} \quad BZ^2 = 16 \quad \text{δηλαδή} \quad BZ = 4cm$$

$$\text{Το εμβαδόν του τραpezίου είναι} \quad E = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot BZ \quad \text{άρα} \quad E = \frac{6 + 12}{2} \cdot 4 = 36cm^2.$$

ΘΕΜΑ 5: Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο το ύψος του έχει μήκος $2\sqrt{3}cm$

(α) Να βρεθεί το εμβαδόν του.

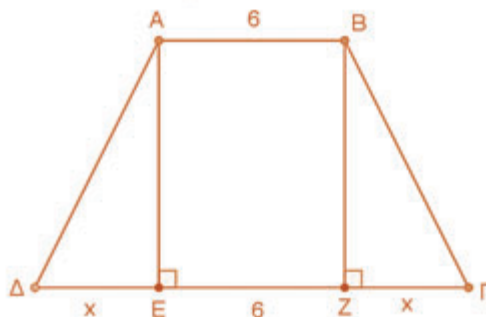
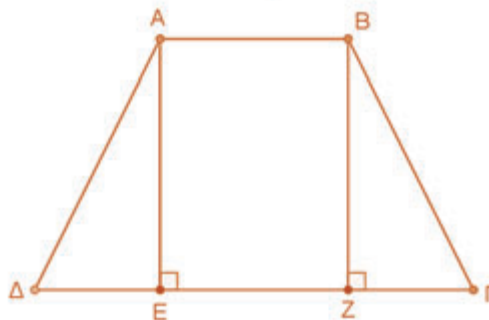
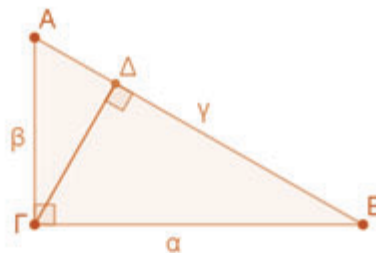
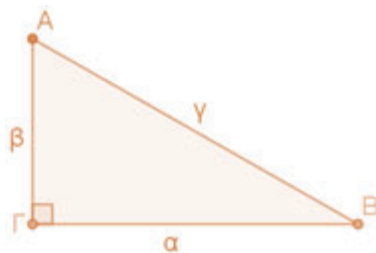
(β) να βρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου οι το μήκος είναι τριπλάσιο από το πλάτος του και έχει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο του εμβαδού του ισοπλεύρου τριγώνου.

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

ΛΥΣΗ: Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο τα ύψη του είναι ίσα και κάθε ύψος του είναι διάμεσος και διχοτόμος.

Αν συμβολίσουμε με x το μήκος της πλευρά του, τότε φέρνοντας ένα ύψος του, το AH τότε

$$BH = H\Gamma = \frac{x}{2}. \quad \text{Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο} \quad ABH.$$



$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \text{ άρα } x^2 = (2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \text{ ή } x^2 = 12 + \frac{x^2}{4}$$

$$\text{ή } 4x^2 = 48 + x^2 \text{ ή } 3x^2 = 48 \text{ ή } x^2 = 16 \text{ άρα } x = 4\text{cm}$$

Οπότε το εμβαδόν του θα είναι

$$E = \frac{BG \cdot AH}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{cm}^2$$

(β) Αν συμβολίσουμε y το πλάτος του τότε $4y$ είναι το πλάτος του και ισχύει

$$y \cdot 4y = (4\sqrt{3})^2 \text{ δηλαδή } 4y^2 = 48 \text{ ή } y^2 = 12 \text{ άρα}$$

$$y = \sqrt{12} \text{ ή } y = 2\sqrt{3}$$

Οπότε το πλάτος είναι $2\sqrt{3}\text{cm}$ και το μήκος του $8\sqrt{3}\text{cm}$

(γ) έστω a το μήκος της διαγωνίου.

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα και έχουμε

$$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + (8\sqrt{3})^2 \text{ ή } a^2 = 12 + 192$$

$$\text{άρα } a^2 = 204 \text{ οπότε } a = \sqrt{204} \text{ ή } a = 2\sqrt{51}$$

Μια (από τις πολλές) απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών a, β, γ .

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Στην συνέχεια σχεδιάζουμε ακόμα ένα ορθογώνιο τρίγωνο ίσο με το προηγούμενο και το τοποθετούμε όπως φαίνεται δίπλα. Οι πλευρές $B\Gamma$ και ΔE να είναι παράλληλες. Το $ABE\Delta$ είναι τραπέζιο. Αποτελείται από τρία ορθογώνια τρίγωνα.

Το $E\Gamma B$ είναι ορθογώνιο αφού στα τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\varphi + \omega = 90^\circ$. Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180° , ενώ σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι δύο οξείες του γωνίες έχουν άθροισμα 90°

Το εμβαδόν του τραπεζίου μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους

1ος τρόπος: $E_{\text{τραπ}} = \frac{(Βάση\text{ μεγάλη} + βάση\text{ μικρή})}{2} \cdot υψος$

$$E = \frac{(\beta + \gamma)}{2} \cdot (\beta + \gamma) \quad E = \frac{(\beta + \gamma) \cdot (\beta + \gamma)}{2}$$

$$E = \frac{\beta^2 + \beta\gamma + \beta\gamma + \gamma^2}{2} \quad \boxed{E = \frac{\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2}{2}} \quad (1)$$

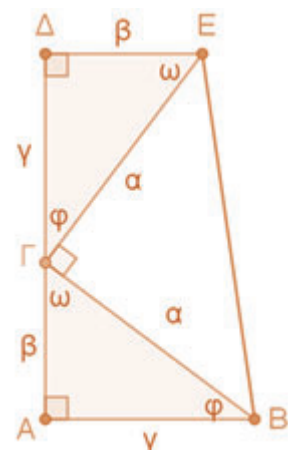
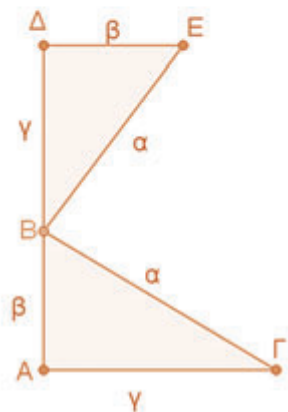
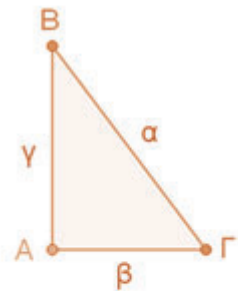
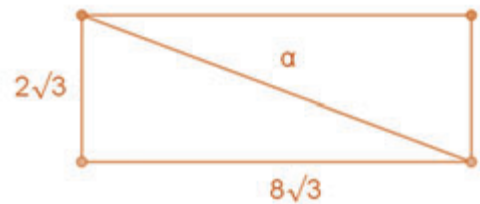
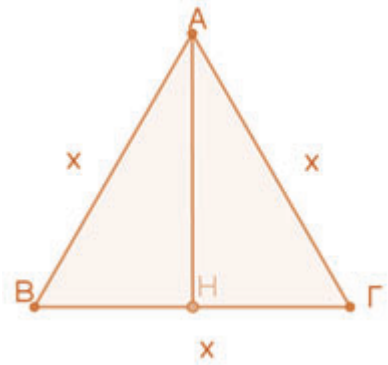
2ος τρόπος: Το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται και με το άθροισμα των εμβαδών των τριών ορθογωνίων τριγώνων.

$$E = \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{a \cdot a}{2} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{2\beta\gamma + a^2}{2}} \quad (2)$$

Όμως η σχέση (1) και η σχέση (2) είναι ίσες αφού εκφράζουν το

εμβαδόν του ίδιου σχήματος $\frac{\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2}{2} = \frac{2\beta\gamma + a^2}{2} \quad \text{ή}$

$$\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 = 2\beta\gamma + a^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\beta^2 + \gamma^2 = a^2}$$



ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x + 2 = 5x - 6$

γ) $2(x - 1) = -7$

β) $9x - 3(2x - 5) = 21$

δ) $8(x - 4) - 6(2 - x) = 2(6x - 1)$

2. Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

α) $\frac{x+4}{2} - 3\frac{2+x}{6} + x = \frac{x+11}{3}$

β) $\frac{4(x-5)+1}{2} + \frac{2x-5}{3} = \frac{2-x}{4}$

γ) $\frac{x-6}{2} - \frac{x-3}{3} - (x-1) = 2 - \frac{5x+18}{6}$

3. Να βρεθεί ένας αριθμός του οποίου το πενταπλάσιο αν ελαττωθεί κατά 5 ισούται με το τετραπλάσιό του αυξημένο κατά 9.

4. Δίνεται η παραμετρική εξίσωση $\lambda(1 - x) + 3 = 2x + 5 + \lambda$. Να αποδείξετε ότι:

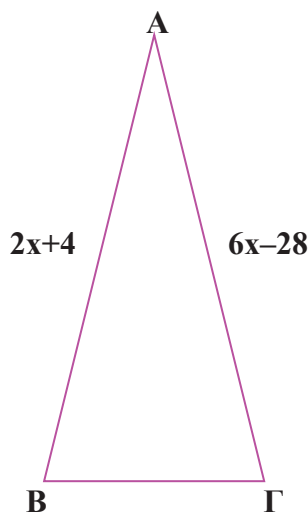
α) Αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει λύση $x = -\frac{2}{7}$, β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = -3$ τότε $\lambda = -\frac{4}{3}$

5. Να βρεθεί η τιμή του αριθμού λ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να είναι αδύνατες:

α) $(\lambda - 7)x = 14$, β) $12x + 3 = 7 - \lambda x$, γ) $6\lambda x - 24 = 24x + 2$

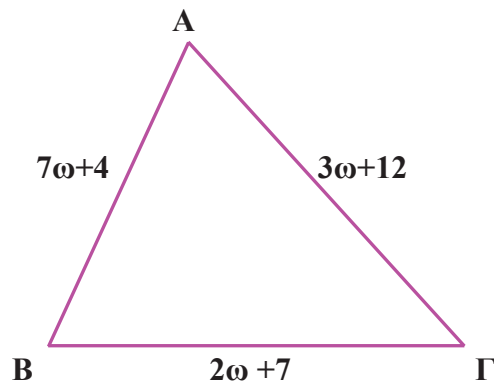
6. Τρεις φίλες έχουν συνολικά 320 ευρώ. Αν η πρώτη έχει τριπλάσια χρήματα από τη δεύτερη και η τρίτη έχει 40 ευρώ περισσότερα από την πρώτη να βρεθεί πόσα χρήματα έχει η καθεμία τους.

7. Το παρακάτω τρίγωνο είναι ισοσκελές. Να υπολογισθεί η τιμή του x :

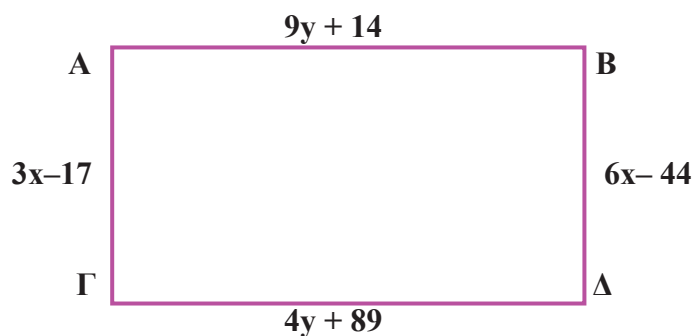


Επαναληπτικές Ασκήσεις

8. Αν γνωρίζουμε πως η περίμετρος του παρακάτω τριγώνου είναι 143 cm να υπολογισθεί το ω και το μήκος της κάθε πλευράς



9. Το παρακάτω σχήμα είναι ορθογώνιο. Να υπολογισθούν οι τιμές των μεταβλητών x , y .



10. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι η λύση της εξίσωσης:
 α) $-3x+3=21$ $x=-6$, β) $3x+2=7,5$ $x=1,5$, γ) $-3x+5=7x-5$ $x=1$
11. Ένας πατέρας είναι 36 χρόνια μεγαλύτερος από το γιό του. Πριν 7 χρόνια η ηλικία του πατέρα ήταν τετραπλάσια της ηλικίας του γιού. Ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες;

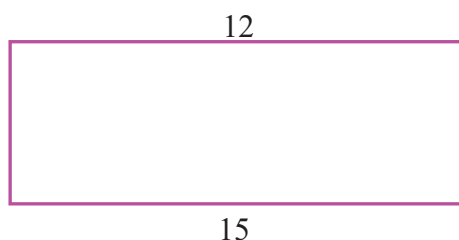
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

12. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας :

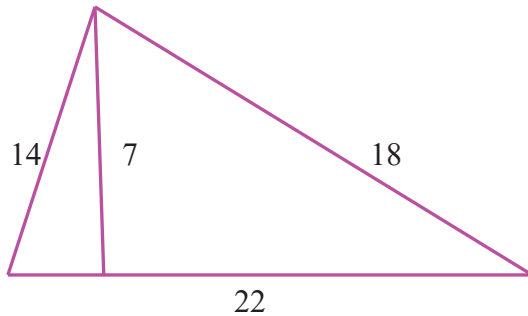
m^2	dm^2	cm^2	mm^2
237			
	450		
		7600	
			89060

13. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων:

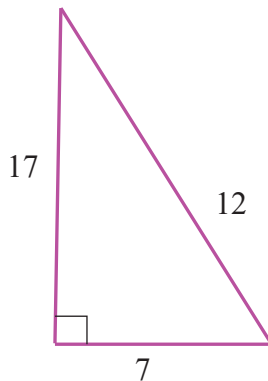
α)



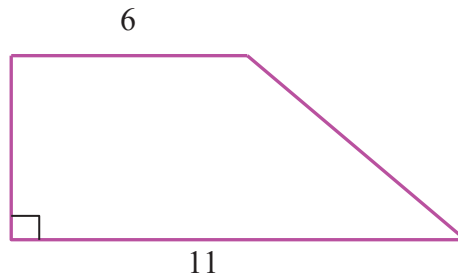
β)



γ)



δ)



14. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (με ΑΒ // ΓΔ) με εμβαδόν ίσο με 52 m^2 , ΑΒ=12 m και ύψος 4 m. Να υπολογισθεί η πλευρά ΓΔ.

