

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

ΓΕΓΟΝΟΤΑ

138

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

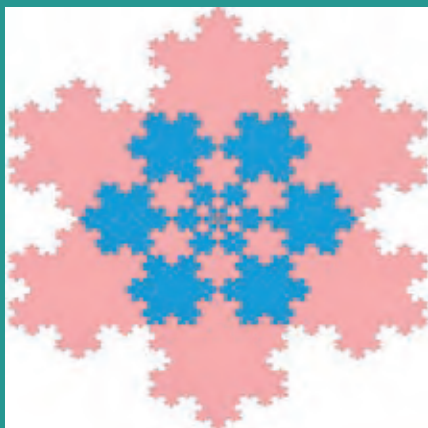
Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

Β' ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2025 ευρώ 3,5

Θέματα "Θαλής" 2025

Η νιφάδα του Koch



ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΔΕΛΤΑΣ 109908 ΚΕΜΠΛΑΘ



Το παράδοξο
του Monty Hall



Τα Μαθηματικά
και η Ναυσιπλοΐα



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 138 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2025 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα	
Το παράδοξο του Monty Hall	1
Τα Μαθηματικά και η Ναυσιπλοΐα	5
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μαθηματικές Ολυμπιάδες,	9
Homo Mathematicus,	17
Α' Τάξη	
Άλγεβρα: Απόλυτα-ρίζες-εξισώσεις- ανισώσεις	23
Γεωμετρία: Ασκήσεις στα Παραλληλόγραμμα	29
Β' Τάξη	
Άλγεβρα: Διαιρετότητα και πολυώνυμα	33
Γεωμετρία: Ασκήσεις στα Εμβαδά	37
Αναλυτική Γεωμετρία: Ασκήσεις	43
Γ' Τάξη	
Ανάλυση: Το Θεώρημα μέσης τιμής σε δράση	47
Εύρεση τύπου συνεχούς συνάρτησης	51
Μια Μαθηματική διαδρομή μέσα από τις συναρτήσεις	57
Γενικά Θέματα	
Ο Ευκλείδης προτείνει... ..	61
Το Βήμα του Ευκλείδη: Συμμετρικές ανισότητες	65
Η Νιφάδα του Koch	73
Δημήτριος Κάππος: μια εξέχουσα προσωπικότητα	77
Τα Μαθηματικά μας Διακελεύονται	78

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
πολλές ευχές για
χαρούμενη χρονιά
το **2026**
με υγεία,
με αισιοδοξία
και με **καλή** διάθεση
παντού ...



Καλή χρονιά

**Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού**

Υ.Γ.: Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσουμε τις περισσότερες. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α' Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Α. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β' Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουριδής, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ' Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδής]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για
τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	07 Νοεμβρίου	2025
Ευκλείδης:	17 Ιανουαρίου	2026
Αρχιμήδης:	28 Φεβρουαρίου	2026

$$2026 = [2000 + 20 + 2^2 + 2] = 2 \cdot 1013$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής**
βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Φελλούρης Ανάργυρος
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υπεύθυνοι για το Δ.Σ

Αντωνόπουλος Νίκος
Αργυράκης Δημήτρης
Βακαλόπουλος Κώστας
Τσιφάκης Χρήστος

Επιτροπή Έκδοσης

Αργυράκης Δημήτρης
Βακαλόπουλος Κώστας
Λουριδής Γιάννης
Τσίτος Χρήστος
Τσιφάκης Χρήστος
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Αντωνόπουλος Νίκος
Αργύρη Παναγιώτα
Αργυράκης Δημήτρης
Βακαλόπουλος Κώστας
Βλάχος Σπύρος
Γαμβρέλλης Αργύρης
Γιώτης Γιάννης
Δρούτσας Παναγιώτης
Ελθίνι Ναϊρούζ
Ζέρβας Νίκος
Ζώτος Ευάγγελος
Κανάβης Χρήστος
Καρκάνης Βασίλης
Κατσούλης Γιώργος
Καρδαμίτσης Σπύρος
Κερασαρίδης Γιάννης
Κονόμης Άρτι
Κορρές Κωνσταντίνος

Συντακτική Επιτροπή

Κουτσούρης Λέων
Κωστοπούλου Καλλιόπη
Λαζαρίδης Χρήστος
Λουμπαρδιά Αγγελική
Λουριδής Γιάννης
Λουριδής Σωτήρης
Λυγαρίδης Ζήνων
Μαλαφέκας Θανάσης
Μανιατοπούλου Αμαλία
Μαυρογιαννάκης Λεωνίδας
Μήλιος Γιώργος
Μπαλταβιάς Βενέδικτος
Μπερσίμης Φραγκίσκος
Μπρίνος Παναγιώτης
Μπρούζος Στέλιος
Μώκος Χρήστος
Ντόρβας Νικόλαος
Ντρίζος Δημήτριος

Πανταζή Αφροδίτη
Σίσκου Μαρία
Σκοτίδης Σωτήριος
Στεφανής Παναγιώτης
Ταπεινός Νικόλαος
Τζελέτης Αλκιβιάδης
Τουρναβίτης Στέργιος
Τσακνιτζής Στέλιος
Τσίτος Χρήστος
Τσιφάκης Χρήστος
Τσόπελας Ιωάννης
Τσουλουχάς Χάρης
Τυρλής Ιωάννης
Χριστόπουλος Θανάσης
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται
και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- **Οι συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη «Γιοα τον Ευκλείδη Β'» Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EURO BANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Εκτύπωση: **printfair** Τηλ.: 2102469799-2102401695 Υπεύθυνος τυπογραφείου: Α. Κρέτσης

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε. ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2025

ΠΡΟΣΚΛΗΣΗ

Αθήνα, 23-1-2026

Καλούνται όλα τα τακτικά και αντεπιστέλλοντα μέλη της Ε.Μ.Ε. σε τακτική Γενική Συνέλευση, το **Σάββατο 28 Φεβρουαρίου 2026**, ώρα **10.00** το πρωί, στην αίθουσα διαλέξεων της ΕΜΕ (Πανεπιστημίου 34, Αθήνα, 1^{ος} όροφος).

ΘΕΜΑΤΑ

1. Απολογισμός του Δ.Σ. για το έτος 2025
2. Ισολογισμός και απολογισμός της διαχείρισης για το 2025
3. Έκθεση της Εξελεγκτικής Επιτροπής
4. Έγκριση του ισολογισμού, απολογισμού και πεπραγμένων του Δ.Σ.
5. Έγκριση του προϋπολογισμού για το 2026
6. Ρύθμιση χρεών των μελών
7. Εξουσιοδότηση για την αγορά αποθηκευτικού χώρου ή γραφείου ή και πώληση αυτών
8. Προτάσεις μελών

Σε περίπτωση που δεν υπάρξει απαρτία (πρέπει να παρίσταται τουλάχιστον το 1/3 των μελών της Ε.Μ.Ε., που έχουν εκπληρώσει τις **ταμειακές** τους υποχρεώσεις τουλάχιστον και για το 2025 ή έχουν εγγραφεί στα μητρώα της ΕΜΕ το 2026), η Γενική Συνέλευση θα γίνει την

Κυριακή 8 ΜΑΡΤΙΟΥ 2026

στις **10 το πρωί** στην αίθουσα διαλέξεων της ΕΜΕ (Πανεπιστημίου 34, Αθήνα, 1^{ος} όροφος), οπότε σύμφωνα με το καταστατικό, θεωρείται σε απαρτία με όσα μέλη κι αν παρίστανται.

Τα πλήρη στοιχεία του απολογισμού δράσης του Δ. Σ., ο ισολογισμός και απολογισμός της **διαχείρισης 2025**, ο **προϋπολογισμός** για το **2026** και η έκθεση της **Εξελεγκτικής Επιτροπής** θα ανακοινωθούν στο δικτυακό τόπο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, www.hms.gr.

Με συναδελφικούς χαιρετισμούς

Ο Πρόεδρος
Ανάργυρος Φελλούρης

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

Το παράδοξο του Monty Hall

Νίκος Ντόρβας

Φανταστείτε ότι είστε καλεσμένος σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι. Ο οικοδεσπότης, ο κύριος **Monty Hall**, σας δείχνει τρεις μεγάλες κλειστές πόρτες και σας λέει ότι πίσω από μία από αυτές υπάρχει ένα πολυτελές αυτοκίνητο, ενώ πίσω από τις άλλες δύο υπάρχουν κατσίκες. Έχοντας ως στόχο να κερδίσετε το αυτοκίνητο διαλέγοντας τη σωστή πόρτα, σας ζητά να επιλέξετε μία. Αφού κάνετε την επιλογή σας, ανοίγει μια άλλη από τις 2 πόρτες που δεν επιλέξατε, αποκαλύπτοντας μια κατσίκα. Στη συνέχεια, σας ρωτά αν θέλετε να παραμείνετε στην αρχική σας επιλογή ή να αλλάξετε στην εναπομείνουσα κλειστή πόρτα. **Θα αλλάζατε ή θα μένατε στην αρχική σας επιλογή;**

Ο οικοδεσπότης, φυσικά, γνωρίζει εκ των προτέρων ποια από τις τρεις πόρτες κρύβει το αυτοκίνητο. Αυτό σημαίνει ότι όποια πόρτα κι αν επιλέξετε αρχικά, μπορεί πράγματι να ανοίξει μια διαφορετική πόρτα και να αποκαλύψει μια κατσίκα. Και όχι μόνο μπορεί να το κάνει αυτό· ξέρετε επίσης ότι σίγουρα θα το κάνει.

Η ενστικτώδης, αλλά λανθασμένη, απάντηση σχεδόν όλων των νεοεισερχομένων στο πρόβλημα είναι: «Μείνετε, αφού είναι εξίσου πιθανό το αυτοκίνητο να βρίσκεται πίσω από οποιαδήποτε από τις δύο κλειστές πόρτες». Αντίθετα η λιγότερο δημοφιλής, αλλά σωστή απάντηση είναι «Αλλάζτε, καθώς αυτό διπλασιάζει την πιθανότητα να κερδίσετε το αυτοκίνητο: πηγαίνει από $1/3$ στα $2/3$ ». Λόγω αυτής της αντίθεσης, το παραπάνω πρόβλημα αποκαλείται στην διεθνή βιβλιογραφία ως **παράδοξο του Monty Hall**. Το κλειδί για την αποδοχή και κατανόηση του παραδόξου είναι να συνειδητοποιήσουμε ότι οι (υποκειμενικές) **πιθανότητες που είναι σχετικές με την απόφαση δεν καθορίζονται μόνο από την κατάσταση** (δύο πόρτες κλειστές), **αλλά και από το τι είναι γνωστό σχετικά με την εξέλιξη που οδήγησε σε αυτή την κατάσταση**.

Το παράδοξο της αλλαγής

Υπάρχουν αρκετά διαισθητικά επιχειρήματα που εξηγούν γιατί η αλλαγή πόρτας αποτελεί συμφέρουσα στρατηγική και ειδικότερα γιατί η στρατηγική του «**πάντα αλλάζω**» δίνει πιθανότητα επιτυχίας $2/3$, ενώ η στρατηγική του «**μένω στην αρχική μου επιλογή**» δίνει πιθανότητα $1/3$.¹

Για να το μελετήσουμε πιο προσεκτικά, ας θεωρήσουμε την **πιθανοτική προσέγγιση ως αντανάκλαση της γνώσης** του διαγωνιζόμενου. Ο διαγωνιζόμενος γνωρίζει μόνο ότι:

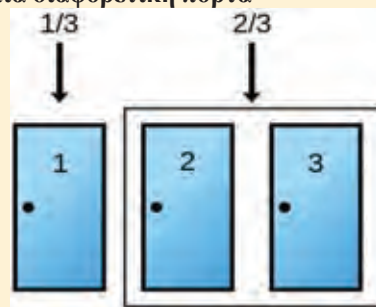
1. Υπάρχουν τρεις πόρτες, μία με αυτοκίνητο και δύο με κατσίκες
2. Επιλέγει αρχικά μία πόρτα από τις τρεις
3. Ο παρουσιαστής, γνωρίζοντας πού βρίσκεται το αυτοκίνητο, ανοίγει **μία διαφορετική πόρτα** αποκαλύπτοντας **μία κατσίκα**.
4. Ο παρουσιαστής του δίνει τη δυνατότητα **να αλλάξει επιλογή**.

Αρχικά, για τον διαγωνιζόμενο —που δεν έχει καμία επιπλέον πληροφορία— οι πιθανότητες είναι **ίδιες για όλες τις πόρτες**. Αν επιλέξει την πόρτα **1**, η πιθανότητα να επέλεξε βέλτιστα είναι $1/3$, και επέλεξε λάθος με πιθανότητα $2/3$.

Όταν ο παρουσιαστής ανοίγει μία από τις άλλες δύο πόρτες, αποκαλύπτοντας μια κατσίκα, αυτή η πληροφορία **δεν αλλάζει τις πιθανότητες**: ο παρουσιαστής θα μπορούσε να το κάνει είτε το αυτοκίνητο είναι πίσω από την πόρτα 1 είτε όχι.

Ακόμη κι όταν ο διαγωνιζόμενος βλέπει **ποια συγκεκριμένη πόρτα** άνοιξε ο παρουσιαστής (π.χ. πόρτα 3), η πιθανότητα ότι το αυτοκίνητο είναι πίσω από την πόρτα **1 παραμένει η ίδια**. Από τη σκοπιά του διαγωνιζόμενου, δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσει ότι η επιλογή του παρουσιαστή (πόρτα 2 ή 3) μεταβάλλει κάτι, αφού οι πόρτες είναι **ισοδύναμες ως προς την επιλογή**.

Ειδικότερα, όταν ο παίκτης επιλέγει μία από τις τρεις πόρτες, η πιθανότητα η επιλογή του να κρύβει το αυτοκίνητο είναι $1/3$. Αν πράγματι συμβαίνει αυτό, τότε η παραμονή στην αρχική επιλογή είναι ωφέλιμη, καθώς οδηγεί στην επιτυχία. Στην περίπτωση αυτή, οι δύο άλλες πόρτες κρύβουν κατσίκες· ο οικοδεσπότης αποκαλύπτει τη μία από αυτές, και αν ο παίκτης αποφασίσει να αλλάξει, απλώς επιλέγει την άλλη πόρτα με



¹Η συγκεκριμένη εκτίμηση είναι **μαθηματικά ακριβής**, εφόσον ισχύει η βασική υπόθεση ότι κάθε πόρτα έχει αρχικά **ίση πιθανότητα** να κρύβει το αυτοκίνητο. Ωστόσο, μια απολύτως διαισθητική απόδειξη αυτού δεν είναι εύκολο να διατυπωθεί.

κατσίκας, χάνοντας έτσι το αυτοκίνητο. Αντιθέτως, υπάρχει **πιθανότητα $2/3$** η αρχική επιλογή να είναι λανθασμένη, δηλαδή να αντιστοιχεί σε πόρτα που κρύβει κατσίκας. Σ' αυτή την περίπτωση, η παραμονή στην επιλογή οδηγεί βέβαια σε αποτυχία. Αν όμως ο παίκτης επιλέξει να αλλάξει, τότε ο οικοδεσπότης —ο οποίος αποκαλύπτει πάντοτε μία πόρτα που δεν κρύβει το αυτοκίνητο— αναγκαστικά αφήνει κλειστή την πόρτα που το περιέχει. Επομένως, η αλλαγή επιλογής σε αυτή την περίπτωση εξασφαλίζει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι **αν το πείραμα επαναληφθεί πολλές φορές, σε περίπου το $1/3$ των περιπτώσεων ο παίκτης που επιλέγει να παραμείνει στην αρχική του επιλογή θα κερδίσει**, ενώ εκείνος που θα αλλάξει θα χάσει. Αντίθετα, **στα $2/3$ των περιπτώσεων**, ο παίκτης που επιμένει στην αρχική επιλογή θα χάσει, ενώ **αυτός που αλλάζει πόρτα θα είναι ο νικητής**.

Ο χάρτης των αποφάσεων: Ένα δεντροδιάγραμμα λογικής

Οι πιο απλές ερμηνείες του προβλήματος συχνά βασίζονται, έστω και έμμεσα, σε μια **συχνιστική² (frequentist) αντίληψη της πιθανότητας**: δηλαδή, θεωρούν ότι η πιθανότητα αντιστοιχεί στη **σχετική συχνότητα εμφάνισης** ενός αποτελέσματος ύστερα από πολλές επαναλήψεις του ίδιου πειράματος.

Ωστόσο, τέτοιες προσεγγίσεις συνήθως **δεν εξετάζουν** αν έχει σημασία **ποια ακριβώς πόρτα** ανοίγει ο οικοδεσπότης. Για παράδειγμα, αν ο παίκτης έχει αρχικά επιλέξει την πόρτα 1, θα μπορούσε η απόφασή του να αλλάξει να εξαρτάται από το αν ο οικοδεσπότης ανοίξει την πόρτα 2 ή την πόρτα 3;

Η διαισθητική απάντηση είναι **όχι** — φαίνεται ότι αυτό δεν επηρεάζει τη στρατηγική. Ωστόσο, όπως έχει ήδη φανεί, η **απλοϊκή διαισθηση** μπορεί συχνά να αποδειχθεί **παραπλανητική**, ειδικά σε προβλήματα πιθανοτήτων όπως το παράδοξο του Monty Hall.

Για να κατανοήσουμε πιο διαισθητικά τη δομή του προβλήματος, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε με ένα **δεντροδιάγραμμα πιθανοτήτων** παρουσιάζοντας αναλυτικά όλα τα δυνατά ενδεχόμενα — από την αρχική επιλογή του παίκτη, έως την ενέργεια του παρουσιαστή και την τελική απόφαση να αλλάξει ή να παραμείνει στην επιλογή του. Με αυτόν τον τρόπο, **μπορούμε να δούμε καθαρά πώς κατανέμεται η πιθανότητα επιτυχίας και γιατί η στρατηγική της αλλαγής δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα νίκης**.

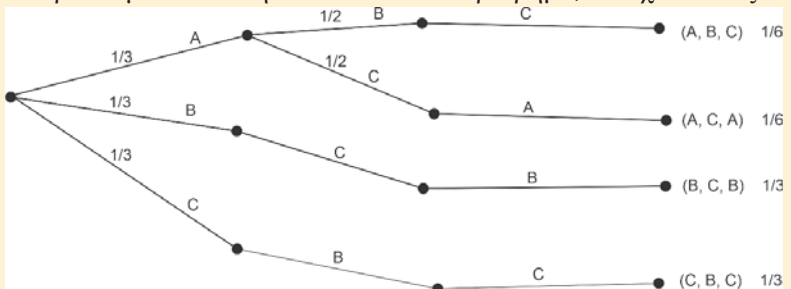
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να περιγραφούν όλες οι δυνατές εκβάσεις του παιχνιδιού. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη. Έστω πως ονομάζουμε κουρτίνα A την κουρτίνα όπου βρίσκεται το αυτοκίνητο, και κουρτίνες B, C τις άλλες δύο. Μπορούμε να περιγράψουμε τα αποτελέσματα ως τριάδες της μορφής (x, x, x), όπου τα x παίρνουν τιμές A, B ή C, και το πρώτο στοιχείο δείχνει την επιλογή του διαγωνιζόμενου, το δεύτερο την κουρτίνα που αποκαλύφθηκε, και το τρίτο την κουρτίνα που επέλεξε τελικά ο διαγωνιζόμενος. Προφανώς υπάρχουν 3 επιλογές για το πρώτο στοιχείο. Αλλά για το δεύτερο στοιχείο υπάρχουν 2 επιλογές αν ο διαγωνιζόμενος έχει αρχικά επιλέξει την κουρτίνα με το δώρο, ενώ υπάρχει μόνο μία αν ο διαγωνιζόμενος έχει επιλέξει κενή κουρτίνα. Για το τρίτο στοιχείο, υπάρχουν πάντα δύο επιλογές. Ο αντίστοιχος χώρος πιθανότητας Ω περιέχει τις 8 δυνατές τριάδες (x, x, x).

Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο είναι πίσω από την κουρτίνα A, και επίσης πως η αρχική επιλογή του παίκτη είναι τυχαία, δηλαδή πως τα ενδεχόμενα «ο παίκτης πρώτα επιλέγει την A», «ο παίκτης πρώτα επιλέγει την B» και «ο παίκτης πρώτα επιλέγει την C» έχουν πιθανότητα $1/3$ το καθένα.

Στρατηγική 1: Έστω πως ο παίκτης **αλλάζει πάντα** κουρτίνα. Τότε θα κερδίσει αν και μόνο αν αρχικά επιλέξει την κουρτίνα B ή C.

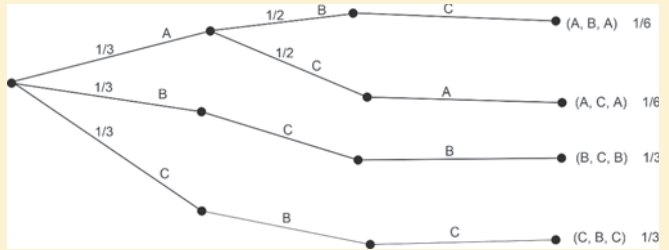
Στο πρώτο βήμα ο παίκτης επιλέγει μία κουρτίνα με πιθανότητα $1/3$. Στο δεύτερο βήμα, αν έχει επιλέξει

την κουρτίνα A με το δώρο, ο παρουσιαστής ανοίγει μία από τις δύο άλλες τυχαία (με πιθανότητα $1/2$), ενώ αν έχει επιλέξει την B ή την C ο παρουσιαστής ανοίγει την άλλη κουρτίνα που δεν περιέχει το δώρο. Στο τρίτο βήμα ο παίκτης πάντα αλλάζει την αρχική επιλογή του. Δεξιά φαίνονται οι τέσσερις δυνατές εκβάσεις του παιχνιδιού μαζί με τις αντίστοιχες πιθανότητές τους. Αυτές στις οποίες ο παίκτης κερδίζει είναι σημειωμένες με (*). Επειδή τα αντίστοιχα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους, η πιθανότητα να κερδίσει είναι $1/3 + 1/3 = 2/3$!



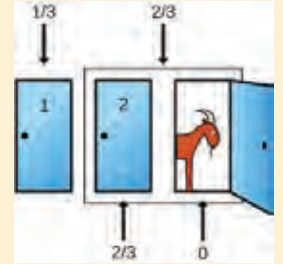
² Η **Συχνιστική Στατιστική** (ή Κλασική Στατιστική) είναι μια φιλοσοφία της στατιστικής συμπερασματολογίας που βασίζεται στον **ορισμό της πιθανότητας ως σχετικής συχνότητας**. Στη συχνιστική προσέγγιση, η πιθανότητα ενός γεγονότος ορίζεται από τη **μακροπρόθεσμη συχνότητα εμφάνισής** του αν το πείραμα επαναληφθεί άπειρες φορές υπό τις ίδιες συνθήκες.

Στρατηγική 2: Ο παίκτης **δεν αλλάζει ποτέ** κουρτίνα. Τότε κερδίζει αν και μόνο αν επιλέξει αρχικά την κουρτίνα Α, δηλαδή με πιθανότητα μόνο $1/3$! Τα δύο πρώτα βήματα είναι τα ίδια με πριν, ενώ στο τρίτο βήμα ο παίκτης διατηρεί την αρχική επιλογή του. Δεξιά πάλι φαίνονται οι τέσσερις δυνατές καταλήξεις και οι πιθανότητές τους. Αυτές στις οποίες ο παίκτης κερδίζει είναι σημειωμένες με (*), οπότε εδώ η πιθανότητα να κερδίσει είναι ίση με: $1/6 + 1/6 = 1/3$!



Όταν το 50% δεν είναι 50%

Η (λανθασμένη) διαισθητική απάντηση «50-50» συχνά υποστηρίζεται λέγοντας ότι ο οικοδεσπότης δεν παρέχει καμία νέα πληροφορία ανοίγοντας μια πόρτα και αποκαλύπτοντας μια κατσίκα, αφού ο διαγωνιζόμενος γνωρίζει εκ των προτέρων ότι τουλάχιστον μία από τις άλλες δύο πόρτες κρύβει μια κατσίκα. Έτσι ο οικοδεσπότης θα ανοίξει μία από τις δύο πόρτες που κρύβουν τις κατσίκες ανάλογα με την περίπτωση και ο διαγωνιζόμενος απλώς πληροφορείται για το περιεχόμενο μιας εκ των δύο πορτών. Ωστόσο η ίδια συλλογιστική μπορεί να χρησιμοποιηθεί ενάντια σε αυτήν την απάντηση: αν πράγματι η ενέργεια του οικοδεσπότη δεν παρέχει πληροφορίες για το τι κρύβεται πίσω από τις κλειστές πόρτες, πώς μπορεί η ενέργειά του να αυξήσει τις πιθανότητες νίκης για την πόρτα που επιλέχθηκε αρχικά από $1/3$ σε $1/2$; Το παράδοξο είναι ότι ενώ αρχικά οι πόρτες 1 και 2 ήταν εξίσου πιθανό να κρύβουν το αυτοκίνητο, αφού ο παίκτης επέλεξε την πόρτα 1 και ο οικοδεσπότης άνοιξε την πόρτα 3, η πόρτα 2 είναι δύο φορές πιο πιθανό να κρύβει το αυτοκίνητο από την πόρτα 1. Το παράδοξο (φαινομενική, αλλά όχι πραγματική, αντίφαση) ισχύει επειδή είναι εξίσου αληθές ότι αρχικά η πόρτα 1 είχε πιθανότητα $1/3$ να κρύβει το αυτοκίνητο, ενώ αφού ο παίκτης επέλεξε την πόρτα 1 και ο οικοδεσπότης άνοιξε την πόρτα 3, η πόρτα 1 εξακολουθεί να έχει πιθανότητα $1/3$ και να κρύβει το αυτοκίνητο.



Η καταγωγή του παράδοξου του Monty Hall

Το πρόβλημα εισήχθη από τον βιοστατιστικολόγο Steve Selvin³ (1975) στο περιοδικό *The American Statistician* και ανάλογα με τις υποθέσεις που γίνονται, θα μπορούσε να θεωρηθεί μαθηματικά ταυτόσημο με το πρόβλημα των Τριών Κρατουμένων⁴ του Martin Gardner⁵ (1959). Ονομάστηκε από τον Selvin ως **Monty Hall Problem**, από το καλλιτεχνικό όνομα του παρουσιαστή, Monty Halperin (ή Halparin) του μακροχρόνιου τηλεοπτικού σόου της δεκαετίας του 1960 «*Let's make a Deal*». Η αρχική δημοσίευση του Selvin προκάλεσε έντονες αντιδράσεις, έχοντας ως αποτέλεσμα μεγάλο πλήθος αναγνωστών του περιοδικού να του στείλουν απαντητικές επιστολές. Μεταξύ των επιστολών αυτών εντοπίστηκε και μία από τον ίδιο τον **Monty Hall**, ο οποίος **επεσήμανε ότι η διατύπωση του «προβλήματος του Monty Hall» δεν ανταποκρινόταν στους ισχύοντες όρους του παιχνιδιού**. Στην πραγματικότητα, ο Monty προσέφερε σπάνια σε έναν παίκτη την επιλογή να αλλάξει σε μια άλλη πόρτα, και το έκανε αυτό ανάλογα με το αν ο παίκτης είχε κάνει μια καλή ή άστοχη αρχική επιλογή. Το πρόβλημα ωστόσο έγινε **παγκοσμίως διάσημο το 1990** με την παρουσίασή του στη δημοφιλή εβδομαδιαία στήλη «*Ask Marilyn*» στο περιοδικό *Parade*. Η συγγραφέας **Marilyn vos Savant**⁶, ήταν, σύμφωνα με το βιβλίο *Guinness World Records* εκείνη την εποχή, το πρόσωπο με το υψηλότερο IQ στον κόσμο. Η **Marilyn vos Savant** παρουσίασε μια σειρά από απλά, αλλά λογικά επιχειρήματα που εξηγούν τη σωστή στρατηγική στο παράδοξο του Monty Hall, δηλαδή ότι, αν ο παίκτης επιλέξει να **αλλάξει πόρτα**, οι πιθανότητές του να κερδίσει το αυτοκίνητο **διπλασιάζονται**. Υποστήριξε ότι ο παίκτης που μένει στην αρχική του επιλογή κερδίζει **αν και μόνο αν** ο παίκτης που **αλλάζει** χάνει. Εφόσον η πιθανότητα να έχει επιλεγεί σωστά η πόρτα με το αυτοκίνητο από την αρχή είναι $1/3$,

³Ο Steve Selvin (1941 – σήμερα) ήταν Αμερικανός βιοστατιστικολόγος και Ομότιμος Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια, Μέρκλεϊ (UC Berkeley), στο οποίο εντάχθηκε το 1972 και το 1977 έγινε επικεφαλής του τμήματος Βιοστατιστικής. Παράλληλα διετέλεσε Αναπληρωτής Καθηγητής Επιδημιολογίας στο Πανεπιστήμιο του Michigan (1990-1998) και Καθηγητής Βιοστατιστικής στο Johns Hopkins University (από το 2005).

⁴Το πρόβλημα των Τριών Κρατουμένων του Martin Gardner, παρουσιάστηκε στη στήλη "Mathematical Games" του Scientific American το 1959 και είναι ένας κλασικός γρίφος πιθανοτήτων

⁵Martin Gardner (21 Οκτωβρίου 1914 – 22 Μαΐου 2010): Διάσημος Αμερικανός συγγραφέας και εκλαϊκευτής των Μαθηματικών και της επιστήμης. Είναι ευρύτερα γνωστός για τη στήλη του "Mathematical Games" (Μαθηματικά Παιχνίδια) στο περιοδικό Scientific American, την οποία διατηρούσε για είκοσι πέντε συνεχή έτη (από το 1956 έως το 1981). Μέσα από αυτή τη στήλη και τα πολυάριθμα βιβλία του, εισήγαγε εκατομμύρια αναγνώστες στην ψυχαγωγική πλευρά των Μαθηματικών, των γρίφων και της λογικής. Αν και δεν είχε επίσημη εκπαίδευση στα μαθηματικά πέρα από το λύκειο, θεωρείται ένας από τους σπουδαιότερους εκλαϊκευτές των Μαθηματικών του 20ού αιώνα.

⁶Αμερικανίδα συγγραφέας και αρθρογράφος. Η φήμη της ξεκίνησε όταν το 1986 το Guinness Book of World Records την κατέγραψε ως το άτομο με το **υψηλότερο IQ στον κόσμο**, με τιμή που υπολογίστηκε περίπου στο 228 (αν και ο τρόπος υπολογισμού έχει αμφισβητηθεί). Η δημοσιότητα αυτή την οδήγησε να γράφει επί χρόνια τη στήλη "Ask Marilyn" στο περιοδικό Parade, όπου απαντούσε σε μαθηματικά, λογικά και φιλοσοφικά ερωτήματα αναγνωστών.

ο παίκτης που παραμένει κερδίζει μόνο **στο 1/3** των περιπτώσεων. Συνεπώς, ο παίκτης που αλλάζει χάνει μόνο κατά το **1/3** των φορών, πράγμα που σημαίνει ότι κερδίζει **στα 2/3** των περιπτώσεων. Αν αλλάξουμε λίγο την κλίμακα του προβλήματος, το επιχείρημα αυτό γίνεται ακόμη πιο πειστικό. Φανταστείτε ότι υπάρχουν **100 πόρτες**, πίσω από τις οποίες κρύβονται **99 κατσίκες** και **ένα αυτοκίνητο**. Ο παίκτης επιλέγει μία από αυτές — για παράδειγμα, την πόρτα 1. Ο οικοδεσπότης, γνωρίζοντας ποια πόρτα κρύβει το αυτοκίνητο, ανοίγει **98 από τις υπόλοιπες 99 πόρτες**, αποκαλύπτοντας όλες τις κατσίκες και αφήνοντας κλειστή μόνο μία ακόμη πόρτα, ας πούμε την πόρτα 67. Σε αυτό το σημείο, η πιθανότητα το αυτοκίνητο να βρίσκεται πίσω από την αρχική επιλογή (πόρτα 1) παραμένει **1 στις 100**, ενώ η πιθανότητα να βρίσκεται πίσω από την πόρτα 67 είναι **99 στις 100**. Συνεπώς, η λογική επιλογή είναι ο παίκτης να **αλλάξει** — κάτι που κάνει την ορθότητα της στρατηγικής προφανή ακόμη και διαισθητικά.

Η **Marilyn vos Savant** δέχθηκε παρόλα αυτά δριμύτατη κριτική από τους **Morgan, Chaganty, Dahiya & Doviak (1991)**⁷, σε άρθρο τους στο *The American Statistician*, επειδή, κατά τη γνώμη τους, δεν υπολόγισε σωστά τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η αλλαγή επιλογής θα οδηγήσει στο αυτοκίνητο, δεδομένης της αρχικής επιλογής του παίκτη και της πόρτας που άνοιξε ο παρουσιαστής. Οι Morgan και συνεργάτες, υιοθετώντας μια **συχνιστική (frequentist)** προσέγγιση, θεώρησαν ότι το αυτοκίνητο είναι τοποθετημένο **τυχαία και ισοπίθανα** πίσω από μία από τις τρεις πόρτες. Ωστόσο, δεν υπέθεσαν ότι ο παρουσιαστής θα επιλέξει με ίση πιθανότητα ποια από τις δύο πόρτες χωρίς αυτοκίνητο θα ανοίξει όταν ο παίκτης έχει διαλέξει σωστά. Η vos Savant ακολουθώντας απάντησε με επιστολή (1991), και ακολούθησαν περαιτέρω σχόλια από τους **Seymann (1991), Bell (1992)** και **Bhaskara Rao (1992)**. Μετά από αρκετά χρόνια, το ζήτημα επανεξετάστηκε από τους **Hogbin και Nijdam (2010)** και, τέλος, από τους **Morgan et al. (2010)**, οι οποίοι δημοσίευσαν μια τελική απάντηση. Σε αυτήν αποκαλύφθηκε και η **αρχική διατύπωση του Craig Whitaker** (ο οποίος έστειλε την ερώτηση-γρίφο στην στήλη "Ask Marilyn" στο περιοδικό **Parade Magazine** το 1990) ο οποίος είχε γράψει στη vos Savant:



«Έχω εξετάσει δύο διαφορετικά σενάρια, ανάλογα με το αν ο Monty γνωρίζει ή όχι τι κρύβεται πίσω από τις πόρτες. Στη μία περίπτωση συμφέρει να αλλάξεις επιλογή, στην άλλη όχι. Τι πιστεύετε;»

Τελική πόρτα: Κατανόηση

Το πρόβλημα του Monty Hall αποτελεί ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα του πώς η **πιθανολογική σκέψη** μπορεί να έρχεται σε αντίθεση με τη **διαισθητική λογική**. Μέσα από μια φαινομενικά απλή επιλογή ανάμεσα σε τρεις πόρτες, αναδεικνύεται η βαθύτερη διάκριση ανάμεσα στην **αντικειμενική πιθανότητα** και στη **γνωσιακή ερμηνεία** της αβεβαιότητας — δηλαδή, ανάμεσα στο τι ισχύει στατιστικά και στο πώς το αντιλαμβάνεται ο νους του ανθρώπου. Η ανάλυση του προβλήματος, είτε με **δεσμευμένες πιθανότητες**, είτε με **δεντροδιαγράμματα**, είτε μέσω **προσομοιώσεων**, δείχνει ότι η σωστή στρατηγική — η αλλαγή της αρχικής επιλογής — δεν είναι προϊόν τύχης, αλλά συνέπεια μιας ορθής εκτίμησης και ερμηνείας της πληροφορίας. Η γνώση ότι ο παρουσιαστής ανοίγει πάντα μια πόρτα με κατσίκες δεν είναι ουδέτερη: **μεταβάλλει τη δομή του ενδεχομενικού χώρου και, επομένως, την ίδια την πιθανότητα επιτυχίας**. Στο ευρύτερο πλαίσιο της κουλτούρας των **στοχαστικών μαθηματικών**, το Monty Hall μας φέρνει αντιμέτωπους με τη φιλοσοφική ουσία της πιθανότητας: την **αμφισημία μεταξύ τύχης και γνώσης**, μεταξύ αβεβαιότητας και πληροφορίας. Είναι ένα μικρό αλλά εντυπωσιακό παράδειγμα του πώς η θεωρία πιθανοτήτων δεν περιορίζεται στην επίλυση προβλημάτων, αλλά επεκτείνεται στη **μελέτη του τρόπου που σκεφτόμαστε για τον κόσμο**. Έτσι, πίσω από τις πόρτες του Monty Hall δεν κρύβεται μόνο ένα αυτοκίνητο ή μια κατσίκες — κρύβεται μια μαθηματική υπενθύμιση: ότι η **ορθή κατανόηση της αβεβαιότητας είναι η πιο σίγουρη μορφή γνώσης**.