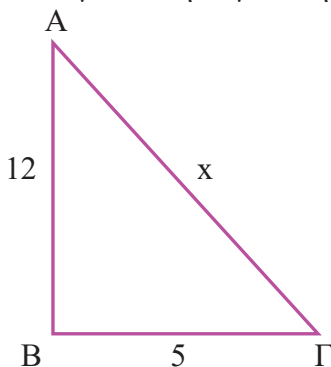
15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΒΓ= 7 cm και ύψη ΑΔ=4 cm και ΓΕ= 2cm. Να κάνετε πρώτα ένα σχήμα του τριγώνου και έπειτα να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

16. Οι βάσεις ενός τραπέζιου διαφέρουν κατά 4 cm και το ύψος του είναι 3 cm. Αν το εμβαδόν του ισούται με 24 cm^2 να υπολογισθούν οι βάσεις του.

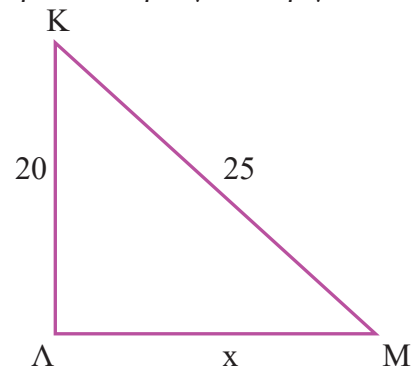
17. Σε ένα τρίγωνο η μία πλευρά είναι τετραπλάσια του αντίστοιχου ύψους της. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 18 cm^2 να υπολογισθεί η πλευρά αυτή και το αντίστοιχο ύψος της.

18. Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά x σε καθένα από τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα :

α)



β)



19. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΚΛΜ με πλευρές ΚΛ= 8 m , ΛΜ= 15m και ΚΜ=17m είναι ορθογώνιο.

20. Σε ένα **ισοσκελές τραπέζιο** η μεγάλη βάση είναι 22 cm και οι άλλες τρεις πλευρές είναι ίσες με 10 cm η καθεμία. Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπέζιου.

21. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ έχει εμβαδόν 192 cm^2 και βάση ΒΓ= 24 cm. Να υπολογίσετε το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του και την περίμετρό του.

22. Να υπολογίσετε τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι η υποτείνουσα είναι διπλάσια μιας κάθετης πλευράς και ότι η άλλη κάθετη πλευρά είναι 6.

Η γραμμική εξίσωση

Η εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ λέγεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x και y και παραμέτρους $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$.

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων

Όταν θέλουμε να βρούμε τις κοινές λύσεις δύο γραμμικών εξισώσεων, σχηματίζεται ένα 2×2 γραμμικό σύστημα, δηλαδή δύο γραμμικές εξισώσεις με δυο αγνώστους.

Πλήθος λύσεων 2×2 γραμμικού συστήματος εξισώσεων

Οι εξισώσεις της μορφής $y = ax + b$ παριστάνουν στο επίπεδο ευθείες.

Οπότε λύνοντας ένα σύστημα της μορφής $\begin{cases} y = a_1x + \beta_1 \\ y = a_2x + \beta_2 \end{cases}$ στην ουσία βρίσκουμε το σημείο τομής των ευθειών που οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν στο επίπεδο.

Αν οι ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο τομής, τότε το σύστημα έχει μία μοναδική λύση

Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα δεν έχει λύση (είναι αδύνατο), αφού οι ευθείες δεν τέμνονται.

Τέλος, αν οι ευθείες συμπίπτουν, το σύστημα έχει άπειρες στο πλήθος λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο των ευθειών αυτών.

Άσκηση 1^η

Να υπολογίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα $\begin{cases} a^2x + 2y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

να έχει άπειρες λύσεις.

(Απ. $a = -1, 1$)

Άσκηση 2^η

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα $\begin{cases} (\kappa - \lambda)x + \lambda^2y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

να έχει άπειρες λύσεις.

(Απ. $\lambda = -2$ και $\kappa = 1$)

ή $\lambda = 2$ και $\kappa = 5$)

Άσκηση 3^η

Να βρείτε τη μορφή των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$.

(Απ. $(\kappa, 4 - 2\kappa), \kappa \in \mathbb{R}$)

Άσκηση 4^η

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα $\begin{cases} 3x + \lambda y = \mu \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$

να είναι αδύνατο.

(Απ. $\lambda = 2$ και $\mu \neq 4$)

Άσκηση 5^η

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα $\begin{cases} 3x + \lambda y = \mu \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$

να έχει άπειρες λύσεις.

(Απ. $\lambda = 2$ και $\mu = 4$)

Άσκηση 6^η

Το σύστημα $\begin{cases} a_1x + \beta_1y = -10 \\ a_2x + \beta_2y = -5 \end{cases}$

είναι αόριστο και οι λύσεις του περιλαμβάνουν τα σημεία $(1, 2)$ και $(3, -4)$. Να βρείτε τις ελάχιστες ακέραιες τιμές που δύναται να λάβουν οι παράμετροι του συστήματος.

(Απ. $a_1 = -6, \beta_1 = -2, a_2 = -3, \beta_2 = -1$)

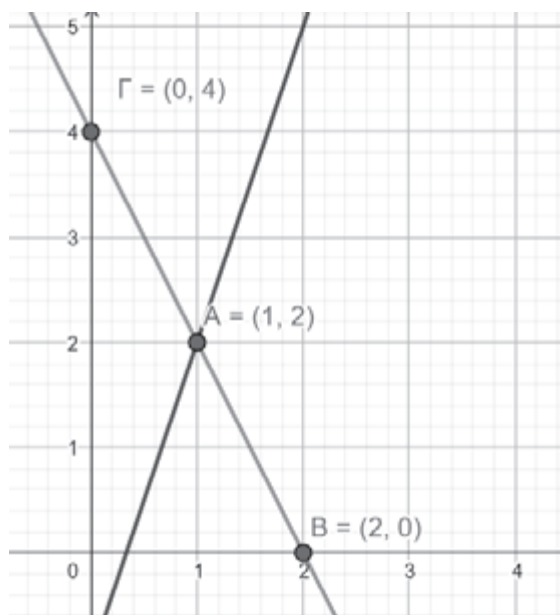
Άσκηση 7^η

Να γράψετε ένα γραμμικό 2×2 σύστημα το οποίο να έχει λύσεις τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-2, 2)$.

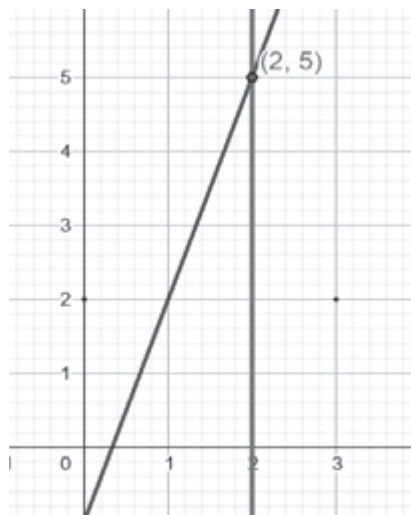
Άσκηση 8^η

Να γράψετε τα γραμμικά 2×2 συστήματα που αναπαρίστανται παρακάτω:

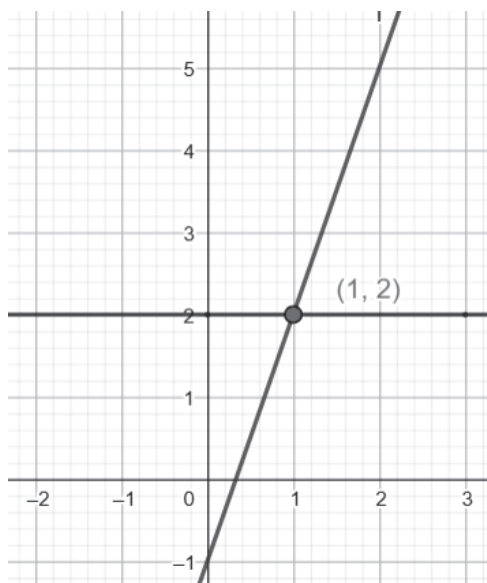
Α.



Β.



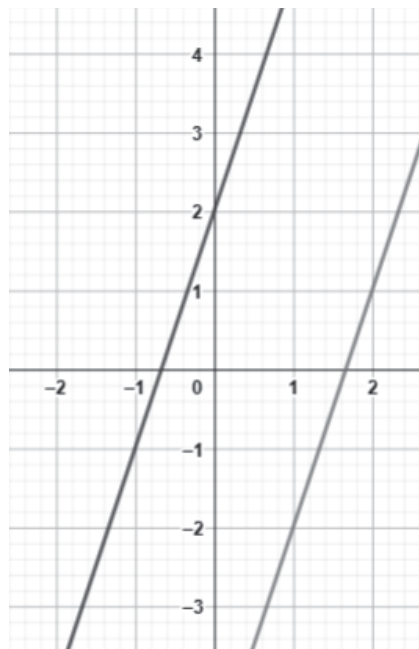
Γ.



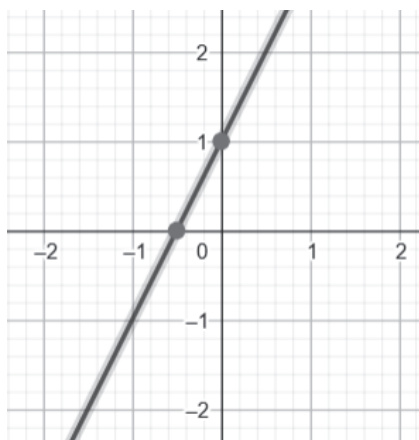
Άσκηση 8^η

Να γράψετε τα γραμμικά 2×2 συστήματα που αναπαρίστανται παρακάτω:

Α.



Β.



Άσκηση 9^η

Αν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} (\kappa - \lambda)x + \lambda^2 y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

έχει λύσεις τα σημεία $A(-8, 3)$ και $B(1, -4)$.

Άσκηση 10^η

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα $\begin{cases} ax + \beta y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

A. να έχει άπειρες στο πλήθος λύσεις

B. να είναι αδύνατο.

Άσκηση 11^η

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} ax + 4y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Άσκηση 12^η

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} ax + 4y = a^2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Άσκηση 13^η

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} ax + 4y = 1 \\ 3x + ay = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Άσκηση 14^η

Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

να έχει μοναδική λύση $A(-1, 1)$

Άσκηση 15^η

Να προσδιορίσετε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

να έχει λύση το σημείο $A(a, 3)$.

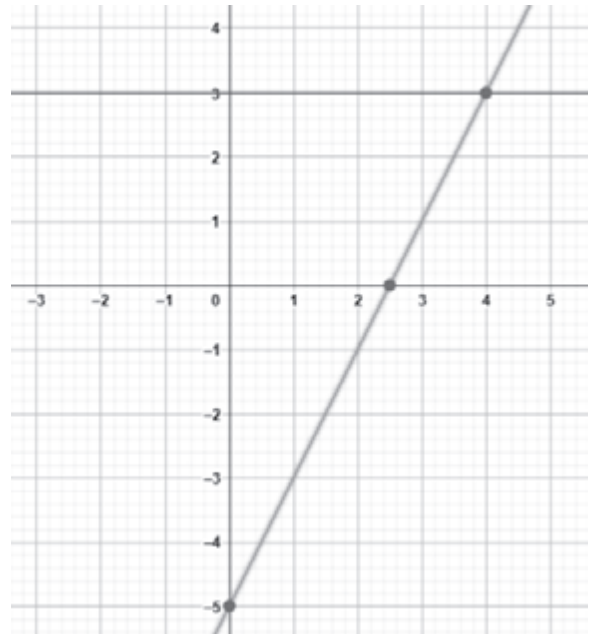
Άσκηση 15^η

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y = \mu \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 15^η

Να προσδιορίσετε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ με βάση τη γραφική επίλυση που φαίνεται παρακάτω:



Άσκηση 16^η

Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} y = a \\ x - y = 1 \end{cases}$$

να έχει μοναδική λύση της μορφής

$$A(x_0, 2k - 3), \text{ όπου } k > \frac{3}{2}.$$

Άσκηση 17^η

Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (a^2 - 1)y = a + 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 18^η

Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα

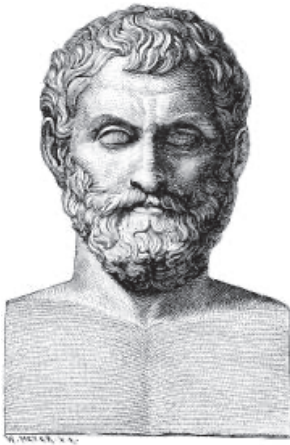
$$\begin{cases} (a^2 + 1)x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Γ' Τάξη

Θαλής ο Μιλήσιος

Ο Πρωτοπόρος που Μετέτρεψε τη Σκέψη σε Μαθηματική Απόδειξη

Κολοβούρη Ευγενία-Θεοδώρα, Γρυπάρης Παντελής



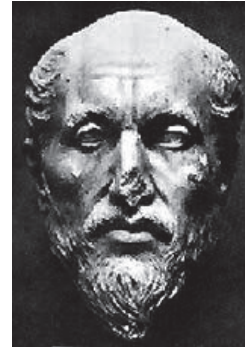
Εισαγωγή Ο Θαλής ο Μιλήσιος (περ. 624/623 – 548/545 π.Χ.), ένας από τους Επτά Σοφούς της αρχαιότητας, κατέχει μια ξεχωριστή θέση στην ιστορία της επιστήμης. Δεν ήταν

απλώς ένας στοχαστής, αλλά ο άνθρωπος που επιχείρησε να ερμηνεύσει τον κόσμο όχι με μύθους, αλλά με τη λογική. Θεωρείται ο «πατέρας» της γεωμετρίας ως παραγωγικής επιστήμης, καθώς ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια της μαθηματικής απόδειξης, μετατρέποντας πρακτικές γνώσεις αιώνων σε επιστημονικά θεωρήματα.

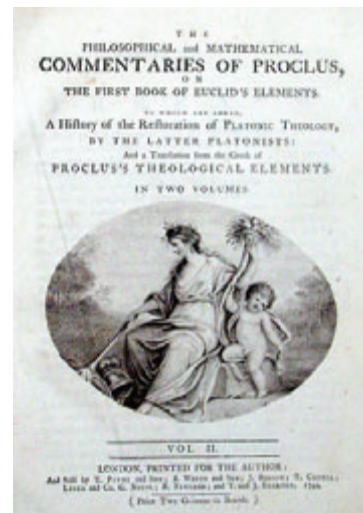
1. Ο Θαλής και η Γέννηση της Μαθηματικής Απόδειξης

Πριν από τον Θαλή, πολιτισμοί όπως οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι διέθεταν σημαντικές γνώσεις πρακτικής γεωμετρίας και αριθμητικής. Ωστόσο, αυτές οι γνώσεις ήταν εμπειρικές ("rules of thumb"), χωρίς την απαίτηση λογικής θεμελίωσης. Ο Θαλής εισήγαγε την καινοτομία της αιτιολόγησης. Σύμφωνα με τον ιστορικό Πρόκλο, στον Θαλή

αποδίδονται πέντε βασικά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:



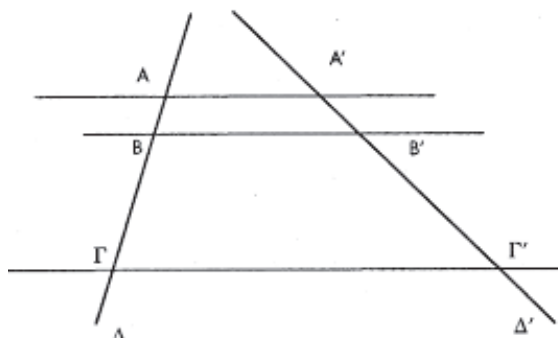
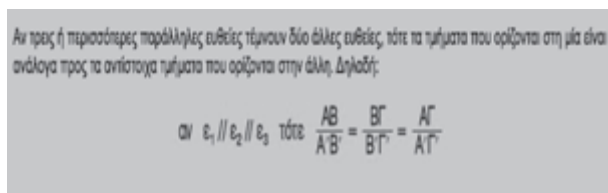
- Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη (διχοτομεί τον κύκλο).
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες (Κριτήριο Γ-Π-Γ).
- Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



2. Το Θεώρημα του Θαλή

Στη σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών, το όνομα του Θαλή είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το θεώρημα που αφορά τα τμήματα που ορίζονται από παράλληλες ευθείες. Το θεώρημα αυτό αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την κατανόηση της ομοιότητας και των αναλογιών.

Θεώρημα του Θαλή Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Ισχύει δηλαδή η σχέση:



Η εφαρμογή του θεωρήματος εκτείνεται από τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων μέχρι τη σύγχρονη μηχανική, αποδεικνύοντας τη διαχρονική αξία της γεωμετρικής σκέψης.

Πού χρησιμοποιούμε το Θεώρημα;

Το θεώρημα αυτό:

- θεμελιώνει την έννοια της αναλογίας

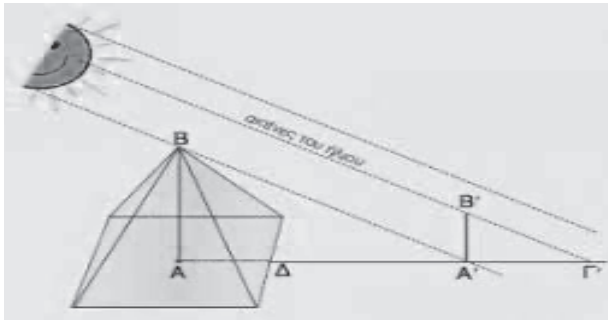
- χρησιμοποιείται στους ομοιόμορφους υπολογισμούς,
- εξηγεί τη σχέση μικρών και μεγάλων σχημάτων
- επιτρέπει τη μέτρηση αποστάσεων που δεν μπορούμε να φτάσουμε.

Κάποιοι θεωρούν ότι το Θεώρημα του Θαλή αποτέλεσε έμπνευση για τον Ευκλείδη όταν έγραψε τα Στοιχεία.

3. Εφαρμοσμένη Γεωμετρία: η μέτρηση της Πυραμίδας

Μια από τις πιο γοητευτικές ιστορικές αναφορές (που διασώζει ο Ιερώνυμος και ο Πλίνιος) είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Θαλής μέτρησε το ύψος της Μεγάλης Πυραμίδας του Χέοπα στην Αίγυπτο, εντυπωσιάζοντας τους ιερείς και τους Φαραώ. Ο Θαλής δεν χρειάστηκε να σκαρφαλώσει στην κορυφή. Χρησιμοποίησε την ιδιότητα των ομοίων τριγώνων. Κάρφωσε μια ράβδο (γνωστού ύψους) κατακόρυφα στο έδαφος και περίμενε τη χρονική στιγμή της ημέρας όπου το μήκος της σκιάς της ράβδου έγινε ίσο με το ύψος της. Εκείνη ακριβώς τη στιγμή, συμπέρανε ότι και το ύψος της Πυραμίδας θα ήταν ίσο με το μήκος της σκιάς της (συν το μισό της πλευράς της βάσης της). Μαθηματική διατύπωση: Αν H το ύψος της πυραμίδας και S το μήκος της σκιάς της, και αντίστοιχα h το ύψος της ράβδου και s η σκιά της, τότε λόγω της παραλληλίας των

ηλιακών ακτίνων σχηματίζονται όμοια τρίγωνα, οπότε ισχύει:



$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s}$$

Λύνοντας ως προς H, έχουμε τον τύπο υπολογισμού:

$$H = S \cdot \frac{h}{s}$$

4. Ο Θαλής και η Παρατήρηση του Κόσμου

Πέρα από τη Γεωμετρία, ο Θαλής υπήρξε πρωτοπόρος στην Αστρονομία. Ο Ηρόδοτος αναφέρει ότι προέβλεψε την έκλειψη Ηλίου του 585 π.Χ., ένα γεγονός που συνέβη κατά τη διάρκεια της μάχης μεταξύ Λυδών και Μήδων, οδηγώντας σε άμεση κατάπαυση του πυρός. Μελέτησε επίσης τα ηλιοστάσια, προσδιόρισε τις εποχές και χρησιμοποίησε τον αστερισμό της Μικρής Άρκτου για την πλοήγηση των ναυτικών, αποδεικνύοντας την πρακτική αξία της επιστημονικής παρατήρησης.

5. Ιστορικά Σημειώματα

Ο πρώτος των Επτά Σοφών:

Ο Πλάτων στον «Πρωταγόρα» τον κατατάσσει πρώτο μεταξύ των επτά σοφών της αρχαιότητας.

Το ατύχημα του φιλοσόφου:

Μια γνωστή ιστορία (αναφερόμενη στον «Θεαίτητο» του Πλάτωνα) θέλει τον Θαλή να πέφτει σε ένα πηγάδι ενώ περπατούσε κοιτάζοντας τα άστρα. Μια Θρακιώτισσα θεραπαιίδα τον κορόιδευε λέγοντας πως «προσπαθεί να μάθει τι γίνεται στον ουρανό, αλλά αγνοεί τι βρίσκεται μπροστά στα πόδια του», αναδεικνύοντας τη διαχρονική εικόνα του αφηρημένου επιστήμονα.

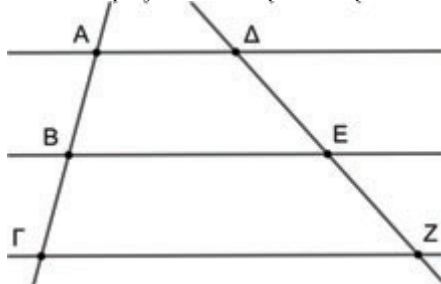


Επιχειρηματικό δαιμόνιο:

Ο Αριστοτέλης αναφέρει πως ο Θαλής, προβλέποντας μια μεγάλη σοδειά ελιών βάσει αστρονομικών παρατηρήσεων, ενοίκιασε εγκαίρως όλα τα ελαιοτριβεία της Μιλήτου, αποδεικνύοντας ότι η φιλοσοφία μπορεί να είναι και κερδοφόρα, αν ο φιλόσοφος το επιθυμεί.

Η μέθοδος μέτρησης της Πυραμίδας θεωρείται ο πρώτος υπαίθριος επιστημονικός υπολογισμός στην ιστορία!

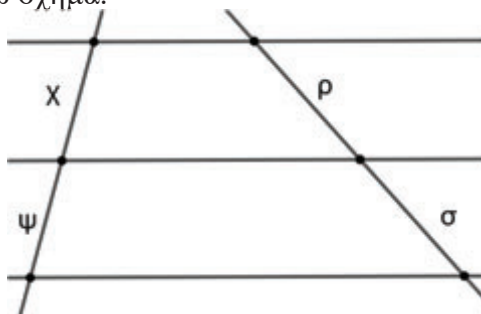
Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή «αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται στην άλλη».



Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα, αν οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, τότε τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ που ορίζονται στην ΑΓ είναι ανάλογα προς τα ΔΕ, ΕΖ και ΔΖ, αντίστοιχα, που ορίζονται στην ΔΖ. Αυτό γράφεται αλγεβρικά ως εξής:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BE}{EZ} = \frac{AG}{DZ}$$

Αν συμβολίσουμε με πεζά γράμματα τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζονται στις ευθείες ΑΓ και ΔΖ, τότε έχουμε το παρακάτω σχήμα.



Χρησιμοποιώντας τα πεζά γράμματα, η παραπάνω ισότητα γράφεται ως εξής:

$$\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{\chi + \psi}{\rho + \sigma}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή σχηματίσαμε μια ισότητα μεταξύ αριθμών.

Η ισότητα αυτή περιγράφει μια αλγεβρική σχέση μεταξύ τριών λόγων, των $\frac{\chi}{\rho}$, $\frac{\psi}{\sigma}$ και $\frac{\chi + \psi}{\rho + \sigma}$.

Αυτή την αλγεβρική σχέση μπορούμε να την

περιγράψουμε με λέξεις ως εξής:

«Αν ο λόγος των αριθμών χ και ρ είναι ίσος με τον λόγο των αριθμών ψ και σ , τότε τα αθροίσματα $\chi + \psi$ και $\rho + \sigma$ έχουν τον ίδιο λόγο.»

Λέμε ότι αριθμοί χ και ρ είναι ανάλογοι προς τους ψ και σ . Έτσι, διατυπώνουμε και αλλιώς την παραπάνω αλγεβρική σχέση:

«Αν οι αριθμοί χ και ψ είναι ανάλογοι προς τους ρ και σ , αντίστοιχα, τότε και τα αθροίσματά τους $\chi + \psi$ και $\rho + \sigma$ έχουν τον ίδιο λόγο.»

Εσείς, οι αναγνώστες αυτού του άρθρου μπορείτε να σκεφτείτε και άλλους τρόπους να διατυπώσουμε λεκτικά αυτή την ισότητα.