Βιβλιογραφία

- Selvin, S. (1975a). A problem in probability. *The American Statistician*, 29(1), 67.
 Selvin, S. (1975b). On the Monty Hall problem. *The American Statistician*, 29(3), 134.
 Rosenhouse, J. (2009). *The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brainteaser*. Oxford University Press.
 Alrahili, M. (2017). Different versions of the Monty Hall problem. *International Journal of Applied Information Systems*, 11(9), 1–5.
 Sprenger, J. (2010). Probability, rational single-case decisions and the Monty Hall problem. *Philosophical Studies*, 147(2), 193–207.
 Kluger, B. D., & Friedman, D. (2006). Financial engineering and rationality: Experimental evidence based on the Monty Hall problem. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 61(1), 37–55.

⁷ Οι Morgan, Chaganty, Dahiya και Doviak είναι τέσσερις **στατιστικολόγοι** που έγιναν ιδιαίτερα γνωστοί στον ακαδημαϊκό χώρο το 1991 λόγω της ανάλυσής τους πάνω στο **πρόβλημα του Monty Hall** (Monty Hall Problem). Το 1991 δημοσίευσαν το άρθρο "Let's Make a Deal: The Player's Dilemma" στο περιοδικό *The American Statistician* (Τόμος 45, Τεύχος 4), παρουσιάζοντας μια **επίσημη στατιστική ανάλυση** του διάσημου γρίφου πιθανοτήτων, επισημαίνοντας ότι η σωστή απάντηση (ότι η αλλαγή επιλογής διπλασιάζει την πιθανότητα νίκης) βασίζεται σε **άδολες υποθέσεις** σχετικά με το πρωτόκολλο του οικοδεσπότη (Monty Hall) για το ποια πόρτα θα ανοίξει. Η εργασία τους ήταν καθοριστική στη μεγάλη **διαμάχη** που ξέσπασε εκείνη την εποχή, μετά τη δημοσίευση της απάντησης από τη Marilyn vos Savant, καθώς έδωσε μια αυστηρή μαθηματική βάση στην ανάλυση του προβλήματος.

Η συμβολή των Μαθηματικών στην ιστορία της Ναυσιπλοΐας από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα.

Θανάσης Κοπάδης

Το μεγαλείο των αρχαίων ελληνικών πλοίων

Εφευρετικοί, καινοτόμοι και πρωτοπόροι των φυσικών επιστημών, οι πρόγονοί μας προσάρμοσαν τις κατασκευές των πλοίων τους ώστε να εξυπηρετούν εμπορικούς και πολεμικούς σκοπούς. Ήδη από το 9000 π.Χ., όπως μαρτυρούν τα αρχαιολογικά ευρήματα, υπήρχε διακίνηση εμπορευμάτων στο Αιγαίο από τους Κυκλαδίτες. Τα κωπήλατα και ιστιοφόρα πλοία των Μινωιτών έπλεαν στη Μεσόγειο μέχρι περίπου το **1500 π.Χ.**, ενώ ο **Όμηρος στην Ιλιάδα** αναφέρει ότι στον Τρωικό Πόλεμο έλαβαν μέρος **1.186 πλοία!**

Μορφολογικά τα πρώτα εμπορικά πλοία ήταν στρογγυλά με τετράγωνη ιστία, ωστόσο η ανάγκη για πιο ευέλικτα και γρήγορα πλοία, λόγω πολεμικών εκστρατειών, δημιούργησε τις τριαντακοντόρους, τις πεντηκοντόρους, τις διήρεις και αργότερα τις τριήρεις. Οι **διήρεις** είχαν δύο σειρές κουπιών σε κάθε πλευρά, κάτι που τους επέτρεπε να αναπτύσσουν μεγάλες ταχύτητες. Το μήκος τους ήταν 32 μέτρα και το πλάτος τους 5 μέτρα. Εξελεγμένη μορφή τους αποτέλεσαν οι **τριήρεις**, πλοία χαμηλά και ευέλικτα με τρεις σειρές κουπιών και ταχύτητα η οποία έφθανε τα 12 ναυτικά μίλια την ώρα. Οι τριήρεις χρησιμοποιήθηκαν στη Ναυμαχία της **Σαλαμίνας το 480 π.Χ.**, μια από τις αποφασιστικότερες συγκρούσεις της παγκόσμιας ιστορίας και ορόσημο για την Ελλάδα, καθώς ξέφυγε από τον κίνδυνο του περσικού επεκτατισμού.



Από τον Δαίδαλο στη Ναυτική Τεχνολογία της Αρχαίας Ελλάδας και αργότερα.

Η μεγάλη διαφορά ανάμεσα στον Ελληνικό πολιτισμό από τους υπόλοιπους είναι ότι ανέπτυξε τις επιστήμες και βάσισε την τεχνολογία του πάνω σε αυτές. Ο **Μινωικός υπολογιστής** για παράδειγμα, ο οποίος θεωρείται και ο αρχαιότερος ψηφιακός υπολογιστής, αποδεικνύει το γεγονός της χρήσης των Μαθηματικών χίλια με χίλια πεντακόσια χρόνια πριν από τον Πυθαγόρα.

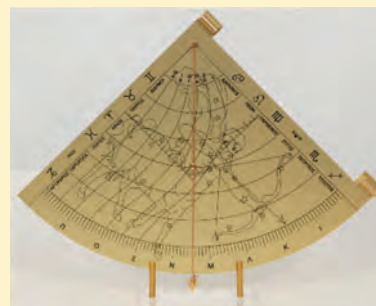
Σε αυτό το ανήσυχο και εφευρετικό πνεύμα των αρχαίων Ελλήνων οφείλεται και η παρουσία των ελληνικών πλοίων ήδη από την 8^η π.Χ. χιλιετία. Οι Έλληνες ανέπτυξαν τόσο πολύ τη ναυτική τέχνη ώστε για αιώνες ήταν οι κυρίαρχοι της Μεσογείου. Η δύναμη τους αυτή στηρίχθηκε πάνω στη γνώση της **Αστρονομίας**, η οποία συνέβαλε στην ανάπτυξη της **Γεωγραφίας**, της **Χαρτογραφίας**, της **Πελαγοδρομίας** (πλεύση σε ανοιχτό πέλαγος) και της **Ναυπηγικής**. Στηρίχθηκε όμως και σε πλήθος ναυτικών οργάνων, χαρτών, ανεμολογίων και άλλων βοηθημάτων ναυτιλίας. Η πυξίδα, το ανεμοσκόπιο, οι αστρολάβοι, τα ανεμολόγια, τα ηλιακά ρολόγια, τα δρομόμετρα, οι ουράνιες σφαίρες κ.α. είναι μερικά μόνο από τα επιτεύγματα, στα οποία οι αρχαίοι Έλληνες έκαναν εκτεταμένη χρήση των μαθηματικών τους γνώσεων και ανακαλύψεων.

• Γνώμων

Πρόδρομος του ηλιακού ρολογιού, ανακάλυψη που αποδίδεται στον **Αναξίμανδρο** (611 π.Χ. – 547 π.Χ.), μαθητή του Θαλή και μια από τις σημαντικότερες μορφές της προσωκρατικής φιλοσοφικής διανόησης. Εξυπηρετούσε στη λήψη πληροφοριών σχετικά με τις τροπές και τις ισημερίες από την παρατήρηση της δημιουργούμενης σκιάς επί του εδάφους, αλλά και άλλων γεωγραφικών στοιχείων προσαρμοσμένων στις ανάγκες της ναυτιλίας.

• Τετράντας

Μετρικό όργανο το οποίο χαρακτηρίζεται ως ο πρώτος εντοπιστής του γεωγραφικού πλάτους μιας περιοχής και χρησιμοποιήθηκε ευρέως στη Ναυσιπλοΐα και στην Αστρονομία. Μια ανακάλυψη που αποτέλεσε έναν ανεκτίμητο σύμμαχο για τους πλοηγούς και που, εκτός της λειτουργικής του αξίας, ήταν ένα όργανο που συνόδευε τον άνθρωπο στην αναζήτηση της θέσης του στον κόσμο και στην κατανόηση του ουράνιου και γήινου τοπίου. Εφευρέθηκε από τον σπουδαίο μαθηματικό, αστρονόμο και χαρτογράφο **Ίππαρχο** (190 π.Χ. – 120 π.Χ.)



• Ηλιακό Ρολόι

Το Ηλιακό Ρολόι των Φιλίππων αποτελεί ένα εύρημα της αρχαιολογικής ανασκαφής του 1965 στους Φιλίππους της Μακεδονίας και χρονολογείται μεταξύ 250 και 350 μ.Χ. Αυτό το πολύπλοκο όργανο, εκτός από τη λειτουργία του ως ηλιακό ρολόι, χρησίμευε και στη μέτρηση του γεωγραφικού πλάτους, του αζιμούθιου και της απόστασης των αστερών.



• Ανεμοσκόπιο

Το ανεμοσκόπιο ή ανεμολόγιο, εφεύρεση του θρυλικού θαλασσοπόρου και χαρτογράφου από την Ρόδο **Τιμοσθένης** (3^{ος} αιώνας π.Χ.), ένα απλό αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο ναυτιλιακό όργανο, το οποίο χρησιμοποιήθηκε στον προσανατολισμό των πλεύσεων. Αποτελούνταν από ένα δίσκο με ακτίνες, που υποδείκνυαν τις κατευθύνσεις των δώδεκα ανέμων (Απαρκτίας, Βορέας, Καικίας, Απηλιώτης, Εύρος, Ευρόνοτος, Νότος, Λιβονότος, Λιψ, Ζέφυρος, Αργέστης, Θρασκίας). Στο κέντρο του έφερε έναν περιστρεφόμενο ανεμοδείκτη που είχε τη μορφή ταινίας ή αγαλματιδίου και πιθανότατα στην περιφέρειά του δώδεκα λοξούς στυλίσκους.

• Αστρολάβος

Ένα ιστορικό αστρονομικό όργανο το οποίο χρησιμοποιούσαν οι ναυτικοί και οι αστρονόμοι για την Ναυσιπλοΐα και την παρατήρηση του Ήλιου και των αστεριών. Χρησιμοποιήθηκε ευρέως από τον 3^ο αιώνα π.Χ. μέχρι τον 18^ο αιώνα μ.Χ., ενώ έπειτα χρησιμοποιήθηκε ένα πιο εξελιγμένο όργανο, ο εξάντας. Με τον αστρολάβο μπορούσαν να προβλέψουν τις θέσεις του Ήλιου, της Σελήνης, των πλανητών, των άστρων και των δορυφόρων. Επιπλέον μπορούσαν να υπολογίσουν την ώρα αν γνώριζαν γεωγραφικό μήκος και πλάτος και αντίστροφα. Ένας αστρολάβος ήταν, συνήθως, κατασκευασμένος από χαλκό και είχε διάμετρο 15 εκατοστών, αν και υπήρχαν και αρκετά μεγαλύτεροι. Στην πρόσοψη του ήταν ζωγραφισμένος ο ουρανός, με βάση τα 20 πιο φωτεινά αστέρια.



Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που είχαν να απαντήσουν οι αστρολάβοι για τη χρησιμότητά τους ήταν το εξής: *εφόσον οι πρόγονοί μας πίστευαν πως το Σύμπαν είχε στο κέντρο του τη Γη, πώς μπορούσε κι έδινε σωστά στοιχεία ο αστρολάβος εφόσον, προφανώς, το ηλιακό μας σύστημα έχει στο κέντρο του τον Ήλιο;*

Κι όμως οι πρόγονοί μας γνώριζαν τα σχετικά μεγέθη με τη Γη και τον Ήλιο, αλλά και τις αποστάσεις μεταξύ τους. Εφόσον δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε ένα ηλιοκεντρικό σύστημα ή ένα σύστημα που θα είχε στο κέντρο του τη Γη, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά τα μαθηματικά, τα αποτελέσματα που έβρισκαν ήταν σωστά.

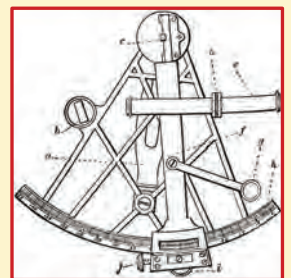
Η σπουδαία αυτή εφεύρεση αποδίδεται στον Έλληνα μαθηματικό και αστρονόμο **Απολλώνιο τον Περγαίο** (220 π.Χ.) και λίγο αργότερα βελτιώθηκε από τον επίσης σημαντικό μαθηματικό, αστρονόμο και χαρτογράφο **Ίππαρχο**. Αργότερα, τον 8^ο με 10^ο αιώνα μ.Χ., ο αστρολάβος πήρε σχεδόν επίπεδη μορφή από τους Άραβες (λέγεται ότι ο πρώτος επίπεδος αστρολάβος φτιάχτηκε τον 8^ο αιώνα μ.Χ. από τον Πέρση μαθηματικό **Fazari**) και μπορούσε να προσδιορίσει επιπλέον το ύψος των ουράνιων σωμάτων. Από την Ισλαμική Ισπανία, ο αστρολάβος διαδόθηκε στην Ευρώπη τον 11^ο αιώνα και χρησιμοποιήθηκε στη Ναυσιπλοΐα μέχρι τον 18^ο αιώνα έως ότου τελικά αντικαταστάθηκε από τον εξάντα.

• Εξάντας

Ο εξάντας είναι ένα γωνιομετρικό όργανο, χαρακτηριζόμενο και αστρονομικό. Χρησιμοποιείται ευρέως στη Ναυσιπλοΐα και στο παρελθόν ήταν το Α και το Ω για τους ναυτικούς. Με τον εξάντα μπορούσαν να προσδιορίσουν τη θέση τους επάνω στην Γη (στίγμα) και τον χρησιμοποιούσαν συνεχώς όταν βρίσκονταν στην ανοιχτή θάλασσα. Στην σημερινή εποχή η χρήση του δεν είναι τόσο διαδεδομένη, εξαιτίας των ηλεκτρονικών συστημάτων που υπάρχουν. Ακόμα και έτσι όμως, παραμένει ένα πολύ σημαντικό όργανο, το οποίο ο αξιωματικός γέφυρας θα πρέπει να ξέρει να χειρίζεται. Οι παλιότεροι θαλασσοπόροι προσδιόριζαν τη θέση του πλοίου τους στην ανοιχτή θάλασσα με τη μέτρηση



των γωνιών που σχημάτιζαν τα ουράνια σώματα. Ο εξάντας συνδύαζε τις γήινες ή όπως καλούνται **γεωγραφικές συντεταγμένες** ενός τόπου με ένα σημείο στην ουράνια σφαίρα, δηλαδή συνδύαζε τη θέση ενός παρατηρητή στη Γη με τη θέση ενός αστερά. Ο συνδυασμός αυτός απαιτεί την εύρεση της σχετικής θέσης των δύο σφαιρών ακριβώς κατά την στιγμή της παρατήρησης, κάτι το οποίο επιτύγχανε ο εξάντας, σε αντίθεση με τον πρώιμο αστρολάβο, ο οποίος απαιτούσε την ταυτόχρονη σκόπευση και του αστερά και του ορίζοντα από το κατάστρωμα του πλοίου, οδηγώντας συχνά σε ανακριβείς υπολογισμούς. Ο εξάντας εφευρέθηκε το



1757 από τον Άγγλο αξιωματικό του Ναυτικού **Τζον Κάμπελ**, ενώ χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί ο μεγάλος θαλασσοπόρος και χαρτογράφος **Τζέιμς Κουκ**, ο οποίος εκμεταλλεύτηκε πλήρως τις δυνατότητες του εξάντα για τη μέτρηση, όχι μόνο κατακόρυφων γωνιών, αλλά και γωνιών με οποιαδήποτε κλίση, μέθοδος που χρησιμοποίησε για τη χαρτογράφηση της Νέας Ζηλανδίας στη διάρκεια ενός ταξιδιού του (1768-1771).

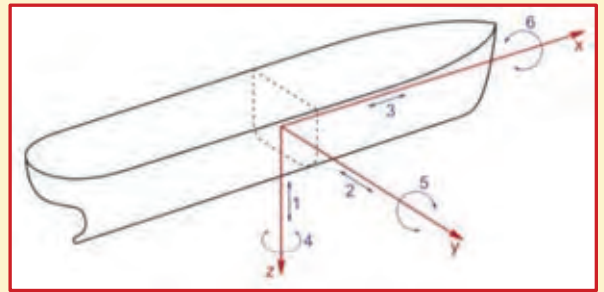
Μαθηματικά και μαθηματικοί στην ανάπτυξη της Ναυσιπλοΐας.

Τα Μαθηματικά διαδραμάτισαν κρίσιμο ρόλο στην ανάπτυξη της Ναυσιπλοΐας από την αρχαιότητα, ενώ συνεχίζουν μέχρι και σήμερα να συμβάλλουν στη Ναυτική Βιομηχανία με πολλούς και διάφορους τρόπους.

• Η αρχή του Αρχιμήδη

Όλα ξεκινούν από τον μεγαλύτερο μαθηματικό και επιστήμονα της αρχαιότητας, τον **Αρχιμήδη**. Έζησε από το 287 π.Χ. μέχρι το 212 π.Χ. και δίκαια συγκαταλέγεται στους τέσσερις σημαντικότερους μαθηματικούς όλων των εποχών μαζί με τον Νεύτωνα, τον Gauss και τον Euler. Μελετώντας λοιπόν την **αρχή της άνωσης** με την **αρχή του Αρχιμήδη** μπορούμε να αναλύσουμε τον τρόπο ισορροπίας των πλοίων στην επιφάνεια της θάλασσας, αλλά και τις στρεβλώσεις που αυτή μπορεί να προκαλέσει στην κατασκευή ενός πλοίου.

Η **άνωση** εκδηλώνεται σε κάθε σώμα που βρίσκεται εντός ρευστού και γίνεται αντιληπτή ως δύναμη που δρα αντίθετα στο βάρος του. Ένα κομμάτι ξύλο επιπλέει στο νερό, διότι η άνωση που δέχεται είναι μεγαλύτερη από το βάρος του, λόγω του ότι η πυκνότητά του είναι μικρότερη από αυτήν του νερού. Αντιθέτως, ένα κομμάτι χάλυβα δεν επιπλέει μιας και το βάρος του είναι μεγαλύτερο από την άνωση, κάτι το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι η πυκνότητά του είναι μεγαλύτερη από αυτή του νερού. Παρ' όλα αυτά το πλοίο επιπλέει και αυτό συμβαίνει εκτοπίζοντας όγκο νερού με βάρος ίσο ή μεγαλύτερο από το δικό του. Το υποβρύχιο έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλει το εκτόπισμά του με πλήρωση ύδατος ειδικών δεξαμενών που φέρει. Η άνωση των πλοίων, που λέγεται **πλευστότητα**, αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια της Ναυπηγικής στο οποίο γίνεται εκτεταμένη χρήση μαθηματικών τύπων και αρχών της Φυσικής.



Χρήση Μαθηματικών γίνεται επίσης στον υπολογισμό της κατανομής του φορτίου σε ένα πλοίο προκειμένου να διασφαλιστεί ότι θα παραμείνει ισορροπημένο και σταθερό κατά τη διάρκεια των εργασιών φόρτωσης και εκφόρτωσης. Γενικότερα υπάρχουν εκατοντάδες μαθηματικοί τύποι οι οποίοι ρυθμίζουν θέματα, όπως: αντίσταση του πλοίου, αντίσταση λόγω σχήματος, λόγω κυματισμού, λόγω τριβής με το νερό, λόγω αέρα, κυματισμός, ροπή ευστάθειας, κέντρο βάρους κ.α. Όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί είναι όχι απλά σημαντικοί, αλλά απαραίτητοι για τη διασφάλιση της ασφάλειας και της σταθερότητας ενός σκάφους στη θάλασσα.

• Σφαιρική τριγωνομετρία

Πριν από 500 χρόνια η Ναυσιπλοΐα στον ωκεανό ήταν ένα πολύ δύσκολο εγχείρημα. Οι άνεμοι και τα ρεύματα παρέσυραν τα πλοία εκτός πορείας και οι ναυτικοί βάσιζαν την κατεύθυνσή τους στο λιμάνι άφιξης προσπαθώντας να διατηρήσουν ένα ακριβές αρχείο της κατεύθυνσης και της απόστασης που ταξίδευσε το πλοίο. Αυτή η διαδικασία ήταν γνωστή ως **«μηδενικός υπολογισμός»** επειδή ακόμα και ένα σφάλμα μισής μοίρας μπορούσε να τους κάνει να χάσουν το νησί που βρισκόταν πολλά μίλια πέρα από το ορίζοντα. Τέτοια σφάλματα ήταν πολύ συχνά και εύκολο να συμβούν. Ευτυχώς τα Μαθηματικά συνέβαλλαν καθοριστικά στο να καταστεί η σύγχρονη Ναυσιπλοΐα δυνατή.



Η **σφαιρική τριγωνομετρία** αποτελεί αδιαμφισβήτητο έναν τομέα των Μαθηματικών με τεράστια συμβολή στη Ναυτιλία και στην Αστρονομία. Η εξέλιξη της έχει συμβεί και έχει φτάσει σε αυτό που γνωρίζουμε μέσα από την πάροδο των αιώνων, έχοντας σαν αφετηρία την αρχαία Ελλάδα, όπου μέσω της χρήσης ενός κανόνα και ενός διαβήτη γινόταν η προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων, ενώ με τις σημαντικές ανακαλύψεις του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα πήρε τη μορφή που σήμερα γνωρίζουμε.

Γενικά η γνώση της σφαιρικής τριγωνομετρίας και ειδικά των εφαρμογών της είναι απαραίτητη για έναν ναυτικό και δεν μειώνεται αυτή η αναγκαιότητα, ούτε υποβαθμίζεται από τη χρήση σύγχρονων μηχανημάτων και τεχνολογιών. Η σφαιρική τριγωνομετρία είναι κλάδος της **σφαιρικής γεωμετρίας**, ο οποίος ασχολείται με τις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων των πλευρών και των γωνιών σφαιρικών πολυγώνων (κυρίως σφαιρικών τριγώνων) και έχει μεγάλη σημασία για τους υπολογισμούς στην αστρονομία, στη γεωδαισία και στην πλοήγηση πλοίων.

Συνέχεια στη σελίδα 81



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

86^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ" 7 Νοεμβρίου 2025

Οι λύσεις των θεμάτων

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακераίους A οι οποίοι είναι 2025 φορές μεγαλύτεροι από το τελευταίο ψηφίο τους.

Λύση (1^{ος} τρόπος). Έστω x το τελευταίο ψηφίο του A . Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$A = M + x, \text{ όπου } M = 10B = \text{πολλαπλάσιο του } 10.$$

Αφού ο A είναι 2025 φορές το τελευταίο του ψηφίο, θα ισχύει:

$$10B + x = 2025x \Leftrightarrow 2024x = 10B.$$

Για να είναι πολλαπλάσιο του 10 το αριστερό μέλος, πρέπει το ψηφίο x να είναι το 0 ή το 5. Όμως ο x δεν μπορεί να είναι 0, γιατί τότε θα είχαμε $A = 0$.

Άρα πρέπει να ισούται με 5 και ο μοναδικός θετικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα είναι ο

$$A = 2024 \cdot 5 + 5 = 10125.$$

(2^{ος} τρόπος). Έστω $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ το τελευταίο ψηφίο του A . Τότε ο αριθμός $A = 2025 \cdot x$ πρέπει να έχει τελευταίο ψηφίο το x . Αυτό συμβαίνει όταν:

(α) $x = 0$, που απορρίπτεται, γιατί τότε θα είναι $A = 0$.

(β) $x = 5$, οπότε προκύπτει $A = 2025 \cdot 5 = 10125$.

Πρόβλημα 2. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα:

$$4x^2 + 9y^2 + x^2y^2 + 18xy - 4x - 6y + 10 = 0,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = 8x^3 + 27y^3$.

Λύση. Η παράσταση A μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y(2x + 3y) \Rightarrow$$

$$A = (2x + 3y)^3 - 18xy(2x + 3y) \quad (1)$$

Επομένως, θα προσπαθήσουμε από τη δεδομένη ισότητα να εμφανίσουμε τις παραστάσεις $2x + 3y$ και xy .

Η δεδομένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$(2x)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + 6xy + x^2y^2 - 2(2x + 3y) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y)^2 - 2(2x + 3y) + 1 + x^2y^2 + 6xy + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x + 3y - 1)^2 + (xy + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

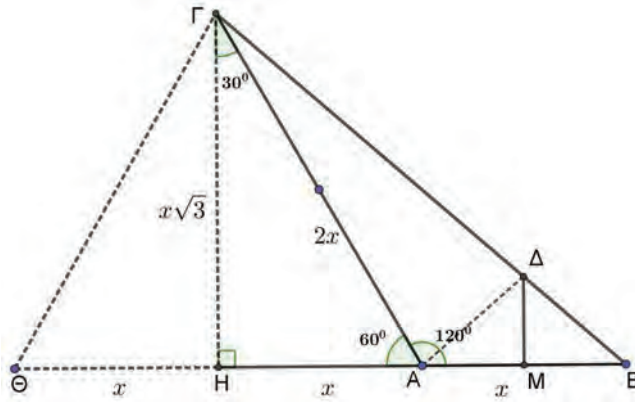
$$2x + 3y = 1 \quad (2) \quad \text{και} \quad xy = -3 \quad (3)$$

Άρα έχουμε:

$$A = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y(2x + 3y) \Rightarrow A = 1^3 - 18 \cdot (-3) \cdot 1 = 55.$$

Πρόβλημα 3. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι: $\widehat{A} = 120^\circ$ και $A\Gamma = 2 \cdot AB$. Αν η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ , να βρεθεί ο λόγος $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

Λύση



Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το μέρος του A και φέρουμε από την κορυφή Γ κάθετη προς την ευθεία AB που την τέμνει, έστω στο H .

Επειδή $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ$, έπεται ότι: $\widehat{\Gamma\hat{A}H} = 60^\circ$ και $\widehat{A\hat{\Gamma}H} = 30^\circ$. Αν Θ είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ΓH , τότε το τρίγωνο $A\Gamma\Theta$ είναι ισόπλευρο. Αν $AB = x$, τότε $A\Gamma = 2x$ και $AH = H\Theta = x$.

Επειδή η ευθεία $M\Delta$, όπου M μέσο της πλευράς AB , είναι μεσοκάθετη της πλευράς AB έπεται ότι: $A\Delta = \Delta B$ και $AM = BM = \frac{x}{2}$.

Επειδή $DM \perp AB$ και $\Gamma H \perp AB$, έπεται ότι $DM \parallel \Gamma H$, οπότε από το θεώρημα του Θαλή, έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BD}{\Delta\Gamma} = \frac{BM}{MH} = \frac{BM}{MA + AH} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} + x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

(2ος τρόπος). Έστω K σημείο στην προέκταση της BA προς το A τέτοιο ώστε $\Gamma K \perp BA$, και έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. Τότε η KM είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΓMA που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε είναι $KM = MA$. Αφού $\widehat{K\hat{A}M} = 60^\circ$, το ισοσκελές τρίγωνο KMA είναι ισόπλευρο, οπότε $KA = MA = \frac{A\Gamma}{2} = AB$,

δηλαδή το A είναι το μέσο του KB . Αν N είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $B\Gamma K$, τότε θα είναι $NK = NB$.

Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα KNB , $A\Delta B$ είναι όμοια, αφού έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, και άρα:

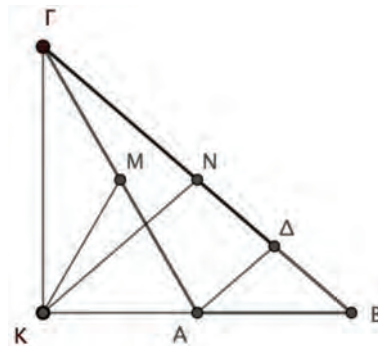
$$\frac{ND}{\Delta B} = \frac{KA}{AB} = 1,$$

δηλαδή $ND = \Delta B = A\Delta$.

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma\Delta &= \Gamma N + ND = NB + ND \\ &= 2 \cdot A\Delta + A\Delta = 3 \cdot A\Delta. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με $1/3$.



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Αν οι a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και η εξίσωση

$$3x^2 - 2(2a + b)x + 2a^2 + 2ab + b^2 - 1 = 0$$

με άγνωστο το x έχει πραγματικές λύσεις, να αποδείξετε ότι:

$$(1). \quad a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad (2). \quad a + b \leq \sqrt{2}.$$

Λύση. (1) Αφού η δεδομένη εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, η διακρίνουσά της θα είναι μη αρνητική, δηλαδή $\Delta = 4[(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1)] \geq 0 \Leftrightarrow$

$$(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2}$$

(2) Ισχύει ότι:

$$a^2 + b^2 + ab \geq 2ab + ab = 3ab,$$

οπότε θα έχουμε:

$$3ab \leq \frac{3}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες ανισότητες και το ότι $a, b > 0$, έχουμε:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2} \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB < BG$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ να έχουν ίσα εμβαδά. Αν επιπλέον ισχύει ότι $AB^2 = AE \cdot AD$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

Λύση. Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ έχουν ίσα εμβαδά, ισχύει

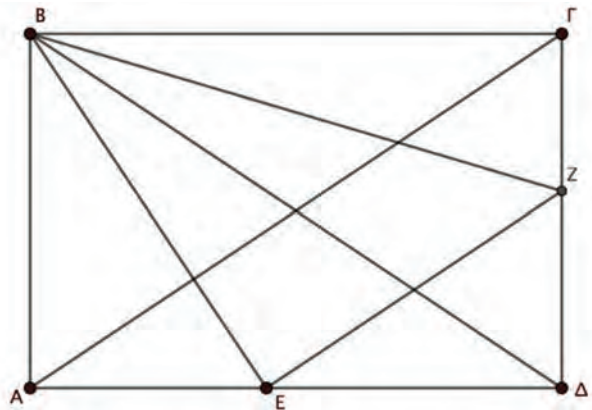
$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot GZ,$$

δηλ. $BA \cdot AE = BG \cdot GZ$, ή ισοδύναμα, $\Delta\Gamma \cdot AE = \Delta A \cdot \Gamma Z$

αφού $BA = \Delta\Gamma$ και $BG = \Delta A$.

$$\text{Τότε έχουμε: } \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Gamma Z}{AE} = \frac{\Delta\Gamma - \Gamma Z}{\Delta A - AE} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}.$$

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ και ΔΕΖ έχουν την ορθή γωνία κοινή και ίσους τους λόγους των καθέτων πλευρών τους, οπότε θα είναι $EZ \parallel AG$ και άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = E\hat{Z}\Delta$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ΑΓ και ΖΕ με τέμνουσα την ΓΖ.



Επιπλέον, τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΑΔΓ είναι όμοια, αφού έχουν

$$\frac{BA}{AE} = \frac{\Delta A}{AB} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \text{ και } B\hat{A}E = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ.$$

Επομένως θα έχουν

$$A\hat{E}B = A\hat{\Gamma}\Delta = E\hat{Z}\Delta,$$

οπότε θα είναι:

$$A\hat{E}B = E\hat{Z}\Delta = Z\hat{\Delta}E - Z\hat{E}\Delta = 90^\circ - Z\hat{E}\Delta.$$

Άρα είναι $A\hat{E}B + Z\hat{E}\Delta = 90^\circ$, οπότε $B\hat{E}Z = 90^\circ$.

Διαφορετικά, μπορούμε από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ και ΔΕΖ, με χρήση τριγωνομετρίας, να έχουμε:

$$\varepsilon\varphi \Delta\hat{A}\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Delta Z}{\Delta E} = \varepsilon\varphi \Delta\hat{E}Z,$$

οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$ και άρα για τις συμπληρωματικές τους είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = E\hat{Z}\Delta$.

Αφού $AB^2 = AE \cdot AD$, στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΖ είναι

$$\varepsilon\varphi A\hat{E}B = \frac{AB}{AE} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \varepsilon\varphi E\hat{Z}\Delta,$$

οπότε

$$A\hat{E}B = E\hat{Z}\Delta = Z\hat{\Delta}E - Z\hat{E}\Delta = 90^\circ - Z\hat{E}\Delta.$$

Άρα $A\hat{E}B + Z\hat{E}\Delta = 90^\circ$, οπότε $B\hat{E}Z = 90^\circ$ όπως θέλαμε.

(2^{ος} τρόπος) Έστω σημείο Κ στην ΑΓ τέτοιο ώστε $EK \perp AG$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΕ, ΑΔΓ είναι όμοια, αφού έχουν κοινή την οξεία γωνία ΓΑΔ. Έτσι,

$$\frac{AK}{AE} = \frac{AD}{AG},$$

και άρα: $AK \cdot AG = AD \cdot AE = AB^2$.

Έστω σημείο Κ' στην ΑΓ τέτοιο ώστε $BK' \perp AG$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚ'Β και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$AK' \cdot AG = AB^2 = AK \cdot AG.$$

Άρα τα σημεία Κ, Κ' ταυτίζονται, και η ευθεία ΒΕ είναι κάθετη στην ΑΓ στο Κ.

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ έχουν το ίδιο εμβαδό, ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot GZ,$$

δηλαδή $BA \cdot AE = BG \cdot GZ$, ή ισοδύναμα, $\Delta\Gamma \cdot AE = \Delta A \cdot GZ$

αφού $BA = \Delta\Gamma$ και $BG = \Delta A$. Τότε:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{GZ}{AE} = \frac{\Delta\Gamma - GZ}{\Delta A - AE} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}.$$

που σημαίνει ότι $EZ \parallel AG$. Συνεπώς, $BE \perp EZ$, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3. Ο Γιώργος μοίρασε διαδοχικά 150 μπίλιες σε 10 κουτιά $K_1, K_2, \dots, K_{10}$, με αυτή τη σειρά, στα οποία έβαλε $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ μπίλιες, αντίστοιχα, όπου $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ θετικοί ακέραιοι. Ξεκινώντας να βάζει μπίλιες από το κουτί K_1 , σε κάθε επόμενο κουτί έβαζε περισσότερες μπίλιες από το προηγούμενο. Αν ο αριθμός από μπίλιες που έβαλε στο πρώτο κουτί είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μισό του αριθμού από μπίλιες που έβαλε στο δέκατο κουτί, να βρεθεί πόσες μπίλιες έβαλε στο έκτο κουτί.

Λύση (1^{ος} τρόπος). Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, έχουμε:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{10}, \quad a_1 + \dots + a_{10} = 150 \quad \text{και} \quad a_1 \geq \frac{1}{2} a_{10}.$$

Θέτουμε $a_1 = x$. Επειδή οι ποσότητες αυξάνονται αυστηρά έχουμε:

$$a_2 \geq x + 1, \quad a_3 \geq x + 2, \dots, \quad a_{10} \geq x + 9.$$

Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_1 + \dots + a_{10} \geq 10x + 45,$$

Οπότε:

$$10x + 45 \leq 150 \Leftrightarrow x \leq 10.$$

Επιπλέον, από τον περιορισμό $a_1 \geq \frac{1}{2} a_{10}$ έχουμε:

$$a_1 \geq \frac{1}{2} a_{10} \Leftrightarrow x \geq \frac{x + 9}{2} \Leftrightarrow 2x \geq x + 9 \Leftrightarrow x \geq 9.$$

Άρα είναι: $x = 9$ ή $x = 10$. Αν $x = 9$, τότε $a_{10} = 18$ και η μοναδική αυστηρά αύξουσα δεκάδα είναι

9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

που αθροίζει σε $135 \neq 150$, άτοπο.

Αν $x = 10$, Η ελάχιστη δεκάδα είναι 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, με άθροισμα 145.

Προσθέτοντας κατάλληλα παίρνουμε μία έγκυρη δεκάδα:

10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20 (άθροισμα 150).

Επομένως το έκτο κουτί έχει 16 μπίλιες.