Για τις ανάγκες του άρθρου, ας την ονομάσουμε «ιδιότητα αναλογιών».

Στη συνέχεια ας δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα, για την ιδιότητα αναλογιών, χωρίς να αναφερόμαστε σε παράλληλες ευθείες και μήκη ευθύγραμμων τμημάτων, τα οποία αυτές ορίζουν. Οι αριθμοί 8 και 12 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 4 και 6, με λόγο 2. Πράγματι:

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{6} = 2$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα αναλογιών αναμένουμε το άθροισμα $8 + 12$ και το άθροισμα $4 + 6$ να έχουν τον ίδιο λόγο, δηλαδή 2. Πράγματι:

$$\frac{8 + 12}{4 + 6} = \frac{20}{10} = 2$$

Άρα ισχύει η ιδιότητα αναλογιών:

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{8 + 12}{4 + 6} = 2$$

Εδώ προκύπτει ένα ερώτημα:

Η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο για ζεύγη ανάλογων αριθμών ή και για περισσότερους;

Δηλαδή, αν έχουμε τους αριθμούς χ , ψ και t , οι οποίοι είναι ανάλογοι με τους αριθμούς ρ , σ και h , τότε τα αθροίσματα $\chi + \psi + t$ και $\rho + \sigma + h$ είναι ανάλογα με τον ίδιο λόγο;

Ή, αλγεβρικά, εφόσον ισχύει:

$$\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{t}{h}$$

θα ισχύει η παρακάτω ισότητα;

$$\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{t}{h} = \frac{\chi + \psi + t}{\rho + \sigma + h}$$

Ας δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα, διερευνώντας την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Οι αριθμοί 9, 12 και 15 είναι ανάλογοι προς τους 3, 4 και 5, αντίστοιχα, με λόγο 3. Πράγματι:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3$$

Ο λόγος του αθροίσματος $9 + 12 + 15$ προς το άθροισμα $3 + 4 + 5$ είναι επίσης 3;

Όπως διαπιστώνουμε πράγματι είναι:

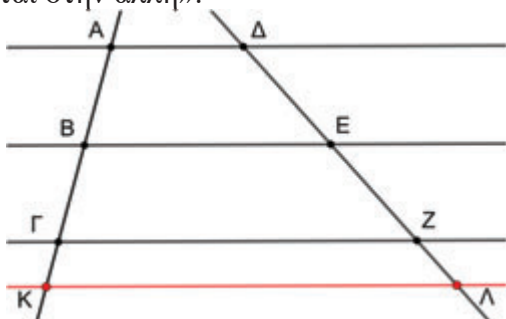
$$\frac{9 + 12 + 15}{3 + 4 + 5} = \frac{36}{12} = 3$$

Άρα ισχύει η ιδιότητα, για το συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{9 + 12 + 15}{3 + 4 + 5}$$

Ισχύει όμως γενικότερα, ή έτυχε να ισχύει για τις συγκεκριμένες τριάδες αριθμών;

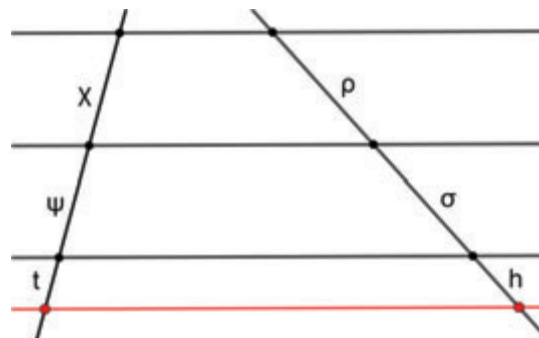
Για να απαντήσουμε θα αξιοποιήσουμε το θεώρημα του Θαλή, το οποίο αναφέρεται σε τρεις, αλλά και περισσότερες παράλληλες ευθείες. Σύμφωνα με αυτό «αν έχουμε τέσσερις παράλληλες ευθείες που τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται στην άλλη».



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε προσθέσει την τέταρτη παράλληλη ευθεία ΚΛ. Έτσι σε κάθε ευθεία από τις ΑΚ και ΔΛ ορίζονται περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα, συγκρίνοντας με την περίπτωση που οι παράλληλες ευθείες ήταν τρεις. Στην ΑΚ ορίζονται τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΚ, ΑΓ, ΒΚ και ΑΚ, ενώ στην ΔΛ ορίζονται τα τμήματα ΔΕ, ΕΖ, ΖΛ, ΔΖ, ΕΛ και ΔΛ, αντίστοιχα και οι αναλογίες που προκύπτουν σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή είναι:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma K}{Z\Lambda} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{BK}{E\Lambda} = \frac{AK}{\Delta\Lambda}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε πεζά γράμματα για τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων, τότε έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Η παραπάνω ισότητα, με τη χρήση των πεζών γραμμάτων γράφεται ως εξής:

$$\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{\tau}{h} = \frac{\chi + \psi}{\rho + \sigma} = \frac{\psi + \tau}{\sigma + h} = \frac{\chi + \psi + \tau}{\rho + \sigma + h}$$

Στη συνέχεια την παραπάνω αλγεβρική σχέση μπορούμε να διατυπώσουμε λεκτικά ως εξής:

«Αν ο λόγος των αριθμών χ και ρ είναι ίσος με τον λόγο των αριθμών ψ και σ και με τον λόγο των αριθμών τ και h , τότε τα παρακάτω ζεύγη αθροισμάτων έχουν τον ίδιο λόγο:

- $\chi + \psi$ και $\rho + \sigma$,
- $\psi + \tau$ και $\sigma + h$,
- $\chi + \psi + \tau$ και $\rho + \sigma + h$ »

Ή αλλιώς: «Αν οι αριθμοί χ , ψ και τ είναι ανάλογοι προς τους ρ , σ και h , αντίστοιχα, τότε και τα αθροίσματά τους $\chi + \psi$, $\psi + \tau$, $\chi + \psi + \tau$ και $\rho + \sigma$, $\sigma + h$, $\rho + \sigma + h$, αντίστοιχα είναι ανάλογα με τον ίδιο λόγο.»

Ας επανέλθουμε στο παράδειγμα με τους αριθμούς, δηλαδή στην αναλογία μεταξύ των 9, 12, 15 και 3, 4, 5. Σύμφωνα με τα παραπάνω, εφόσον οι λόγοι $\frac{9}{3}$, $\frac{12}{4}$ και $\frac{15}{5}$ είναι ίσοι μεταξύ τους και μάλιστα ίσοι με 3, τότε και οι παρακάτω λόγοι θα είναι ίσοι με λόγο 3:

$$\frac{9 + 12}{3 + 4}, \quad \frac{12 + 15}{4 + 5}, \quad \frac{9 + 12 + 15}{3 + 4 + 5}$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \frac{9 + 12}{3 + 4} &= \frac{21}{7} = 3 \\ \frac{12 + 15}{4 + 5} &= \frac{27}{9} = 3 \\ \frac{9 + 12 + 15}{3 + 4 + 5} &= \frac{36}{12} = 3 \end{aligned}$$

Συνεπώς, επαληθεύουμε με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή και της λεκτικής του διατύπωσης ότι ισχύει η ιδιότητα των αναλογιών. Δηλαδή ότι:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{9 + 12 + 15}{3 + 4 + 5}$$

Αυτό θα μπορούσαμε να το επαληθεύουμε αντικαθιστώντας στην αλγεβρική ισότητα, η

οποία προέκυψε από το θεώρημα του Θαλή και ειδικά με αντικατάσταση στους τρεις πρώτους και τον τελευταίο λόγο, δηλαδή στην ισότητα:

$$\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{t}{h} = \frac{\chi + \psi + t}{\rho + \sigma + h}$$

η οποία γίνεται:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{9 + 12 + 15}{3 + 4 + 5}$$

και προφανώς είναι αληθής καθώς γράφεται:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{36}{12}$$

Ωστόσο, με τη χρήση του θεωρήματος του Θαλή έχουμε βρει κάτι παραπάνω από την ιδιότητα των αναλογιών.

Αυτό το «παραπάνω» φαίνεται και στην λεκτική διατύπωση του θεωρήματος του Θαλή. Εκτός από τα αθροίσματα $\chi + \psi + t$ και $\rho + \sigma + h$, που έχουν λόγο ίσο με τους λόγους $\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{t}{h}$, υπάρχουν και τα ζεύγη αθροισμάτων $\chi + \psi$, $\rho + \sigma$ και $\psi + t$, $\sigma + h$, τα οποία έχουν επίσης τον ίδιο λόγο. Δηλαδή, στο αριθμητικό παράδειγμά μας είναι:

$$\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{t}{h} = \frac{\chi + \psi}{\rho + \sigma}$$

και αντικαθιστώντας:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{9 + 12}{3 + 4}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7}$$

που ισχύει. Επίσης:

$$\frac{\chi}{\rho} = \frac{\psi}{\sigma} = \frac{t}{h} = \frac{\psi + t}{\sigma + h}$$

και αντικαθιστώντας:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{12 + 15}{4 + 5}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{27}{9}$$

που ισχύει.

Εφαρμογή

Ας θυμηθούμε τώρα ένα κλασικό πρόβλημα που παρόμοιο του μπορεί να έχετε ήδη λύσει, αλλά ίσως δεν γνωρίζατε πώς συνδέεται η λύση του με το θεώρημα του Θαλή.

Μια εταιρεία έχει ως χρέος ένα ποσό σε τρεις πιστωτές της (π.χ. τράπεζες). Το ετήσιο επιτόκιο του χρέους είναι: στον πιστωτή Α' 5%

στον πιστωτή Β' 4,2%

στον πιστωτή Γ' 2,8%

Στο τέλος του έτους η εταιρεία θα διαθέσει ένα μέρος του τζίρου της, δηλαδή το ποσό των 1.000 ευρώ, για να πληρώσει μέρος του χρέους της. Έχει αποφασίσει τα χρήματα που θα δώσει σε κάθε πιστωτή να είναι ανάλογα με το αντίστοιχο επιτόκιο.

Πόσα χρήματα θα δώσει σε κάθε πιστωτή;

Απάντηση

Ας υποθέσουμε ότι το ποσό που θα δώσει η εταιρεία στον πιστωτή Α' είναι χ ευρώ, στον πιστωτή Β' είναι ψ ευρώ και στον πιστωτή Γ' είναι ω ευρώ. Εφόσον τα ποσά αυτά θα είναι ανάλογα των αντίστοιχων επιτοκίων κάθε πιστωτή ισχύει ότι οι αριθμοί χ , ψ και ω είναι ανάλογοι των αριθμών 5, 4,2 και 2,8, αντίστοιχα, δηλαδή στα επιτόκια των πιστωτών.

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{\chi}{5} = \frac{\psi}{4,2} = \frac{\omega}{2,8}$$

Ωστόσο, για να υπολογίσουμε το ποσό που θα λάβει κάθε πιστωτής, δηλαδή τα χ , ψ και ω χρειαζόμαστε κάτι ακόμη. Εφόσον το συνολικό ποσό που θα καταβάλει η εταιρεία στους πιστωτές της είναι 1.000 ευρώ, ισχύει ότι:

$$\chi + \psi + \omega = 1.000$$

Και τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των αναλογιών που γράψαμε με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή:

$$\frac{\chi}{5} = \frac{\psi}{4,2} = \frac{\omega}{2,8} = \frac{\chi + \psi + \omega}{5 + 4,2 + 2,8}$$

$$\frac{\chi}{5} = \frac{\psi}{4,2} = \frac{\omega}{2,8} = \frac{\chi + \psi + \omega}{12}$$

Όμως $\chi + \psi + \omega = 1.000$. Άρα

$$\frac{\chi}{5} = \frac{\psi}{4,2} = \frac{\omega}{2,8} = \frac{1.000}{12}$$

Και έτσι βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\chi}{5} = \frac{1.000}{12}$$

$$\chi = \frac{5 \cdot 1.000}{12} = \frac{5.000}{12} = 416,66 \dots$$

Ομοίως:

$$\psi = \frac{4,2 \cdot 1.000}{12} = \frac{4.200}{12} = 350$$

$$\omega = \frac{2,8 \cdot 1.000}{12} = \frac{2.800}{12} = 233,33 \dots$$



Ασκηση 1

Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^4 - x^3 + 4x - 5$

και $Q(x) = -2x^4 + x^3 - 2$.

Να βρείτε τα πολυώνυμα : α) $P(x) + Q(x)$ β) $\{Q(x)\}^2$. Τι βαθμού είναι ;

Λύση

$$\alpha) P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 + 4x - 5 + (-2x^4 + x^3 - 2) =$$

$$= 2x^4 - x^3 + 4x - 5 - 2x^4 + x^3 - 2 = x^4 + 4x - 7$$

$$\beta) \{Q(x)\}^2 = Q(x) \cdot Q(x) = (-2x^4 + x^3 - 2)(-2x^4 + x^3 - 2) =$$

$$4x^8 - 2x^7 + 4x^4 - 2x^7 + x^6 - 2x^3 - 4x^4 - 2x^3 + 4 = 4x^8 - 4x^7 + x^6 - 4x^3 + 4$$

Παρατηρούμε ότι είναι 8^{ου} βαθμού. Εξάλλου σε ένα γινόμενο πολυωνύμων, ο βαθμός του γινομένου είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων.