(2^{ος} τρόπος). Αν $a_1 \geq 11$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \geq 11 + 12 + 13 + \dots + 20 = \frac{11 + 20}{2} \cdot 10 = 155 > 150,$$

άτοπο. Άρα $a_1 \leq 10$. Αν $a_{10} \leq 19$, τότε

$$a_{10} + a_9 + a_8 + \dots + a_1 \leq 19 + 18 + 17 + \dots + 10 = \frac{19+10}{2} \cdot 10 = 145 < 150,$$

άτοπο. Άρα $a_{10} \geq 20$, και $\alpha_1 \geq \frac{\alpha_{10}}{2} \geq 10$. Συνεπώς, $\alpha_1 = 10$ και $\alpha_{10} = 20$.

Παρατηρούμε ότι $\alpha_6 \geq \alpha_1 + 5 = 15$, και $\alpha_6 \leq \alpha_{10} - 4 = 16$, οπότε: $\alpha_6 = 15$ ή 16 .

Αν $\alpha_6 = 15$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \alpha_6 = \frac{10+15}{2} \cdot 6 = 75,$$

Οπότε

$$a_7 + a_8 + a_9 = 75 - \alpha_{10} = 55,$$

Ενώ

$$\alpha_9 + \alpha_8 + \alpha_7 \leq 19 + 18 + 17 = 54,$$

άτοπο. Άρα $\alpha_6 = 16$, με

$$(a_1, a_2, a_3, \alpha_4, a_5, \alpha_6, a_7, a_8, a_9, \alpha_{10}) = (10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20).$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ μία αριθμητική πρόοδος τέτοια ώστε $a_{m+n} = 103$ και $a_{m-n} = 49$, για κάποιους θετικούς ακέραιους $m > n$. Να βρεθεί η τιμή της διαφοράς $a_{na_m} - a_n$.

Λύση. Έστω ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου. Τότε ισχύουν:

$$a_{m+n} = a_m + n\omega \quad (1) \quad \text{και} \quad a_{m-n} = a_m - n\omega \quad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a_m = \frac{a_{m+n} + a_{m-n}}{2} = \frac{103 + 49}{2} = 76 \quad \text{και} \quad n\omega = \frac{a_{m+n} - a_{m-n}}{2} = \frac{103 - 49}{2} = 27.$$

Επομένως, έχουμε: $a_{na_m} - a_n = a_{76n} - a_n = 75n\omega = 75 \cdot 27 = 2025$.

Πρόβλημα 2. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει:

$$11x^2y^2 - y^4 - 25x^4 + 7 = 0$$

Λύση. Έχουμε: $25x^4 - 11x^2y^2 + y^4 = 7 \Leftrightarrow 25x^4 - 10x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = 7 \Leftrightarrow$
 $(5x^2 - y^2)^2 - x^2y^2 = 7 \Leftrightarrow (5x^2 - y^2 + xy)(5x^2 - y^2 - xy) = 7.$

Επειδή ισχύει $5x^2 - y^2 + xy > 5x^2 - y^2 - xy$ και $7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7)$, έπεται ότι:

$$5x^2 - y^2 + xy = 7 \quad \text{και} \quad 5x^2 - y^2 - xy = 1 \quad (I)$$

$$\text{ή} \quad 5x^2 - y^2 + xy = -1 \quad \text{και} \quad 5x^2 - y^2 - xy = -7 \quad (II)$$

Από την (I) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \quad (1)$$

οπότε:

$$5x^2 - y^2 = 4 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει: $5x^2 - \frac{9}{x^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 4x^2 - 9 = 0$.

Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2 = -1$, αδύνατο αφού $x^2 \geq 0$, ή

$x^2 = \frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού x θετικός ακέραιος. Από την (II) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \quad (1)$$

οπότε:

$$5x^2 - y^2 = -4 \quad (3)$$

Από τις (1), (3) λαμβάνουμε: $5x^2 - \frac{9}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 + 4x^2 - 9 = 0$.

Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = -\frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού $x^2 \geq 0$.

Επομένως, αφού x θετικός ακέραιος, έχουμε τελικά τη λύση: $x = 1, y = 3$.

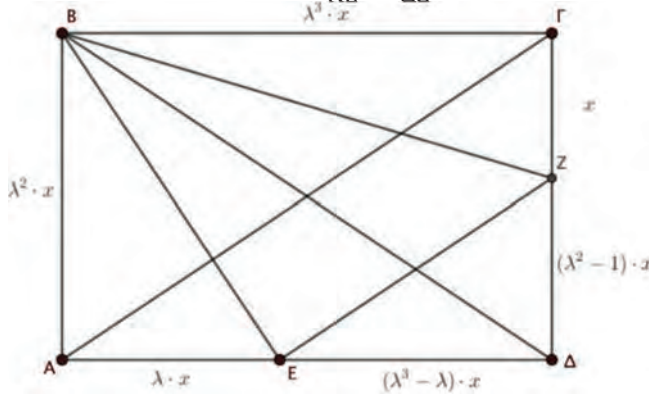
Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΒΓ = \lambda \cdot ΑΒ$, για κάποιο $\lambda > 1$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΕΖ \parallel ΑΓ$, και $\widehat{ΒΕΖ} = 90^\circ$. Να βρείτε

το λόγο των εμβαδών $\frac{(ΒΕΖ)}{(ΑΒΓΔ)}$ συναρτήσει του λ .

Λύση

Έστω $\Gamma Z = x$. Αφού $EZ \parallel \Gamma\Delta$, είναι $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{AD}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB} = \lambda$,
 οπότε $AE = \lambda x$. Αφού $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$, οι γωνίες $\widehat{A\hat{E}B}$ και $\widehat{\Delta\hat{E}Z}$ είναι συμπληρωματικές, και άρα
 τα τρίγωνα BAE και EDZ είναι όμοια, και άρα $\frac{AB}{AE} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \lambda$.



Έτσι, είναι $AB = \lambda \cdot AE = \lambda^2 x$, και $AD = B\Gamma = \lambda \cdot AB = \lambda^3 x$. Εύκολα βλέπουμε ότι
 $ED = AD - AE = \lambda^3 x - \lambda x = \lambda(\lambda^2 - 1)x$ και $\Delta Z = \frac{\Delta E}{\lambda} = (\lambda^2 - 1)x$.

(1^{ος} τρόπος) Για τα εμβαδά έχουμε

$$(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AB = \lambda^3 x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5 x^2,$$

$$(BAE) = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 x \cdot \lambda x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = \frac{1}{2\lambda^2} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

$$(Z\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot E\Delta \cdot \Delta Z = \frac{1}{2} \cdot \lambda(\lambda^2 - 1)x \cdot (\lambda^2 - 1)x = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)^2 x^2}{2} = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

και $(B\Gamma Z) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot \Gamma Z = \frac{1}{2} \cdot \lambda^3 x \cdot x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = (BAE).$

Επομένως, έχουμε: $(BEZ) = (AB\Gamma\Delta) - (Z\Delta E) - 2(BAE) = (AB\Gamma\Delta) - \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta) - \frac{1}{\lambda^2} \cdot (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^4}\right) \cdot (AB\Gamma\Delta).$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με $\frac{(BEZ)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^4}\right).$

(2^{ος} τρόπος) Έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AB = \lambda^3 x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5 x^2$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BAE έχουμε $BE^2 = AB^2 + AE^2 = \lambda^4 x^2 + \lambda^2 x^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2$.

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $Z\Delta E$ έχουμε

$$EZ^2 = E\Delta^2 + \Delta Z^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1)^2 x^2 + (\lambda^2 - 1)^2 x^2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2 x^2,$$

Οπότε $(BEZ)^2 = \frac{BE^2 \cdot EZ^2}{4} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2 \cdot (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2 x^2}{4} = \left(\frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2\right)^2.$

Αφού $\lambda > 1$, $\lambda(\lambda^4 - 1) > 0$, έπεται ότι: $(BEZ) = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2 = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.

(3^{ος} τρόπος) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x = 1$. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με $A(0,0)$, $B(0,\lambda^2)$, $\Gamma(\lambda^3,\lambda^2)$, $E(\lambda,0)$, και $Z(\lambda^3,\lambda^2 - 1)$, αφού $\Gamma Z = 1$. Τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{BE} = (\lambda, -\lambda^2), \overrightarrow{EZ} = (\lambda^3 - \lambda, \lambda^2 - 1) \text{ και}$$

$$\det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EZ}) = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^3 - \lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda^2(\lambda^3 - \lambda) = \lambda^5 - \lambda = \lambda(\lambda^4 - 1) > 0,$$

οπότε

$$(BEZ) = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EZ})| = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 136

Γ71. Δίνεται εγγράψιμο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με $AB = BG = ΓΔ$ και του οποίου το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του. Να αποδείξετε ότι το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό.

Σημείωση. Το κέντρο βάρους ενός πενταγώνου είναι το σημείο του επιπέδου του πενταγώνου, του οποίου το διάνυσμα θέσης ισούται με τον αριθμητικό μέσο των διανυσμάτων θέσης των κορυφών του. (Μ. Ο. Ρουμανίας 2024)

Λύση (1^{ος} τρόπος). Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου γ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, με μονάδα μήκους την ακτίνα του κύκλου γ και με άξονα των x τη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, σχήμα 1. Έστω ότι:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOΓ} = \widehat{ΓOD} = 2\alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Αν z_X είναι ο μιγαδικός αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο X του μιγαδικού επιπέδου, τότε έχουμε: $z_A = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$, $z_B = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z_{\Gamma} = \cos \alpha - i \sin \alpha$, $z_{\Delta} = \cos 3\alpha - i \sin 3\alpha$

$$\text{και } z_E = \cos \beta + i \sin \beta, \quad \beta \in (3\alpha, 2\pi - 3\alpha).$$

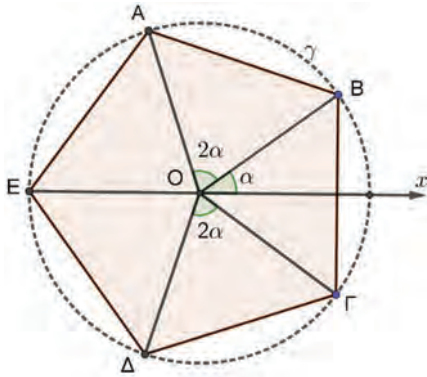
Επειδή το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου γ του πενταγώνου, έπεται ότι: $z_A + z_B + z_{\Gamma} + z_{\Delta} + z_E = 0 \Leftrightarrow (2\cos 3\alpha + 2\cos \alpha + \cos \beta) + i \sin \beta = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3\alpha + 2\cos \alpha + \cos \beta = 0 \text{ και } \sin \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \pi \text{ και } 2\cos 3\alpha + 2\cos \alpha = 1. \quad (1)$$

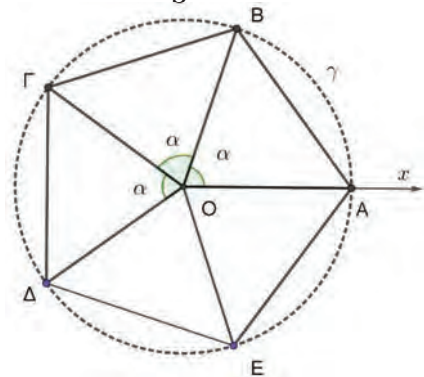
Με πολλαπλασιασμό επί το $\sin \alpha$ της εξίσωσης (1) λαμβάνουμε:

$$2\sin \alpha \cos 3\alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \Leftrightarrow \sin 4\alpha + \sin(-2\alpha) + \sin 2\alpha = \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha = \sin \alpha \Leftrightarrow 4\alpha = \pi - \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{5},$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

αφού έχουμε $0 < \alpha < 4\alpha < \frac{4\pi}{3}$. Επομένως, έχουμε $\widehat{AOB} = \widehat{BOΓ} = \widehat{ΓOD} = \widehat{ΔOE} = \widehat{EOA} = \frac{2\pi}{5}$, οπότε το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου γ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, με μονάδα μήκους την ακτίνα του κύκλου γ και με θετικό ημιάξονα των x την ημιευθεία OA , σχήμα 2.

Τότε έχουμε: $z_A = 1$, $z_B = z$, $z_{\Gamma} = z^2$, $z_{\Delta} = z^3$ και $z_E = w$,

$$\text{όπου } z = \cos \alpha + i \sin \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), w = \cos \beta + i \sin \beta, \beta \in (3\alpha, 2\pi).$$

Επειδή το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου γ του πενταγώνου, έπεται ότι: $z_A + z_B + z_{\Gamma} + z_{\Delta} + z_E = 0 \Leftrightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + w = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1-z^4}{z-1}$,

οπότε, αφού $w\bar{w} = z\bar{z} = 1$, έχουμε:

$$w\bar{w} = \frac{1-z^4}{z-1} \cdot \frac{1-\bar{z}^4}{\bar{z}-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-z^4}{z-1} \cdot \frac{1-\frac{1}{\bar{z}^4}}{\frac{1}{\bar{z}}-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-z^4}{z-1} \cdot \frac{z^4-1}{z^3(1-z)} = 1.$$

Μετά από πράξεις λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$2z^4 - z^8 - 1 = -z^5 + 2z^4 - z^3 \Leftrightarrow z^8 - z^5 - z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z^5 - 1)(z^3 - 1) = 0.$$

Η μόνη δεκτή λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\alpha = \frac{2\pi}{5}$, οπότε έχουμε

$$\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{\Delta OE} = \widehat{EOA} = \frac{2\pi}{5},$$

και συνεπώς το πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ είναι κανονικό.

A87. Έστω a δεδομένος θετικός ακέραιος και η ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}$ με τύπο

$$x_n = \frac{1}{1 + na}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο $k \geq 3$, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μ. Ο. Ρουμανίας 2024)

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το k . Επειδή ισχύει:

$$\frac{1}{1 + ma} + \frac{1}{(1 + ma)(1 + 2ma)} = \frac{2}{1 + 2ma},$$

προκύπτει ότι υπάρχουν τρεις όροι της ακολουθίας $(x_n)_{n \geq 1}$ που αποτελούν αριθμητική πρόοδο και αυτοί είναι οι $x_m, x_{2m}, x_{2m^2a+3m}$, δηλαδή το ζητούμενο ισχύει για $k = 3$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν k θετικοί ακέραιοι $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Αν θεωρήσουμε $y = 2x_{n_1} - x_{n_2}$ τότε οι αριθμοί $y, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ είναι $k + 1$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Πράγματι, έχουμε:

$$y = 2x_{n_1} - x_{n_2} = \frac{2}{1 + n_1a} - \frac{1}{1 + n_2a} = \frac{1 + pa}{(1 + n_1a)(1 + n_2a)} = \frac{1 + pa}{1 + (n_1 + n_2 + n_1n_2a)a},$$

με $p = 2n_2 - n_1$. Επομένως οι αριθμοί $\frac{y}{1+pa}, \frac{x_{n_1}}{1+pa}, \frac{x_{n_2}}{1+pa}, \dots, \frac{x_{n_k}}{1+pa}$

είναι $k + 1$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αφού με διαίρεση των όρων αριθμητικής προόδου με έναν μη μηδενικό αριθμό προκύπτει αριθμητική πρόοδος. Επιπλέον είναι $k + 1$ όροι $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_{k+1}}$ της ακολουθίας $(x_n)_{n \geq 1}$ και επειδή η ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}$ είναι γνησίως μονότονη προκύπτει ότι $m_1 < m_2 < \dots < m_{k+1}$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις για Λύση

A88. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$3^{\log_5(5x-10)} - 2 = 5^{-1+\log_3 x}.$$

A89. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$2(5^x + 6^x - 3^x) = 7^x + 9^x.$$

A90. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (a + b - 1)x + ab - a - b = 0, a, b \in \mathbb{R}, \text{ με } 0 < a \leq b.$$

Να αποδείξετε ότι:

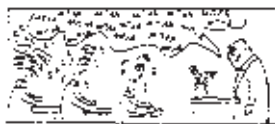
(α) η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες,

(β) αν η μία λύση της εξίσωσης είναι ακέραιος, τότε και οι δύο ρίζες της εξίσωσης είναι θετικοί ακέραιοι και $b < 2a$.

N60. Να βρείτε όλους τους ακέραιους $n \geq 2$ πού είναι τέτοιοι ώστε να διαιρούνται από τους αριθμούς $1 = d_1, d_1 + d_2, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1}$, όπου $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{k-1} < d_k = n$ είναι όλοι οι θετικοί διαιρέτες του n .

Γ72. Έστω $AB\Gamma$ ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με $\widehat{A} = 90^\circ$. Έστω O το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, E το μέσο του τμήματος $O\Gamma$, M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$ και Δ το μέσο του τμήματος AM . Αν οι ευθείες $O\Delta$ και $A\Gamma$ τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

(α) $MZ \perp O\Delta$, (β) $\Gamma Z = O\Gamma$.



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος

1ο θέμα

Γεωμετρικό μυστήριο απαντήθηκε μετά από 122 χρόνια!

Το 1902, ο **Henry Dudeney**, ένας αυτοδίδακτος Εγγλέζος μαθηματικός, που δημοσίευε μαθηματικά παζλ σε εφημερίδα, ζήτησε από τους αναγνώστες να κομματιάσουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο στον μικρότερο αριθμό κομματιών, που θα μπορούσαν να αναδιαταχθούν, ώστε να σχηματίσουν ένα τετράγωνο. Δυο βδομάδες μετά ανακοίνωσε πως

ένας υπάλληλος από το Μάντσεστερ, ο Τσαρλς Γουίλιαμ ΜακΕλρόι, είχε βρει μια λύση με τέσσερα κομμάτια. Κανένας άλλος από τους αναγνώστες και κανένας άλλος, μαθηματικός ή μη, δεν βρήκε λύση με τρία κομμάτια τα επόμενα 122 χρόνια, σε αυτό που ονομάστηκε «ανατομή του **Dudeney**».



Ανατομή του Dudeney με χωρισμό ισόπλευρου τριγώνου σε τέσσερα τμήματα, από τα οποία μπορεί να σχηματιστεί ένα τετράγωνο

Την απάντηση έδωσαν ο Ιάπωνας μαθηματικός **Τόναν Καμάτα**, μαζί με δύο συναδέλφους του, τον επίσης Ιάπωνα Ριουχέι Ουεχάρα και τον Ερικ Ντιμείν του MIT, που απέδειξαν ότι λύση με λιγότερα, δηλαδή τρία ή δύο κομμάτια δεν υπάρχει. Ο Καμάτα είχε μαγευτεί από το πρόβλημα όταν το είδε σε μορφή **οριγκάμι** σε μια έκθεση. «Πιστεύω ότι πολλοί απ' όσους εκτιμούν τα Μαθηματικά θα συμφωνήσουν ότι όσο απλούστερο φαίνεται ένα άλλο πρόβλημα, τόσο πιο πολύ ελκύει αυτούς που αγαπούν τα Μαθηματικά», δήλωσε.

Μία πλευρά του προβλήματος είναι απλή: Λύση με δύο κομμάτια μπορεί να αποκλειστεί. Το τρίγωνο και το τετράγωνο πρέπει να έχουν ίσα Για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα, η ομάδα κατηγοριοποίησε τις τομές ενός ισόπλευρου

εμβαδά, αφού τα κομμάτια που τα απαρτίζουν είναι τα ίδια. Για το τετράγωνο η πιο μακριά γραμμή χωρισμού του είναι η διαγώνιος. Με απλά Μαθηματικά μπορεί να αποδειχτεί ότι το μήκος της διαγωνίου είναι πολύ μικρό για να αποτελέσει πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίσο εμβαδό με αυτό.

Η απόδειξη ότι δεν υπάρχει λύση με τρία κομμάτια είναι πολύ πιο δύσκολη και αυτός είναι ο λόγος της **υπεραιωνόβιας καθυστέρησης στην επίλυση**. Υπάρχει άπειρος αριθμός τρόπων να κοπεί το τρίγωνο, με κάθε κομμάτι να έχει οποιονδήποτε αριθμό ακμών και οι συντεταγμένες αυτών των τομών να αρχίζουν σε τυχαία σημεία.

τριγώνου με βάση τον τρόπο που οι τομές τέμνουν τις πλευρές του τριγώνου. Πρώτα

κατηγοριοποίησαν την απειρία των τρόπων που το τρίγωνο μπορεί να κοπεί σε 5 μοναδικές κατηγορίες. Μετά επανέλαβαν την άσκηση για το τετράγωνο και βρήκαν **38 μοναδικούς** τρόπους ανατομής του.

Στη συνέχεια προσπάθησαν να ταιριάξουν ένα τριγωνικό γράφημα σε ένα γράφημα τετραγώνου, ακολουθώντας όλες τις διαδρομές κάθε σχήματος και συγκρίνοντας τις προκύπτουσες συλλογές ακμών και γωνιών. Αν έβρισκαν ένα ταίριασμα, τότε θα είχαν βρει μια λύση με τρία κομμάτια.

Αυτή η προσέγγιση μετέτρεψε το αρχικό συνεχές πρόβλημα σε ένα διακριτό, κατά βάση. Μέσα σε κάθε κατηγοριοποίηση υπήρχαν άπειρα σημεία όπου οι πλευρές θα μπορούσαν να καταλήγουν. Στο τέλος, η ερευνητική ομάδα κατάστρωσε μια συλλογή από σύνθετα λήμματα, δηλαδή ενδιάμεσα βήματα ενός θεωρήματος. Μαζί με τις κατηγορίες και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απόδειξης με αντίφαση, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει τρόπος «ανατομής του Dudeney» με τρία κομμάτια.

2ο θέμα

... για να περνάτε ευχάριστα την ώρα σας

Προσπαθείστε να μετατρέψετε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς:

α. 1.000.000.000

β. 1.000.000.000.000.000,

σε **γινόμενο** δύο παραγόντων, πολλαπλασιάζοντας δύο ακέραιους αριθμούς που κανένας από τους δύο δεν έχει ούτε ένα μηδενικό.

3ο θέμα

Η έννοια του Fractal

Με τον διεθνή όρο φράκταλ (fractal, ελλ. *Μορφόκλασμ* ή *μορφοκλασματικό σύνολο*) στα Μαθηματικά, τη Φυσική αλλά και σε πολλές επιστήμες ονομάζεται ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης, κι έτσι συχνά αναφέρεται σαν «απείρως περίπλοκο».

Ο όρος «Fractal» επινοήθηκε από τον μαθηματικό Benoit Mandelbrot το 1975. Ο Mandelbrot τον βάσισε στο λατινικό *fractus*, που σημαίνει «σπασμένος» ή «κατακερματισμένος», και τον χρησιμοποίησε για να επεκτείνει την έννοια των θεωρητικών μορφοκλασματικών διαστάσεων σε γεωμετρικά μοτίβα στη φύση

Το fractal παρουσιάζεται ως «μαγική εικόνα» που όσες φορές και να μεγεθυνθεί οποιοδήποτε τμήμα του θα συνεχίζει να παρουσιάζει ένα εξίσου περίπλοκο σχέδιο με μερική ή ολική επανάληψη του αρχικού. Χαρακτηριστικό επομένως των fractal είναι η λεγόμενη *αυτο-ομοιότητα* (self-similarity) σε κάποιες δομές τους, η οποία εμφανίζεται σε διαφορετικά επίπεδα μεγέθυνσης. Fractal απαντώνται και στη φύση, χωρίς όμως να υπάρχει άπειρη λεπτομέρεια στη μεγέθυνση όπως στα fractal που προκύπτουν από μαθηματικές σχέσεις. Ως παραδείγματα fractal στη φύση, αναφέρονται το σχέδιο των νιφάδων του χιονιού, τα φύλλα των φυτών ή οι διακλαδώσεις των αιμοφόρων αγγείων.

Παράδειγμα

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την αναγκαιότητα εισαγωγής των fractal αναφέρουμε το εξής παράδειγμα:

Η περίμετρος ενός νησιού εννοείται ότι είναι ορισμένη. Ωστόσο, αν χρησιμοποιήσουμε την ακρίβεια ενός μέτρου για να την μετρήσουμε, θα την βρούμε μικρότερη από ότι πραγματικά είναι γιατί δεν θα μπορέσουμε να μετρήσουμε τις κοιλότητες που είναι μικρότερες του ενός μέτρου. Αν μετρήσουμε με ακρίβεια ενός εκατοστού, πάλι θα χάσουμε ορισμένες

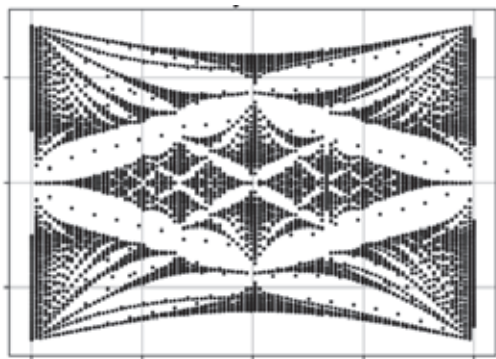
κοιλότητες. Έτσι καταλήγουμε σε απειροστά μικρή μονάδα μέτρησης και η περίμετρος του νησιού θα γίνει άπειρη. Η επιφάνεια όμως του νησιού, η έκτασή του δηλαδή, είναι ορισμένη. Το παράδοξο αυτό, το οποίο η Ευκλείδεια Γεωμετρία αδυνατεί να εξηγήσει, αντιμετωπίζεται με τα φράκταλ.

Η Πεταλούδα του Hofstadter

Πρώτη καταγραφή ενός αναζητούμενου από χρόνια fractal στο κβαντικό βασίλειο

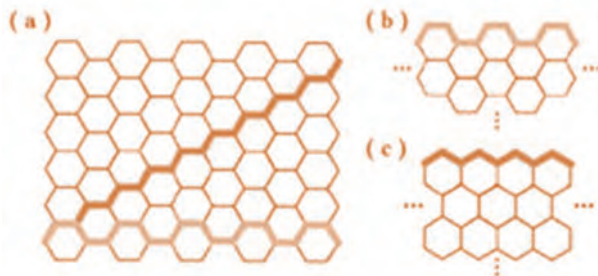
η πεταλούδα του Hofstadter

Πριν από σχεδόν 50 χρόνια, ο επιστήμονας των υπολογιστών Douglas Hofstadter πρόβλεψε ότι μια «πεταλούδα» θα άπλωνε τα φτερά της στον κβαντικό κόσμο. Υπό τις κατάλληλες συνθήκες, τα μικροσκοπικά ηλεκτρόνια ενός κβαντικού συστήματος θα μπορούσαν να παράξουν ένα ενεργειακό φάσμα, που θα αποτελούνταν από fractal (περίτεχνα αυτοόμοιες δομές, που εμφανίζουν το ίδιο μοτίβο σε οποιαδήποτε μεγέθυνση), παρόμοιο με πεταλούδα. Πολλοί φυσικοί προσπάθησαν να δημιουργήσουν την «πεταλούδα του Hofstadter», με διάφορους βαθμούς επιτυχίας. Το πρώτο τέτοιο φάσμα εμφανίστηκε πριν από 25 χρόνια. Η δυσκολία παρατήρησης του φαινομένου οφείλεται κατά ένα μέρος στο γεγονός ότι ο Hofstadter υποστήριζε ότι θα χρειαζόνταν κολοσσιαία μαγνητικά πεδία, πέραν των δυνατοτήτων οποιουδήποτε υπάρχοντος εργαστηρίου. Έτσι οι περισσότερες προσπάθειες έγιναν μέσω προσομοιώσεων σε υπολογιστή, ενώ όσοι αναζήτησαν την «πεταλούδα» σε φυσικά κβαντικά συστήματα, το έκαναν κυρίως με έμμεσες μετρήσεις.



Τώρα ίσως υπάρχει η πρώτη απευθείας παρατήρηση της «πεταλούδας», που εμφανίστηκε μέσα από τον σύνθετο κβαντικό «χορό» των ηλεκτρονίων που είναι εγκλωβισμένα - σαν τη γέμιση ενός σάντουιτς - ανάμεσα σε δύο στρώματα γραφενίου (μονοατομικά στρώματα άνθρακα). Το αποτέλεσμα γίνεται πιο εντυπωσιακό επειδή δεν ήταν κάτι αναμενόμενο, ούτε ήταν αυτό που αναζητούσαν οι ερευνητές. Οι επιστήμονες, που

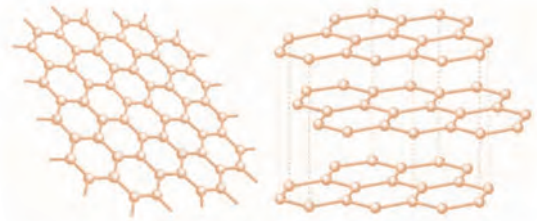
εργάζονταν στο πανεπιστήμιο Πρίνσετον την εποχή διεξαγωγής των πειραμάτων, μελετούσαν την **υπεραγωγιμότητα στο γραφένιο**, δηλαδή την ιδιότητα της ύλης υπό ορισμένες συνθήκες να επιτρέπει την ελεύθερη χωρίς αντίσταση ροή των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό της.



Για τον σκοπό αυτό έβαλαν ένα μονοατομικό φύλλο **γραφενίου** πάνω σε ένα άλλο και περιέστρεψαν το ένα από τα δύο κατά 1,1 μοίρες, έτσι ώστε τα εξάγωνα που σχηματίζουν τα άτομα άνθρακα στο γραφένιο να μην επικαλύπτονται επακριβώς, αλλά να σχηματίζεται μια διάταξη «**μαγικής γωνίας**» μεταξύ τους. Όταν αυτή η διάταξη υποβλήθηκε σε μαγνητικό πεδίο, τα ηλεκτρόνια σε κάθε φύλλο πηγαиноέρχονταν από το ένα στο άλλο άτομο άνθρακα, επιδεικνύοντας **υπεραγωγιμότητα** και άλλες ασυνήθιστες ιδιότητες. Η τέτοια διάταξη φύλλων γραφενίου είναι μια διαδικασία που συχνά αποτυγχάνει, γι' αυτό και πάντα οι ερευνητές έλεγχαν τη δουλειά τους με τη βοήθεια ενός μικροσκοπίου σάρωσης σήραγγας (STM). Οι εικόνες του μικροσκοπίου αυτού μπορούν να δείξουν τη ροή των ηλεκτρονίων και άρα την επίτευξη της «μαγικής γωνίας». Και στο πείραμα του Princeton σε πολλές περιπτώσεις η γωνία που πετύχαιναν ήταν μικρότερη της 1,1 μοίρας. Επειδή, όμως, η γωνία ήταν κοντά σε μια άλλη μικρότερη «μαγική γωνία», οι ερευνητές αποφάσισαν να συνεχίσουν τη μελέτη με το STM και σε αυτές τις περιπτώσεις. Σχημάτισαν έτσι ένα διάγραμμα που δείχνει πώς η ενέργεια των ηλεκτρονίων αλλάζει ως συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου, παρατηρώντας συγκέντρωση των σημείων του διαγράμματος

σε ξεχωριστές ηλεκτρονικές ζώνες Hofstadter. Ο Kevin Nakols που τώρα εργάζεται στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης (MIT) και οι συνάδελφοί του μπόρεσαν να παρατηρήσουν ότι τα μοτίβα των ενεργειακών επιπέδων των ηλεκτρονίων επαναλαμβάνονταν σε διαφορετικές κλίμακες, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση σχηματισμού της «πεταλούδας του Hofstadter». Σε προηγούμενα πειράματα δεν παρατηρούνταν απευθείας οι ενεργειακοί μετασχηματισμοί των ηλεκτρονίων καθώς μεταβαλλόταν το μαγνητικό πεδίο, αλλά έμμεσα μεγέθη, όπως η χωρική κατανομή των ηλεκτρονίων. Οι ερευνητές προσπαθούν τώρα να εξηγήσουν όλες τις πλευρές και να ανακαλύψουν τις αιτίες του φαινομένου που παρατήρησαν, ενώ ελπίζουν ότι τα πειράματά τους θα ανοίξουν τον δρόμο για τη μελέτη του φαινομένου και σε άλλα συστήματα και υλικά. Από την πλευρά του, ο ίδιος ο Hofstadter, ηλικίας 80 ετών σήμερα, δήλωσε σχετικά όταν

ρωτήθηκε: «Στο πέρασμα των χρόνων έχω δει πολλούς ισχυρισμούς για την πειραματική "αναπαραγωγή" της προβλεπόμενης αναδρομικότητας (σ.σ. των fractal της «πεταλούδας»).



Αλλά όλοι είναι εξαιρετικά "χονδρόκοκοι" και κανένας δεν πλησίασε να ανιχνεύσει μια πραγματικά αναδρομική φωλιασμένη δομή. Αυτό ίσως συμβεί σε μερικές δεκαετίες ».

Ο Nakols δηλώνει ικανοποιημένος που ασχολείται με μια πρόβλεψη που έγινε πριν από μισό αιώνα και που εκείνος που την έκανε θεωρούσε ότι ποτέ δεν θα γίνει εφικτό να παρατηρηθεί στη φύση. Θεωρεί ότι η δουλειά που έκανε με τους συναδέλφους του, προχωρεί παραπέρα τις πρώτες ενδείξεις ανακάλυψης της «πεταλούδας του Hofstadter», που έγιναν πριν από 25 χρόνια και είναι αποφασισμένος να διερευνήσει επακριβώς τις προβλέψεις του Hofstadter, σε υψηλότερες ενέργειες και διαφορετικά υλικά.

5ο θέμα

Αίγα λόγια για τα Μαθηματικά

Αν ρωτούσαμε όλους τους μαθητές, ποιο μάθημα προτιμούν, είναι αμφίβολο αν οι περισσότεροι θα έλεγαν τα Μαθηματικά. Συνήθως περισσότερο τα **εκτιμούν** παρά τα **αγαπούν**.

Σε χώρες που οι επιστημονικές γνώσεις βρίσκονται σε μεγάλη εκτίμηση, ασφαλώς υπάρχουν εκείνοι που ενοχλούνται με τη μελέτη τους. Προφανώς, αυτό οφείλεται όχι μόνο στο ότι η σπουδή των Μαθηματικών είναι για πολλούς δύσκολη και απαιτεί επιμονή και προσπάθεια, αλλά και στο ότι μερικά θέματα των Μαθηματικών του σχολείου δεν είναι αρκετά ενδιαφέροντα, καμιά φορά μάλιστα **γίνονται πληκτικά**. Αλλά το αλφάβητο κι η γραμματική κάθε γλώσσας μας φαίνονται μας φαίνονται συχνά σαν να μη έχουν ενδιαφέρον. Ωστόσο μόνο μαθαίναντάς τα, θα έχουμε τη δυνατότητα να γνωρίσουμε τη λογοτεχνία της, τα ελκυστικά παραμύθια, τα διηγήματα, τις νουβέλες, τα μυθιστορήματα και την ποίησή της. Κατά τον ίδιο τρόπο αυτές οι πιο απλές,

στοιχειώδεις βάσεις των Μαθηματικών που μαθαίνουμε στο σχολείο, οδηγούν στα σύγχρονα Μαθηματικά, σ' αυτή την τεράστια, θα λέγαμε αχανή, περιοχή του πλούτου της ανθρώπινης γνώσης, που χρόνο με τον χρόνο βρίσκουν όλο και ευρύτερη εφαρμογή.

Καμιά φορά ακούμε να λένε, ότι στα Μαθηματικά, βασικά είναι όλα γνωστά, ότι έχει περάσει η εποχή των εφευρέσεων και ότι τώρα δεν μας μένει άλλο παρά να μαθαίνουμε θεωρήματα, που έχουν ονόματα επιστημόνων περασμένων αιώνων και να τα χρησιμοποιούμε για τη λύση διαφόρων προβλημάτων. Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι καθόλου έτσι. Γιατί ακριβώς σήμερα τα Μαθηματικά περνούν μια περίοδο εξαιρετικά έντονης ανάπτυξης, μολονότι υπάρχουν σαν επιστήμη πολλές

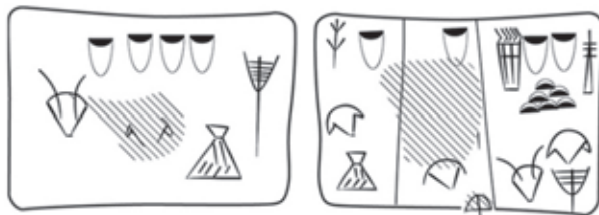
χιλιετηρίδες. Στις μέρες μας **μαθηματικές ανακαλύψεις** γίνονται κυριολεκτικά κάθε μέρα σε όλες τις γωνιές του κόσμου. Για να πάρουμε μια ιδέα για τον αριθμό των ανακαλύψεων αυτών, αρκεί να αναφέρουμε το εξής: το 1970 κυκλοφόρησε ένα μηνιαίο συνοπτικό περιοδικό με τίτλο τα «Μαθηματικά», όπου με ψιλά στοιχεία δημοσιεύονται περιληπτικές ανακοινώσεις για τις διάφορες μαθηματικές ανακαλύψεις που γίνονται τον τελευταίο καιρό σ' όλον τον κόσμο. Το σύνολο λοιπών των τευχών του **1970** έδωσε ένα τεράστιο τόμο (πάνω από **3.000** σελίδες μεγάλου μεγέθους!) με περισσότερες από **25.000** ανακοινώσεις. Τόσο μεγάλος είναι ο αριθμός των μαθηματικών ανακαλύψεων που έγιναν μέσα σε ένα χρόνο, δηλ. μέσος όρος **70 ανακαλύψεων κάθε μέρα**. Βέβαια δεν παρουσιάζουν όλες το ίδιο επιστημονικό ενδιαφέρον. Προσθέτει όμως η κάθε μια το λιθαράκι της στο τεράστιο οικοδόμημα της επιστήμης.