Άρα: βαθμός $[Q(x) \cdot Q(x)]$ = βαθμός $P(x)$ + βαθμός $Q(x)$

Ασκηση 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση : $\frac{x^2-3x}{6x-18} : \frac{4}{x^3-9x}$

Λύση

$$\text{Θυμίζουμε : } \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\frac{x^2-3x}{6x-18} : \frac{4}{x^3-9x} = \frac{x^2-3x}{6x-18} \cdot \frac{x^3-9x}{4} = \frac{x(x-3) \cdot x(x^2-9)}{6(x-3) \cdot 4} = \frac{x(x-3)x(x-3)(x+3)}{24(x-3)} = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{24}$$

Ασκηση 3

Να γίνουν οι πράξεις : $\frac{x+5}{x^2+2x} - \frac{2+x}{x}$

Λύση

Βήμα 1: Παραγοντοποιούμε όποιον όρο χρειάζεται παραγοντοποίηση. $x^2 + 2x = x(x + 2)$

Βήμα 2: Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρανομαστών και παίρνουμε περιορισμούς : $EKP \neq 0$.

$$EKP = x(x + 2)$$

$$EKP \neq 0$$

$$x(x + 2) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ και } x \neq -2$$

Βήμα 3: Κάνουμε ομώνυμα. $\frac{x+5}{x^2+2x} - \frac{2+x}{x} = \frac{x+5}{x(x+2)} - \frac{2+x}{x} = \frac{[x+5-(2+x)(x+2)]}{x(x+2)}$

Βήμα 3: Κάνουμε πράξεις στον αριθμητή. $\frac{x+5-x^2-4x-4}{x(x+2)} = \frac{-x^2-3x+1}{x(x+2)}$

Ασκηση 4

Αν $x + \frac{1}{x} = 2$, να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων : $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Λύση

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

Άλυτες ασκήσεις

Ασκηση 5

Δίνεται η παράσταση $A = (\chi + 3)^2 - (\chi - 2)(\chi + 2) - 4(\chi + 3)$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2\chi + 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\chi^2 + 9\chi + 11 = A$

γ) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $B = \chi^2 + 7\chi + 10$, $\Gamma = 2\chi^2 + 4\chi - \chi - 2$ και να απλοποιήσετε την την παράσταση $\frac{B}{\Gamma} : (\chi + 5)$

Ασκηση 6

I. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma$$

$$B = \alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2$$

II. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $\Gamma = \frac{A}{B}$

$$\Delta = \frac{\alpha(\alpha - 3) + 4(\alpha - 3)}{\alpha^2 - 9} \cdot \frac{3\alpha^2 + 18\alpha + 27}{\alpha^2 - 16}$$

Ασκηση 7

Αν $\chi^4 + y^4 - (\sqrt{2}xy)^2 = 25$ να βρείτε το $(\chi^2 - y^2)^2$

Ασκηση 8

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=ΑΓ) και ΒΔ, ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης του.

α. Να δείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ

β. Αν Μ το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. Να δείξετε ότι η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ

Ασκηση 9

α. Να λύσετε την εξίσωση $\chi^2 - 6\chi + 5 = 0$

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $\chi^2 - 6\chi + 5$

γ. Να κάνετε τη διαίρεση $\frac{\chi^2 - 6\chi + 5}{\chi^2 + 2\chi} : \frac{\chi^2 - 25}{\chi + 2}$

Ασκηση 10

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2\chi + 1)^2 - 3\chi(\chi + 1) - 7$

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = \chi^2 + x - 6$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(\chi) = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x) = \chi^2 + x - 6$

Ασκηση 11

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος και φέρνουμε ΒΕ και ΓΖ κάθετες στην ευθεία της διαμέσου. Να δείξετε ότι

A) Τα Β και Γ ισαπέχουν από την ΑΖ

B) Το Δ είναι μέσο του ΕΖ

Ασκηση 12

Στο τρίγωνο η ΑΒ=12, ΔΕ=8 και η ΓΔ=10.

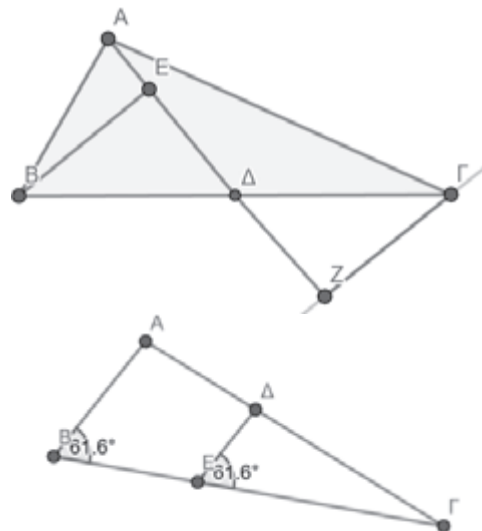
A) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΔ είναι όμοια

B) Να υπολογίσετε το ΓΑ

Ασκηση 13

Φανταστείτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που έχει πολύ ιδιαίτερες διαστάσεις. Η μία κάθετη πλευρά του είναι **45 μέτρα** και η άλλη κάθετη πλευρά του είναι μόλις **1 μέτρο**.

Αν κατασκευάσουμε ένα **τετράγωνο** πάνω στην υποτείνουσα αυτού του τριγώνου, ποιο θα είναι το εμβαδόν αυτού του τετραγώνου;»





Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

86ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

7 Νοεμβρίου 2025

Οι λύσεις των θεμάτων

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{(-5)^2 - (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2025} - \frac{43}{21} \quad \text{και} \quad B = ((10 - 5)^2 + (-2)^3 - 18)^{2024} - \frac{63}{31},$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

Λύση

$$A = \left(\frac{(-5)^2 - (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2025} - \frac{43}{21} = \left(\frac{25 - 9}{16} \right)^{2025} + \frac{43}{21} = 1^{2025} - \frac{43}{21} = 1 - \frac{43}{21} = -\frac{22}{21}.$$

$$\begin{aligned} B &= ((10 - 5)^2 + (-2)^3 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} = (5^2 - 8 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} \\ &= (25 - 8 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} = (-1)^{2024} - \frac{63}{31} = 1 - \frac{63}{31} = -\frac{32}{31}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$A - B = -\frac{22}{21} - \frac{32}{31} = -\frac{22}{21} + \frac{32}{31} = -\frac{22 \cdot 31}{21 \cdot 31} + \frac{32 \cdot 21}{21 \cdot 31} = \frac{-682 + 672}{651} = -\frac{10}{651} < 0 \Rightarrow A < B.$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α, β , με $\alpha \leq \beta$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη 15 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 60. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές των α, β .

Λύση

Οι δυνατές τιμές του α είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\alpha \in \{15, 30, 45, 60\}$. Ομοίως, οι δυνατές τιμές του β είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\beta \in \{15, 30, 45, 60\}$.

Έστω $\alpha = 15$. Τότε η μόνη δυνατή τιμή για το β είναι το 60. Αν ήταν $\beta = 15$ ή 30 ή 45, τότε θα είχαμε $EKP\{\alpha, \beta\} = 15$ ή 30 ή 45, αντίστοιχα, που είναι διαφορετικά από το 60.

Έστω $\alpha = 30$. Τότε δεν υπάρχει δυνατή τιμή για το $\beta \geq 30$.

Πράγματι, αν ήταν $\beta = 30$, τότε θα είχαμε $MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{30, 30\} = 30 \neq 15$, αν ήταν $\beta = 45$, τότε θα είχαμε $EKP\{\alpha, \beta\} = EKP\{30, 45\} = 90 \neq 60$, ενώ αν ήταν $\beta = 60$, τότε θα είχαμε $MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{30, 60\} = 30 \neq 15$.

Έστω $\alpha = 60$. Επειδή πρέπει $\beta \geq \alpha$, έπεται ότι $\beta = 60$, οπότε

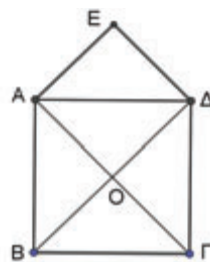
$$MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{60, 60\} = 60 \neq 15.$$

Άρα οι μόνες δυνατές τιμές είναι: $\alpha = 15, \beta = 60$.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΑΕ είναι παράλληλα. Επίσης, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΔΕ είναι παράλληλα.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΔΕ είναι τετράγωνο.



Λύση

Το τετράπλευρο ΑΟΔΕ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$AO = ED \text{ και } AE = OD. \quad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, οι διαγώνιες του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$AO = \frac{AG}{2} = \frac{BD}{2} = OD. \quad (2)$$

$$\angle AOD = 90^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι: $AO = OD = DE = EA$. Άρα το τετράπλευρο ΑΟΔΕ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και μία γωνία του ορθή, οπότε είναι τετράγωνο.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\left(-\frac{18}{3} \right)^2 + \frac{(-2)^2}{3^2} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3}, \quad B = \frac{(-18)^8}{3^8} - \left(-\frac{1}{6} \right)^{-8} - \frac{25}{117}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Λύση

$$A = \left(\left(-\frac{18}{3} \right)^2 + \frac{(-2)^2}{3^2} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} = \left((-6)^2 + \frac{4}{9} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} = \left(36 + \frac{4}{9} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{328}{9} \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} = \frac{164}{9} \cdot \frac{1}{39} - \frac{2}{3} = \frac{164}{351} - \frac{2}{3} = \frac{164}{351} - \frac{234}{351} = -\frac{70}{351}.$$

$$B = \frac{(-18)^8}{3^8} - \left(-\frac{1}{6} \right)^{-8} - \frac{25}{117} = \left(\frac{-18}{3} \right)^8 - (-6)^8 - \frac{25}{117}$$

$$(-6)^8 - (-6)^8 - \frac{25}{117} = -\frac{25}{117} = -\frac{75}{351}.$$

Για τη σύγκριση των αριθμών Α, Β έχουμε:

$$\text{Επειδή } \frac{75}{351} > \frac{70}{351}, \quad \text{έπεται ότι } -\frac{75}{351} < -\frac{70}{351} \Rightarrow A > B.$$

Διαφορετικά, θεωρούμε τη διαφορά Α - Β:

$$A - B = -\frac{70}{351} - \left(-\frac{25}{117} \right) = \frac{25}{117} - \frac{70}{351} = \frac{75 - 70}{351} = \frac{5}{351} > 0 \Rightarrow A > B.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma, B = \overline{\beta\gamma} = 10\beta + \gamma, \Gamma = \overline{\alpha\beta} = 10\alpha + \beta, \quad \text{με } \alpha, \beta \neq 0.$$

Αν ο αριθμός A είναι πολλαπλάσιο του 3, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του A για τις οποίες ισχύει η ισότητα: $A = B + 8\Gamma$.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} 100\alpha + 10\beta + \gamma &= 10\beta + \gamma + 8(10\alpha + \beta) \Leftrightarrow 100\alpha = 80\alpha + 8\beta \\ \Leftrightarrow 20\alpha &= 8\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{20\alpha}{8} \Leftrightarrow \beta = \frac{5\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου $\alpha \neq 0$ είναι τα πολλαπλάσια του 2, δηλαδή τα ψηφία 2, 4, 6, 8. Τότε η τιμή του β που προκύπτει είναι 5, 10, 15, 20, αντίστοιχα, από τις οποίες δεκτή είναι μόνον η τιμή $\beta = 5$. Επομένως, έχουμε: $A = \overline{25\gamma}$, όπου γ ψηφίο με $0 \leq \gamma \leq 9$.

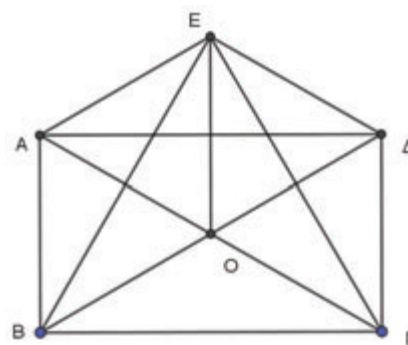
Το ψηφίο γ πρέπει να επιλεγεί έτσι, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 3. Επομένως, αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του A να διαιρείται με το 3, οπότε οι δυνατές τιμές του γ είναι 2, 5 και 8, οπότε τελικά έχουμε:

$$A = 252 \text{ ή } A = 255 \text{ ή } A = 258.$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ευθεία AE είναι παράλληλη προς την ευθεία BD και η ευθεία ED είναι παράλληλη προς την ευθεία AG . Να αποδείξετε ότι:

1. Το τετράπλευρο $AO\Delta E$ είναι ρόμβος.
2. $EB = EG$.



Λύση

1. Το τετράπλευρο $AO\Delta E$ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$AO = \Delta E \text{ και } EA = O\Delta. \quad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$AO = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $AO = O\Delta = \Delta E = EA$. Άρα το τετράπλευρο $AO\Delta E$ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

2. Επειδή $EA = E\Delta$ και $OA = O\Delta$, έπεται ότι η ευθεία EO είναι μεσοκάθετη της πλευράς AD του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε θα είναι και άξονας συμμετρίας του. Τα σημεία B και Γ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα EO , οπότε και τα τμήματα EB και $E\Gamma$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα EO . Άρα είναι ίσα.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 137Α

Γ68. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 80^\circ$. Αν I είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι: $AI = B\Gamma$. (Μ. Ο. Ρουμανίας 2025)

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B} = 80^\circ$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ . Τότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $AD = BD$.