Αυτή η καταπληκτική ανάπτυξη των Μαθηματικών συνδέεται στενά με το ότι η επιστημονική θεωρία και πρακτική προβάλλουν όλο και νέα προβλήματα, που περιμένουν τη λύση τους από τους μαθηματικούς. Και όταν οι γνώσεις δεν επαρκούν πια, είμαστε υποχρεωμένοι να ανακαλύπτουμε νέους δρόμους, να βρίσκουμε καινούργιες μεθόδους. Τα Μαθηματικά στην εποχή μας δεν χρησιμοποιούνται μόνο στην Αστρονομία, τη Μηχανική, τη Φυσική, τη Χημεία, την Τεχνική, όπως γινόταν παλιότερα, **αλλά και στη Βιολογία**, σε μερικούς κλάδους των κοινωνικών **επιστημών**, ακόμα και στη **Γλωσσολογία**. Ιδιαίτερα ευρείς ορίζοντες για την εφαρμογή των Μαθηματικών ανοίγονται με τη δημιουργία των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών: με τη βοήθειά τους γίνεται η πρόβλεψη του καιρού, υπολογίζονται οι τροχιές των τεχνητών δορυφόρων και διαστημοπλοίων, μεταφράζονται επιστημονικά κείμενα.

Σε πολύ σύντομο διάστημα νέοι τύποι γενικών και ειδικών τύπων **ηλεκτρονικών υπολογιστών** θα χρησιμοποιούνται όλο και σε πιο ποικίλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, όπως είναι η διεύθυνση των διαδικασιών της παραγωγής, η στατιστική, τα λογιστικά, οι υπολογισμοί των σχεδιοποιήσεων, **οι οικονομικοί προϋπολογισμοί** κλπ.

Με λίγα λόγια μπορούμε να πούμε ότι τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη που ασχολείται με τους αριθμούς και τα σχήματα. Είναι δύσκολο να αναφέρουμε ένα τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας, όπου δεν θα απασχολούσε τον άνθρωπο η ποσότητα, οι διαστάσεις και το σχήμα των διαφόρων αντικειμένων. Οι γνώσεις αυτές έπρεπε να συστηματοποιηθούν, για να μεταβιβάζονται πιο εύκολα από γενιά σε γενιά. Έτσι σιγά σιγά γεννήθηκαν τα Μαθηματικά.

Τα πρώτα στοιχεία Μαθηματικών γνώσεων πρωτοεμφανίζονται γύρω στο **2.000 π.Χ.** Αυτό μαρτυρούν οι αιγυπτιακοί πάπυροι, οι πίνακες με τη σφηνοειδή γραφή της Βαβυλώνας που διατηρήθηκαν ως τώρα και περιέχουν λύσεις αριθμητικών, γεωμετρικών και αλγεβρικών προβλημάτων.



Ημέρες δόξας γνώρισαν τα Μαθηματικά στη αρχαία Ελλάδα. Νωρίτερα από το 300 π.Χ. έκαναν την εμφάνισή τους τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, έργο που αναλύει συστηματικά τη Γεωμετρία σε έκταση ύλης όση διδάσκεται σήμερα στα Σχολεία Μέσης Εκπαίδευσης, δίνει επίσης στοιχεία για τη διαιρετότητα των αριθμών και τη λύση διτετράγωνων εξισώσεων (με γεωμετρική μορφή). Τον 3^ο αιώνα ο Αρχιμήδης βρήκε τρόπο να προσδιορίζει το εμβαδό, τον όγκο και το κέντρο βάρους των απλών σχημάτων. Στο τέλος του 3^ο αιώνα π.Χ. ο Απολλώνιος έγραψε το βιβλίο του για τις ιδιότητες μερικών αξιοσημείωτων καμπυλών, δηλ. της έλλειψης, της υπερβολής και της παραβολής. Πρέπει ακόμη να αναφέρουμε ότι τον 2^ο αιώνα μ.Χ. στο αστρονομικό έργο του, «Η Μεγίστη», ο Πτολεμαίος έθεσε τις βάσεις της Τριγωνομετρίας, έδωσε τους πίνακες ημιτόνων (πιο σωστά, το μήκος των χορδών του κύκλου) και τους τρόπους λύσης σφαιρικών τριγώνων (δηλ. τριγώνων που οι πλευρές τους είναι τόξα μέγιστων κύκλων σφαίρας). Μ' όλα αυτά καταλαβαίνουμε πόσο μεγάλη ήταν η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων στην ανάπτυξη των

Μαθηματικών. Μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι οι σημερινοί μαθητές διδάσκονται στο σχολείο μόνο ένα μέρος από τις

Πολλά έχουν προσφέρει στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και οι επιστήμονες των λαών της Ανατολής (ιδιαίτερα οι **Ινδοί** και οι **Άραβες**, που σημείωσαν μεγάλες επιτυχίες στην ανάπτυξη της Άλγεβρας και της Τριγωνομετρίας). Ύστερα από τη μακροχρόνια στασιμότητα που παρατηρήθηκε τον Μεσαίωνα στην επιστημονική εξέλιξη, οι επιστήμονες της Δυτικής Ευρώπης κατόρθωσαν με μεγάλη προσπάθεια να φτάσουν στο επίπεδο των προγόνων τους. Και μόνο έτσι μπόρεσαν να συνεχίσουν με δικές τους δυνάμεις. Η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην Ευρώπη αρχίζει τον **17^ο αιώνα**. Την εποχή αυτή γεννιούνται νέοι κλάδοι των Μαθηματικών, που ανήκουν στα Ανώτερα Μαθηματικά και που σήμερα διδάσκονται στα ανώτερα εκπαιδευτικά ιδρύματα. Πιο βαθιά μελέτη των Ανώτερων Μαθηματικών γίνεται στις Φυσικομαθηματικές Σχολές των πανεπιστημίων και ορισμένοι κλάδοι τους διδάσκονται στις Ανώτερες Τεχνικές Σχολές.



Κλαύδιος Πτολεμαίος

Βάση των Ανώτερων Μαθηματικών αποτελούν η Αναλυτική Γεωμετρία, ο Διαφορικός και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός. Η δημιουργία τους, που συνδέεται με τα ονόματα μεγάλων μαθηματικών του 17^ο αιώνα, όπως του Ρενέ Ντεκάρτ και του Π. Φερμά, του Ι. Νεύτωνα και του Γ. Λάιμπνιτς, μας έδωσε τη δυνατότητα να μελετήσουμε μαθηματικά την κίνηση και την πορεία της **μεταβολής των ποσών** και των γεωμετρικών σχημάτων. Παράλληλα τα Μαθηματικά γνώρισαν τις συντεταγμένες, τα μεταβλητά ποσά και την έννοια της συνάρτησης.

γνώσεις αυτές (είναι αλήθεια ότι μαθαίνουν κι άλλα πράγματα που ήταν άγνωστα στους αρχαίους Έλληνες).

Όλα αυτά οι μαθητές τα μαθαίνουν από την Άλγεβρα και την Τριγωνομετρία.



Τα νέα προγράμματα βοηθούν τους μαθητές, να μουν στο νόημα των Ανώτερων Μαθηματικών, που στο διάστημα των τελευταίων 300 χρόνων αναδείχθηκαν σε αναντικατάστατο όργανο εξαιρετικής δύναμης και ακρίβειας και υπηρέτησαν πολλές γενιές αστρονόμων, φυσικών, μηχανικών και άλλων επιστημόνων, δίνοντάς τους τη δυνατότητα, να λύσουν εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα της Φυσιγνωσίας και της Τεχνικής.

Είναι αδύνατο να απαριθμήσουμε εδώ, ακόμα και πρόχειρα, τις επιτυχίες των μαθηματικών τους τελευταίους αιώνες.

Μπορούμε να πούμε ότι τα σύγχρονα Μαθηματικά έχουν φτάσει σε τόσο ψηλό επίπεδο ανάπτυξης και τόσο πλούσιο είναι το περιεχόμενό τους ώστε **είναι αδύνατο** για έναν άνθρωπο, όσο μεγάλος επιστήμονας κι αν είναι **να αγκαλιάσει όλη την επιστήμη**. Έτσι γίνεται αναγκαία η ειδίκευση σε έναν ορισμένο κλάδο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα σύγχρονα Μαθηματικά δεν είναι μόνο η Άλγεβρα, η Γεωμετρία κι η Ανάλυση που μαθαίνουμε στο σχολείο. Σε δεκάδες μετριοούνται τώρα οι διάφοροι κλάδοι των Μαθηματικών, που ο καθένας τους έχει τα δικά του θέματα, τις δικές του μεθόδους και τομείς εφαρμογής

Οι μαθήτριες και οι μαθητές προκαλούνται να εργαστούν μέσα στη δική τους μάθηση, γιατί με αυτόν τον τρόπο αποκαλύπτουν περισσότερες εκλεπτυσμένες στρατηγικές και κατανοήσεις. Μαθαίνουν δρώντας και έτσι η γνώση περνάει από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη μέσα από μεταβατικές φάσεις.

Άσκηση 1.

Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω παραστάσεις Α και Β είναι ίσες, όταν

$$A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \text{ και}$$

$$B = \begin{cases} 2, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{x-1}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Λύση

Το $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ για να ορίζετε πρέπει:

- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $x+2\sqrt{x-1} \geq 0$ αληθής για κάθε $x \geq 1$.
- $x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} \leq x \Leftrightarrow$

$$(2\sqrt{x-1})^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 4x-4 \leq x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty).$$

Για κάθε $x \geq 1$ έχουμε:

$$A = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} =$$

$$= |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1|.$$

$$\text{Αν } \sqrt{x-1}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 2, \text{ τότε ισχύει:}$$

- Αν $x \in [1, 2]$, τότε:

$$A = \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} = 2.$$

- Αν $x \in (2, +\infty)$, τότε:

$$A = \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}.$$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{x-1}, & x > 2 \end{cases} = B. \text{ Τελικά } A = B.$$

Άσκηση 2.

Αν α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε:

i) Να λυθεί η εξίσωση:

$$|x-\alpha|+|x-\beta|+|x-\gamma|=0.$$

ii) Ναδειχθεί ότι ισχύει:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma.$$

Λύση

i) Έχουμε: $|x-\alpha|+|x-\beta|+|x-\gamma|=0 \Leftrightarrow x-\alpha=0$
και $x-\beta=0$ και

$$x-\gamma=0 \Leftrightarrow x=\alpha \text{ και } x=\beta \text{ και } x=\gamma.$$

ii) Αφού α, β, γ θετικοί πραγματικοί, έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2 \geq 6\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta^2}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^2\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^2\alpha}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha^2}{\alpha\beta\gamma} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\gamma}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 6,$$

που ισχύει γιατί:

$$\begin{cases} \alpha^2+\gamma^2 \geq 2\alpha\gamma \\ \beta^2+\alpha^2 \geq 2\beta\alpha \\ \beta^2+\gamma^2 \geq 2\beta\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\gamma} \geq 2 \\ \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta} \geq 2 \\ \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 2 \end{cases}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\gamma}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 6.$$

Τελικά ισχύει για κάθε α, β, γ θετικούς πραγματικούς αριθμούς

Άσκηση 3.

Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$(-5x^2-9x+3) \cdot (x^4+1)=0 \quad (1) \text{ να}$$

υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$(i) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad (ii) \frac{3}{x_1+2} + \frac{3}{x_2+2}$$

$$(iii) (x_1-x_2)^2 \quad (iv) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \quad (v) x_1^3 + x_2^3$$

Λύση

$$H(1) \Leftrightarrow (-5x^2 - 9x + 3) \cdot (x^4 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-5x^2 - 9x + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + 9x - 3 = 0$$

Από τύπους Vieta ισχύουν: $x_1 + x_2 = -\frac{9}{5}$ και

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{5}, \text{ επομένως}$$

$$(i) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{9}{5}}{-\frac{3}{5}} = 3$$

$$(ii) \frac{3}{x_1 + 2} + \frac{3}{x_2 + 2} = \frac{3(x_2 + 2) + 3(x_1 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} =$$

$$= \frac{3(x_1 + x_2) + 12}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{-\frac{27}{5} + 12}{-\frac{3}{5} - \frac{18}{5} + 4} = -33$$

$$(iii) (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 =$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{81}{25} + \frac{12}{5} = \frac{141}{25}$$

$$(iv) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} =$$

$$= \frac{\frac{81}{25} + \frac{6}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{111}{3}$$

$$(v) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) =$$

$$= -\frac{729}{125} - 3\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{729}{125} - \frac{81}{25} = -\frac{1134}{125}.$$

Άσκηση 4.

Δίνονται

- Η εξίσωση $x^{2026} = \lambda^2 - 1$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ και

- Η παράσταση

$$A = \lambda|5 - 4\lambda| - 2|\lambda^2 - 5| + |\lambda^2 + \lambda - 6| + |\lambda^2 - \lambda + 3|,$$

για τον ίδιο πραγματικό αριθμό λ .

i. Να αποδείξετε ότι $-1 < \lambda < 1$.

ii. Να δείξετε ότι: $A = -2\lambda^2 + 3\lambda - 1$.

iii. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{A}{\lambda^4 - 1}$

και

iv. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ , ώστε

$$\frac{A}{\lambda^4 - 1} > 0.$$

Λύση

i. Αφού η εξίσωση $x^{2026} = \lambda^2 - 1$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ και $x^{2026} \geq 0$, πρέπει

$$\lambda^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 1.$$

ii. Όταν $-1 < \lambda < 1$, τότε ισχύουν:



$$\bullet \quad 5 - 4\lambda > 0.$$

$$\bullet \quad \lambda^2 - 5 < 0.$$



$\lambda^2 + \lambda - 6 < 0$: Ρίζες -3 και 2



$$\bullet \quad \lambda^2 - \lambda + 3 > 0, \text{ γιατί έχει } \Delta < 0.$$



Τότε έχουμε:

$$A = \lambda|5 - 4\lambda| - 2|\lambda^2 - 5| + |\lambda^2 + \lambda - 6| + |\lambda^2 - \lambda + 3| =$$

$$\lambda(5 - 4\lambda) - 2(-\lambda^2 + 5) - \lambda^2 - \lambda + 6 + \lambda^2 - \lambda + 3 =$$

$$-4\lambda^2 + 5\lambda + 2\lambda^2 - 10 - \lambda^2 - \lambda + 6 + \lambda^2 - \lambda + 3 =$$

$$-2\lambda^2 + 3\lambda - 1.$$

iii. Παραγοντοποιούμε την $A = -2\lambda^2 + 3\lambda - 1$.

Έχει $\Delta = 1$ και ρίζες $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$, τότε

$$A = -2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot (\lambda - 1) = -(2\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1).$$

$$\text{Άρα } \frac{A}{\lambda^4 - 1} = \frac{-(2\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)} =$$

$$-\frac{(2\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)} =$$

$$-\frac{(2\lambda - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)}, \text{ με } -1 < \lambda < 1.$$

iii. Θα βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς λ ,

$$\text{ώστε } \frac{A}{\lambda^4 - 1} > 0.$$

Ισχύει $-1 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda + 1 > 0$ και $\lambda^2 + 1 > 0$, πρέπει

$$-(2\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow 2\lambda < 1 \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{2}, \text{ άρα}$$

$$\begin{cases} \lambda < \frac{1}{2} \\ -1 < \lambda < 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \left(-1, \frac{1}{2}\right).$$

Άσκηση 5.

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{3}{2}(x-1) + \sqrt{2x^2 - 7x - 4}.$$

i. Πότε ορίζεται η A.

ii. Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του A, όταν $x \geq 4$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left[(\lambda^3 - 1)x + \lambda - 1\right] \cdot \sqrt{A} = 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

iv. Να μετατραπεί η παράσταση $\frac{1}{\sqrt{A}}$ σε

ισοδύναμη χωρίς ριζικά στον παρονομαστή.

Λύση

i. Για να ορίζεται η A πρέπει $2x^2 - 7x - 4 \geq 0$,

που έχει $\Delta = 81$ και ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 4$.



Ορίζεται όταν $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup [4, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{ii. } 2x^2 - 7x - 4 &= 2x^2 - 8x + x - 4 = \\ &= 2x(x-4) + (x-4) = (2x+1)(x-4) \end{aligned}$$

Έτσι για $x \geq 4$ έχουμε:

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{3}{2}(x-1) + \sqrt{2x^2 - 7x - 4}} =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}(x-1) + \sqrt{(2x+1)(x-4)}} =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \sqrt{(2x+1)(x-4)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(\sqrt{2x+1}) + (\sqrt{x-4})} \right)^2 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-4} \right|$$

Αφού $x \geq 4$, ισχύει $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-4} > 0$, τότε

$$\sqrt{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-4} \right| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-4}).$$

$$\text{iii. } \left[(\lambda^3 - 1)x + \lambda - 1\right] \cdot \sqrt{A} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[(\lambda^3 - 1)x + \lambda - 1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)x + \lambda - 1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)x = -(\lambda - 1) \quad (\text{I})$$

Αφού $\lambda^2 + \lambda + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)x = -(\lambda - 1).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$\bullet \text{ Αν } (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1, \text{ τότε}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)x = -(\lambda - 1) \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)} = -\frac{1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$$

μοναδική λύση.

$$\text{Αν } (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

τότε $0 \cdot x = 0$, τότε αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , δηλαδή είναι (αόριστη ή ταυτότητα). Όμως $x \geq 4$, τότε $x \in [4, +\infty)$.

iv. Θα μετατρέψουμε την παράσταση $\frac{1}{\sqrt{A}}$ σε

ισοδύναμη χωρίς ριζικά στον παρονομαστή. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-4})}{(\sqrt{2x+1})^2 - (\sqrt{x-4})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-4})}{2x+1 - x - 4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-4})}{x+5} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Από κεφάλαιο 4.000 ευρώ ένα μέρος του κατατέθηκε προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από ένα χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 173 ευρώ τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

Λύση

Έστω x το ποσό που τοκίστηκε με 5%, οπότε το υπόλοιπο ποσό είναι $4000 - x$, που τοκίστηκε με 3%.

Οι τόκοι του ενός έτους, του πρώτου είναι:

$$\frac{5}{100}x = \frac{5x}{100}.$$

Οι τόκοι του ενός έτους, του δεύτερου είναι:

$$\frac{3}{100} \cdot (4.000 - x) = \frac{3 \cdot (4.000 - x)}{100} = \frac{12.000 - 3 \cdot x}{100}$$

Οι συνολικοί τόκοι του ενός έτους και των δύο

$$\text{ποσών είναι: } \frac{5x}{100} + \frac{12.000 - 3x}{100} = 173 \Leftrightarrow$$

$$5x + 12.000 - 3x = 17.300 \Leftrightarrow 2x = 17.300 - 12.000 =$$

$$= 5.300 \Leftrightarrow x = \frac{5.300}{2} \Leftrightarrow x = 2.650.$$

Άρα: Τοκίστηκαν με 5% τα 2.650 € και τοκίστηκαν με 3% τα $4.000 - 2.650 = 1.350$ €.

Άσκηση 7.

Να βρεθεί που ορίζεται η παράσταση:

$$A = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(4-x)(x^2-3x+2)(3+2x-x^2)(x^2-3x+4)}}$$

Λύση

Πρέπει

$$(x+2)(4-x)(x^2-3x+2).$$

$$(3+2x-x^2)(x^2-3x+4) > 0$$

Το διώνυμο $x+2$ έχει ρίζα το -2

Το διώνυμο $4-x$ έχει ρίζα το 4

Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει ρίζες τους 1 και 2 .

Το τριώνυμο $3+2x-x^2$ έχει ρίζες τους -1 και 3 .

Το τριώνυμο x^2-3x+4 δεν έχει ρίζες.

Έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	3	4	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2-3x+2	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$3+2x-x^2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
x^2-3x+4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Γ	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Άρα η παράσταση ορίζεται όταν

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty).$$

Άσκηση 8.

Να βρεθεί που ορίζεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{2 - \frac{2x^2 + x - 39}{x^2 - 5x - 36}}.$$

Λύση

Πρέπει $x^2 - 5x - 36 \neq 0$ και

$$2 - \frac{2x^2 + x - 39}{x^2 - 5x - 36} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 39}{x^2 - 5x - 36} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x^2 + x - 39) - 2(x^2 - 5x - 36)}{x^2 - 5x - 36} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2 + x - 39 - 2x^2 + 10x + 72}{x^2 - 5x - 36} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{11x + 33}{x^2 - 5x - 36} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{11(x+3)}{x^2 - 5x - 36} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$[11(x+3) \cdot (x^2 - 5x - 36) \leq 0 \text{ και } x^2 - 5x - 36 \neq 0]$$

Το διώνυμο $x+3$ έχει ρίζα την $x=-3$

Το τριώνυμο $x^2 - 5x - 36$ έχει

$$\Delta = 25 + 144 = 169 \text{ και ρίζες}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 13}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 9 \\ x_4 = -4 \end{cases},$$

$$\text{Άρα } x^2 - 5x - 36 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4 \text{ και } x \neq 9$$

Στο παρακάτω πίνακα παριστάνουμε το πρόσημο του γινομένου.

x	$-\infty$	-4	-3	9	$+\infty$
$11(x+3)$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x^2-5x-36$	$+$	0	$-$	$ $	$+$
Γ	$-$	$ $	$+$	0	$ $

Η διπλή γραμμή δηλώνει ότι στα σημεία -4 και 9 δεν ορίζεται η ανίσωση.

Είναι φανερό ότι η λύση της ανίσωσης είναι

$$x \in (-\infty, -4) \cup (-3, 0).$$

Άρα η παράσταση ορίζεται όταν

$$x \in (-\infty, -4) \cup (-3, 0).$$

Άσκηση 9.

Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, και $|x| - (\kappa x + \lambda x + 1) = 0$, να υπολογίσετε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $|\kappa + \lambda| < 1$

Λύση

Έχουμε:

$$|x| - (\kappa x + \lambda x + 1) = 0 \Leftrightarrow |x| = \kappa x + \lambda x + 1 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa + \lambda)x = |x| - 1 \quad (1)$$

- Αν $x=0$ η (1) γίνεται $(\kappa + \lambda) \cdot 0 = -1 \Leftrightarrow 0 = -1$ και είναι αδύνατη.

- Αν $x \neq 0$ από την (1) παίρνουμε

$$\kappa + \lambda = \frac{|x| - 1}{x}, \text{ οπότε } |\kappa + \lambda| = \frac{||x| - 1|}{|x|}.$$

$$\text{Πρέπει: } |\kappa + \lambda| < 1 \Leftrightarrow \frac{||x| - 1|}{|x|} < 1 \Leftrightarrow ||x| - 1| < |x| \Leftrightarrow$$

$$-|x| < |x| - 1 < |x|. \text{ Επομένως}$$

$$-|x| < |x| - 1 \Leftrightarrow 2|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x > \frac{1}{2} \text{ ή } \right.$$

$$\left. x < -\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) \text{ και}$$

$|x| - 1 < |x| \Leftrightarrow -1 < |x| - |x| \Leftrightarrow -1 < 0$, που είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τελικά η ανισότητα $|k + \lambda| < 1$ ισχύει όταν

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Άσκηση 10. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-3 \leq \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

$$\text{Έχουμε: } -3 \leq \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \left(-3 \leq \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} \right.$$

$$\left. \text{και } \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2 \right)$$

$$\bullet -3 \leq \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + \lambda x - 2 + 3x^2 - 3x + 3}{x^2 - x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x^2 + (\lambda - 3)x + 1}{x^2 - x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 + (\lambda - 3)x + 1 \geq 0 \quad (1)$$

($x^2 - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Το τριώνυμο $4x^2 + (\lambda - 3)x + 1$ έχει

$$\Delta = (\lambda - 3)^2 - 16 = (\lambda - 3 - 4)(\lambda - 3 + 4) = (\lambda - 7)(\lambda + 1), \text{ οπότε η ανισότητα (1) είναι}$$

αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 7) \cdot (\lambda + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [-1, 7].$$

$$\bullet \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + \lambda x - 2 - 2x^2 + 2x - 2}{x^2 - x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x^2 + (\lambda + 2)x - 4}{x^2 - x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + (\lambda + 2)x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - (\lambda + 2)x + 4 \leq 0 \quad (2).$$

Το τριώνυμο $x^2 - (\lambda + 2)x + 4$ έχει

$$\Delta = (\lambda + 2)^2 - 16 = (\lambda + 2 - 4)(\lambda + 2 + 4) =$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 6), \text{ οπότε η ανισότητα (2) είναι}$$

αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 6) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [-6, 2]$$

Άρα, όταν $\lambda \in [-1, 2]$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ισχύει: } -3 \leq \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2.$$

Άσκηση 11.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+2) = x^2 - 2x$ (1).

I. Να βρεθεί το $f(2)$.

II. Να βρεθεί ο τύπος της f .

III. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{f(x)}{|x| + x}.$$

IV. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η γραφική της f είναι πάνω από τη γραφική της g . Ποια είναι τα κοινά σημεία των γραφικών;

V. Να λυθεί η εξίσωση

$$\lambda f(x+2) - \lambda f(x) + 2x = 0 \quad (2).$$

Λύση

I. Θέτουμε στην (1) όπου $x = 0$ και έχουμε:

$$f(2) = 0 - 0 = 0.$$

II. Θέτουμε στην (1) όπου x το $x - 2$ και

$$\text{έχουμε: } f(x - 2 + 2) = (x - 2)^2 - 2(x - 2) =$$

$$= (x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8.$$

Ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = (x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8, x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

III. Για το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{f(x)}{|x| + x}$

πρέπει $|x| + x \neq 0$. Ισχύει

$$|x| + x = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0, \text{ άρα}$$

$$|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ τότε το πεδίο ορισμού της } g$$

είναι $A = (0, +\infty)$.

IV. Η γραφική της f είναι πάνω από τη γραφική της g αν και μόνο αν

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 > \frac{f(x)}{|x| + x} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 8 > \frac{x^2 - 6x + 8}{|x| + x} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 8 - \frac{x^2 - 6x + 8}{|x| + x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 6x + 8) \left(1 - \frac{1}{|x| + x} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 6x + 8) \left(\frac{|x| + x}{|x| + x} - \frac{1}{|x| + x} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 6x + 8) \left(\frac{|x| + x - 1}{|x| + x} \right) > 0 \quad (3).$$

Αφού $x \in (0, +\infty)$ η (3) είναι ισοδύναμη

$$(x^2 - 6x + 8) \left(\frac{|x| + x - 1}{|x| + x} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 6x + 8) \left(\frac{2x-1}{2x} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 6x + 8) \cdot (2x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2) \cdot (x-4) \cdot (2x-1) > 0 \quad (4).$$

Από τον πίνακα προσήμων έχουμε:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	4	$+\infty$
x-2			-	0	+	+
x-4			-	-	0	+
2x-1			0	+	+	+
Γ			-	0	-	+

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 2 \right) \cup (4, +\infty)$$

IV. Για τα κοινά σημεία την γραφικών έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{6}{2} + 8 = \frac{1}{4} - 3 + 8 = \frac{1}{4} + 5 = \frac{21}{4}.$$

$$f(2) = 0 \text{ και } f(4) = 0.$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών είναι

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right), B(2, 0) \text{ και } \Gamma(4, 0).$$

V. Η εξίσωση είναι:

$$\lambda f(x+2) - \lambda f(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(x^2 - 2x) - \lambda(x^2 - 6x + 8) + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(x^2 - 2x - x^2 + 6x - 8) + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(4x - 8) + 2x \Leftrightarrow 4\lambda x - 8\lambda + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(2\lambda + 1)x = 8\lambda \Leftrightarrow (2\lambda + 1)x = 4\lambda. \quad (5)$$

Περιπτώσεις

- Αν $2\lambda + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{1}{2}$, τότε η $(2\lambda + 1)x = 4\lambda \Leftrightarrow x = \frac{4\lambda}{2\lambda + 1}$, μοναδική λύση.
- Αν $2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$, τότε η $(2\lambda + 1)x = 4\lambda \Leftrightarrow 0 \cdot x = -2$, που είναι αδύνατη.

Άσκηση 12. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 \leq 64 \\ \frac{x^2 + x - 4}{x} < 1 \end{cases}$$

Λύση

Λύνουμε την πρώτη ανίσωση

$$x^2 \leq 64 \Leftrightarrow x^2 - 64 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-8) \cdot (x+8) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-8, 8]$$

Λύνουμε την δεύτερη ανίσωση:

$$\frac{x^2 + x - 4}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 4}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + x - 4 - x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0 \Leftrightarrow$$



$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$$

Τελικά η λύση του συστήματος είναι:

$$x \in [-8, -2) \cup (0, 2).$$

Άσκηση 13. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+3)(x+2) + 2(x+1)(x+2) - 3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + 5x + 6 + 2x^2 + 6x + 4 - 3x^2 - 12x - 9}{(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x+1}{(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$[(-x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) > 0 \text{ και}$$

$$(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \neq 0]$$

Με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η λύση της ανίσωσης είναι:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$
-x+1	+	+	+	+	0	-
x+1	-	-	-	0	+	+
x+2	-	-	0	+	+	+
x+3	-	0	+	+	+	+
Γ	-	+	-	+	0	-

$$x \in (-3, -2) \cup (-1, 1].$$

Τάξη: Α΄

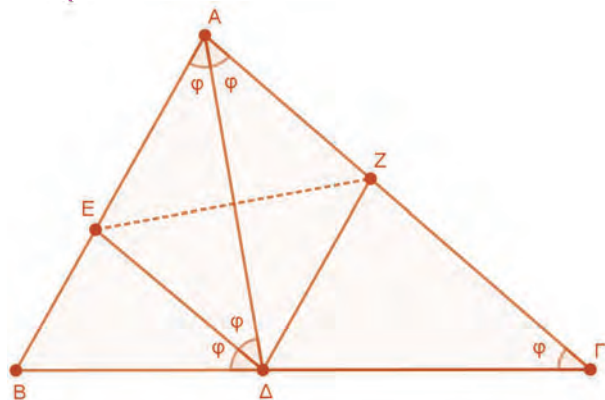
Ασκήσεις στα Παραλληλόγραμμα

Άσκηση 1

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = \Delta\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}B$ και από το Δ φέρνουμε παράλληλη στην AB η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- $AZ\Delta E$ παραλληλόγραμμο.
- Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.
- Τα τμήματα AD και EZ διχοτομούνται.

Λύση



α) Επειδή $AD = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, άρα $\Delta\hat{A}Z = \hat{\Gamma} = \hat{\phi}$ (1)
 Η γωνία $B\hat{D}A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$,
 άρα $B\hat{D}E = E\hat{D}A = \frac{B\hat{D}A}{2} = \frac{2\hat{\phi}}{2} = \hat{\phi}$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι $E\hat{D}A = \Delta\hat{A}Z$. Δηλαδή δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΔE , $A\Gamma$ και την AD , είναι ίσες. Άρα $\Delta E \parallel A\Gamma$. Επιπλέον $\Delta Z \parallel AB$ συνεπώς το τετράπλευρο $AEDZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $B\hat{A}D = \Delta\hat{A}Z$ αφού η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και $E\hat{D}A = \Delta\hat{A}Z$, οπότε το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές με βάση την AD .

γ) Τα AD και EZ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AEDZ$, οπότε τα τμήματα AD και EZ διχοτομούνται.

Άσκηση 2

Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, γράφουμε με κέντρο το A και ακτίνα AB , τόξο $B\Gamma$ και έστω M τυχαίο σημείο του τόξου. Αν E, Z, H, Θ τα μέσα των πλευρών $AB, BM, M\Gamma$ και $A\Gamma$ του τετράπλευρου $ABM\Gamma$ να αποδείξετε ότι $EH \perp \Theta Z$.

Λύση

Στο τρίγωνο ABM τα E, Z είναι μέσα των πλευρών AB και BM αντίστοιχα. Άρα

Βενέδικτος Μπαλτσαβιάς – Στέλιος Τσακιρτζής.

$EZ \parallel \frac{AM}{2}$. Όμοια στο τρίγωνο $A\Gamma M$ είναι

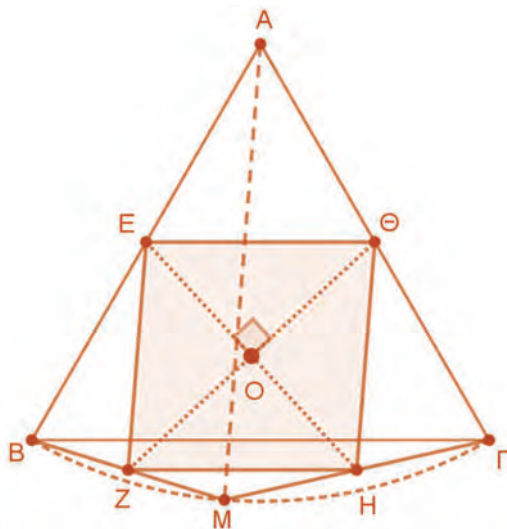
$\Theta H \parallel \frac{AM}{2}$, άρα $EZ \parallel \Theta H$ και επομένως το

$E\Theta HZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα E, Θ είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα $E\Theta \parallel \frac{B\Gamma}{2}$

και $B\Gamma = AB = AM$ συνεπώς $E\Theta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AM}{2} = EZ$.

Από το τελευταίο προκύπτει ότι το $E\Theta HZ$ είναι ρόμβος άρα οι διαγώνιες είναι κάθετες δηλαδή $EH \perp \Theta Z$.



Άσκηση 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Επί της πλευράς $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία E και Δ τέτοια ώστε $AD = \Gamma E = \frac{1}{4} A\Gamma$ και επί της πλευράς AB

παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AZ = \frac{1}{4} AB$.

Από το E φέρνουμε EH παράλληλη στη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $EH + Z\Delta = B\Gamma$.

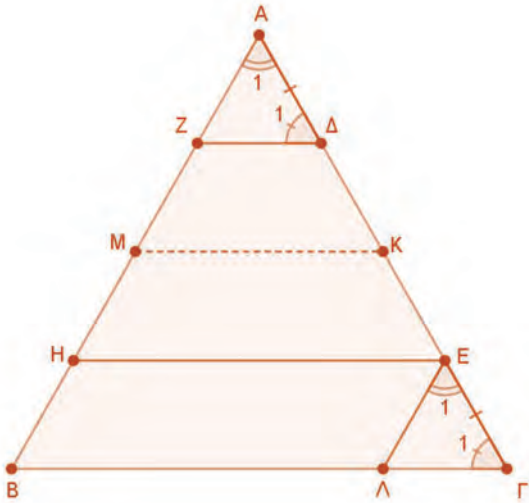
Λύση

Φέρνουμε $EL \parallel AB$ και θεωρούμε M και K τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Είναι $MK \parallel B\Gamma$

και $AZ = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} \cdot 2AM = \frac{1}{2} AM$,

$A\Delta = \frac{1}{4} A\Gamma = \frac{1}{4} \cdot 2AK = \frac{1}{2} AK$, άρα τα Z, Δ είναι τα

μέσα των AM και AK αντίστοιχα, επομένως $Z\Delta \parallel MK$, οπότε $Z\Delta \parallel B\Gamma$.



Επομένως $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, και $AD = EG$, άρα τα τρίγωνα AZD και ELG είναι ίσα (ΓΠΓ) οπότε $ZD = LG$. Είναι $EL // HB$ και $EH // BL$ άρα το $HELB$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $EH = BL$. Τελικά έχουμε $EH + ZD = BL + LG = BG$.

Άσκηση 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2}$ και το

ύψος του AD . Προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BE = BD$.

α) Να αποδείξετε ότι η αν προέκταση της ED (προς το Δ) τέμνει την AG στο M τότε:

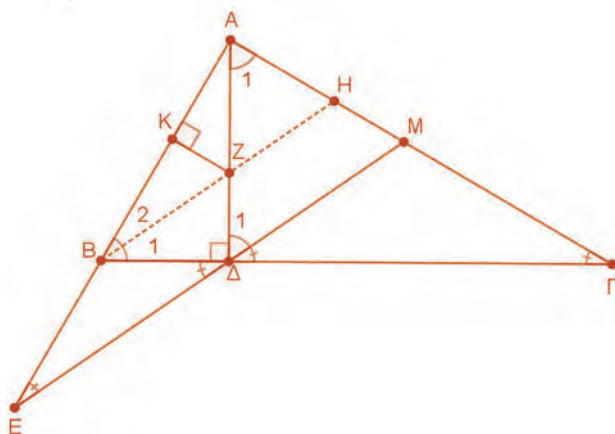
- i) το τρίγωνο $\Gamma\Delta M$ είναι ισοσκελές.
- ii) το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.
- iii) η ΔM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta\Gamma$.

β) Από το B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην EM , που τέμνει την AD στο Z και την AG στο H .

i) Αν K είναι η προβολή του Z στην AB , να αποδείξετε ότι $ZK = ZD$.

ii) Να αποδείξετε ότι $HM = BH - \Delta M$.

Λύση



α) i) Αφού $BE = BD$ το τρίγωνο ΔBE είναι ισοσκελές. Συνεπώς $\hat{B}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{\Delta}E = \omega$. Η γωνία $\hat{B}$

είναι εξωτερική στο τρίγωνο $BE\Delta$, άρα:

$$\hat{B} = 2 \cdot \omega \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{\Gamma} = 2 \cdot \omega \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \omega. \text{ Δηλαδή}$$

$M\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = \omega$, άρα $M\Gamma = M\Delta$, οπότε το τρίγωνο $\Gamma\Delta M$ είναι ισοσκελές.

ii) Επιπλέον έχουμε ότι: $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^\circ - \omega$, άρα $M\Delta = MA$, που σημαίνει ότι και το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.

iii) Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε: $M\Gamma = M\Delta$ (1) και $M\Delta = MA$ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι $M\Gamma = MA$, δηλαδή M μέσο της AG , άρα ΔM διάμεσος της υποτείνουσας.

β) i) Αφού $BH // EM$ είναι $\hat{B}_1 = \hat{E}$, ως εντός εκτός

και επί τα αυτά μέρη, άρα $\hat{B}_1 = \hat{E} = \omega = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2}$,

επομένως η BH είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ και προκύπτει ότι το σημείο Z ισαπέχει από τις BA και $B\Gamma$, δηλαδή $ZK = ZD$.

ii) Τα τρίγωνα $H\Delta\Gamma$ και $M\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή. Έχουμε λοιπόν: $HB - M\Delta = H\Gamma - M\Gamma = HM$.

Άσκηση 5

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΔA , AB και $\Gamma\Delta$ κατά ίσα τμήματα AE , BZ και ΔH αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EZH είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

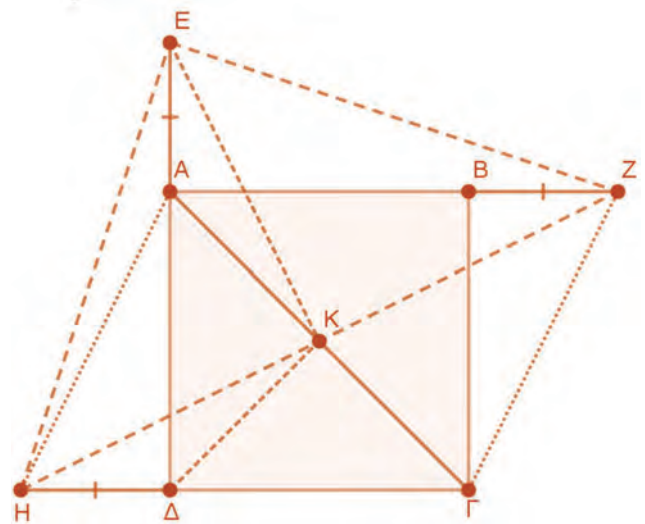
β) Το τετράπλευρο $AZ\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Αν οι AG και ZH τέμνονται στο K τότε:

$$i) EK = \frac{ZH}{2}$$

ii) Τα τρίγωνα ΔKE και AKZ είναι ίσα.

Λύση:



α) Τα τρίγωνα EAZ και $H\Delta E$ είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια, $AE = H\Delta$ και $AZ = AB + BZ = \Delta A + AE = \Delta E$. Συνεπώς έχουν όλα

τους τα στοιχεία ίσα ένα προς ένα, άρα και $EZ = EH$.

Επιπλέον $H\hat{E}Z = H\hat{E}\Delta + A\hat{E}Z = E\hat{Z}A + A\hat{E}Z = 90^\circ$.

Επομένως το EHZ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

β) Είναι $AZ \parallel GH$, άρα το $AZGH$ παραλληλόγραμμο.

γ) i) Το K είναι μέσο του HZ (AG, HZ διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $AZGH$) που σημαίνει ότι EK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Άρα $EK = \frac{ZH}{2}$.

ii) Τα τρίγωνα $\Delta KE, AKZ$ έχουν:

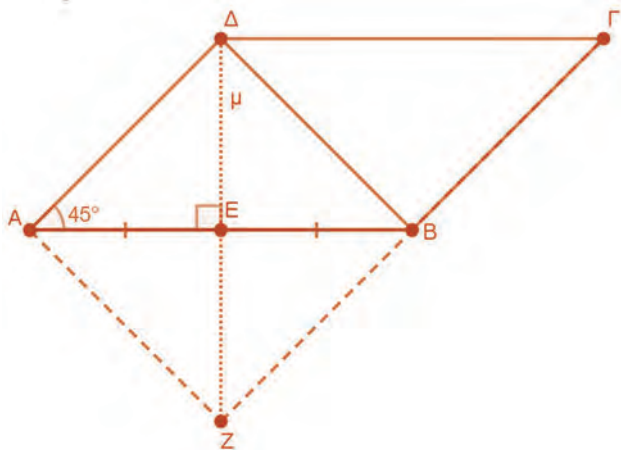
- $EK = \frac{ZH}{2} = KZ$
- $ED = AZ$ (άθροισμα ίσων τμημάτων)
- $\Delta K = AK$, αφού K κέντρο του τετραγώνου.

Άρα από το (Π-Π-Π) τα τρίγωνα ΔKE και AKZ είναι ίσα.

Άσκηση 6

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 45^\circ$. Η μεσοκάθετος μ της πλευράς AB διέρχεται από την κορυφή Δ και τέμνει την προέκταση της GB στο Z . Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BZ$ είναι τετράγωνο.

Λύση:



Έστω E το σημείο τομής της μ με την AB . Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές, αφού το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου μ ισαπέχει από τα A και B , άρα $A\hat{B}\Delta = 45^\circ$ οπότε $A\hat{\Delta}B = 90^\circ$.

Επίσης το ΔE είναι ύψος του τριγώνου $A\Delta B$ άρα και διχοτόμος οπότε $A\hat{\Delta}E = 45^\circ$, συνεπώς το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές και έχουμε $AE = \Delta E = EB$.

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και είναι $\hat{\Gamma} = E\hat{B}Z = 45^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη. Στο ορθογώνιο τρίγωνο EBZ είναι $E\hat{B}Z = 45^\circ$ άρα

$E\hat{Z}B = 45^\circ = E\hat{B}Z$ επομένως είναι και ισοσκελές οπότε $EB = EZ$.

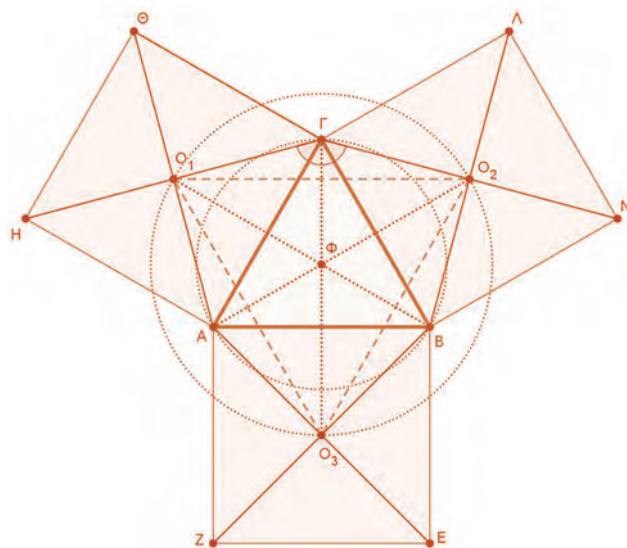
Τελικά στο τετράπλευρο $A\Delta BZ$ οι διαγώνιες διχοτομούνται άρα είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον οι διαγώνιες είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Συνεπώς το $A\Delta BZ$ είναι τετράγωνο.

Άσκηση 7

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $A\Gamma\Theta H, ABEZ$ και $B\Gamma\Lambda N$. Αν O_1, O_2 και O_3 είναι τα κέντρα των τετραγώνων $A\Gamma\Theta H, B\Gamma\Lambda N$ και $ABEZ$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι

- οι ευθείες $\Gamma O_3, BO_1$ και AO_2 διέρχονται από το ίδιο σημείο Φ .
- το τρίγωνο $O_1 O_2 O_3$ είναι ισόπλευρο.
- οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AB\Gamma$ και $O_1 O_2 O_3$ είναι ομόκεντροι.

Λύση:



i. Αφού το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τα τετράγωνα $A\Gamma\Theta H, ABEZ$ και $B\Gamma\Lambda N$ είναι ίσα άρα έχουν και ίσες διαγώνιους. Είναι λοιπόν $\Gamma O_1 = A O_1$ και $B\Gamma = BA$ άρα η BO_1 είναι μεσοκάθετος της $A\Gamma$. Όμοια δείχνουμε ότι η AO_2 είναι μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ και η ΓO_3 της AB . Άρα οι $BO_1, \Gamma O_3$ και AO_2 τέμνονται στο περίκεντρο Φ του τριγώνου $AB\Gamma$.

ii. Τα τρίγωνα $O_1\Gamma O_2$ και $O_1A O_3$ έχουν $O_1\Gamma = O_1A = O_2\Gamma = A O_3$ ως μισά ίσων διαγωνίων και $O_1\hat{\Gamma} O_2 = O_1\hat{A} O_3 = 45^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 150^\circ$, άρα από το (ΠΓΠ) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $O_1 O_2 = O_1 O_3$. Όμοια δείχνουμε ότι τα τρίγωνα $O_1\Gamma O_2$ και $O_2 B O_3$ είναι ίσα, άρα είναι

$O_2O_3 = O_1O_2 = O_1O_3$, δηλαδή το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ισόπλευρο.

iii. Είναι $\Gamma O_1 = \Gamma O_2$ και $O_2O_3 = O_1O_3$, άρα η ΓO_3 είναι μεσοκάθετος του O_1O_2 . Όμοια δείχνουμε ότι η $A O_2$ είναι μεσοκάθετος του O_1O_3 , άρα το Φ είναι το περίκεντρο του τριγώνου $O_1O_2O_3$. Συνεπώς οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AB\Gamma$ και $O_1O_2O_3$ είναι ομόκεντροι.

Άσκηση 8

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το μέσο M της AB και σημείο E στην $A\Gamma$ έτσι, ώστε $EM = EB$. Αν

θέσουμε $\hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = \varphi$, να αποδείξετε ότι:

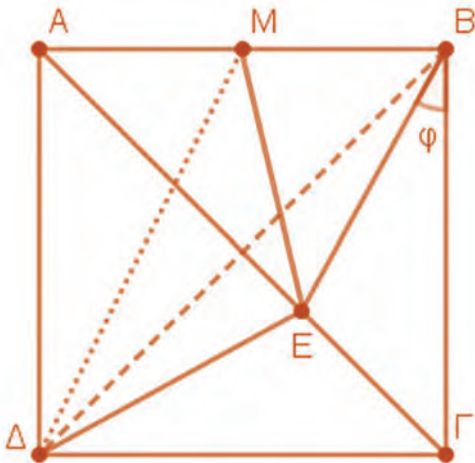
α) $EB = ED$

β) $\hat{B}\hat{E}\hat{M} = 2 \cdot \varphi$

γ) $\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} = 90^\circ + 2 \cdot \varphi$

δ) $ED \perp EM$

Λύση:



α) Επειδή στο τετράγωνο οι διαγώνιες διχοτομούνται και είναι κάθετες, η ΓA είναι μεσοκάθετος του $B\Delta$. Επειδή λοιπόν το E βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Delta$, θα είναι $EB = ED$.

β) Παρατηρούμε ότι:

$$\hat{M}\hat{B}\hat{E} = \hat{M}\hat{B}\hat{\Gamma} - \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ - \varphi$$

Στο ισοσκελές λοιπόν τρίγωνο EBM είναι:

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{E}\hat{M} &= 180^\circ - \hat{E}\hat{B}\hat{M} - \hat{E}\hat{M}\hat{B} = \\ 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - (90^\circ - \varphi) &= 2 \cdot \varphi \end{aligned}$$

γ) Η γωνία $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta} = 45^\circ$, διότι στο τετράγωνο οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του.

Επομένως είναι: $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{E} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} - \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = 45^\circ - \varphi$

Στο ισοσκελές λοιπόν τρίγωνο $EB\Delta$ είναι:

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} &= 180^\circ - \hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} - \hat{E}\hat{\Delta}\hat{B} = \\ 180^\circ - (45^\circ - \varphi) - (45^\circ - \varphi) &= 90^\circ + 2\varphi \end{aligned}$$

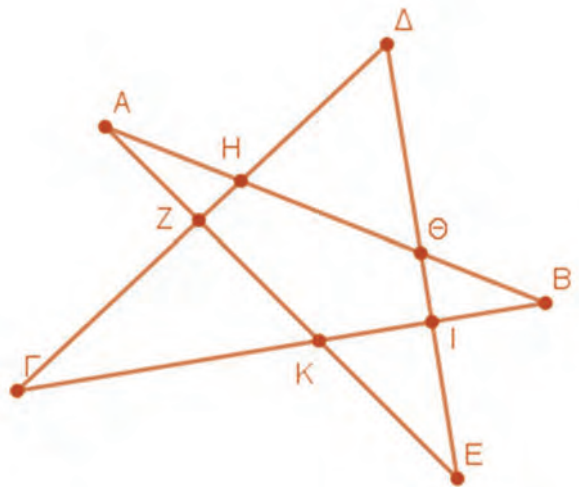
δ) Σύμφωνα με τα ερωτήματα β) και γ) παίρνουμε:

$$\hat{M}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} - \hat{B}\hat{E}\hat{M} = 90^\circ + 2\varphi - 2\varphi = 90^\circ$$

Επομένως θα είναι $ED \perp EM$.

Άσκηση 9

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών του μη κυρτού πενταγώνου του παρακάτω σχήματος είναι 2 ορθές



Δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ$.

Απόδειξη:

Έχουμε ότι:

$$\text{Στο } \hat{A}\hat{K}\hat{B}: \quad \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{K}$$

$$\text{Στο } \hat{\Gamma}\hat{I}\hat{\Delta}: \quad \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{I}$$

$$\text{Στο } \hat{A}\hat{\Theta}\hat{E}: \quad \hat{A} + \hat{E} = 180^\circ - \hat{\Theta}$$

$$\text{Στο } \hat{\Gamma}\hat{H}\hat{B}: \quad \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{H}$$

$$\text{Στο } \hat{\Delta}\hat{Z}\hat{E}: \quad \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ - \hat{Z}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E}) = 900^\circ - (\hat{K} + \hat{I} + \hat{\Theta} + \hat{H} + \hat{Z}).$$

Το πεντάγωνο $ZH\Theta IK$ έχει άθροισμα γωνιών 540° , άρα

$$2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E}) = 900^\circ - 540^\circ = 360^\circ.$$

Οπότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Τάξη: Β'

Διαιρετότητα από τους αριθμούς στα πολυώνυμα

Δημήτρης Διαμαντίδης

Τα πολυώνυμα αποτελούν θεμέλιο της Άλγεβρας από την εποχή των Βαβυλωνίων έως την σύγχρονη επιστήμη και τις εφαρμογές της. Έννοιες των αριθμών γενικεύονται και προσαρμόζονται στην περίπτωση των πολυωνύμων και αξιοποιούνται σε εφαρμογές, όπως η κρυπτογραφία.

Σε αυτό το πλαίσιο η έννοια της διαιρετότητας γενικεύεται από τους αριθμούς στα πολυώνυμα και μαζί με αυτήν και σχετικές έννοιες, όπως αυτή του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη.

Παρακάτω βλέπουμε τη γενίκευση αυτής της έννοιας, όπως και του αλγορίθμου του Ευκλείδη, για τον υπολογισμό του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των αριθμών 504 και 180 με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

Απάντηση

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, για να υπολογίσουμε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη δύο αριθμών A_1 και A_2 , με $A_1 > A_2$, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1

Γράφουμε την ευκλείδεια διαίρεση του μεγαλύτερου A_1 με τον A_2 :

$$A_1 = A_2 \cdot \pi_1 + A_3$$

Το π_1 είναι το πηλίκο και το A_3 είναι το υπόλοιπο.

Βήμα 2

Εφόσον $A_3 \neq 0$, γράφουμε την ευκλείδεια διαίρεση του A_2 με τον A_3 :

$$A_2 = A_3 \cdot \pi_2 + A_4$$

Βήμα 3

Εφόσον $A_4 \neq 0$, γράφουμε την ευκλείδεια διαίρεση του A_3 με τον A_4 :

$$A_3 = A_4 \cdot \pi_3 + A_5$$

Συνεχίζουμε μέχρι το υπόλοιπο να είναι ίσο με το 0.

....

Βήμα ν

$$A_v = A_{v+1} \cdot \pi_v + 0$$

Δηλαδή $A_{v+1} = 0$.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, ο Μέγιστος Κοινός διαιρέτης των A_1 και A_2 είναι ο A_{v+1} .

Ακολουθώντας τον αλγόριθμο, για το παράδειγμα, αρχικά γράφουμε την ευκλείδεια διαίρεση του 504 με το 180:

$$504 = 180 \cdot 2 + 144$$

Στη συνέχεια γράφουμε την ευκλείδεια διαίρεση του πηλίκου 180 με το υπόλοιπο 144:

$$180 = 144 \cdot 1 + 36$$

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο, μέχρι το υπόλοιπο να γίνει ίσο με το 0:

$$144 = 36 \cdot 3 + 0$$

Τότε, σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των 504 και 180 είναι ο 36.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των πολυωνύμων:

$$A_1(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 2x - 2$$

και

$$A_2(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$$

με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

Απάντηση

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την περίπτωση των αριθμών έχουμε:

Βήμα 1

Γράφουμε την διαίρεση του A_1 με το A_2 , καθώς το P έχει μεγαλύτερο βαθμό:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$$

Πρώτο στάδιο:

$x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2$	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$
$-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 10x$	x
$3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 8x - 2$	

Δεύτερο στάδιο:

$x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2$	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$
$-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 10x$	$x + 3$
$3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 8x - 2$	
$-3x^4 + 9x^3 - 9x^2 - 18x + 30$	
$5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$	

Εφόσον το υπόλοιπο

$$A_3(x) = 5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$$

είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη

$A_2(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$, το πηλίκο της διαίρεσης είναι:

$$\pi_1(x) = x + 3$$

Ισχύει ότι $A_1(x) = A_2(x) \cdot \pi_1(x) + A_3(x)$

Συνεχίζουμε τον αλγόριθμο με το επόμενο βήμα.

Βήμα 2

Εφόσον το πολυώνυμο $A_3(x)$ δεν είναι μηδενικό, γράφουμε την διαίρεση του $A_2(x)$ με το $A_3(x)$:

Πρώτο στάδιο:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$	$5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$
$-x^4 + \frac{14}{5}x^3 + 2x^2 - \frac{28}{5}x$	$\frac{1}{5}x$
$-\frac{1}{5}x^3 + 5x^2 + \frac{2}{5}x - 10$	

Δεύτερο στάδιο:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$	$5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$
$-x^4 + \frac{14}{5}x^3 + 2x^2 - \frac{28}{5}x$	$\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}$
$-\frac{1}{5}x^3 + 5x^2 + \frac{2}{5}x - 10$	
$\frac{1}{5}x^3 - \frac{14}{25}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{28}{25}$	
$\frac{111}{25}x^2 - \frac{222}{25}$	

Όπως βλέπουμε το υπόλοιπο

$$A_4(x) = \frac{111}{25}x^2 - \frac{222}{25}$$

ή αλλιώς

$$A_4(x) = \frac{111}{25}(x^2 - 2)$$

είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη

$$A_3(x) = 5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$$

Επομένως, το πηλίκο της διαίρεσης είναι:

$$\pi_2(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{25}$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$A_2(x) = A_3(x) \cdot \pi_2(x) + A_4(x)$$

Στο επόμενο βήμα, έχουμε τα εξής:

Βήμα 3

Εφόσον το πολυώνυμο $A_4(x)$ δεν είναι μηδενικό, γράφουμε την διαίρεση του $A_3(x)$ με το $A_4(x)$:

Πρώτο στάδιο:

$5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$	$\frac{111}{25}(x^2 - 2)$

Ή αλλιώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως διαιρέτη το $x^2 - 2$ και στη συνέχεια να διαιρέσουμε το πηλίκο με το:

$$\frac{111}{25}$$

$5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$	$x^2 - 2$
$-5x^3 + 0x^2 + 10x$	$5x$
$-14x^2 + 28$	

Δεύτερο στάδιο

$5x^3 - 14x^2 - 10x + 28$	$x^2 - 2$
$-5x^3 + 0x^2 + 10x$	$5x - 14$
$-14x^2 + 0x + 28$	
$14x^2 + 0x - 28$	
$0x^2 + 0x + 0$	

Βλέπουμε ότι το υπόλοιπο είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο.
Άρα έχουμε ότι:

$$A_3(x) = A_4(x) \cdot \frac{\pi_3(x)}{\frac{111}{25}}$$

$$A_3(x) = A_4(x) \cdot \frac{\pi_3(x)}{\frac{111}{25}}$$

ή αλλιώς

$$A_3(x) = A_4(x) \cdot \frac{25\pi_3(x)}{111}$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, το πολυώνυμο $x^2 - 2$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των πολυωνύμων:

$$A_1(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 2x - 2$$

και

$$A_2(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$$

Ας δούμε πώς αλλιώς μπορεί να ερμηνευτεί αυτό.

Εφόσον το $x^2 - 2$ είναι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των πολυωνύμων A_1 και A_2 , αναμένουμε:

- Το $x^2 - 2$ να είναι παράγοντας και των δύο πολυωνύμων.
- Να μην υπάρχει άλλος κοινός παράγοντας των δύο πολυωνύμων.

Για να δούμε αν συμβαίνουν αυτά, μπορούμε να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα A_1 και A_2 με τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη τους, δηλαδή το πολυώνυμο $x^2 - 2$.

Για τη διαίρεση του A_1 με $x^2 - 2$:

Πρώτο στάδιο:

$x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2$	$x^2 - 2$
$-x^5 + 0x^4 + 2x^3$	x^3
$x^3 + x^2 - 2x - 2$	

Δεύτερο στάδιο:

$x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2$	$x^2 - 2$
$-x^5 + 0x^4 + 2x^3$	$x^3 + x$
$x^3 + x^2 - 2x - 2$	
$-x^3 + 0x^2 + 2x$	
$x^2 + 0x - 2$	

Τρίτο στάδιο:

$x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2$	$x^2 - 2$
$-x^5 + 0x^4 + 2x^3$	$x^3 + x + 1$
$x^3 + x^2 - 2x - 2$	
$-x^3 + 0x^2 + 2x$	
$x^2 + 0x - 2$	
$-x^2 + 0x + 2$	
$0x^2 + 0x + 0$	

Εφόσον το υπόλοιπο είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο, έχουμε:

$$x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$$

ή αλλιώς

$$A_1(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$$

Για τη διαίρεση του A_2 με $x^2 - 2$:

Πρώτο στάδιο:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$	$x^2 - 2$
$-x^4 + 0x^3 + 2x^2$	x^2
$-3x^3 + 5x^2 + 6x - 10$	

Δεύτερο στάδιο:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$	$x^2 - 2$
$-x^4 + 0x^3 + 2x^2$	$x^2 - 3x$
$-3x^3 + 5x^2 + 6x - 10$	
$3x^3 + 0x - 6x$	
$5x^2 + 0x - 10$	

Τρίτο στάδιο:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10$	$x^2 - 2$
$-x^4 + 0x^3 + 2x^2$	$x^2 - 3x + 5$
$-3x^3 + 5x^2 + 6x - 10$	
$3x^3 + 0x - 6x$	
$5x^2 + 0x - 10$	
$-5x^2 + 0x + 10$	
$0x^2 + 0x + 0$	

Εφόσον το υπόλοιπο είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο, άρα:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3x + 5)$$

ή αλλιώς

$$A_2(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3x + 5)$$

Συνεπώς, από τις παρακάτω ισότητες επαληθεύουμε ότι το πολυώνυμο $x^2 - 2$ είναι παράγοντας των A_1 και A_2 :

$$A_1(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$A_2(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3x + 5)$$

Αν υπάρχει και άλλος κοινός διαιρέτης ή παράγοντας των A_1 και A_2 , τότε αυτός θα είναι κοινός παράγοντας των $x^2 - 3x + 5$ και $x^3 + x + 1$.

Το πολυώνυμο $x^2 - 3x + 5$ είναι τριώνυμο, του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε τη Διακρίνουσα:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

Συνεπώς το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί, άρα δεν «διασπάται» σε παράγοντες.

Επομένως η μόνη περίπτωση να έχουν κοινό παράγοντα τα $x^2 - 3x + 5$ και $x^3 + x + 1$ είναι να υπάρχει πολυώνυμο α' βαθμού π.χ. το $x - \rho$, τέτοιο ώστε, για κάθε τιμή του x :

$$x^3 + x + 1 = (x - \rho) \cdot (x^2 - 3x + 5) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x + 1 = x^3 - 3x^2 + 5x - \rho x^2 + 3\rho x + 5\rho \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x + 1 = x^3 - (3 + \rho)x^2 + (5 + 3\rho)x + 5\rho$$

Η τελευταία ισότητα πολωνύμων δεν είναι αληθής.

- Μπορείτε να σκεφτείτε γιατί;
- Πώς αλλιώς θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα $x^2 - 3x + 5$ και $x^3 + x + 1$ δεν έχουν κοινό διαιρέτη ή παράγοντα;
- Μπορούμε να υπολογίσουμε με άλλον τρόπο τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη πολωνύμων όπως τα παραπάνω;

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των πολωνύμων:

$$A_1(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 6x - 3$$

και

$$A_2(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 12x - 21$$

με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

Τάξη: Β'

Ασκήσεις στα Εμβαδά

Γιάννης Στάμου

Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

Αξίωμα εμβαδού

Κάθε πολυγωνική επιφάνεια T έχει ένα μόνο εμβαδόν, που είναι ένας θετικός αριθμός με τις εξής ιδιότητες:

- Δύο ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- Έστω πολυγωνική επιφάνεια T αποτελούμενη από k πολυγωνικά χωρία, $T_1, T_2, \dots, T_k$, τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Αν $E_1, E_2, \dots, E_k$ είναι τα εμβαδά των πολυγωνικών χωρίων $T_1, T_2, \dots, T_k$ αντίστοιχα, τότε το εμβαδόν E της πολυγωνικής επιφάνειας T είναι $E = E_1 + E_2 + \dots + E_k$.
- Το εμβαδόν E ενός τετραγωνικού χωρίου με πλευρά 1 είναι $E = 1$.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω αξιώματος είναι:

- Αν μια πολυγωνική επιφάνεια T_1 περιέχεται σε μια άλλη πολυγωνική επιφάνεια T_2 , τότε $E_{T_1} \leq E_{T_2}$.
- Αν δύο πολυγωνικές επιφάνειες αποτελούνται από ισάριθμα και ίσα, ένα προς ένα, πολυγωνικά χωρία, τα οποία ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε λέμε ότι οι δύο πολυγωνικές επιφάνειες έχουν ίσα εμβαδά (ισοδύναμες) ή, όπως λέμε, είναι ισεμβαδικές.

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

- $E = \sqrt{\tau \cdot (\tau - \alpha) \cdot (\tau - \beta) \cdot (\tau - \gamma)}$, όπου $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.
- $E = \tau \cdot \rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου
- $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4 \cdot R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου
- $E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma$
- $E = (\tau - \alpha) \cdot \rho_\alpha = (\tau - \beta) \cdot \rho_\beta = (\tau - \gamma) \cdot \rho_\gamma$, όπου $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου
- Για ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α μπορεί να χρησιμοποιηθεί κι ο τύπος $E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$.

Λόγος εμβαδών

Για δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ με εμβαδά $E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$ κι $E' = \frac{1}{2} \cdot \alpha' \cdot \upsilon_{\alpha'}$, έχουμε:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha}{\frac{1}{2} \cdot \alpha' \cdot \upsilon_{\alpha'}} = \frac{\alpha \cdot \upsilon_\alpha}{\alpha' \cdot \upsilon_{\alpha'}} = \begin{cases} \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}, & \text{αν } \alpha = \alpha' \\ \frac{\alpha}{\alpha'}, & \text{αν } \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'} \end{cases}$$

- Αν για τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$, τότε: $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$.
- Αν $\triangle AB\Gamma \approx \triangle A'B'\Gamma'$ με λόγο ομοιότητας λ , τότε: $\frac{E}{E'} = \lambda^2$.

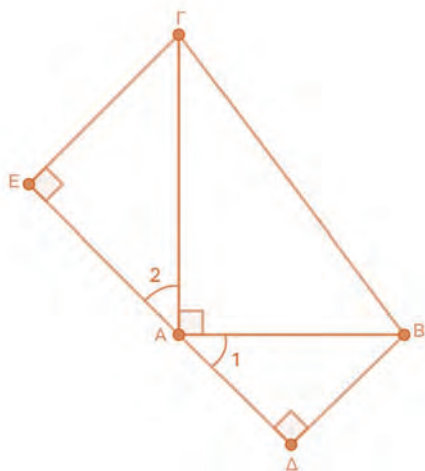
ΑΣΚΗΣΗ 1

Με υποτείνουσες τις κάθετες πλευρές AB και AG ορθογωνίου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ εκτός αυτού. Αν $AB + AG = 20$, τότε:

- Να δείξετε ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου $BΓED$.

Λύση

i. Τα τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ είναι ορθογώνια και ισοσκελή με $AD = BD$ και $AE = GE$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ$.



Είναι $\hat{DAE} = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, οπότε τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

ii. Έστω $AD = DB = x$ και $AE = EG = y$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ έχουμε:

$$x^2 + x^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2x^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{AB^2}{2} \text{ και}$$

$$y^2 + y^2 = AG^2 \Leftrightarrow 2y^2 = AG^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{AG^2}{2}.$$

Το εμβαδόν του τετράπλευρου $BΓED$ προκύπτει απ' το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ οπότε: $E_{BΓED} = E_{AB\Gamma} + E_{ABD} + E_{AGE} =$

$$\begin{aligned} \frac{AB \cdot AG}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} &= \frac{AB \cdot AG}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{AG^2}{2} = \\ &= \frac{AB \cdot AG}{2} + \frac{AB^2}{4} + \frac{AG^2}{4} = \end{aligned}$$

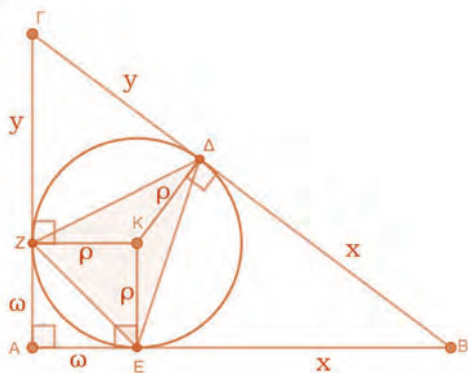
$$\begin{aligned} \frac{AB^2 + AG^2 + 2 \cdot AB \cdot AG}{4} &= \frac{(AB + AG)^2}{4} = \\ &= \frac{20^2}{4} = \frac{400}{4} = 100. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ και Δ το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με τη $B\Gamma$.

- Να δείξετε ότι $(AB\Gamma) = DB \cdot D\Gamma$.
- Αν E και Z τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές AB και AG αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(\Delta EZ) = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot (1 + \eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B)$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση



i. Έστω $BD = BE = x$, $D\Gamma = DZ = y$ και $AE = AZ = \omega$. Τότε έχουμε: $x + y = \alpha$, $y + \omega = \beta$, $x + \omega = \gamma$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $2(x + y + \omega) = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2(x + y + \omega) &= 2\tau \Rightarrow x + y + \omega = \tau \Rightarrow x = \tau - \beta, \\ y &= \tau - \gamma, \omega = \tau - \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι τότε: } DB \cdot D\Gamma = (\tau - \beta) \cdot (\tau - \gamma) =$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \beta \right) \cdot \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \gamma \right) &= \\ = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2\beta}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2\gamma}{2} &= \\ \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} &= \frac{\alpha - (\beta - \gamma)}{2} \cdot \frac{\alpha + (\beta - \gamma)}{2} = \\ \frac{\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2}{4} &= \frac{\alpha^2 - (\beta^2 - 2\beta \cdot \gamma + \gamma^2)}{4} \stackrel{\text{Π.Θ}}{=} \\ \frac{\alpha^2 - (\alpha^2 - 2\beta \cdot \gamma)}{4} &= \frac{\cancel{\alpha^2} - \cancel{\alpha^2} + 2\beta \cdot \gamma}{4} = \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cdot \beta \cdot \gamma}{4} = \frac{\beta \cdot \gamma}{2} = (\text{AB}\Gamma)$$

$$\text{ii. } (\Delta \text{EZ}) = (\text{EKZ}) + (\Delta \text{KZ}) + (\Delta \text{KE}) \quad (1).$$

Το τετράπλευρο ΑΕΚΖ έχει τρεις γωνίες ορθές,

$$\text{άρα και } \widehat{\text{EKZ}} = 90^\circ, \text{ οπότε } (\text{EKZ}) = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \quad (2).$$

Στο τετράπλευρο ΒΔΚΕ είναι

$$\widehat{\Delta \text{KE}} + \widehat{\text{B}} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta \text{KE}} = 180^\circ - \widehat{\text{B}}, \text{ οπότε}$$

$$(\Delta \text{KE}) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho \cdot \eta\mu(\widehat{\Delta \text{KE}}) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu(180^\circ - \widehat{\text{B}}) = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu \text{B} \quad (3).$$

Στο τετράπλευρο ΓΔΚΖ είναι

$$\widehat{\Delta \text{KZ}} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta \text{KZ}} = 180^\circ - \widehat{\Gamma}, \text{ οπότε}$$

$$(\Delta \text{KZ}) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho \cdot \eta\mu(\widehat{\Delta \text{KZ}}) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu(180^\circ - \widehat{\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu \Gamma \quad (4).$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) έχουμε:

$$(\Delta \text{EZ}) = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 + \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu \text{B} + \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu \Gamma =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot (1 + \eta\mu \text{B} + \eta\mu \Gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot (1 + \eta\mu \text{B} + \eta\mu(90^\circ - \text{B})) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot (1 + \eta\mu \text{B} + \sigma\upsilon\nu \text{B}).$$

Άσκηση 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 2α και κέντρο Ο. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΟΕΖΗ με πλευρά β > 2α. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο τετραγώνων.

Λύση

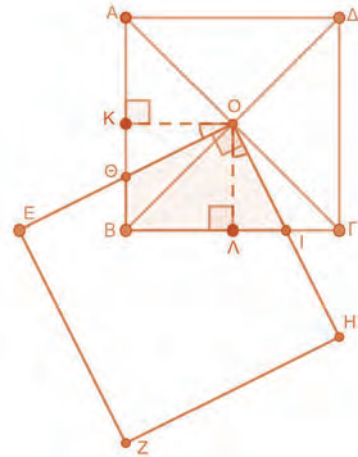
Φέρνουμε τα τμήματα ΟΚ ⊥ ΑΒ και ΟΛ ⊥ ΒΓ.