Έστω ακόμη ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A} = 40^\circ$ τέμνει την πλευρά AD στο σημείο E . Τότε τα τρίγωνα ABI και ABE έχουν την πλευρά AB κοινή και τις προσκείμενες γωνίες στην κοινή πλευρά ίσες, δηλαδή $\hat{ABE} = \hat{BAI} = 20^\circ$ και $\hat{ABI} = \hat{BAE} = 40^\circ$. Επομένως, τα τρίγωνα ABI και ABE είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$AI = BE. \quad (1)$$

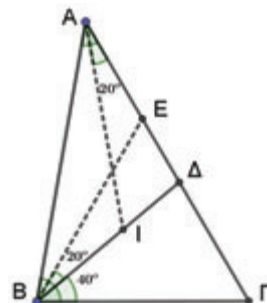
Το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει:

$$\hat{GBE} = \hat{GBD} + \hat{DBE} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ \text{ και}$$

$$\hat{G} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ.$$

Επομένως, έχουμε: $B\Gamma = BE$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα: $AI = B\Gamma$.



Σχήμα 1

(2^{ος} τρόπος)

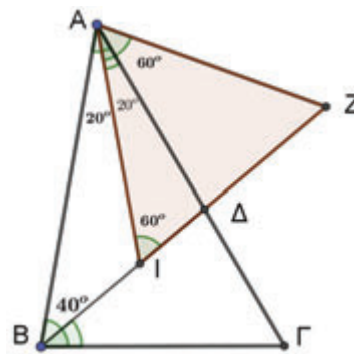
Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B} = 80^\circ$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ . Τότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $AD = BD$. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο AIZ με το σημείο Δ να ανήκει στην πλευρά IZ . Τότε έχουμε

$$\hat{\Delta AZ} = \hat{IAZ} - \hat{IAD} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ = \hat{GBD}.$$

Τα τρίγωνα ΔAZ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα, γιατί έχουν:

$AD = BD$, $\hat{\Delta AZ} = \hat{GBD} = 40^\circ$, $\hat{\Delta ZI} = \hat{B\Gamma I}$ (ως κατά κορυφή). Επομένως, έχουμε:

$$B\Gamma = AZ = AI.$$



Σχήμα 2

(3^{ος} τρόπος)

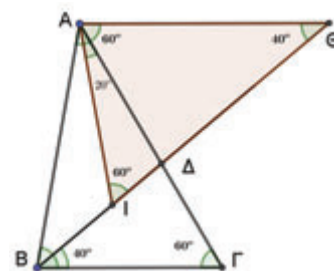
Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την παράλληλη από το A προς την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Θ . Τότε έχουμε:

$$\hat{A\Theta B} = \hat{\Theta B\Gamma} = 40^\circ,$$

οπότε το τρίγωνο $AB\Theta$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Theta$.

Επίσης έχουμε $\hat{I\Lambda\Theta} = 80^\circ = \hat{A\Gamma I}$, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AI\Theta$ είναι ίσα (κριτήριο Γ -Π-Γ). Άρα έχουν και

$$AI = B\Gamma$$



Σχήμα 3

N54. Οι αριθμοί α, β, γ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί

$$\mu = \frac{5\alpha + 6\beta + 7\gamma + 6}{4\alpha + 3\beta + 2\gamma + 3} \text{ και } \nu = \frac{\alpha + 2\beta + 3\gamma + 5}{3\alpha + \beta + 2\gamma + 5}$$

να είναι και οι δύο ακέραιοι.

(1) Να αποδείξετε ότι: $\mu \geq 2$.

(2) Να βρείτε την τιμή των μ και ν .

(Μ. Ο. Ρουμανίας 2025)

Λύση. (1) Επειδή οι αριθμοί α, β, γ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι έχουμε:

$$\mu = \frac{5\alpha + 6\beta + 7\gamma + 6}{4\alpha + 3\beta + 2\gamma + 3} > \frac{4\alpha + 3\beta + 2\gamma + 3}{4\alpha + 3\beta + 2\gamma + 3} = 1 \Rightarrow \mu \geq 2.$$

(2) Επειδή οι αριθμοί α, β, γ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι έχουμε:

$$\nu = \frac{\alpha + 2\beta + 3\gamma + 5}{3\alpha + \beta + 2\gamma + 5} < \frac{9\alpha + 3\beta + 6\gamma + 15}{3\alpha + \beta + 2\gamma + 5} = 3 \Rightarrow \nu \in \{1, 2\}.$$

Αν είναι $\nu = 2$, τότε

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 5 = 6\alpha + 2\beta + 4\gamma + 10 \Leftrightarrow 5\alpha + \gamma + 5 = 0,$$

που είναι αδύνατο, αφού οι α, β, γ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.

Άρα έχουμε $\nu = 1$, οπότε

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 5 = 3\alpha + \beta + 2\gamma + 5 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta + \gamma = 2\alpha.$$

Αν είναι $\mu \geq 3$, τότε

$$5\alpha + 6\beta + 7\gamma + 6 \geq 12\alpha + 9\beta + 6\gamma + 9 \Rightarrow \gamma \geq 7\alpha + 3\beta + 3$$

$$\beta + \gamma = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \beta + \gamma \geq 7\alpha + 4\beta + 3 \Leftrightarrow 2\alpha \geq 7\alpha + 4\beta + 3 \Rightarrow 5\alpha + 4\beta + 3 \leq 0,$$

που είναι αδύνατο. Άρα έχουμε $\mu = 2$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι τιμές $\mu = 2$ και $\nu = 1$ λαμβάνονται όταν $\alpha = \beta = \gamma$.

N55. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α, β που ικανοποιούν τις ισότητες:

$$\frac{\alpha}{(\alpha, \beta)} = \beta + \frac{48 \cdot (\alpha, \beta)}{[\alpha, \beta]} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{(\alpha, \beta)} = \alpha - \frac{312 \cdot (\alpha, \beta)}{[\alpha, \beta]},$$

όπου $(\alpha, \beta) = \text{ΜΚΔ}\{\alpha, \beta\}$ και $[\alpha, \beta] = \text{ΕΚΠ}\{\alpha, \beta\}$. (Μ. Ο. Ρουμανίας 2025)

Λύση. Από την υπόθεση προκύπτει ότι: $\alpha \geq \frac{\alpha}{(\alpha, \beta)} > \beta$. Έστω ότι $(\alpha, \beta) = \delta$, οπότε

$$\alpha = \kappa\delta, \beta = \lambda\delta, (\kappa, \lambda) = 1 \text{ και } \kappa > \lambda > 0.$$

Τότε οι δεδομένες εξισώσεις γίνονται:

$$\kappa = \lambda\delta + \frac{48}{\kappa\lambda} \quad \text{και} \quad \lambda = \kappa\delta - \frac{312}{\kappa\lambda} \quad (1)$$

Επειδή οι αριθμοί $\kappa, \lambda\delta, \lambda, \kappa\delta$ είναι ακέραιοι, έπεται ότι:

$$\kappa\lambda|48 \text{ και } \kappa\lambda|312 \Rightarrow \kappa\lambda|(48, 312) = 24 \Rightarrow \kappa\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Επειδή $(\kappa, \lambda) = 1$ και $\kappa > \lambda > 0$, οι μοναδικές δεκτές τιμές είναι $\kappa = 8, \lambda = 3$, οπότε από τις εξισώσεις (1) λαμβάνουμε: $\delta = 2$ και $\alpha = 16, \beta = 6$.

N56. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$2^\alpha - 2^\beta - 2^\gamma = 1023.$$

(Μ. Ο. Ρουμανίας 2024)

Λύση. Αν είναι $\alpha\beta\gamma \neq 0$, τότε το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι αριθμός άρτιος και δεν είναι δυνατόν να ισούται με 1023. Επομένως ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ θα είναι ίσος με 0. Από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$2^\alpha = 2^\beta + 2^\gamma + 1023 \Rightarrow 2^\alpha \geq 1025 \Rightarrow \alpha \geq 11 \Rightarrow \beta = 0 \text{ ή } \gamma = 0.$$

$$\text{Αν } \gamma = 0, \text{ τότε } 2^\alpha - 2^\beta = 1024 \Leftrightarrow 2^\beta(2^{\alpha-\beta} - 1) = 2^{10} \quad (1)$$

Επειδή $2^\alpha - 2^\beta > 0$, έπεται ότι $\alpha > \beta$, οπότε ο αριθμός $2^{\alpha-\beta} - 1$ είναι περιττός.

Επομένως, από την εξίσωση (1) προκύπτει:

$$2^\beta = 2^{10} \text{ και } 2^{\alpha-\beta} - 1 = 1 \Leftrightarrow \beta = 10 \text{ και } \alpha - \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = 11, \beta = 10.$$

Αν $\beta = 0$, τότε ομοίως προκύπτει ότι $\alpha = 11, \gamma = 10$.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $(\alpha, \beta, \gamma) = (11, 10, 0), (\alpha, \beta, \gamma) = (11, 0, 10)$.

N57. (α) Να αποδείξετε ότι οι θετικοί ακέραιοι $12ν + 13$ και $13ν + 14$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, για κάθε φυσικό αριθμό $ν$.

(β) Να προσδιορίσετε τον αριθμό των ζευγών φυσικών αριθμών $(α, β)$ για τους οποίους υπάρχει φυσικός αριθμός $ν$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{12\nu + 13}{13\nu + 14} \quad \text{και} \quad 17\alpha + 19\beta < 2024.$$

(Μ. Ο. Ρουμανίας 2024)

Λύση. (α) Έστω $\delta = (12ν + 13, 13ν + 14)$. Τότε

$$\delta | 12ν + 13 \text{ και } \delta | 13ν + 14 \Rightarrow \delta | 13(12ν + 13) - 12(13ν + 14) = 1 \Rightarrow \delta | 1 \Rightarrow \delta = 1.$$

(β) Έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{12\nu + 13}{13\nu + 14} \Rightarrow \alpha(13\nu + 14) = \beta(12\nu + 13) \Rightarrow (13\nu + 14) | \beta(12\nu + 13)$$

$$\Rightarrow (13\nu + 14) | \beta, \text{ αφού } \delta = (12\nu + 13, 13\nu + 14) = 1.$$

Άρα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε $\beta = (13ν + 14)\kappa$, οπότε $\alpha = (12ν + 13)\kappa$. Τότε έχουμε:

$$17\alpha + 19\beta < 2024 \Rightarrow 17\kappa(12\nu + 13) + 19\kappa(13\nu + 14) < 2024$$

$$\Rightarrow \kappa(451\nu + 487) < 2024 \Rightarrow 451\nu + 487 < 2024 \Rightarrow \nu \leq 3.$$

Αν $\nu = 0$, τότε $\kappa \leq 4$, οπότε: $(\alpha, \beta) \in \{(13, 14), (26, 28), (39, 42), (52, 56)\}$.

Αν $\nu = 1$, τότε $\kappa \leq 2$, οπότε: $(\alpha, \beta) \in \{(25, 27), (50, 54)\}$.

Αν $\nu = 2$ ή $\nu = 3$, τότε $\kappa = 1$, οπότε: $(\alpha, \beta) \in \{(37, 40), (49, 53)\}$.

A88. Στο εργαστήριο της Φυσικής οι εγγεγραμμένοι φοιτητές και φοιτήτριες μοιράζονται σε ομάδες που αποτελούνται από τρία αγόρια και ένα κορίτσι. Μία ημέρα απουσίαζαν δύο κορίτσια και ένα αγόρι, οπότε τα παιδιά κατανεμήθηκαν σε ομάδες που αποτελούντο από τέσσερα αγόρια και ένα κορίτσι. Να βρείτε πόσοι φοιτητές και πόσες φοιτήτριες είχαν κάνει εγγραφή στο εργαστήριο Φυσικής.

(Μ. Ο. Ρουμανίας 2025)

Λύση. Έστω x ο αριθμός των κοριτσιών. Τότε ο αριθμός των ομάδων θα είναι x και ο αριθμός των αγοριών θα είναι $3x$.

Την ημέρα που απουσίαζαν δύο κορίτσια και ένα αγόρι, ο αριθμός των ομάδων ήταν $x - 2$ και ο συνολικός αριθμός αγοριών και κοριτσιών θα είναι $5(x - 2)$.

Τότε ισχύει η ισότητα:

$$4x - 3 = 5(x - 2) \Leftrightarrow 4x - 3 = 5x - 10 \Leftrightarrow x = 7.$$

Επομένως, ο αριθμός των κοριτσιών ήταν 7, οπότε ο αριθμός των αγοριών ήταν 21.