Α) Αν τα σημεία Θ ≠ Κ έχουμε:

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle \text{ΟΚ}\Theta$ και $\triangle \text{ΟΛΙ}$ είναι ίσα διότι έχουν ΟΚ = ΟΛ = α και $\widehat{\text{ΚΟ}\Theta} = \widehat{\text{ΛΟΙ}}$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες. Άρα $(\text{ΚΟ}\Theta) = (\text{ΛΟΙ})$,

$$\text{οπότε: } (\text{ΟΘΒΙ}) = (\text{ΟΘΒ}) + (\text{ΒΟΛ}) + (\text{ΛΟΙ}) =$$

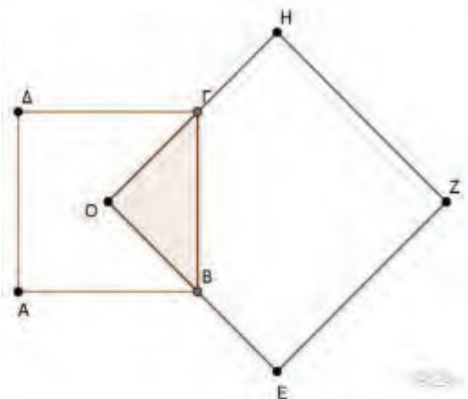
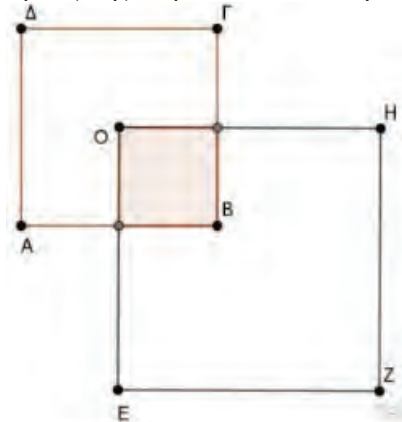
$$= (\text{ΟΘΒ}) + (\text{ΒΟΛ}) + (\text{ΚΟ}\Theta) = (\text{ΟΚΒΛ}) = \alpha^2, \text{ αφού το τετράπλευρο ΟΚΒΛ είναι τετράγωνο με πλευρά } \alpha.$$



β) Αν τα σημεία Θ και Κ ταυτίζονται τότε το κοινό μέρος είναι το ΟΚΒΛ, οπότε:

$$(\text{ΟΚΒΛ}) = \text{OK}^2 = \alpha^2.$$

Μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν του κοινού μέρους της παρακάτω δύο περιπτώσεις;

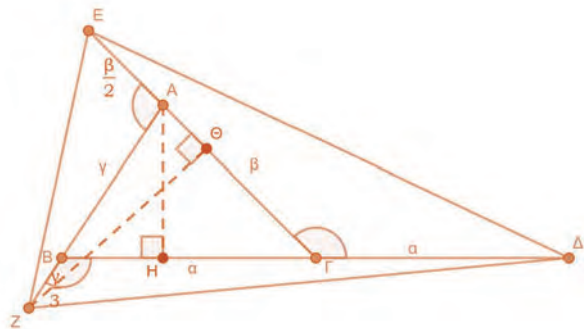


https://drive.google.com/file/d/1KVHl2fEiPnrLI_rwBbe188bKMpl-A0A7/view?usp=sharing

Άσκηση 4

Προεκτείνουμε της πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ της $\triangle \text{ΑΒΓ}$ κατά τμήματα

$\Gamma\Delta = \alpha$, $AE = \frac{\beta}{2}$, $BZ = \frac{\gamma}{3}$. Φέρνουμε τα τμήματα $AH \perp AB$ και $Z\Theta \perp A\Gamma$.



iii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Gamma)}{(AEZ)}$

ii. Αν $\beta = \frac{4}{5} \cdot \alpha$, να δείξετε ότι $AH = \frac{3}{5} \cdot Z\Theta$.

Λύση

iv. Είναι

$$(AEZ) = (AB\Gamma) + (AEZ) + (BZ\Delta) + (\Delta\Gamma E) \quad (1).$$

$$(AEZ) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AZ \cdot \eta\mu EAZ =$$

$$\frac{1}{2} \cdot AE \cdot AZ \cdot \eta\mu(180^\circ - A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \left(\gamma + \frac{\gamma}{3} \right) \cdot \eta\mu A =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \frac{4\gamma}{3} \cdot \eta\mu A = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{2}{3} \cdot (AB\Gamma) \quad (2).$$

$$(BZ\Delta) = \frac{1}{2} \cdot BZ \cdot B\Delta \cdot \eta\mu ZB\Delta =$$

$$\frac{1}{2} \cdot BZ \cdot B\Delta \cdot \eta\mu(180^\circ - B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{3} \cdot 2\alpha \cdot \eta\mu B =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B = \frac{2}{3} \cdot (AB\Gamma) \quad (3).$$

$$(\Delta\Gamma E) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\Delta \cdot \Gamma E \cdot \eta\mu \Delta\Gamma E =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \Gamma\Delta \cdot \Gamma E \cdot \eta\mu(180^\circ - \Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\beta + \frac{\beta}{2} \right) \cdot \eta\mu \Gamma =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{3\beta}{2} \cdot \eta\mu \Gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma = \frac{3}{2} \cdot (AB\Gamma) \quad (4)$$

Από (1), (2), (3) και (4) έχουμε:

$$(AEZ) = (AB\Gamma) + \frac{2}{3} \cdot (AB\Gamma) + \frac{2}{3} \cdot (AB\Gamma) + \frac{3}{2} \cdot (AB\Gamma) =$$

$$\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) \cdot (AB\Gamma) = \frac{23}{6} \cdot (AB\Gamma)$$

v. Απ' τη σχέση (2) έχουμε:

$$(AEZ) = \frac{2}{3} \cdot (AB\Gamma) \Leftrightarrow$$

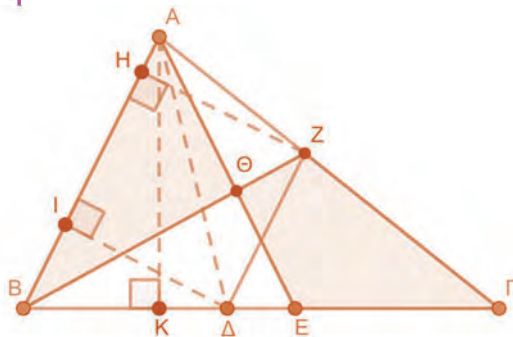
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{2} \cdot Z\Theta = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot AH \Leftrightarrow \frac{AH}{Z\Theta} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AH}{Z\Theta} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{AH}{Z\Theta} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow AH = \frac{3}{5} \cdot Z\Theta$$

Άσκηση 5

Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε (μεταξύ των Β και Γ) τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E < \frac{B\Gamma}{2}$. Η παράλληλη της ΑΒ απ' ό το Δ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, ενώ οι ΒΖ και ΑΕ τέμνονται στο Θ. Να δείξετε ότι $(\Theta AB) = (\Theta E\Gamma Z)$.

Λύση



Φέρνουμε τα τμήματα ΖΗ και ΔΙ κάθετα στη ΒΓ και το ύψος ΑΚ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

Είναι $(\Theta AB) = (ABZ) - (A\Theta Z)$ και

$$(\Theta E\Gamma Z) = (AE\Gamma) - (A\Theta Z).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $(ABZ) = (AE\Gamma)$. Όμως $(AE\Gamma) = (AB\Delta)$ (1) αφού έχουν ίσες βάσεις $(B\Delta = \Gamma E)$ και κοινό ύψος ΑΚ.

Επίσης $\Delta Z \parallel AB$, άρα $ZH = DI$, οπότε

$$(ABZ) = (AB\Delta) \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $(ABZ) = (AE\Gamma)$,

συνεπώς $(\Theta AB) = (\Theta E\Gamma Z)$.

Άσκηση 6

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = 4\text{cm}$, $A\Delta = B\Gamma = 2\text{cm}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$.

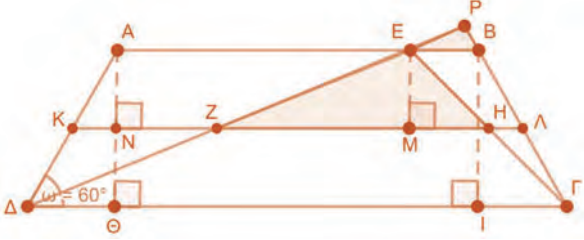
i. Να βρεθεί ο εμβαδόν του τραπέζιου ΑΒΓΔ.

ii. Αν Ε σημείο της πλευράς ΑΒ τέτοιο, ώστε $EB = \frac{1}{4} \cdot AB$ και οι ΕΔ, ΕΓ τέμνουν τη διάμεσο ΚΛ

στα σημεία Z και H αντίστοιχα, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle EZH$.

iii. Αν οι προεκτάσεις των ΔΕ και ΓΒ τέμνονται στο Ρ, να βρεθεί το εμβαδόν του $\triangle ΡΕΒ$.

Λύση



i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A\Theta\Delta$ έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{A\Theta}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A\Theta}{2} \Leftrightarrow A\Theta = \sqrt{3}\text{cm}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\Delta\Theta}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\Delta\Theta}{2} \Leftrightarrow \Delta\Theta = 1\text{cm}$$

Λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου ABΓΔ θα είναι και $\Gamma\text{I}=1\text{cm}$, ενώ από το ορθογώνιο ABIΘ θα είναι $\Theta\text{I}=\text{AB}=4\text{cm}$.

$$\text{Άρα } (\text{ABΓΔ}) = \frac{\text{AB}+\Gamma\Delta}{2} \cdot A\Theta = \frac{4+6}{2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}\text{cm}^2.$$

ii. Στο τρίγωνο $\triangle A\Delta\text{E}$ είναι K μέσο της AΔ και $\text{KZ} \parallel \text{AE}$, οπότε Z μέσο της ΔΕ. Όμοια H μέσο της ΓΕ.

Στο τρίγωνο $\triangle \text{EΓΔ}$ έχουμε:

$$\text{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow \text{ZH} = \frac{6}{2} \Rightarrow \text{ZH} = 3\text{cm}.$$

Είναι $\text{EM}=\text{AN}$ κι επειδή

$$\frac{\text{AN}}{A\Theta} = \frac{\text{AK}}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{\text{AN}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm},$$

$$\text{θα έχουμε ότι } \text{EM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}.$$

$$\text{Άρα } (\text{EZH}) = \frac{\text{ZH} \cdot \text{EM}}{2} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2.$$

β' τρόπος

Τα τρίγωνα $\triangle \text{EZH}$ και $\triangle \text{EΓΔ}$ είναι όμοια ($\hat{\text{E}}$ κοινή γωνία και $\hat{\text{EZH}} = \hat{\text{EΓΔ}}$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά), οπότε:

$$\frac{(\text{EZH})}{(\text{EΓΔ})} = \left(\frac{\text{ZH}}{\Gamma\Delta}\right)^2 = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } (\text{EΓΔ}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\text{cm}^2 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{(\text{EZH})}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\text{EZH}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

iii. Τα τρίγωνα $\triangle \text{ΡΕΒ}$ και $\triangle \text{ΡΓΔ}$ είναι όμοια ($\hat{\text{P}}$ κοινή γωνία και $\hat{\text{ΡΕΒ}} = \hat{\text{ΡΔΓ}}$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά), οπότε:

$$\frac{(\text{ΡΕΒ})}{(\text{ΡΓΔ})} = \left(\frac{\text{ΕΒ}}{\Gamma\Delta}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \Leftrightarrow$$

$$36 \cdot (\text{ΡΕΒ}) = (\text{ΡΓΔ}) \quad (3).$$

$$\text{Όμως } (\text{ΡΓΔ}) = (\text{ΡΕΒ}) + (\text{ΕΒΓΔ}) \quad (4),$$

οπότε από (3) και (4) έχουμε:

$$36 \cdot (\text{ΡΕΒ}) = (\text{ΡΕΒ}) + (\text{ΕΒΓΔ}) \Leftrightarrow$$

$$35 \cdot (\text{ΡΕΒ}) = (\text{ΕΒΓΔ}) \Leftrightarrow (\text{ΡΕΒ}) = \frac{1}{35} \cdot (\text{ΕΒΓΔ})$$

Το τετράπλευρο ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο, οπότε:

$$(\text{ΕΒΓΔ}) = \frac{1+6}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2.$$

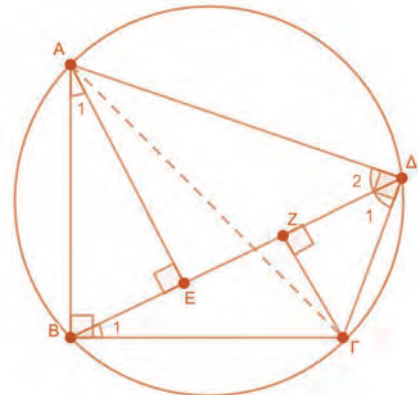
$$\text{Άρα } (\text{ΡΕΒ}) = \frac{1}{35} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{10}\text{cm}^2.$$

Άσκηση 7

Σε κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ έχουμε $\hat{\text{B}} = \hat{\text{Δ}} = 90^\circ$

και $\text{AB} = \text{BΓ}$. Να δείξετε ότι $(\text{ABΓΔ}) = \frac{\text{BΔ}^2}{2}$.

Λύση



$$\text{Είναι: } (\text{ABΓΔ}) = (\text{ABΔ}) + (\text{BΓΔ}) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \text{BΔ} \cdot \text{AE} + \frac{1}{2} \cdot \text{BΔ} \cdot \text{ΓZ} = \frac{1}{2} \cdot \text{BΔ} \cdot (\text{AE} + \text{ΓZ}) \quad (1).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{AE} + \text{ΓZ} = \text{BΔ}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle BZ\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν $AB=B\Gamma$ από υπόθεση και $\hat{A}_1=\hat{B}_1$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες. Άρα $AE=BZ$ (2).

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει $\hat{B}+\hat{\Delta}=180^\circ$, άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο διαμέτρου AG . Επειδή $AB=B\Gamma$, τότε τα κυρτογώνια τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{B\Gamma}$ είναι ίσα. Άρα και $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα. Όμως $\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=90^\circ \Rightarrow \hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2=45^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle Z\Gamma$ είναι $\hat{\Delta}_1=45^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι και ισοσκελές με

$$\Gamma Z=\Delta Z \quad (3).$$

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$(\triangle B\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\cdot B\Delta\cdot(BZ+\Delta Z)=\frac{1}{2}\cdot B\Delta\cdot B\Delta=\frac{B\Delta^2}{2}$$

Άσκηση 8

Οι κύκλοι (O,R) και (K,ρ) , με $R>\rho$, εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα AB , όπου A σημείο του κύκλου (O,R) και B σημείο του κύκλου (K,ρ) . Από το σημείο M φέρνουμε την $MN\perp AB$, η οποία τέμνει την AK στο Λ . Να δείξετε ότι:

i. $ML=AN=\frac{R\cdot\rho}{R+\rho}$.

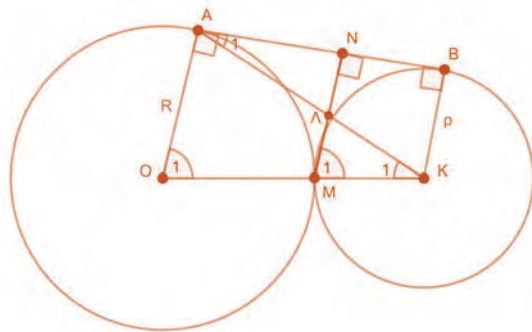
ii. Αν E_1 και E_2 τα εμβαδά των κύκλων (O,R)

και (K,ρ) αντίστοιχα, τότε: $\frac{E_1}{E_2}=\left[\frac{(A\Lambda N)}{(K\Lambda M)}\right]^2$.

Λύση

i. Φέρνουμε τις ακτίνες OA και OB που είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα AB . Άρα $OA\parallel OB\parallel MN$ ως κάθετες στο AB .

Τα τρίγωνα $\triangle K\Lambda M$ και $\triangle K\Lambda O$ έχουν $\hat{K}_1$ κοινή γωνία και $\hat{M}_1=\hat{O}_1$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων OA και KB που τέμνονται από την OK .



Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{KL}{KA}=\frac{ML}{OA}=\frac{MK}{OK}\Leftrightarrow\frac{ML}{R}=\frac{\rho}{R+\rho}\Leftrightarrow ML=\frac{R\cdot\rho}{R+\rho}.$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AN\Lambda$ και $\triangle ABK$ έχουν $\hat{N}=\hat{B}=90^\circ$ και $\hat{A}_1$ κοινή γωνία, άρα είναι όμοια. Οπότε:

$$\frac{AL}{AK}=\frac{AN}{AB}=\frac{\Lambda N}{BK}\Leftrightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{\Lambda N}{\rho} \quad (1).$$

Από το θεώρημα Θαλή στο τραπέζιο $ABKO$ έχουμε:

$$\frac{AN}{AB}=\frac{OM}{OK}\Leftrightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{R}{R+\rho} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\Lambda N}{\rho}=\frac{R}{R+\rho}\Leftrightarrow\Lambda N=\frac{R\cdot\rho}{R+\rho}.$$

Άρα $ML=AN=\frac{R\cdot\rho}{R+\rho}$.

ii. Είναι: $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi\cdot R^2}{\pi\cdot\rho^2}=\frac{R^2}{\rho^2}=\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 \quad (3).$

Τα τρίγωνα $\triangle A\Lambda N$ και $\triangle K\Lambda M$ έχουν τις γωνίες $\hat{A\Lambda N}$ και $\hat{K\Lambda M}$ ίσες ως κατακορυφήν, οπότε:

$$\frac{(A\Lambda N)}{(K\Lambda M)}=\frac{\Lambda A\cdot\cancel{\Lambda N}}{\cancel{\Lambda M}\cdot\Lambda K}=\frac{\Lambda A}{\Lambda K} \quad (4).$$

Από θεώρημα Θαλή στο τρίγωνο $\triangle KOA$ έχουμε:

$$\frac{\Lambda A}{\Lambda K}=\frac{OM}{MK}\Leftrightarrow\frac{\Lambda A}{\Lambda K}=\frac{R}{\rho} \quad (5).$$

Από (4) και (5) έχουμε:

$$\frac{(A\Lambda N)}{(K\Lambda M)}=\frac{R}{\rho}\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{E_1}{E_2}=\left[\frac{(A\Lambda N)}{(K\Lambda M)}\right]^2.$$

Τάξη: Β'

Αναλυτική Γεωμετρία

Χρήστος Π. Τσιφάκης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται η κορυφή $A(1,2)$, η εξίσωση του ύψους $(BD): x-4y-5=0$ και η εξίσωση της διαμέσου $(\Gamma M): 3x+2y+3=0$

- Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς AB και της κορυφής B .
- Αν E το σημείο τομής των ΓM , BD και οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ είναι $B(-3,-2)$, $\Gamma(3,-6)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $EB\Gamma$.

Λύση

i) Η πλευρά $(A\Gamma) \perp (BD)$ και διέρχεται από τη κορυφή A , οπότε έχουμε:

$$\lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{BD} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} \cdot \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = -4 \text{ και}$$

$$y-2 = -4(x-1) \Leftrightarrow (A\Gamma): 4x+y-6=0$$

Η κορυφή $\Gamma = (A\Gamma) \cap (\Gamma M)$ προκύπτει ως λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 4x+y-6=0 \\ 3x+2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-6 \end{cases}. \text{ Άρα } \Gamma(3,-6).$$

ii) Εάν $B(x_B, y_B)$ και

$$M\left(x_M = \frac{1+x_B}{2}, y_M = \frac{2+y_B}{2}\right) \text{ έχουμε:}$$

$$B \in (BD) \Leftrightarrow x_B - 4y_B - 5 = 0$$

$$M \in (\Gamma M) \Leftrightarrow 3x_M + 2y_M + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \frac{1+x_B}{2} + 2 \cdot \frac{2+y_B}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x_B + 2y_B + 13 = 0$$

$$\begin{cases} x_B - 4y_B - 5 = 0 \\ 3x_B + 2y_B + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = -2 \end{cases}.$$

Άρα $B(-3,-2)$ και $M(-1,0)$.

$$\text{iii) } \begin{cases} x-4y-5=0 \\ 3x+2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{9}{7} \end{cases}, E\left(-\frac{1}{7}, -\frac{9}{7}\right).$$

$$\overline{B\Gamma} = (6, -4) \text{ και } \overline{BE} = \left(\frac{20}{7}, \frac{5}{7}\right), \text{ οπότε το}$$

εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(EB\Gamma) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ \frac{20}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \right\| = \frac{55}{7} \text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): (\lambda+1)x + (\lambda-4)y + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2): (\lambda+2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0 \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες μεταξύ τους.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε_2) διέρχεται από σταθερό σημείο.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των x και y στην εξίσωση (ε_1) και αντίστοιχα στην (ε_2) δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, άρα οι εξισώσεις παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} // (\varepsilon_1)$ και

$$\vec{\beta} // (\varepsilon_2) \text{ με } \vec{\alpha} = (\lambda-4, -\lambda-1) \text{ και}$$

$$\vec{\beta} = (3\lambda, -\lambda-2). \text{ Αφού}$$

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda(\lambda-4) + (-\lambda-1)(-\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda^2 - 12\lambda + \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{4}.$$

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε_2) γίνεται:

$$\lambda x + 2x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+3y+1)\lambda + (2x-4) = 0.$$

Αφού αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{cases} x+3y+1=0 \\ 2x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}, \text{ δηλαδή η ευθεία } (\varepsilon_2)$$

διέρχεται από το σταθερό σημείο $K(2,-1)$.

Άσκηση 3

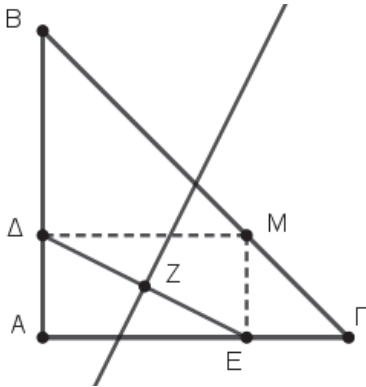
Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$,

$$\left(\hat{A} = 90^\circ\right). \text{ Έστω } M \text{ μεταβλητό σημείο που}$$

κινείται στη πλευρά $B\Gamma$. Αν Δ και E είναι οι

προβολές του M στις AB και $ΑΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος $ΔΕ$ διέρχεται από σταθερό σημείο. Αντώνης Κυριακόπουλος

Λύση



Έστω $A(0,0)$, $B(0,\alpha)$, $\Gamma(\alpha,0)$, $\alpha \neq 0$ οι κορυφές του τριγώνου και $M(x_M, y_M)$ το μεταβλητό σημείο της $B\Gamma$ με $0 \leq x_M \leq \alpha$, $0 \leq y_M \leq \alpha$. Αφού $B\Delta = \Delta M = AE = x_M$ και $AD = ME = E\Gamma = y_M$ έχουμε ότι $x_M + y_M = \alpha$. Τότε τα σημεία είναι $\Delta(0, y_M)$, $E(x_M, 0)$ και το μέσο της DE το $Z\left(\frac{x_M}{2}, \frac{y_M}{2}\right)$.

Η μεσοκάθετος του DE έχει

$$\lambda_{(\epsilon)} \cdot \lambda_{DE} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{(\epsilon)} \cdot \left(-\frac{y_M}{x_M}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{(\epsilon)} = \frac{x_M}{y_M}$$

$$\text{και εξίσωση: } y - \frac{y_M}{2} = \frac{x_M}{y_M} \left(x - \frac{x_M}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2y_M y - y_M^2 = 2x_M x - x_M^2 \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha - x_M)y = 2x_M x + \alpha(\alpha - 2x_M) \Leftrightarrow$$

$$2\alpha y - 2x_M y = 2x_M x + \alpha^2 - 2\alpha x_M \Leftrightarrow$$

$$(2x + 2y - 2\alpha)x_M + \alpha^2 - 2\alpha y = 0.$$

Άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες είναι η λύση του

$$\text{συστήματος } \begin{cases} x + y - \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = \frac{\alpha}{2} \end{cases}.$$

Δηλαδή η ευθεία διέρχεται από το σταθερό

$$\text{σημείο } \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right).$$

Άσκηση 4

Μια τριγωνική κατασκήνωση διαθέτει τρεις εισόδους, μία σε κάθε κορυφή. Ο αρχηγός της

κατασκήνωσης (του οποίου η σκηνή βρίσκεται κάπου μέσα στην κατασκήνωση) θέλοντας να βρει το εμβαδόν της κατασκήνωσης, αποστέλλει τρεις κατασκηνωτές (εφοδιασμένους με πυξίδες και χιλιομετρητές) να μετρήσουν τις αποστάσεις των εισόδων από τη σκηνή του. Ο πρώτος προχωρά 2 km βόρεια και αμέσως μετά 1 km ανατολικά και εκεί συναντά την πρώτη είσοδο. Ο δεύτερος προχωρά 3 km ανατολικά και 1 km νότια και εκεί συναντά τη δεύτερη είσοδο. Ο τρίτος προχωρά 2 km δυτικά και συναντά την τρίτη είσοδο.

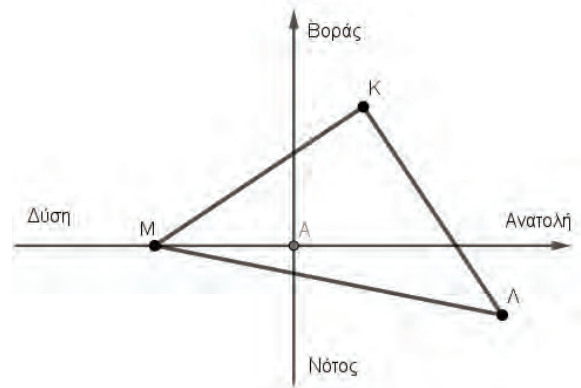
i) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα αξόνων ώστε να τοποθετήσετε, τη σκηνή του αρχηγού και τις εισόδους, αφού πρώτα χαράξετε τις πορείες και να βρείτε τις συντεταγμένες των τριών εισόδων σ' αυτό το σύστημα.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν της κατασκήνωσης.

iii) Ο αρχηγός αποφάσισε να ρίξει θιιάφι γύρω από την κατασκήνωση, για προστασία από τα φίδια, κατά μήκος του περιγεγραμμένου κύκλου της. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου.

Λύση

i) Έστω ότι η σκηνή του αρχηγού είναι στο σημείο $A(0,0)$. Τότε η πρώτη είσοδος θα είναι στο σημείο με συντεταγμένες $K(1,2)$, η δεύτερη είσοδος θα είναι στο $\Lambda(3,-1)$ και η τρίτη είσοδος στο σημείο $M(-2,0)$.



ii) Έχουμε $\overline{K\Lambda} = (2, -3)$, $\overline{KM} = (-3, -2)$ και

$$(K\Lambda M) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |-13| = \frac{13}{2} \text{ τ.μ.}$$

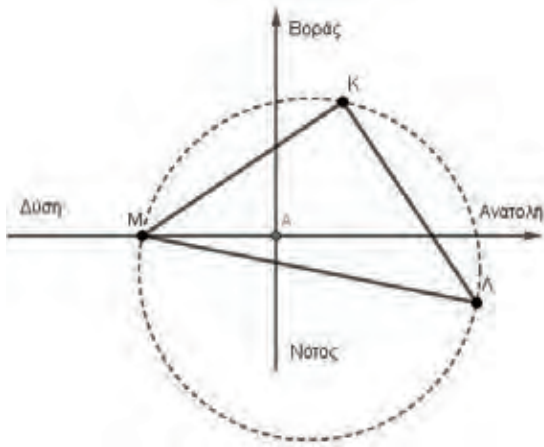
iii) Παρατηρούμε ότι

$$\overline{KM} \cdot \overline{K\Lambda} = 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-2) = -6 + 6 = 0$$

Άρα το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ορθογώνιο στο K και τότε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου

είναι το μέσο της ΛM δηλαδή το σημείο $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

και έχει ακτίνα $R = \frac{|\overline{AM}|}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.



Άρα έχει εξίσωση:

$$(C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

Άσκηση 5

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$(\varepsilon): (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})x - |\vec{\alpha}|y + 2 = 0 \text{ και } \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) \text{ η οξεία}$$

γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Αν το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (2, -1)$ είναι κάθετο στην ευθεία (ε) , τότε:

i) Δείξτε ότι $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και ότι $|\vec{\beta}| = \frac{2}{\sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.

ii) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ τότε:

α) Δείξτε ότι $|\vec{\beta}| = 4$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Λύση

i) Έστω ότι το $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε θα έχουμε: $|\vec{\alpha}| = 0$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, οπότε η εξίσωση (ε) είναι αδύνατη, άρα δεν παριστάνει εξίσωση ευθείας, Άτοπο οπότε $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Έστω διάνυσμα

$$\vec{\delta} = \left(-|\vec{\alpha}|, -\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) // (\varepsilon),$$

αφού το $\vec{\gamma} \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow$

$$\vec{\gamma} \perp \vec{\delta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} = 0 \Leftrightarrow -2|\vec{\alpha}| + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\beta}| = \frac{2}{\sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}.$$

ii) α) $|\vec{\beta}| = \frac{2}{\sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

β) $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} =$

$$|\vec{\alpha}|^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 25 - 40 + 64 = 49, \text{ άρα}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{49} = 7, \text{ διότι έχουμε}$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ και } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10.$$

Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x + (2\lambda - 5)y - 8\lambda + 15 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

γ) Αν $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε:

i) τη γωνία που σχηματίζουν οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$

ii) την ευθεία (ε_3) που είναι συμμετρική της (ε_1) ως προς την (ε_2) .

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των x, y στην εξίσωση (1) δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, άρα η (1) παριστάνει εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η (1) γίνεται: $(x + 2y - 8)\lambda - 5y + 15 = 0$ και περνάει από το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες είναι λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ -5y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Άρα η ευθεία διέρχεται από το σταθερό σημείο $K(2, 3)$.

γ) Για $\lambda = 1$ έχουμε $(\varepsilon_1): x - 3y + 7 = 0$ και για $\lambda = 2$ έχουμε $(\varepsilon_2): 2x - y - 1 = 0$.

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha} // (\varepsilon_1)$ και $\vec{\beta} // (\varepsilon_2)$

με $\vec{\alpha} = (-3, -1)$ και $\vec{\beta} = (-1, -2)$. Τότε έχουμε:

$$\text{συν}\left(\left(\varepsilon_1\right),\left(\varepsilon_2\right)\right)=\text{συν}\left(\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)\right)=\frac{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}}{\left|\overline{\alpha}\right|\cdot\left|\overline{\beta}\right|}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Άρα}\left(\left(\varepsilon_1\right),\left(\varepsilon_2\right)\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Άσκηση 7

Σε καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 2-\alpha)$, $B(\alpha+6, \alpha+9)$ και $\Gamma(5, -3)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ σχηματίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε για ποιο α αντίστοιχα παρουσιάζεται η ελάχιστη ή μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

iii) Να βρείτε συναρτήσεϊ του α την εξίσωση του ύψους $A\Delta$. Αντώνης Κυριακόπουλος

Λύση

i) Αρκεί $\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) \neq 0$, οπότε έχουμε:

$$\overline{AB} = (6, 2\alpha + 7), \quad \overline{A\Gamma} = (5 - \alpha, \alpha - 5) \text{ και}$$

$$\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) = 2\alpha^2 + 3\alpha - 65. \text{ Άρα σχηματίζουν}$$

τρίγωνο για $\alpha \neq -\frac{13}{2}$ και $\alpha \neq 5$

$$\text{ii) } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 & 2\alpha + 7 \\ 5 - \alpha & \alpha - 5 \end{pmatrix} \right\| = \left| \alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{65}{2} \right| = \tau.μ.$$

$$E(\alpha) = \alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{65}{2}, \quad \alpha < -\frac{13}{2} \text{ ή } \alpha > 5 \text{ δεν}$$

παρουσιάζει ελάχιστο γιατί το $\alpha = -\frac{3}{4} \notin \text{Π.Ο.}$

$$E(\alpha) = -\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{65}{2}, \quad -\frac{13}{2} \leq \alpha \leq 5 \text{ παρουσιάζει}$$

μέγιστο για $\alpha = -\frac{3}{4} \in \text{Π.Ο.}$

$$\text{iii) } \lambda_{A\Delta} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} = \frac{1-\alpha}{\alpha+12}$$

$$(A\Delta): y - (2-\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha+12}(x-\alpha)$$

Άσκηση 8

Έστω η εξίσωση: $\lambda x + \sqrt{4-\lambda^2} \cdot y - 2 = 0 \quad (1).$

i) Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση (1) παριστάνει μια ευθεία (ε_λ) .

Έστω Σ το σύνολο των αριθμών αυτών.

ii) Να αποδείξετε ότι, όταν το λ διατρέχει το σύνολο Σ , οι ευθείες (ε_λ) εφάπτονται σε ένα σταθερό κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση. Αντώνης Κυριακόπουλος

Λύση

i) Για έναν αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει μια ευθεία αν, και μόνο αν:

$$\left. \begin{aligned} 4 - \lambda^2 &\geq 0 \\ \lambda \neq 0 \text{ ή } \sqrt{4 - \lambda^2} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq 2.$$

Άρα $\Sigma = [-2, 2]$.

ii) Μία ευθεία (ε_λ) , όπου $\lambda \in [-2, 2]$, εφάπτεται σε ένα κύκλο με κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα $\rho > 0$ αν, και μόνον αν:

$$d(K, (\varepsilon_\lambda)) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\alpha + \sqrt{4 - \lambda^2} \cdot \beta - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 4 - \lambda^2}} = \rho \Leftrightarrow$$

$|\lambda\alpha + \sqrt{4 - \lambda^2} \cdot \beta - 2| = 2\rho \quad (2).$ Θα βρούμε τους αριθμούς α, β και ρ , για τους οποίους η ισότητα (2) ισχύει για κάθε $\lambda \in [-2, 2]$.

• Έστω ότι η ισότητα (2) ισχύει για κάθε $\lambda \in [-2, 2]$. Από την (2) με $\lambda = 2$, $\lambda = -2$ και $\lambda = 0$ βρίσκουμε αντίστοιχα ότι:

$$\left. \begin{aligned} |2\alpha - 2| &= 2\rho \\ |-2\alpha - 2| &= 2\rho \\ |2\beta - 2| &= 2\rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |\alpha - 1| &= \rho \\ |\alpha + 1| &= \rho \\ |\beta - 1| &= \rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} |\alpha - 1| &= |\alpha + 1| \\ |\alpha + 1| &= \rho \\ |\beta - 1| &= \rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \rho &= 1 \\ \beta &= 2 \text{ ή } \beta = 0 \end{aligned} \right\}$$

Αντιστρόφως

• Έστω ότι $\alpha = 0$, $\beta = 2$ και $\rho = 1$. Τότε, όπως βρίσκουμε εύκολα, η (2) δεν ισχύει για κάθε $\lambda \in \Sigma = [-2, 2]$.

• Έστω ότι $\alpha = 0$, $\beta = 0$ και $\rho = 1$. Τότε όπως βρίσκουμε εύκολα, η (2) ισχύει για κάθε $\lambda \in [-2, 2]$. Άρα, όλες οι ευθείες (ε_λ) , όπου $\lambda \in \Sigma = [-2, 2]$, εφάπτονται στον κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. Η εξίσωσή του είναι: $x^2 + y^2 = 1$.

Τάξη: Γ'

Το Θεώρημα μέσης τιμής σε δράση

Θανάσης Ξένος

Λίγα λόγια για τον Lagrange

Το Θεώρημα μέσης τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού οφείλεται στον Lagrange. Ο Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ήταν Ιταλός μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος, που έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Πρωσία και τη Γαλλία. Έγινε ο πρώτος καθηγητής Μαθηματικής Ανάλυσης στο Πολυτεχνείο Ecole που άνοιξε στο Παρίσι το 1794.