Ασκήσεις για λύση

N58. Να λύσετε στο σύνολο των θετικών ακεραίων την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + xy(x - y) = 17.$$

A89. Οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις σχέσεις

$$xy + 4 \leq 2(x + z), \quad yx + 4 \leq 2(y + x), \quad zx + 4 \leq 2(z + y).$$

Να αποδείξετε ότι: $x = y = z$.

Γ69. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά $A\Gamma$ και τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία E, Z, H στην πλευρά AB έτσι ώστε: $B\Gamma = B\Delta = \Delta E = EZ$ και $\Delta H = \Delta Z$. Να αποδείξετε ότι $BZ = HE$ και να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{\Gamma}H$.

Τα ημερολόγια

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Η δημιουργία ημερολογίου από τον άνθρωπο ήταν ένα δύσκολο θέμα. Ο πρωτόγονος άνθρωπος γνώριζε τη μέρα και τη νύχτα, είχε μόνο αυτούς τους δύο χρόνους. Δεν είχε ώρες, εβδομάδες, μήνες, χρόνια. Σιγά-σιγά η ζωή του άλλαζε, ως όν με νόηση για να εξυπηρετήσει τις ανάγκες της ζωής του, άρχισε να καλλιεργεί και να αποθηκεύει τροφή. Αλλά πότε θα έρθει η ξανά η εποχή για καλλιέργεια; Έπρεπε να μάθει τις εποχές και τον καιρό.

Η ημέρα είναι η πιο αρχαία μονάδα, είναι φυσικό φαινόμενο, εναλλαγή φωτός και σκότους δημιουργήθηκε με την εμφάνιση του ανθρώπου στη Γη (200.000 χρόνια πριν). Πριν ακόμα υπάρξουν πολιτισμοί με γραφή, οι άνθρωποι παρατηρούσαν τις φάσεις της Σελήνης και από τον **Σεληνιακό κύκλο** (29,5 ημέρες) προέκυψε ο μήνας.

Ο **μήνας** είναι πολύ αρχαιότερος από τη γραφή και σχεδόν καθολικός σε όλους τους πρώιμους πολιτισμούς (πριν 30.000-10.000 χρόνια). Τα ονόματα στους μήνες δόθηκαν από τους Ρωμαίους μέχρι τον 1^ο αιώνα μ.Χ. .

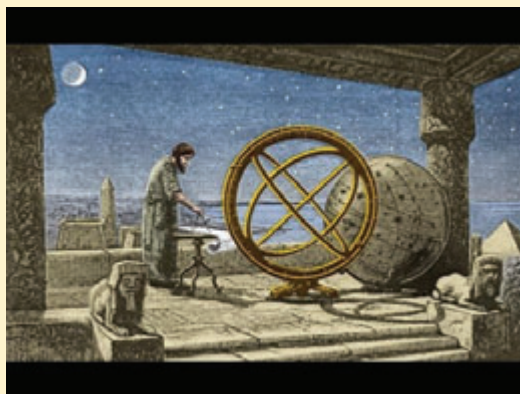
Η **επταήμερη εβδομάδα** δεν είναι φυσικό φαινόμενο είναι πολιτισμική επινόηση. Η εβδομάδα ως **7ήμερη μονάδα** είναι πολύ νεότερη από τον μήνα.

Οι Βαβυλώνιοι (2η χιλιετία π.Χ.) χώρισαν τον μήνα στις 4 φάσεις της Σελήνης. Είχαν τον Σεληνιακό μήνα 4 εβδομάδες × 7 ημέρες. Μάλιστα συνδέσανε τις ημέρες με τους 7 ορατούς «πλανήτες» (Ηλιος, Σελήνη, Άρης, Ερμής, Δίας, Αφροδίτη, Κρόνος).

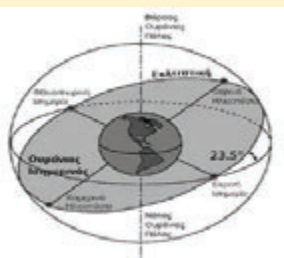
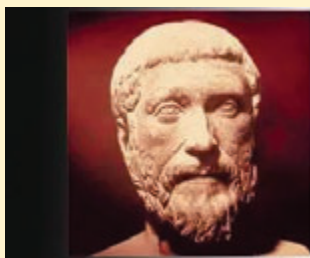
Οι Εβραίοι είχαν τη Γένεση (7 ημέρες της δημιουργίας). Από τους Ρωμαίους η επταήμερη εβδομάδα έγινε επίσημη στη ρωμαϊκή αυτοκρατορία και μετά σε όλη την Ευρώπη. Τα ονόματα στις ημέρες δόθηκαν από τον 1^ο μέχρι τον 4^ο αιώνα από τους Ρωμαίους και αργότερα τους Χριστιανούς. Το **πότε ξεκινά η μέρα** δηλαδή από ποια στιγμή αρχίζουμε να μετράμε τις ώρες διαφέρει από λαό σε λαό. Οι αρχαίοι Έλληνες μετρούσαν από τη δύση του Ηλίου, οι Αιγύπτιοι **από την ανατολή**, οι Εβραίοι και το Βυζάντιο **μετά τη δύση (έτσι μετράνε και στο Άγιο Όρος)**, οι Ρωμαίοι από τα **μεσάνυχτα** (όπως μετράμε και σήμερα).

Η διαίρεση της ημέρας σε ώρες ήταν μια άλλη διαδικασία που κράτησε χιλιάδες χρόνια με χρονική αφετηρία το 1500 π.Χ. στην **Αίγυπτο**. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν οι πρώτοι που χώρισαν την ημέρα σε 24ωρο. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν το δωδεκαδικό σύστημα έτσι έβαλαν δύο δωδεκάωρα. Οι ώρες τους δεν ήταν σταθερές. Μια ώρα το καλοκαίρι είχε μεγαλύτερη διάρκεια από μια ώρα τον χειμώνα, επειδή εξαρτιόταν από το φως του ήλιου. Ενώ οι Αιγύπτιοι μας έδωσαν το 24ωρο, οι Βαβυλώνιοι λίγο αργότερα μας έδωσαν τον τρόπο που υποδιαιρούμε την ώρα. Επειδή χρησιμοποιούσαν το **εξηκονταδικό σύστημα** όρισαν η ώρα να έχει **60 λεπτά** και το λεπτό **60 δευτερόλεπτα**.

Ο Έλληνας αστρονόμος **Ίππαρχος** ήταν αυτός που πρότεινε να χωριστεί η μέρα σε **24 ίσες ώρες**, ανεξάρτητα από την εποχή. Τις ονόμασε **«ισημερινές ώρες»**, επειδή βασίζονταν στη διάρκεια της μέρας κατά την ισημερία. Αυτό το σύστημα το χρησιμοποιούσαν αρχικά μόνο οι επιστήμονες και οι αστρονόμοι. Ο απλός κόσμος συνέχισε να έχει τις άνισες ώρες. Η οριστική καθιέρωση της σταθερής ώρας (όπως την ξέρουμε σήμερα) έγινε στην Ευρώπη με την εφεύρεση των **μηχανικών ρολογιών το 14^ο αιώνα**. Δηλαδή οι Αιγύπτιοι χώρισαν τη μέρα, οι Βαβυλώνιοι τα λεπτά, οι Έλληνες την έκαναν επιστήμη και τα μηχανικά ρολόγια του Μεσαίωνα την έκαναν καθημερινότητα. Για την ημέρα υπήρχαν τα ηλιακά ρολόγια που μετρούσαν τις ώρες, πώς όμως μετρούσαν τις ώρες τη νύχτα πριν ανακαλυφθούν τα ρολόγια;



Η μέτρηση του χρόνου ήταν μια τεράστια πρόκληση. Οι άνθρωποι αναγκάστηκαν να γίνουν εφευρετικοί, στρεφόμενοι στα στοιχεία της φύσης: το **νερό**, τη **φωτιά** και τα **άστρα**. Μετρούσαν το χρόνο με την κλεψύδρα(κλέφτης του νερού), αυτό ήταν το πιο αξιόπιστο «ρολόι» της αρχαιότητας, που χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα από τους Αιγύπτιους, τους Έλληνες και τους Ρωμαίους. Ήταν ένα δοχείο γεμάτο νερό με μια μικρή τρύπα στον πάτο. Το νερό έσταζε αργά και σταθερά σε ένα άλλο δοχείο από κάτω. Στο εσωτερικό του δοχείου υπήρχαν χαραγμένες γραμμές που έδειχναν την ώρα καθώς η στάθμη του νερού κατέβαινε. Στην αρχαία Αθήνα την χρησιμοποιούσαν στα δικαστήρια για να ορίσουν πόση ώρα μπορούσε να μιλήσει κάθε ρήτορας, ώστε να είναι δίκαιη η διαδικασία. Η κλεψύδρα στα πλοία ήταν με άμμο. Στα πλοία δεν μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν νερό λόγω της ταλάντωσης (θα χυνόταν), ούτε φωτιά (κίνδυνος πυρκαγιάς). Η άμμος ήταν η μόνη λύση. Κάθε φορά που άδειαζε η άμμος, ο ναύτης γύριζε την κλεψύδρα και χτυπούσε το καμπανάκι του πλοίου. Αφού μετρούσαν το χρόνο έφτιαξαν και ξυπνητήρια, το **πρώτο μηχανικό ξυπνητήρι** το έφτιαξε ο Πλάτωνας για τη σχολή του. Ήταν κλεψύδρα, με το νερό που έφευγε να μπαίνει σε κλειστό δοχείο με είδος βαλβίδας, που όταν πιεζόταν ο αέρας άνοιγε την βαλβίδα και σφύριζε.



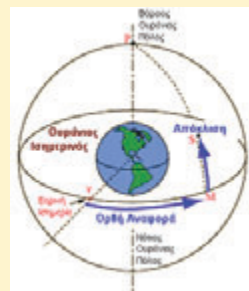
Η επανάληψη των εποχών οδήγησε τους ανθρώπους να βρουν το έτος και να δημιουργήσουν ημερολόγιο, απαραίτητο για την Γεωργία και τις θρησκευτικές τους εορτές. Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι έκαναν το **Πρώτο Ηλιακό Ημερολόγιο πριν 4500 χρόνια**. Ήταν η ανάγκη να γνωρίζουν πότε δεν θα έχει πλημμύρες ο **Νείλος** για να σπείρουν και να θερίσουν. Δημιούργησαν

ένα ημερολόγιο 365 ημερών, χωρισμένο σε 12 μήνες των 30 ημερών, συν 5 ημέρες για τις γιορτές. Αυτό το ημερολόγιο θεωρείται το πρώτο **ηλιακό** ημερολόγιο και ήταν πολύ πιο ακριβές από τα σεληνιακά που χρησιμοποιούσαν άλλοι λαοί. Την ίδια εποχή **Σεληνοηλιακά** ημερολόγια είχαν οι **Σουμέριοι και οι Βαβυλώνιοι**. Χωρίζαν το έτος σε 12 μήνες, αλλά επειδή το σεληνιακό έτος είναι μικρότερο από το ηλιακό, πρόσθεταν περιοδικά έναν 13^ο μήνα για να συγχρονίζονται με τις εποχές.

Ο Μέτωνας ήταν Έλληνας μαθηματικός, αστρονόμος, γεωμέτρης και μηχανικός, ο οποίος έζησε στην Αθήνα τον 5ο π.Χ. αιώνα. Είναι περισσότερο γνωστός για τους υπολογισμούς που αφορούν τον επώνυμο Μετωνικό κύκλο, τον οποίο εισήγαγε το 432 π.Χ. στο σεληνιακό Αττικό ημερολόγιο.

Το ημερολόγιο του Μέτωνα

Ο Μέτωνας βρήκε ότι 19 έτη είναι ίσα με 235 σεληνιακούς μήνες και αυτός είναι ένας κύκλος επαναλήψεων των ετών. Ο αρχαιότερος γνωστός αστρονομικός υπολογιστής του κόσμου, ήταν ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων (2^ο αιώνα π.Χ.), εκτελούσε υπολογισμούς με βάση τον κύκλο του Μέτωνα, τον αντίστοιχο του Καλλίπου και τον κύκλο του Σάρου. Ο Μέτωνας εγκατέστησε στην Πνύκα το πρώτο ηλιοσκόπιο της Αθήνας, τα θεμέλια του οποίου είναι ακόμα ορατά ακριβώς πίσω από το βήμα της Πνύκας, του αρχαίου βουλευτηρίου. Ο Μέτωνας προσδιόρισε τις ημερομηνίες των ισημεριών και τα ηλιοστάσια με βάση τη συγκεκριμένη θέση του ηλιοσκοπίου. Από τη θέση αυτή η ανατολή του ήλιου κατά το θερινό ηλιοστάσιο φαίνεται από την κορυφή του Λυκαβηττού, ενώ έξι μήνες αργότερα, κατά το χειμερινό ηλιοστάσιο, ο ήλιος ανατέλλει από την κορυφή του Υμηττού. Η ετήσια φαινομενική μετακίνηση του ήλιου στον ορίζοντα δημιουργεί ένα τόξο 60°, η διχοτόμος του οποίου ευθυγραμμίζεται με το βράχο της Ακρόπολης. Πάνω στις μελέτες αυτών των ημερολογίων έγινε και το Ιουλιανό ημερολόγιο και το Γρηγοριανό που έχουμε σήμερα.