Η συνεισφορά του ήταν μεγάλη σε όλα τα πεδία της Μαθηματικής Ανάλυσης, της Θεωρίας Αριθμών και της Κλασικής και Ουράνιας Μηχανικής.

Το όνομά του εμφανίζεται στα 72 ονόματα που είναι γραμμένα στον Πύργο του Eiffel.

Διατύπωση και απόδειξη του Θ.Μ.Τ.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$, \text{ ώστε να ισχύει } f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Η απόδειξη αυτού γίνεται με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

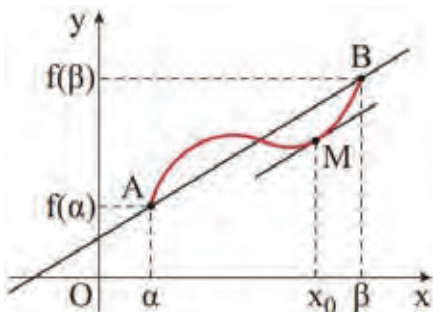
$$g(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{(\beta - \alpha)} \cdot x, \quad x \in [\alpha, \beta], \text{ για την}$$

οποία ισχύει $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $g'(x_0) = 0$ και το συμπέρασμα είναι προφανές.

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Ο αριθμός $\lambda = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ είναι η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.



Ο αριθμός $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.

Άρα, το Θ.Μ.Τ. μας πληροφορεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ.

Φυσική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Αν ένα κινητό σε χρόνο t διανύει απόσταση $S(t)$, τότε:

- Το πηλίκο $\frac{S(\beta) - S(\alpha)}{\beta - \alpha}$ παριστάνει τη μέση ταχύτητα του κινητού κατά το χρονικό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

- Το όριο $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ παριστάνει τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t_0 .

Έτσι, η ισότητα $S'(t_0) = \frac{S(\beta) - S(\alpha)}{\beta - \alpha}$

δείχνει ότι υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα του κινητού ισούται με τη μέση ταχύτητά του.

Γενικευμένο Θ.Μ.Τ. (Cauchy)

Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$\text{ με } \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}.$$

Η απόδειξη αυτού γίνεται με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$h(x) = (f(\beta) - f(\alpha)) \cdot g(x) - (g(\beta) - g(\alpha)) \cdot f(x),$$

$x \in [\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύει $h(\alpha) = h(\beta)$.

Σχόλια: 1) Αν $g(x) = x$, προκύπτει το Θ.Μ.Τ. του Lagrange.

2) Από τη συνθήκη $g'(x) \neq 0$, με απαγωγή σε άτοπο, διαπιστώνουμε αμέσως ότι ισχύει

$$g(\alpha) \neq g(\beta).$$

Εφαρμογές του Θ.Μ.Τ. στις ανισότητες

Το Θ.Μ.Τ. εφαρμόζεται συχνά για την απόδειξη ανισότητας, στην οποία εμφανίζεται διαφορά της μορφής $f(\beta) - f(\alpha)$.

Παράδειγμα 1

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

β) Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδειχθεί ότι

$$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v < e < \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

γ) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας με γενικό

$$\alpha_v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v}$$

Απόδειξη

α) Η συνάρτηση $f(t) = \ln t$, $t > 0$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1)$ με $f'(t) = \frac{1}{t}$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $x_0 \in (x, x+1)$ με

$$f'(x_0) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x}, \text{ δηλαδή } \frac{1}{x_0} = \ln(x+1) - \ln x$$

Επειδή $x < x_0 < x+1$, ισχύει $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x_0} < \frac{1}{x}$,

$$\text{δηλαδή } \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

β) Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\frac{1}{v+1} < \ln\left(\frac{v+1}{v}\right) < \frac{1}{v}$,

$$\text{δηλαδή } v \cdot \ln\left(\frac{v+1}{v}\right) < 1 \text{ και } (v+1) \cdot \ln\left(\frac{v+1}{v}\right) > 1$$

$$\text{ή } \ln\left(\frac{v+1}{v}\right)^v < 1 \text{ και } \ln\left(\frac{v+1}{v}\right)^{(v+1)} > 1$$

$$\text{ή } \left(\frac{v+1}{v}\right)^v < e \text{ και } \left(\frac{v+1}{v}\right)^{(v+1)} > e$$

γ) Η ανισότητα $\frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x$ για

$$x = 1, 2, 3, \dots, v \text{ δίνει } 1 > \ln 2 - \ln 1, \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2, \dots,$$

$$\frac{1}{v} > \ln(v+1) - \ln v \text{ και με πρόσθεση αυτών}$$

έχουμε $\alpha_v > \ln(v+1)$. Επειδή $\lim_{v \rightarrow +\infty} \ln(v+1) = +\infty$,

είναι και $\lim_{v \rightarrow +\infty} (\alpha_v) = +\infty$.

Παράδειγμα 2

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και κυρτή, να αποδειχθεί ότι για

κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (Jensen)

Απόδειξη

- Προφανώς, για $\alpha = \beta$ έχουμε ισότητα.
- Αν $\alpha < \beta$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στα

$$\text{διαστήματα } \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right] \text{ και } \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$$

$$\text{έχουμε: } f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}, \quad x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}, \quad x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα και $x_1 < x_2$, ισχύει $f'(x_1) < f'(x_2)$ και έχουμε άμεσα το ζητούμενο.

- Ομοίως γίνεται η απόδειξη αν $\alpha > \beta$.

Εφαρμογές του Θ.Μ.Τ. στα όρια

Παράδειγμα 1

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}) = 0$.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t) = \eta\mu t$ στο διάστημα $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ με $x > 0$.

$$\text{Υπάρχει } x_0 \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1}) \text{ με } f'(x_0) = \frac{\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

, οπότε έχουμε

$$g(x) = \eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x} = \text{συν}x_0 \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{\text{συν}x_0}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \text{ και αφού } -1 \leq \text{συν}x_0 \leq 1, \text{ ισχύει}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq g(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \text{ και άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Σχόλιο: Γενικά, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \leq |\alpha - \beta|$ και $|\text{συν}\alpha - \text{συν}\beta| \leq |\alpha - \beta|$.

Η απόδειξη αυτών μπορεί να γίνει και τριγωνομετρικά.

$$\begin{aligned} |\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| &= \left| 2\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} \right| = \\ 2\left|\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right| &\leq 2\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = |\alpha-\beta| \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x) = +\infty$.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t) = e^t$ στο διάστημα $[x, \sqrt{x^2+1}]$.

Υπάρχει $x_0 \in (x, \sqrt{x^2+1})$ ώστε να ισχύει $g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x = (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot f'(x_0) =$

$\frac{e^{x_0}}{\sqrt{x^2+1} + x}$. Επειδή $e^x < e^{x_0} < e^{\sqrt{x^2+1}}$, έχουμε

$$\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1} + x} < g(x) < \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

Όμως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = +\infty \text{ και από την}$$

αριστερή ανισότητα της (1) διαπιστώνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Εφαρμογές του Θ.Μ.Τ. στις εξισώσεις

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 5^x = 2^x + 6^x$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $f(3) - f(2) = f(6) - f(5)$, όπου $f(t) = t^x$, $t > 0$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $x_1 \in (2, 3)$ και $x_2 \in (5, 6)$ με $f'(x_1) = f(3) - f(2)$ και $f'(x_2) = f(6) - f(5)$. Έτσι, η εξίσωση γράφεται $f'(x_1) = f'(x_2)$ και αφού $f'(t) = x \cdot t^{x-1}$, έχουμε

$$x \cdot x_1^{x-1} = x \cdot x_2^{x-1} \Leftrightarrow x \cdot (x_1^{x-1} - x_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Παράδειγμα 2

Αν $f(x) = (2x-1) \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση

$$f(1+x-x^3) = f(1) + f(x) - f(x^3)$$

στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Λύση

Καταρχάς, θα διατάξουμε τους αριθμούς $1, x, x^3$ και $1+x-x^3$.

i. Αν $x > 1$, τότε ισχύει $1+x-x^3 < 1 < x < x^3$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1+x-x^3, 1]$ και $[x, x^3]$.

Υπάρχουν $x_1 \in (1+x-x^3, 1)$ και $x_2 \in (x, x^3)$ με

$$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(1+x-x^3)}{x^3 - x} \text{ και } f'(x_2) = \frac{f(x^3) - f(x)}{x^3 - x}.$$

Η εξίσωση γράφεται $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Επειδή $f''(x) = (2x+3) \cdot e^x > 0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα και η εξίσωση δίνει $x_1 = x_2$, άτοπο.

ii. Αν $0 < x < 1$, τότε $x^3 < x < 1 < 1+x-x^3$ και ομοίως διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση είναι αδύνατη.

iii. Για $x=0$ και για $x=1$ η εξίσωση επαληθεύεται.

Θεωρητικές εφαρμογές

Παράδειγμα 1

Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι αντιστρέψιμη, να αποδειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την C_f .

Απόδειξη

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε εφαπτομένη $(\varepsilon): y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.

Η εξίσωση $f(x) = y$ δηλαδή η $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ έχει ρίζα το x_0 και υποθέτουμε ότι έχει ρίζα και το $x_1 \neq x_0$. Τότε ισχύει $f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$ ή $f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Όμως, υπάρχει ξ μεταξύ

$$x_1 \text{ και } x_0 \text{ με } f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi) \text{ και}$$

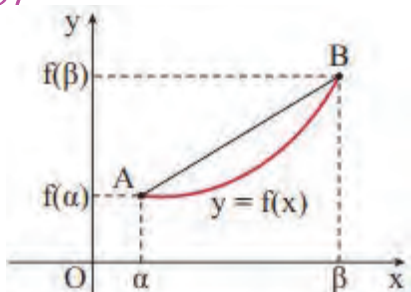
αφού η f' είναι 1-1, προκύπτει ότι $x_0 = \xi$, που

είναι άτοπο. Άρα, η C_f και η (ε) έχουν μοναδικό κοινό σημείο το σημείο επαφής.

Παράδειγμα 2

Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, να αποδειχθεί ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη χορδή με άκρα $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με εξαίρεση τα σημεία A και B.

Απόδειξη



Η χορδή AB ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x - \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$ και αρκεί

να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$$f(x) \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x - \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

Η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(x) - f'(\xi), \text{ για}$$

κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $g'(x) = 0$ για $x = \xi$, $g'(x) > 0$ για $x > \xi$ και $g'(x) < 0$ για $x < \xi$.

Επειδή $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, η g έχει μέγιστο το 0 και άρα $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3

Μια συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ . Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 < x_2$.

x	α	ξ	β
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Απόδειξη

Καταρχάς, εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σημείο $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ανήκει στο διάστημα (x_1, x_2) .

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, x_2)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\lambda(x_2 - x_1)}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα και αφού $\xi_1 < \xi_2$, ισχύει $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$.

Όμως, $\lambda > 0$, $1 - \lambda > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{1 - \lambda} &< \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\lambda} \Leftrightarrow \\ \lambda(f(x_0) - f(x_1)) &< (1 - \lambda)(f(x_2) - f(x_0)) \Leftrightarrow \\ f(x_0) &< \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και

$f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδειχθεί ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) < 0$.

- Υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ με

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} < 0 \text{ και } f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\beta - x_0} > 0$$

- Επίσης, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με

$$f''(\xi) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$.

Τάξη: Γ'

Εύρεση τύπου συνεχούς συνάρτησης

Γιώργος Ράπτης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις με:

$f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

$f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) ΛΑΘΟΣ

β) Από Α Λυκείου θυμάμαι ότι:

Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**.

Αντιπαράδειγμα 1

Θεωρούμε τις συναρτήσεις :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + |x|$, ($x \in \mathbb{R}$) και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

με $g(x) = x - |x|$, ($x \in \mathbb{R}$)

που ΔΕΝ είναι μηδενικές συναρτήσεις, ωστόσο όμως για το γινόμενο τους έχουμε:

$$f(x) \cdot g(x) = (x + |x|) \cdot (x - |x|) =$$

$$x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$$

Αντιπαράδειγμα 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x < \lambda \\ 0, & x \geq \lambda \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} 0, & x < \lambda \\ x^3, & x \geq \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

που ΔΕΝ είναι μηδενικές συναρτήσεις, ωστόσο όμως το γινόμενο τους είναι ΜΗΔΕΝ.

Άρα είναι ΛΑΘΟΣ από την σχέση: $f(x) \cdot g(x) = 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να συμπεράνουμε ότι:

ο **τύπος** της f είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή ο

τύπος της g είναι: $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

όπως είναι φανερό από τις πιο πάνω συναρτήσεις.

Σχόλιο: Όταν ζητείται να λυθεί η εξίσωση $f(x) \cdot g(x) = 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ή } g(x) = 0$$

Γιατί στην περίπτωση αυτή τα $f(x), g(x)$ παριστάνουν τις τιμές των f και g στο σημείο x , οπότε είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Η δοθείσα σχέση γράφεται και ως εξής:

$$f^2(x) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |f(x)| = 2 \quad (1).$$

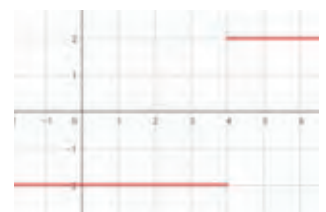
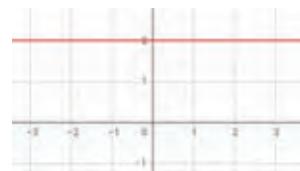
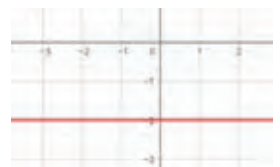
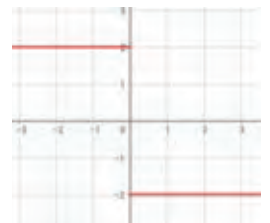
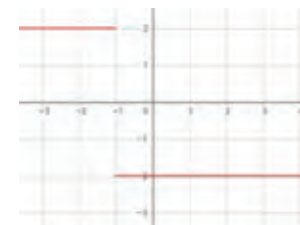
Υπάρχουν **άπειρες** συναρτήσεις που ικανοποιούν την σχέση (1) όπως π.χ. με

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < \lambda \\ -2, & x \geq \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \text{ π.χ.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ -2, & x \geq -1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -2, & x < 4 \\ 2, & x \geq -4 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad f(x) = 2 \quad \text{ή} \quad f(x) = -2$$



Παρατηρήστε ότι: για τις πιο πάνω συναρτήσεις ισχύει ότι: $f^2(x) = 4$ ή $|f(x)| = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Είναι ΛΑΘΟΣ λοιπόν να ακολουθήσουμε τον πιο κάτω τρόπο λύσης για να βρούμε τους πιθανούς τύπους της f :

$$f^2(x) = 4 \Leftrightarrow f^2(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 2)(f(x) + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή}$$

$$f(x) + 2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όπως είδαμε πιο πάνω.

Αν όμως γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση που ψάχνουμε τους πιθανούς τύπους της, είναι **ΣΥΝΕΧΗΣ** τότε θα κάνουμε χρήση των συνεπειών του Θ. Bolzano:

ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα A και δε μηδενίζεται ο' αυτόν, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in A$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in A$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα A . (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

και ανάλογα με την περίπτωση δουλεύουμε ως εξής:

A. Εύρεση τύπου συνεχούς συνάρτησης f αν

$$|f(x)| = B \text{ μέλος}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η. B μέλος θετικό για κάθε $x \in A_f$.

Παράδειγμα 1: Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$f^2(x) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |f(x)| = 2 \quad (1)$$

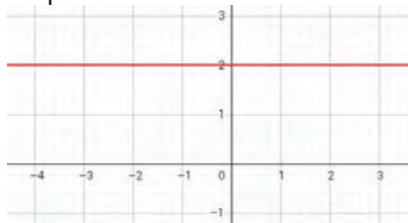
Βρίσκουμε τις ρίζες της $f(x)$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow 2 = 0, \text{ αδύνατη.}$$

Οπότε: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε από συνέπειες Θ Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν τις περιπτώσεις. Η f να είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή Η f να είναι αρνητική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή:

1η $f(x) > 0$. Τότε $|f(x)| = f(x)$ και από την (1)

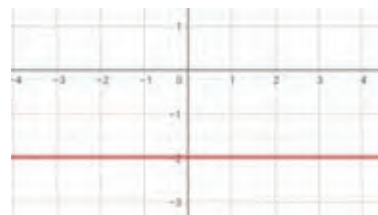
έχουμε τον τύπο της f : $f(x) = 2$ με γραφική παράσταση:



2η $f(x) < 0$ Τότε $|f(x)| = -f(x)$ και από την(1)

$$\text{έχουμε τον τύπο της } f: -f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = -2$$

με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 2: Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της συνεχούς στο σύνολο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f , για την οποία ισχύει: $f^2(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$f^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$|f(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1).$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0,$$

Αδύνατη. Οπότε: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε από συνέπειες Θ Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε λοιπόν τις περιπτώσεις.

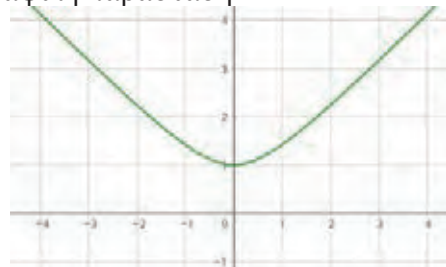
Η f να είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή

Η f να είναι αρνητική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

1η $f(x) > 0$ Τότε $|f(x)| = f(x)$ και από την(1)

$$\text{έχουμε τον τύπο της } f: f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Με γραφική παράσταση:

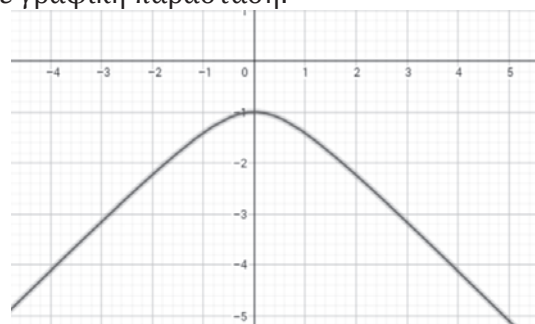


2η $f(x) < 0$ Τότε $|f(x)| = -f(x)$ και από την(1)

έχουμε τον τύπο της f :

$$-f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$$

Με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 3: Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της συνεχούς στο σύνολο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f , για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2e^x f(x) = 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$f^2(x) - 2e^x f(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x} = 9 + e^{2x}$$

$$(f(x) - e^x)^2 = e^{2x} + 9 \Leftrightarrow |f(x) - e^x| = \sqrt{e^{2x} + 9}$$

$$\text{Θέτουμε: } g(x) = f(x) - e^x \quad (1) \text{ άρα: } |g(x)| = \sqrt{e^{2x} + 9} \quad (1).$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της g :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^{2x} + 9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} + 9 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = -9, \text{ Αδύνατη.}$$

Οπότε: $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι και συνεχής (διαφορά συνεχών) στο $\mathbb{R}$ οπότε από συνέπειες Θ. Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1η $g(x) > 0$.

$$\text{Τότε } |g(x)| = g(x) \text{ οπότε: } g(x) = \sqrt{e^{2x} + 9} \text{ και}$$

από (1) βρίσκουμε τον τύπο της f :

$$f(x) - e^x = \sqrt{e^{2x} + 9} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x + \sqrt{e^{2x} + 9}}$$

2η $g(x) < 0$.

$$\text{Τότε } |g(x)| = -g(x) \text{ οπότε:}$$

$$-g(x) = \sqrt{e^{2x} + 9} \Leftrightarrow g(x) = -\sqrt{e^{2x} + 9} \text{ και από (1)}$$

βρίσκουμε τον τύπο της f :

$$f(x) - e^x = -\sqrt{e^{2x} + 9} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x - \sqrt{e^{2x} + 9}}$$

Β. Το Β μέλος μηδενίζεται στα άκρα του Π.Ο. της f .

Παράδειγμα 4: Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1] \quad (1).$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1, 1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

Απόδειξη: Η (1) γράφεται:

$$f^2(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1 - x^2} \quad (2)$$

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

β) Έχουμε:

η f συνεχής στο $(-1, 1)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ οπότε από συνέπειες Θ. Bolzano, η f διατηρεί πρόσημο στο $(-1, 1)$.

γ) Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1η $f(x) < 0$ στο $(-1, 1)$ τότε:

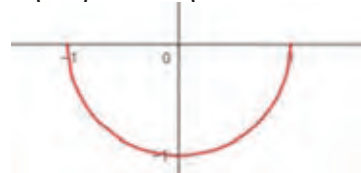
$$|f(x)| = -f(x) \text{ και από την σχέση (2):}$$

$$-f(x) = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad x \in (-1, 1)$$

και επειδή: $f(-1) = 0 = f(1)$ έχουμε τον τύπο:

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

και γραφική παράσταση:



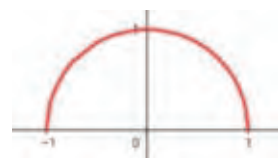
2η $f(x) > 0$ στο $(-1, 1)$

τότε $|f(x)| = f(x)$ και από την σχέση (2):

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1) \text{ και επειδή:}$$

$$f(-1) = 0 = f(1) \text{ έχουμε τον τύπο: } \boxed{f(x) = \sqrt{1 - x^2}}$$

, $x \in [-1, 1]$ και γραφική παράσταση:



Παρατήρηση: Αν στα δεδομένα της άσκησης υπάρχει ή μπορούμε να βρούμε μια τιμή της συνάρτησης και άρα το πρόσημο της συνάρτησης τότε έχουμε μόνο ΜΙΑ περίπτωση και επιλέγουμε τον κατάλληλο τύπο.

Παράδειγμα 5: Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-3, 3]$, για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 9 \text{ για κάθε } x \in [-3, 3]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-3, 3)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -3)$.

Λύση: Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$f^2(x) = 9 - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{9 - x^2} \quad (1)$$

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$9-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=-3 \text{ ή } x=3.$$

β) Έχουμε: η f συνεχής στο $(-3,3)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-3,3)$ οπότε από συνέπειες Θ. Bolzano, η f διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

γ) Επειδή $A(0,-3) \in C_f \Leftrightarrow f(0)=-3 < 0$ και όπως αποδείξαμε η f διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

Θα έχουμε λοιπόν: $f(x) < 0$ στο $(-3,3)$ οπότε:

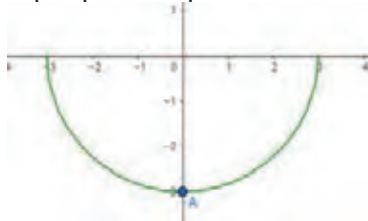
$$|f(x)| = -f(x) \text{ και από την σχέση (2):}$$

$$-f(x) = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{9-x^2}$$

και επειδή: $f(-3)=0=f(3)$ έχουμε τον τύπο:

$$f(x) = -\sqrt{9-x^2}, x \in [-3,3]$$

και γραφική παράσταση:



Γ. Το Β μέλος μηδενίζεται σε εσωτερικό σημείο ρ του Π.Ο. της f .

Όταν υπάρχει αριθμός ρ που μηδενίζεται η συνάρτηση f τότε δουλεύουμε με βάση τον παρακάτω πίνακα:

Π Ε Δ Ι Ο Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Υ f		
	α	β
	ρ	
	Η f ως συνεχής διατηρεί πρόσημο στα (α, ρ) και (ρ, β) οπότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις	
	$x \in (\alpha, \rho)$	$x \in (\rho, \beta)$
Π Ρ Ο Σ Η Μ Ο f	f αρνητική $f(x) < 0$	f αρνητική $f(x) < 0$
	f θετική $f(x) > 0$	f θετική $f(x) > 0$
	f αρνητική $f(x) < 0$	f θετική $f(x) > 0$
	f θετική $f(x) > 0$	f αρνητική $f(x) < 0$

Σημείωση: Εννοείται ότι η σειρά του προσήμου της f δεν είναι δεσμευτική και μπορείτε να δουλέψετε με όποια σειρά θέλετε, αρκεί να εξετάσετε όλες τις περιπτώσεις)

Παράδειγμα 6: Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της συνεχούς στο σύνολο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f , για την οποία ισχύει: $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: $f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow |f(x)| = |x|$ (1).

Βρίσκουμε τις ρίζες της f .

$f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$. Άρα η f έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Θυμάμαι ότι: $|x| = \begin{cases} -x & \text{αν } x < 0 \\ x & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

Έχουμε ότι: η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ οπότε από συνέπειες Θ.

Bolzano, η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και η

f συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε

$x \in (0, +\infty)$ οπότε από συνέπειες Θ. Bolzano, η f

διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Διακρίνουμε λοιπόν τέσσερις περιπτώσεις:

α) Για $x \in (-\infty, 0)$ $f(x) < 0$, τότε

$$|f(x)| = -f(x), |x| = -x \text{ και από (1)}$$

$$-f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) = x, x \in (-\infty, 0).$$

β) Για $x \in (-\infty, 0)$ $f(x) > 0$, τότε

$$|f(x)| = f(x), |x| = -x \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = -x, x \in (-\infty, 0).$$

γ) Για $x \in (0, +\infty)$ $f(x) < 0$, τότε

$$|f(x)| = -f(x), |x| = x \text{ και από (1)}$$

$$-f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) = x, x \in (0, +\infty).$$

δ) Για $x \in (0, +\infty)$ $f(x) > 0$, τότε

$$|f(x)| = f(x), |x| = x \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = x, x \in (0, +\infty)$$

Αντίστοιχα

α) Για $x \in (0, +\infty)$ $f(x) < 0$, τότε

$$|f(x)| = -f(x), |x| = x \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = -x, x \in (0, +\infty)$$

β) Για $x \in (0, +\infty)$ $f(x) > 0$, τότε

$$|f(x)| = f(x), |x| = x \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = x, x \in (0, +\infty)$$

γ) Για $x \in (0, +\infty)$ $f(x) > 0$, τότε

$$|f(x)| = f(x), |x| = x \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = x, x \in (0, +\infty)$$

δ) Για $x \in (0, +\infty)$ $f(x) < 0$, τότε

$$|f(x)| = -f(x), |x| = x \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = -x, x \in (0, +\infty)$$

Έχουμε λοιπόν τους εξής πιθανούς τύπους της

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ή } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ή } \\ -x, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ή } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
	$ x-1 = -(x-1)$		$ x-1 = x-1$

Η ισοδύναμη αφού $f(0) = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ ή } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$f(x) = x, (x \in \mathbb{R}) \text{ ή } f(x) = -x, (x \in \mathbb{R})$$

Η και $f(x) = -|x|, (x \in \mathbb{R})$ ή $f(x) = |x|, (x \in \mathbb{R})$ ή

$$f(x) = x, (x \in \mathbb{R}) \text{ ή } f(x) = -x, (x \in \mathbb{R})$$

και γραφική παράσταση:

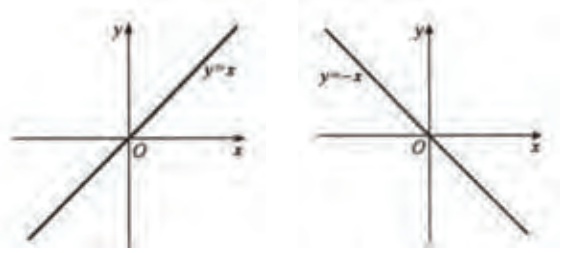
α) Η συνάρτηση f διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$



β) Η συνάρτηση f διατηρεί θετικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση f διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και θετικό στο $(0, +\infty)$

δ) Η συνάρτηση f διατηρεί θετικό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και αρνητικό στο $(0, +\infty)$



Παράδειγμα 7

Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της συνεχούς στο σύνολο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f , για την οποία ισχύει: $f^2(x) + 2x = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

$$f^2(x) = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{(x-1)^2} \Leftrightarrow |f(x)| = |x-1| \quad (1)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της f .

$$f(x) = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow |x-1| = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$

Επίσης κάνουμε πίνακα προσήμου για την παράσταση μέσα στο απόλυτο και έχουμε:

Έχουμε ότι: η f συνεχής στο $(-\infty, 1)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ οπότε από συνέπειες Θ.

Bolzano, η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 1)$ και η f συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ οπότε από συνέπειες Θ. Bolzano, η f διατηρεί πρόσημο στο $(1, +\infty)$.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

α) Για $x \in (-\infty, 1)$ $f(x) < 0$, τότε:

$$|f(x)| = -f(x), |x-1| = -x+1 \text{ και από (1)}$$

$$-f(x) = -x+1 \Leftrightarrow f(x) = x-1, x \in (-\infty, 1).$$

β) Για $x \in (-\infty, 1)$ $f(x) > 0$, τότε:

$$|f(x)| = f(x), |x-1| = -x+1 \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = -x+1, x \in (-\infty, 1).$$

γ) Για $x \in (-\infty, 1)$ $f(x) < 0$, τότε:

$$|f(x)| = -f(x), |x-1| = -x+1 \text{ και από (1)}$$

$$-f(x) = -x+1 \Leftrightarrow f(x) = x-1, x \in (-\infty, 1).$$

δ) Για $x \in (-\infty, 1)$ $f(x) > 0$, τότε:

$$|f(x)| = f(x), |x-1| = -x+1 \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = -x+1, x \in (-\infty, 1)$$

Αντίστοιχα

α) Για $x \in (1, +\infty)$ $f(x) < 0$, τότε:

$$|f(x)| = -f(x), |x-1| = x-1 \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = -x+1, x \in (1, +\infty)$$

β) Για $x \in (1, +\infty)$ $f(x) > 0$, τότε:

$$|f(x)| = f(x), |x-1| = x-1 \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = x-1, x \in (1, +\infty)$$

γ) Για $x \in (1, +\infty)$ $f(x) > 0$, τότε:

$$|f(x)| = f(x), |x-1| = x-1 \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = x-1, x \in (1, +\infty)$$

δ) Για $x \in (1, +\infty)$ $f(x) < 0$, τότε:

$$|f(x)| = -f(x), |x-1| = x-1 \text{ και από (1)}$$

$$f(x) = -x+1, x \in (1, +\infty)$$

Έχουμε λοιπόν τους εξής πιθανούς τύπους της f

$$f(x) \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ -(x-1), & x > 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) \begin{cases} -(x-1), & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ (x-1), & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -(x-1), & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ -(x-1), & x > 1 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα αφού $f(1) = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ -(x-1), & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -(x-1), & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad f(x) = x-1, (x \in \mathbb{R}) \quad \text{ή} \quad f(x) = -(x-1), (x \in \mathbb{R})$$

ή και

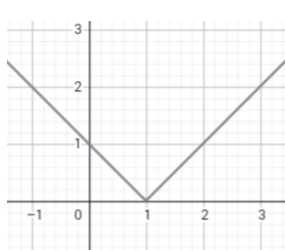
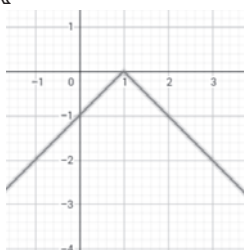
$$f(x) = -|x-1|, (x \in \mathbb{R}) \quad \text{ή} \quad f(x) = |x-1|, (x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = x-1, (x \in \mathbb{R}) \quad \text{ή} \quad f(x) = -(x-1), (x \in \mathbb{R})$$

Και γραφική παράσταση:

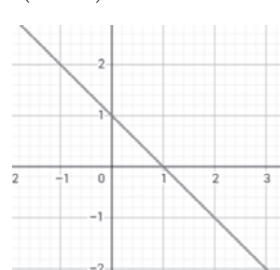
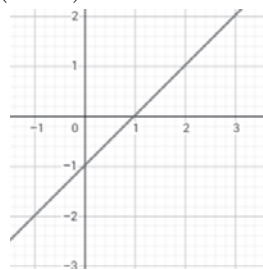
α) Η συνάρτηση f διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

β) Η συνάρτηση f διατηρεί θετικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$



γ) Η συνάρτηση f διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο $(-\infty, 1)$ και θετικό στο $(1, +\infty)$

δ) Η συνάρτηση f διατηρεί θετικό πρόσημο στο $(-\infty, 1)$ και αρνητικό στο $(1, +\infty)$



Δ. Και τι γίνεται αν το Β μέλος μηδενίζεται σε δυο τιμές ρ_1 και ρ_2 .

Τότε έχουμε τον πιο κάτω πίνακα

Π Ε Δ Ι Ο Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Υ f				
	α	ρ_1	ρ_2	β
	Η f ως συνεχής διατηρεί πρόσημο στα (α, ρ_1) (ρ_1, ρ_2) (ρ_2, β) οπότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις			
	$x \in (\alpha, \rho_1)$ $f(\rho_1) = 0$		$x \in (\rho_1, \rho_2)$ $f(\rho_2) = 0$ $x \in (\rho, \beta)$	
Π Ρ Ο Σ Η Μ Ο ς f	f αρνητική $f(x) < 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	
	f αρνητική $f(x) < 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	f θετική $f(x) > 0$	
	f αρνητική $f(x) < 0$	f θετική $f(x) > 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	
	f αρνητική $f(x) < 0$	f θετική $f(x) > 0$	f θετική $f(x) > 0$	
	f θετική $f(x) > 0$	f θετική $f(x) > 0$	f θετική $f(x) > 0$	
	f θετική $f(x) > 0$	f θετική $f(x) > 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	
	f θετική $f(x) > 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	f θετική $f(x) > 0$	
	f θετική $f(x) > 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	f αρνητική $f(x) < 0$	

Βιβλιογραφία:

- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Γ' Λυκείου (σχολικό βιβλίο)
- ΘΩΜΑΣ ΠΟΔΗΜΑΤΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 1^ο ΚΕΦ.
- ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Λυκείου Α' τόμος (Ιούνιος 2019)
- ΒΑΣΙΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ1 Λυκείου
- ΜΠΑΜΠΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ: Θέματα στην εύρεση συνάρτησης
- Lisari team: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Λυκείου 135 Θέματα Επανάληψης Μάρτιος 2021
- ΑΝΔΡΕΑΣ ΠΑΤΗΣΗΣ-ΠΑΥΛΟΣ ΤΡΥΦΩΝ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Λυκείου Η ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
- Κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ: Η ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ (με βάση το σχολικό βιβλίο) Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03

Τάξη: Γ'

Μια μαθηματική διαδρομή μέσα από συναρτήσεις

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Στα πρώτα βήματα της μαθηματικής ανάλυσης, η έννοια της **αντίστροφης συνάρτησης** αποτυπώνει την ιδέα της αντιστρεψιμότητας — μιας σύλληψης που γεννήθηκε στην Ευκλείδεια γεωμετρία και ωρίμασε μέσα από την αυστηρότητα της θεωρίας συνόλων. Στον 17ο αιώνα, η επιστήμη αλλάζει ριζικά: ο Newton και ο Leibniz εισάγουν την **παράγωγο**, ένα εργαλείο που αποκαλύπτει την εσωτερική ροή και τις λεπτομέρειες των συναρτήσεων, προσφέροντας έναν νέο τρόπο να μελετάται η τοπική τους συμπεριφορά.

Στον 19ο αιώνα, ο Cauchy θεμελιώνει το **όριο**, έννοια που λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στη **διαισθητική** μεταβολή και την αυστηρή ανάλυση. Πάνω σε αυτή τη βάση αναπτύσσεται η **συνέχεια**, η οποία μετατρέπει την «ομαλή ροή» μιας συνάρτησης σε **σταθερή και προβλέψιμη εξέλιξη**, επιτρέποντας να κατανοούμε την πορεία της με σαφήνεια και ακρίβεια. Έτσι διαμορφώνεται το πλαίσιο της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης, όπου η αντίστροφη συνάρτηση, το όριο, η συνέχεια και η παράγωγος συνθέτουν ένα αρμονικό σύνολο ιδεών που παραμένει θεμέλιο της μαθηματικής σκέψης.

Θέμα 1^ο: Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

α. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$ και να την παραστήσετε γραφικά.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = (f+g)(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1, & 0 \leq x < 1 \\ x+2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$$

i. Για τις συναρτήσεις $\varphi_1(x) = \varphi(x), x \in [0,1)$

και $\varphi_2(x) = \varphi(x), x \in [1,2]$ να βρείτε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις $\varphi_1 \circ \varphi_2, \varphi_2 \circ \varphi_1$.

ii. Αν για τον $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\sin^2 x) - 4}{\eta \mu x} + e^{\frac{1}{\ln x} + a + 1} \right] =$$

$e^{2(a+1)} - 3e^{a+1} + 4$, εξετάστε αν ορίζεται η τιμή $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(a)$

Λύση: α. Έχουμε $D_f = [0, +\infty)$ και $D_g = (-1, +\infty)$.

Αφού $D_f \cap D_g = [0, +\infty)$, ορίζεται η συνάρτηση

$f+g$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$.

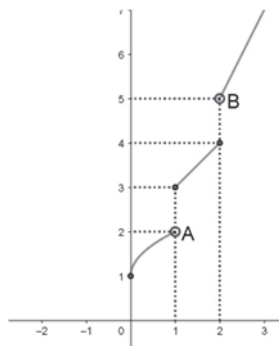


- Αν $0 \leq x < 1$, τότε $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 1$.
- Αν $1 \leq x \leq 2$, τότε $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 2$.
- Αν $x > 2$, τότε $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1$.

$$\text{Άρα } (f+g)(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1, & 0 \leq x < 1 \\ x+2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$$

Στηριζόμενοι στις βασικές γραφικές παραστάσεις, η γραφική παράσταση της $f+g$ φαίνεται στο σχήμα.

Από τη παραπάνω γραφική παράσταση της $f+g$ εξαιρούνται τα σημεία A, B.



β. i. Έχουμε $\varphi_1(x) = \sqrt{x}+1, x \in [0,1)$ και

$$\varphi_2(x) = x+2, x \in [1,2]$$

• Για την $\varphi_1 \circ \varphi_2$. Θεωρούμε το σύνολο:

$$\Sigma_1 = \{x \in D_{\varphi_2} / \varphi_2(x) \in D_{\varphi_1}\} =$$

$$\{x \in [1,2] / \varphi_2(x) \in [0,1)\}$$

$$\begin{cases} x \in [1,2] \\ \text{και} \\ \varphi_2(x) \in [0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \text{και} \\ 0 \leq x+2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \text{και} \\ -2 \leq x < -1 \end{cases}$$

αδύνατο. Άρα $\Sigma_1 = \emptyset$, οπότε δεν ορίζεται ως συνάρτηση η $\varphi_1 \circ \varphi_2$.

• Για την $\varphi_2 \circ \varphi_1$. Θεωρούμε το σύνολο:

$$\Sigma_2 = \{x \in D_{\varphi_1} / \varphi_1(x) \in D_{\varphi_2}\} =$$

$$\{x \in [0,1) / \varphi_1(x) \in [1,2]\}$$

$$\begin{cases} x \in [0,1) \\ \text{και} \\ \varphi_1(x) \in [1,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ \text{και} \\ 1 \leq \sqrt{x}+1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ \text{και} \\ 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \end{cases}$$

$0 \leq x < 1$. Άρα $\Sigma_2 = [0,1)$. Ορίζεται η συνάρτηση

$\varphi_2 \circ \varphi_1$ με πεδίο ορισμού το Σ_2 και τύπο

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) = \varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_1(x) + 2 \Leftrightarrow$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) = \sqrt{x} + 3.$$

ii. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 < \sin^2 x < 1$, οπότε

$$\frac{(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\sin^2 x) - 4}{\eta_{\mu x}} = \frac{\sqrt{\sin^2 x} - 1}{\eta_{\mu x}} =$$

$$\frac{|\sin x| - 1}{\eta_{\mu x}} \stackrel{\sin x > 0}{=} \frac{\sin x - 1}{\eta_{\mu x}} = \frac{x}{\eta_{\mu x}}. \text{ Έχουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta_{\mu x}}{x} = 1.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\sin^2 x) - 4}{\eta_{\mu x}} = 0$. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0. \text{ Συνεπώς } A = e^{\alpha+1} \Leftrightarrow$$

$$e^{2(\alpha+1)} - 4e^{\alpha+1} + 4 = 0 \Leftrightarrow (e^{\alpha+1} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{\alpha+1} = 2 \Leftrightarrow \alpha + 1 = \ln 2 \Leftrightarrow \alpha = \ln 2 - 1 \Leftrightarrow \alpha = \ln \frac{2}{e}.$$

Επειδή $0 < \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \ln \frac{2}{e} < 0 \Rightarrow \alpha \notin D_{\varphi_2 \circ \varphi_1}$, δεν ορίζεται η $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\alpha)$ ως τιμή της συνάρτησης $\varphi_2 \circ \varphi_1$.

Θέμα 2°: Θεωρούμε την $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης.

β. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

ii. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} και ύστερα να λύσετε στο σύνολο $[1, 2) \cup (2, +\infty)$

$$\text{την ανίσωση } \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} < x - \frac{1}{x-2} \quad (1).$$

γ. Να βρείτε το όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{R}$.

Λύση: Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x+1}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \text{και} \\ \sqrt{x+1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \text{και} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty). \text{ Άρα } D_f = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

α. Για κάθε $x \in D_f$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \sqrt{x+1}+1.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x_1+1}+1 = \sqrt{x_2+1}+1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι "1-1", οπότε αντιστρέφεται.}$$

Για το σύνολο τιμών της f , αναζητούμε $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = y$ για κάποιο $x \in D_f$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y-1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y-1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \\ \text{και} \\ x = (y-1)^2 - 1 \end{cases}.$$

Για $y \geq 1$ είναι $x = (y-1)^2 - 1 \geq -1$, οπότε το $x = (y-1)^2 - 1$ ανήκει στο D_f αν και μόνο αν

$$(y-1)^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y-1 \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 2 \\ \text{και} \\ y-1 \neq -1 \Leftrightarrow y \neq 0 \end{cases}$$

Αφού $y \geq 1$, τελικά έχουμε $y \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$

$$\text{Άρα } f([-1, 0) \cup (0, +\infty)) = [1, 2) \cup (2, +\infty).$$

$$\text{Συνεπώς } x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = (y-1)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(x) = (x-1)^2 - 1, x \in [1, 2) \cup (2, +\infty).$$

$$\text{β. i. } D_f \cap D_{f^{-1}} = [1, 2) \cup (2, +\infty) = A.$$

Για $x \in A$, θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x - y = f(y) - f(x) \end{cases} \quad (2) \quad (\Sigma).$$

$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } (2) \Leftrightarrow x - y = \sqrt{y+1} - \sqrt{x+1} \Leftrightarrow$$

$$x + \sqrt{x+1} = y + \sqrt{y+1} \quad (3).$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } t(x) = x + \sqrt{x+1},$$

$$x \in [1, +\infty). \text{ Για κάθε } x_1, x_2 \in [1, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$$

$$\text{έχουμε } \begin{cases} \sqrt{x_1+1} < \sqrt{x_2+1} \\ x_1 < x_2 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow}$$

$$x_1 + \sqrt{x_1+1} < x_2 + \sqrt{x_2+1} \Leftrightarrow t_1(x) < t_2(x).$$

Άρα η t είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι "1-1". (Μονοτονίας της t με τη βοήθεια των παραγώγων: Στο $[1, +\infty)$ η t είναι παραγωγίσιμη με

$$t'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0. \text{ Αυτό σημαίνει ότι η } t$$

είναι γνησίως αύξουσα.)

$$(3) \Leftrightarrow t(x) = t(y) \stackrel{t \text{ "1-1" }}{\Leftrightarrow} x = y.$$

Έτσι από το (Σ) έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Άρα οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο το $K(3,3)$

2^{ος} τρόπος: (2) $\Leftrightarrow x - y = \sqrt{y+1} - \sqrt{x+1} \Leftrightarrow$

$$x - y = \frac{(\sqrt{y+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow$$

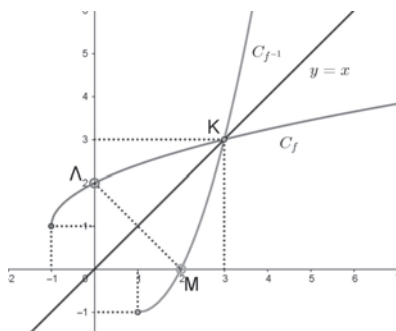
$$x - y = \frac{y - x}{\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow$$

$$(x - y)(\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1} + 1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Όπως και στον 1^ο τρόπο βρίσκουμε $x = 3$. Άρα το $K(3,3)$ είναι το μόνο κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$.

ii. Η γραφική παράσταση της f θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f_1(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ αν τη μετατοπίσουμε αρχικά οριζόντια κατά μία μονάδα προς τα αριστερά και ύστερα τη γραμμή που προκύπτει τη μετατοπίζουμε κατά μία μονάδα προς τα πάνω στο σύνολο $[-1,0) \cup (0,+\infty)$. Η $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y = x$. Έτσι έχουμε το παρακάτω σχήμα με τις $C_f, C_{f^{-1}}$.



Τα σημεία Λ, M εξαιρούνται από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις.

Ενεργούμε για $x \in [1,2) \cup (2,+\infty)$.

• Αν $x \in [1,2)$, (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} > x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 > (x-1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) > f^{-1}(x)$ (4).

Από τις γραφικές παραστάσεις των $C_f, C_{f^{-1}}$ προκύπτει ότι η (4) αληθεύει για κάθε $x \in [1,2)$.

• Αν $x \in (2,+\infty)$, (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} < x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 < (x-1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) < f^{-1}(x)$, η

οποία ισχύει όταν $x > 3$, με βάση τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} . Τελικά στο

$[1,2) \cup (2,+\infty)$ λύσεις της (1) είναι τα $x \in [1,2) \cup (3,+\infty)$.

γ. $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} + 1 - mx \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 - mx \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - m \right) \right] = -m.$$

• Αν $m = 0$, τότε $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) = +\infty$.

• Αν $m \neq 0$, τότε $L = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } m < 0 \\ -\infty, & \text{αν } m > 0 \end{cases}$.

Άρα $L = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } m \leq 0 \\ -\infty, & \text{αν } m > 0 \end{cases}$.

Θέμα 3ο: Η συνάρτηση $f: [0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$, $B(1,-2)$.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) + x + 2}{x - 2} = -1$, να βρείτε το πλήθος

των ριζών της εξίσωσης $f(x) + a = 1$ (1) για τις διάφορες πραγματικές τιμές του a .

β. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία έχουμε $g(0) = -2\lambda^2 + 3$ και

$$xg(x) = x^5 + (\kappa^2 - 2\kappa) \frac{x^3 + (f(x) - 2)x}{x - 1} -$$

$\lambda^2 \eta \mu x + x$ (2) για κάθε $x \in [0,1) \cup (1,2)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει το σημείο $M(\kappa, \lambda)$.

Λύση: Έχουμε $f(0) = 1$ και $f(1) = -2$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $0 < 1 \Rightarrow f(0) > f(1)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα.

α. Για $x \in (0,2)$, θέτουμε $\frac{f(x) + x + 2}{x - 2} =$

$$\varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = (x - 2)\varphi(x) - x - 2.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \varphi(x) = -1, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4. \text{ Επειδή η } f$$

είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα το σύνολο τιμών της είναι $f([0,2)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(0) \right] = (-4, 1]$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = 1 - a.$$

Η (1) θα έχει ρίζα για εκείνες τις τιμές του a που το $1 - a$ βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f .

$$\bullet \text{ Αν } \begin{cases} 1-\alpha \leq -4 \Leftrightarrow \alpha \geq 5 \\ \text{ή} \\ 1-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0 \end{cases}, \text{ το } 1-\alpha \notin f([0,2)),$$

οπότε η (1) είναι αδύνατη.

• Αν $-4 < 1-\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -5 < -\alpha \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < 5$, τότε η εξίσωση, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[0,2)$. Ειδικά αν $\alpha = 0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 0.

β. Για $x \in (0,1) \cup (1,2)$, $(2) \Leftrightarrow g(x) =$

$$x^4 + (\kappa^2 - 2\kappa) \frac{x^2 + f(x) - 2}{x-1} - \lambda^2 \frac{\eta \mu x}{x} + 1 \quad (3).$$

Αφού η f είναι συνεχής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$.

Επίσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

$$\text{Αρα } (3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \kappa^2 - 2\kappa - \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$g(0) = (\kappa - 1)^2 - \lambda^2 \Leftrightarrow -2\lambda^2 + 3 = (\kappa - 1)^2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa - 1)^2 + \lambda^2 = 3. \text{ Συνεπώς το σημείο } M \text{ ανήκει}$$

στον κύκλο που έχει εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 3$.

Θέμα 4ο: Θεωρούμε τη συνάρτηση f και τα σημεία $A(1,0)$, $B(-1, f(x))$, $\Gamma(x^3, -2)$, $x \in D_f$

έτσι ώστε να ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο στη κορυφή A . Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = ax^3 + 3x - 5$ με $a \in \mathbb{R}$ και $A \notin C_g$.

α. i. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ του τριγώνου $AB\Gamma$ γίνεται ελάχιστο.

β. Να βρείτε για ποια από τις συναρτήσεις g η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,0)$ είναι εφαπτομένη και της C_g .

Λύση: α. i. Έχουμε $\overline{AB} = (-2, f(x))$ και $\overline{AG} =$

$(x^3 - 1, -2)$. Τα σημεία A, B, Γ ορίζουν τρίγωνο

όταν τα διανύσματα $\overline{AB}, \overline{AG}$ δεν είναι παράλληλα, δηλαδή $\det(\overline{AB}, \overline{AG}) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -2 & f(x) \\ x^3 - 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - (x^3 - 1)f(x) \neq 0 \quad (1).$$

Αν ισχύει η (1) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A αν και μόνο αν $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = 0 \Leftrightarrow$

$$-2(x^3 - 1) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -x^3 + 1. \text{ Έτσι}$$

$$(1) \Leftrightarrow 4 - (x^3 - 1)(-x^3 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow 4 + (x^3 - 1)^2 \neq 0$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) = -x^3 + 1, x \in \mathbb{R}$.

ii. Έχουμε $\overline{AB} = (-2, -x^3 + 1)$ και

$$\overline{AG} = (x^3 - 1, -2). \quad |\overline{AB}| = |\overline{AG}| = \sqrt{4 + (x^3 - 1)^2}.$$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A και επιπλέον είναι ισοσκελές.

$$\text{Άρα } E(x) = \frac{1}{2} |\overline{AB}|^2 = \frac{1}{2} [4 + (x^3 - 1)^2], x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^3 - 1)^2 \geq 0$, οπότε:

$E(x) \geq 2 \Leftrightarrow E(x) \geq E(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ γίνεται ελάχιστο όταν $x = 1$.

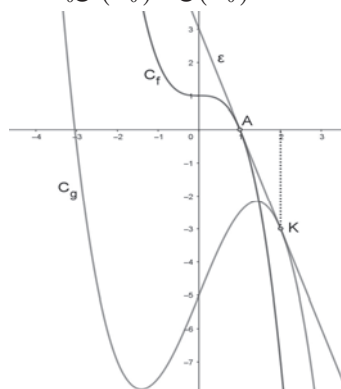
β. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -3x^2$. Στο σημείο A ορίζεται εφαπτομένη ε της C_f με εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 3$.

$D_g = \mathbb{R}$, $A \notin D_g \Leftrightarrow g(1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$. Η g για κάθε τιμή του a είναι παραγωγίσιμη ως πολωνομική με $g'(x) = 3ax^2 + 3$. Έστω $K(x_0, g(x_0)) \in C_g$.

Στο σημείο K ορίζεται εφαπτομένη ε_1 της C_g με

$$\text{εξίσωση } y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = g'(x_0)x - x_0 g'(x_0) + g(x_0).$$



Απαιτούμε οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon_1$ να ταυτίζονται, οπότε

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g'(x_0)x - x_0 g'(x_0) + g(x_0) =$

$$-3x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x_0) = -3 \\ \text{και} \\ -x_0 g'(x_0) + g(x_0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g'(x_0) = -3 \\ \text{και} \\ 3x_0 + g(x_0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0^2 = -2 \quad (2) \\ \text{και} \\ (ax_0^2)x_0 + 6x_0 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2 \end{cases}$$

Έτσι από την (2) έχουμε $4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x - 5$.



«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα προβλήματα και οι λύσεις και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ - ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 450 (ΤΕΥΧΟΣ 136)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύουν $u_\beta = \sqrt{5}$ και $u_\gamma = 2\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο δυνατό μήκος $R_{\min}$ της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του.

Λαγογιάννης Βασίλειος - Ν. Ηράκλειο

ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης - Χολαργός)

Ισχύουν:

$$E = \frac{1}{2} \beta u_\beta = \frac{1}{2} \beta \sqrt{5} \Rightarrow \beta = \frac{2E}{\sqrt{5}}, \quad (1)$$

$$E = \frac{1}{2} \gamma u_\gamma = \frac{1}{2} \gamma 2\sqrt{2} \Rightarrow \gamma = \frac{E}{\sqrt{2}}, \quad (2)$$

οπότε έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu \hat{A} \xrightarrow{(1)} E = \frac{1}{2} \cdot \frac{2E}{\sqrt{5}} \cdot \frac{E}{\sqrt{2}} \eta \mu \hat{A} \Rightarrow \eta \mu \hat{A} = \frac{\sqrt{10}}{E}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\sqrt{10}}{E} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{10} \leq E$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$).

Από τη γνωστή ισότητα $R = \frac{\alpha \beta \gamma}{4E}$ λόγω των (1)

και (2) παίρνουμε

$$R = \frac{\alpha \frac{2E}{\sqrt{5}} \frac{E}{\sqrt{2}}}{4E} = \frac{2\alpha E^2}{4\sqrt{10}E} = \frac{\alpha E}{2\sqrt{10}} \geq \frac{\alpha \sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{\alpha}{2}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\hat{A} = 90^\circ$. Τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4E^2}{5} + \frac{E^2}{2} = \frac{13E^2}{10} \geq 13$$

οπότε $\alpha \geq \sqrt{13}$.

Άρα η ελάχιστη τιμή της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου επιτυγχάνεται όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και ισχύει

$$R_{\min} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος **Πετρολέκας Στυλιανός** - Δραπετσώνα.

ΑΣΚΗΣΗ 451 (ΤΕΥΧΟΣ 136)

Σε επίπεδο (π) θεωρούμε ν κύκλους που τέμνονται ανά δυο χωρίς κάποιος από αυτούς να διέρχεται από το σημείο τομής δυο άλλων. Να υπολογίσετε:

α. Το πλήθος Σ_v των σημείων τομής τους.

β. Το πλήθος S_v των ξένων μεταξύ τους χωρίων στα οποία χωρίζεται το (π) από αυτούς τους κύκλους.

γ. Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των Σ_v και S_v

Λευτέρης Τσιλιακός - Γαλάτσι

ΛΥΣΗ (Νερούτσος Κων/νος - Γλυφάδα)

α. Εύκολα βρίσκουμε ότι στην περίπτωση των δυο κύκλων έχουμε 2 σημεία τομής ενώ στην περίπτωση των τριών κύκλων έχουμε 6 σημεία τομής δηλαδή

$$\Sigma_2 = 2(2-1) = 2 \text{ και } \Sigma_3 = 3(3-1) = 6$$

Θα αποδείξουμε, με την μέθοδο της επαγωγής, ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$\Sigma_v = v(v-1), \quad (1)$$

Η (1) ισχύει για $n=2$ και έστω ότι ισχύει για $n=k$, $k > 2$ δηλαδή $\Sigma_k = k(k-1)$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$ δηλαδή θα αποδείξουμε ότι

$$\Sigma_{k+1} = k(k+1) = k(k-1) + 2k$$

Η ισότητα αυτή όμως ισχύει αφού ο $(k+1)$ κύκλος θα τέμνει καθέναν από τους προϋπάρχοντες σε δυο σημεία, οπότε προκύπτουν $2k$ επιπλέον σημεία τομής.

Επομένως για το πλήθος Σ_v των κύκλων ισχύει

$$\Sigma_v = v(v-1)$$

β. Με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος διαπιστώνουμε ότι στην περίπτωση των δυο κύκλων δημιουργούνται 4 ξένα μεταξύ τους χωρία και

στην περίπτωση των τριών κύκλων 8 χωρία δηλαδή $S_2 = 4 = 2(2-1)+2$ και $S_3 = 3(3-1)+2$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n με $n \geq 2$ ισχύει

$$S_n = n(n-1)+2, \quad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι η ισότητα ισχύει για $n=k$, τότε ο $(k+1)$ κύκλος ορίζει με καθέναν από τους προηγούμενους k κύκλους δυο επιπλέον χωρία ήτοι συνολικά $2k$ νέα χωρία. Έτσι έχουμε:

$$S_{k+1} = S_k + 2k = k(k-1)+2+2k = k(k+1)+2$$

που σημαίνει ότι η (1) ισχύει και για $n=k+1$, άρα ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

γ. Από τις (1) και (2) εύκολα προκύπτει ότι

$$S_n = \Sigma_n + 2$$

Λύση έστειλαν επίσης οι **Καρτσακλής Δημήτριος** – Αργίνιο και **Δεληστάθης Γιώργος** – Κάτω Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 452 (ΤΕΥΧΟΣ 136)

Δίνεται η παραβολή $(C): y^2 = 2px, p > 0$

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \kappa, \lambda > 0$ εφάπτεται στην παραβολή στο $M(x_1, y_1), y_1 > 0$

αν και μόνο αν $p = 2\kappa\lambda$ και $x_1 = \frac{\kappa}{\lambda}, y_1 = \frac{p}{\lambda} = 2\kappa$.

β. Έστω $M(x, y) \in (C)$ με $0 \neq x_1 \neq \frac{p}{2}$ και $y_1 > 0$, Ε

η εστία της παραβολής και MEM' χορδή της παραβολής. Η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο Γ και Δ η προβολή του M στον $x'x$, Λ η προβολή του M στην διευθετούσα (δ) και Z σημείο του $x'x$ ώστε $MZ \perp (\varepsilon)$ Να αποδείξετε ότι:

i. $OG = OD$

ii. $EG = EM = EZ = ML = \Gamma\Lambda$

γ. Από σημείο P φέρουμε τις εφαπτόμενες PA, PB στην (C) . Να αποδείξετε ότι:

i. $PA \perp PB \Leftrightarrow P \in (\delta) \Leftrightarrow P$ σημείο της AB

και $PE \perp AB \Leftrightarrow P \in (\delta)$ ή $P \in x'x$

ii. Αν το P δεν είναι πάνω στην (δ) , τότε η PE διχοτομεί την γωνία $A\hat{E}B$

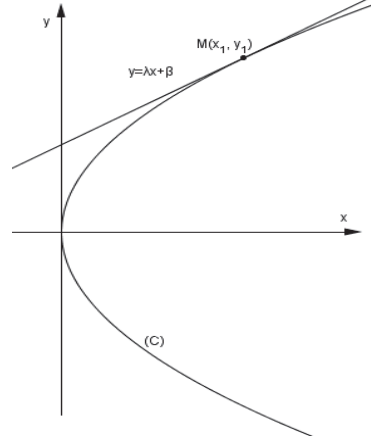
Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια

ΛΥΣΗ (Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο Κρήτης)

α. Η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ εφάπτεται στην

παραβολή μόνο όταν το σύστημα $\begin{cases} y = \lambda x + \kappa \\ y^2 = 2px \end{cases}$

έχει μοναδική λύση. Τα σύστημα είναι ισοδύναμο με το



$$\begin{cases} y = \lambda x + \kappa \\ \lambda^2 x^2 + 2(\kappa\lambda - p)x + \kappa^2 = 0 \end{cases}$$

και έχει μια (διπλή) λύση όταν η διακρίνουσα της δεύτερης εξίσωσης είναι 0. Είναι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\kappa\lambda - p)^2 - 4\kappa^2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow (\kappa\lambda - p)^2 - \kappa^2\lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2\kappa\lambda p = 0 \Leftrightarrow p = 2\kappa\lambda$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι το σημείο τομής M έχει συντεταγμένες

$$x_1 = \frac{\kappa}{\lambda} \quad \text{και}$$

$$y_1 = \frac{p}{\lambda} = 2\kappa$$

β. i. Προφανώς

$$x_\Delta = x_M = \frac{\kappa}{\lambda} \quad \text{και}$$

η τετμημένη του Γ είναι $x_\Gamma = -\frac{\kappa}{\lambda}$, απ' όπου προκύπτει ότι $(OG) = (OD)$

$$\text{ii. Είναι: } (EG) = (OG) + (OE) = \frac{\kappa}{\lambda} + \frac{p}{2} = \frac{\kappa}{\lambda} + \kappa\lambda$$

$$(EM) = \sqrt{(x_E - x_M)^2 + (y_E - y_M)^2} = \dots = \sqrt{\left(\kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}\right)^2} = \kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}$$

$$(ML) = \frac{p}{2} + x_M = \kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}$$

$$(\Gamma\Lambda) = \sqrt{(x_\Lambda - x_\Gamma)^2 + (y_\Lambda - y_\Gamma)^2} = \dots = \sqrt{\left(\kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}\right)^2} = \kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}$$

Η κάθετη στην εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση

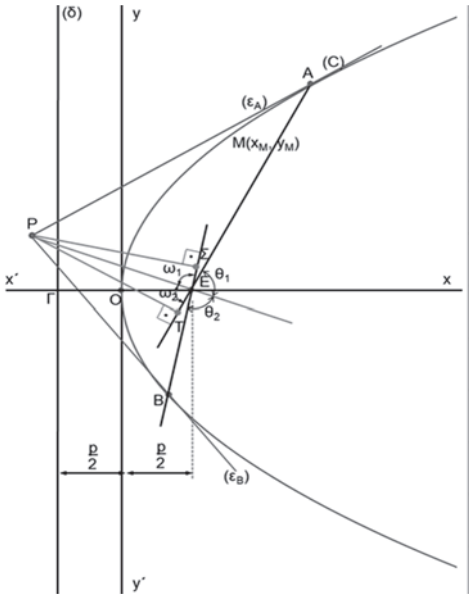
$$y = -\frac{1}{\lambda}x + 2\kappa + \frac{\kappa}{\lambda^2}$$

και το σημείο Z έχει τετμημένη $x_Z = 2\kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}$

οπότε $(EZ) = (OZ) - (OE) = 2\kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda} - \kappa\lambda = \kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$EG = EM = EZ = ML = \Gamma\Lambda$$



γ.ι. Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, οι εφαπτόμενες (ε_A) και (ε_B) έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$$yy_A = p(x + x_A) \quad \text{και} \quad yy_B = p(x + x_B)$$

Οι (ε_A) και (ε_B) τέμνονται στο $P(x_P, y_P)$ που ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις, οπότε ισχύουν οι: $y_P y_A = p(x_P + x_A)$ και $y_P y_B = p(x_P + x_B)$. Επομένως, οι συντεταγμένες των A και B επαληθεύουν την εξίσωση: $yy_P = p(x + x_P)$ που σημαίνει ότι η είναι η εξίσωση της χορδής AB. Η AB θα διέρχεται από την εστία (E) αν μόνο αν οι συντεταγμένες της $x_E = \frac{p}{2}$ και $y_E = 0$ επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή αν και μόνο αν:

$$y_P y_E = p(x_P + x_E) \Leftrightarrow 0 = p\left(x_P + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow x_P = -\frac{p}{2}$$

που συμβαίνει αν και μόνο αν το P ανήκει στη διευθετούσα (δ). Άρα έχει αποδειχθεί ότι:

$$P \in (\delta) \Leftrightarrow E \text{ σημείο της AB.}$$

Αφού αποδείχθηκε ότι $P \in (\delta)$, θα είναι

$PA \perp PB$ ($\varepsilon_A \perp \varepsilon_B$) αν και μόνο αν: $\lambda_A \lambda_B = -1$.

Από τις εξισώσεις των εφαπτομένων στην (C) ευθειών για το P:

$$y_P = \lambda_A x_P + \kappa_A \quad \text{και} \quad y_P = \lambda_B x_P + \kappa_B$$

$$\Rightarrow \lambda_A x_P + \kappa_A = \lambda_B x_P + \kappa_B \Rightarrow x_P(\lambda_A - \lambda_B) = \kappa_B - \kappa_A$$

$$\Rightarrow -\frac{p}{2}(\lambda_A - \lambda_B) = \frac{p}{2\lambda_B} - \frac{p}{2\lambda_A} \Rightarrow \lambda_B - \lambda_A = \frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_A}$$

$$\Rightarrow \lambda_A \lambda_B (\lambda_B - \lambda_A) + \lambda_B - \lambda_A = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_A \lambda_B + 1) = 0 \quad (\lambda_A \neq \lambda_B)$$

$$\Rightarrow \lambda_A \lambda_B + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_A \lambda_B = -1$$

Άρα, ισχύει επίσης και ότι: $PA \perp PB \Leftrightarrow P \in (\delta)$

♦ Στη γενική περίπτωση που $x_A \neq x_B$, οπότε και $y_P \neq 0$.

Αν $P \in (\delta)$, θα είναι $x_P = -\frac{p}{2}$ και η ευθεία PE έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda' = \frac{y_E - y_P}{x_E - x_P} = \frac{0 - y_P}{\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2}\right)} = -\frac{y_P}{p}$$

Επιπλέον AB: $y_P y = p(x_P + x) \Rightarrow y = \frac{p}{y_P}x + px_P$

οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι $\lambda'' = \frac{p}{y_P}$ και ισχύει: $\lambda' \lambda'' = -\frac{y_P}{p} \cdot \frac{p}{y_P} = -1$ επομένως $PE \perp AB$. Επίσης αν $PE \perp AB$, τότε:

$$\lambda' \lambda'' = -1 \Rightarrow \lambda' = -\frac{1}{\lambda''} = -\frac{y_P}{p}, \text{ δηλ.}$$

$$\frac{y_E - y_P}{x_E - x_P} = -\frac{y_P}{p} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_P = -\frac{p}{2} \text{ οπότε } P \in (\delta).$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι: $PE \perp AB \Leftrightarrow P \in (\delta)$

♦ Στην ειδική περίπτωση που $x_A = x_B$ οπότε $y_A = -y_B$

Είναι, για τις εφαπτόμενες στο A και B, αντίστοιχα: $y_A = \frac{p}{\lambda_A} = 2\kappa_A$ και $y_B = \frac{p}{\lambda_B} = 2\kappa_B$.

$$y_A = -y_B \Leftrightarrow \frac{p}{\lambda_A} = \frac{p}{\lambda_B} \Leftrightarrow \lambda_A = -\lambda_B \text{ και προφανώς}$$

$$\kappa_A = -\kappa.$$

Η εφαπτόμενη στο A: $y = \lambda_A x + \kappa_A$ τέμνει τον $x'x$ στο P' , με $x_{P'} = -\frac{\kappa_A}{\lambda_A}$. Η εφαπτόμενη στο B:

$$y = \lambda_B x + \kappa_B \text{ τέμνει τον } x'x \text{ στο } P'', \quad x_{P''} = -\frac{\kappa_B}{\lambda_B}.$$

Με βάση τα προηγούμενα έχουμε: $x_{P''} = x_{P'}$, οπότε οι εφαπτόμενες τέμνονται στο ίδιο σημείο, P, επί του $x'x$ (δηλ. ο $x'x$ ταυτίζεται με την

$PE \perp AB$). Με αντίστροφη πορεία, αποδεικνύεται εύκολα ότι οι εφαπτόμενες από το ίδιο σημείο P του άξονα $x'x$ (με $x_P < 0$) εφάπτονται στην παραβολή (C) στα A και B που θα έχουν $x_A = x_B$ οπότε, προφανώς $PE \perp AB$.

ii. Αν το P δεν είναι πάνω στην (δ) , όπως στο Σχ. 2, θα έχει συντεταγμένες που θα προκύψουν από την λύση του συστήματος

$$yy_A = p(x + x_A) \quad \text{και} \quad yy_B = p(x + x_B)$$

λαμβάνοντας υπόψη και αποδειχθείσες προηγούμενως σχέσεις. Προκύπτει εύκολα ότι:

$$x_P = \frac{p}{2\lambda_A\lambda_B} \quad \text{και} \quad y_P = \frac{p}{2} \left(\frac{1}{\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_B} \right)$$

Για να αποδειχθεί ότι η PE διχοτομεί την γωνία AEB , αρκεί να αποδειχθεί ότι η PE σχηματίζει ίσες γωνίες θ_1 και θ_2 με καθεμιά από τις EA και EB . Η εξίσωση της ευθείας EA (και ανάλογα της EB), όπου το A (και το B) είναι σημείο εφαπτομένης. Είναι:

$$\frac{y - y_E}{x - x_E} = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} \Leftrightarrow \frac{y}{x - \frac{p}{2}} = \frac{y_A}{x_A - \frac{p}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y \left(\frac{\kappa_A}{\lambda_A} - \frac{p}{2} \right) = \frac{p}{\lambda_A} \left(x - \frac{p}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow y \left(\frac{p}{2\lambda_A^2} - \frac{p}{2} \right) = \frac{p}{\lambda_A} x - \frac{p^2}{2\lambda_A} \quad \dots \quad \Leftrightarrow y = \frac{2\lambda_A}{1 - \lambda_A^2} x - \frac{p\lambda_A}{1 - \lambda_A^2}$$

που γράφεται $2\lambda_A x + (\lambda_A^2 - 1)y - p\lambda_A = 0$.

Η απόσταση PT του σημείου P από την ευθεία EA είναι:

$$PT = \frac{\left| 2\lambda_A \frac{p}{2\lambda_A\lambda_B} + (\lambda_A^2 - 1) \frac{p}{2} \left(\frac{1}{\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_B} \right) - p\lambda_A \right|}{\sqrt{(2\lambda_A)^2 + (\lambda_A^2 - 1)^2}} = \dots$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \frac{\left| \frac{1}{\lambda_B} - \lambda_A - \frac{1}{\lambda_A} + \frac{\lambda_A^2}{\lambda_B} \right|}{\lambda_A^2 + 1} = \frac{p}{2} \cdot \frac{\left| \frac{1}{\lambda_B\lambda_A^2} - \frac{1}{\lambda_A} - \frac{1}{\lambda_A^3} + \frac{1}{\lambda_B} \right|}{\frac{\lambda_A^2 + 1}{\lambda_A^2}}$$

$$= \dots = \frac{p}{2} \cdot \frac{\left| \left(1 + \frac{1}{\lambda_A^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_A} \right) \right|}{1 + \frac{1}{\lambda_A^2}} = \frac{p}{2} \cdot \left| \frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_A} \right|$$

Ακολουθώντας την ίδια λογική και πορεία, καταλήγουμε ότι και η απόσταση $P\Sigma$ του σημείου P από την ευθεία EB θα είναι:

$$P\Sigma = \frac{p}{2} \cdot \left| \left(\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_A} \right) \right| = PT$$

Έτσι, τα ορθογώνια τρίγωνα PET και PES είναι ίσα, οπότε οι γωνίες τους $\omega_1 = \omega_2$ και επομένως (λόγω παραπληρωματικότητας) και οι γωνίες $\theta_1 = \theta_2$.

Λύση έστειλε επίσης ο **Καρτσακλής Δημήτριος** - Αγρίνιο.

Προτεινόμενα Θέματα

457. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω M, N σημεία της $B\Gamma$ ώστε $BM = \Gamma N$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{AB^2}{AN} + \frac{A\Gamma^2}{AM} > B\Gamma$$

Από το αρχείο του αξέχαστου συνάδελφου **Αποστολόπουλου Γιώργου**.

458. Έστω α, β, γ διαφορετικοί ανά δυο πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{(\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2}{[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]^3}$$

Διονύσης Γιάνναρος - Πύργος

459. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $u_\beta = 3$ και $u_\gamma = 5$. Αν η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου είναι $\rho = 1$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών α, β και γ .

Λαγογιάννης Βασίλειος - Νέο Ηράκλειο

460. Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z για τους οποίους ισχύουν

$$x^2 - yz = -5 \quad \text{και} \quad y^2 - zx = 1 \quad \text{και} \quad z^2 - xy = 7$$

Σταματιάδης Βαγγέλης - Ν. Ιωνία

Σημείωση:

Υπάρχουν ελάχιστες περιπτώσεις, για τις οποίες η στήλη απολογείται, όπου είτε η απάντηση κάποιου συναδέλφου φτάνει μετά το κλείσιμο της στήλης, είτε από παραδρομή δεν αναφέρεται το όνομά του στους λύτες. Σ' αυτή τη συγκυρία ήταν ο συνάδελφος **Ηλιόπουλος Ιωάννης** ο οποίος δεν αναφέρθηκε ως λύτης σε δυο θέματα στο προηγούμενο τεύχος, όπως επίσης και ο συνάδελφος **Ιωάννης Α. Ανδρής** [Άσκηση 448].

Το Βήμα του Ευκλείδη

Συμμετρικές Ανισότητες