Για τα ημερολόγια περισσότερα στο βιβλίο «Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν» έκδοση ΕΜΕ.



Επειδή το έτος έχει 365 ημέρες ή 366 τα δίσεκτα, αριθμός που δεν είναι πολλαπλάσιο του 7 (ημέρες της εβδομάδας), γι' αυτό δεν είναι ίδιες ημέρες στις ίδιες ημερομηνίες από έτος σε έτος. Παλαιότερα είχε γίνει πρόταση να γίνει παγκόσμιο ημερολόγιο με 1 ή 2 ημέρες λευκές και να είναι σταθερές οι άλλες στις ημερομηνίες αλλά δεν έγινε δεκτό.

Ο συνάδελφος Παντελής Γρυπάρης μας έστειλε κάτι πολύ ωραίο. Τον **Αλγόριθμο της Ημέρας της Κρίσης** του μαθηματικού **John Conway** (Τζον Κόνγουεϊ) που παρατήρησε ότι μεταξύ κάποιων ημερομηνιών υπάρχει ακέραιος αριθμός εβδομάδων (9 εβδομάδες) άρα τις ημερομηνίες αυτές έχουμε την ίδια μέρα. Για το 2026 στις ημερομηνίες αυτές έχουμε Σάββατο. Το 2027 θα έχουμε Κυριακή, το 2028 επειδή είναι δίσεκτο θα έχουμε όχι Δευτέρα αλλά Τρίτη. Οι ημερομηνίες αυτές είναι: 4 Απρίλη (**4/4^{ου}**), συν 63 ημέρες (9×7) έχουμε **6/6^{ου}**, συν 63 ημέρες (9×7) έχουμε **8/8^{ου}**, συν 63 ημέρες (9×7) έχουμε **10/10^{ου}**, συν 63 ημέρες (9×7) έχουμε **12/12^{ου}**.



Η απόσταση όμως από 12/12 μέχρι 2/2 είναι 52 ημέρες όχι πολ/σιο του 7, το ίδιο από 2/2 μέχρι 4/4 είναι 61 ή 62 τα δίσεκτα. Γι' αυτό έχουμε από χρόνο σε χρόνο μετακίνηση μιας ημέρας ή δύο τα δίσεκτα.

Αλγόριθμος Doomsday

Παντελής Γρυπάρης

Αυτό που περιγράφουμε είναι η "καρδιά" ενός διάσημου μαθηματικού αλγορίθμου που ονομάζεται **"Doomsday Algorithm"** (**Ο Αλγόριθμος της Ημέρας της Κρίσης**). Τον επινόησε ο ιδιοφυής μαθηματικός **John Conway** (Τζον Κόνγουεϊ), για να μπορεί οποιοσδήποτε να υπολογίσει νοερά την ημέρα της εβδομάδας για οποιαδήποτε ημερομηνία.

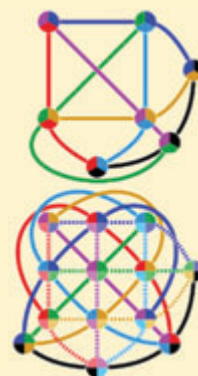
- Σύμφωνα με τον αλγόριθμο κάθε έτος έχει μια δική του «**Ημέρα-Κλειδί**» (Doomsday). Αυτή η μέρα καθορίζεται από τη θέση του έτους στον αιώνα. Παράδειγμα: Για το **2026**, ο υπολογισμός (βάσει του αλγορίθμου του Conway) είναι ο εξής:

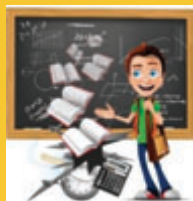


1. Ξεκινάμε με την **ημέρα-άγκυρα** του αιώνα μας (2000-2099), που είναι η **Τρίτη**.
2. Προσθέτουμε τα τελευταία δύο ψηφία του έτους (26).
3. Προσθέτουμε το ακέραιο μέρος της διαίρεσης του 26 με το 4 (για τα δίσεκτα έτη που πέρασαν) $26 : 4 = 6 \times 4 + 2$ δηλαδή **6**.
4. **Σύνολο:** Τρίτη + 26 + 6 = Τρίτη + 32 ημέρες. Αφαιρούμε τις πλήρεις εβδομάδες που είναι στις 32 ημέρες και κρατάμε το υπόλοιπο ($32 = 4 \times 7 + 4$, αφήνει υπόλοιπο 4).
5. **Άρα η ημέρα για το 2026 είναι:** Τρίτη + 4 μέρες, δηλαδή Τρίτη(+4), Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, **Σάββατο**. Άρα το 2026 στις ημερομηνίες (4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12) έχουμε Σάββατο. **Το 2026 επομένως είναι η Χρονιά του Σαββάτου.**

Η Χρησιμότητα στην Καθημερινότητα

Αυτό το μοτίβο δεν είναι απλώς ένα μαθηματικό αξιοπερίεργο, αλλά ένα ισχυρό εργαλείο μνήμης ("mnemonics"). Αντί να προσπαθείς να θυμάσαι τυχαίες ημερομηνίες για να οργανώσεις το πρόγραμμά σου το 2026, χρειάζεται απλώς να θυμάσαι ότι «Οι ζυγοί μήνες αγαπάνε το Σάββατο». Παράδειγμα: θέλεις να δεις τι ημέρα είναι στις 27 Οκτωβρίου 2026 που έχει γενέθλια η φίλη σου η Μαίρη, σκέφτεσαι: Στις 10/10 είναι Σάββατο (ζυγός μήνας), στις 27/10 είναι ($27 - 10 = 17 = 2 \times 7 + 3$) δηλαδή (2 εβδομάδες μετά και 3 ημέρες) άρα Τρίτη.





Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

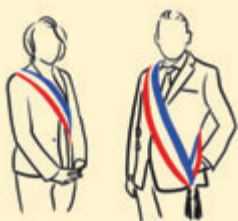
Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος



Ο Αρχιμήδης βρήκε και χρησιμοποιούσε τους μοχλούς. Σκέφτηκε ότι θα μπορούσε να μετακινήσει τη Γη αν είχε κάπου να σταθεί και να στηρίξει το υπομόχλιο. «**Δως μοι πωστω και τα Γαν κινάσω**» Δώσε μου μέρος να σταθώ και θα μετακινήσω τη Γη είπε ο Αρχιμήδης. Είναι υπερβολή κάτι τέτοιο, όμως μελετήθηκε μαθηματικά και βρέθηκε ότι θα μπορούσε να γίνει με μοχλό πρώτου είδους (Βάρος-Υπομόχλιο-Δύναμη) με μήκους μοχλού $88 \cdot 10^{21}$ μέτρων! ($15 \cdot 10^{10}$ είναι η απόσταση Γης-Ήλιου).

— ΓΡΙΦΟΙ —

Ο Δήμαρχος



Ο Δήμαρχος μιας πόλης είπε στον εργολάβο να βάλει 20 φώτα στην καινούργια πλατεία. Το σχέδιο ήταν να βάλει από ένα σε κάθε γωνία και από 4 σε κάθε πλευρά. Ο εργολάβος δεν εφάρμοσε το σχέδιο και έβαλε από 2 σε κάθε γωνία και σε κάθε πλευρά. Ο Δήμαρχος πήγε στη μια πλευρά της πλατείας μέτρησε 2 φώτα και από 2 σε κάθε κορυφή σύνολο 6. Άρα είπε $4 \times 6 = 24$ φώτα και πλήρωσε τον εργολάβο. Τι γνώμη έχετε για πόσα φώτα έπρεπε να πληρώσει.

Η συνάδελφος **Γεωργία Μαρκάτου** μας έστειλε τον πιο κάτω γρίφο. Ο γρίφος βέβαια είναι διδακτικός γιατί μας δείχνει μια ιδιότητα που έχουν τα πολλαπλάσια του 9.

Ο μαγικός αριθμός 9

Η Μαριλένα και η Κατερίνα παίζουν ένα παιχνίδι.

Η Κατερίνα ζητάει από τη Μαριλένα να βάλει έναν φυσικό αριθμό στο μυαλό της από το 1 έως το 10 και χωρίς να αποκαλύψει ποιος είναι να προσθέσει 3. Το αποτέλεσμα που βρήκε, της ζητάει να το πολλαπλασιάσει με το 2 και να του αφαιρέσει το 4. Έπειτα η Μαριλένα καλείται να πολλαπλασιάσει με το 9 και να προσθέσει τα ψηφία του αριθμού που θα βρει μεταξύ τους μέχρι να προκύψει μονοψήφιος. Η Κατερίνα, λέει στη φίλη της ότι αν προσθέσει το 13 και το πολλαπλασιάσει με το 3 θα ξέρει τον αριθμό που θα προκύψει και ο οποίος θα είναι το 66. Η

Μαριλένα έκπληκτη θεωρεί ότι ήταν τυχαίο και επαναλαμβάνουν τη διαδικασία με διαφορετικές πράξεις στην αρχή και το τέλος, αλλά η Κατερίνα πάντοτε γνωρίζει το αποτέλεσμα που προκύπτει.

Πώς γίνεται αυτό;

Φυσικά η Κατερίνα δεν γνωρίζει τον αρχικό αριθμό που σκέφτεται η Μαριλένα. Πάντα ανακαλύπτει τον **τελικό αριθμό** και αυτό γιατί υπάρχει μια πράξη στην όλη διαδικασία που δεν αλλάζει και καθορίζει όλη τη ροή του παιχνιδιού. Ποια είναι αυτή η πράξη; (περισσότερα στις απαντήσεις στο επόμενο τεύχος).



Απαντήσεις στους γρίφους του προηγούμενου τεύχους (τ.137)

Γρίφος 1. Τα σακιά είναι τοποθετημένα το ένα μέσα στο άλλο, οπότε φαίνονται ως ένα, αλλά όταν προσθέσεις άλλο ένα ξεχωριστό, γίνονται δύο εμφανώς διακριτά.

Γρίφος 2. Η σιωπή.

Γρίφος 3. Ένας λάκκος.

Γρίφος 4. Ο πάγος.

Γρίφος 5. Οι ΣΕΡΡΕΣ.

Γρίφος 6. Το σκοτάδι.

Τα 10 κουδούνια

Θα τα αριθμήσεις από 1 έως 10, αν δεν έχεις κάποιον στο διαμέρισμα να το ακούσει άφησε το κινητό σου να ηχογραφεί. Ύστερα χτυπάς τα κουδούνια το καθένα τόσες φορές όσες είναι ο αριθμός του. Παίρνεις το κινητό σου και αν π.χ. έγραψε 6 χτύπους τότε είναι αυτό που αριθμήσες με το 6.

Ο αριθμός

Ο $\alpha = 9$. β άρα $\alpha + \beta = 9$. $\beta + \beta = 10$. β ή $1110 = 10$. β ή $\beta = 111$ επομένως $\alpha = 999$.

Η αυλή του σχολείου

Η αυλή είναι ορθογώνια με διαστάσεις α , β . Αν α το μήκος τότε $(\alpha - 4) = \beta$ δηλαδή όταν γίνει ο κήπος μένει τετράγωνη. Ο κήπος έχει εμβαδό $4 \times \beta = 52$ τ.μ. δηλαδή το $\beta = 52 : 4 = 13$ μέτρα. Επομένως η αυλή που έμεινε είναι $(\alpha - 4) \times \beta = 13 \times 13 = 169$ τ.μ.

Η Γη

Η Σοφία εννοούσε ότι η Γη κινείται. Ένας παρατηρητής που είναι στο διάστημα τη βλέπει να περιστρέφεται και μετακινείται. Η Γη περιστρέφεται με ταχύτητα 1670 km/h (ολοκληρώνει την περιστροφή της σε ένα 24ωρο) και μετακινείται με ταχύτητα 110.000 km/h και σε ένα χρόνο διανύει περίπου 1 δις χιλιόμετρα γύρο από τον Ήλιο. Επομένως ακόμα και όταν καθόμαστε τρέχουμε!!!

Τα μήλα

Εισέπραξε 210€ άρα έδωσε δώρο $240 - 210 = 30$ κιλά σε 30 πελάτες που πήραν 5κιλα, οι υπόλοιποι που πήραν 3κιλα ήταν 20.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

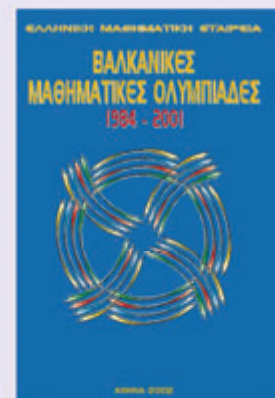
Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



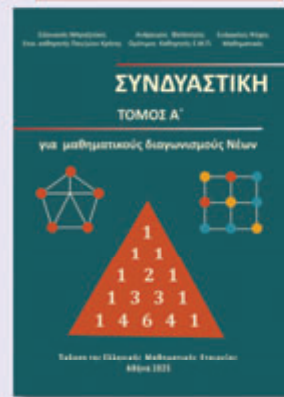
Τιμή βιβλίου: 20€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 15€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 15€

Βιβλία της ΕΜΕ

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr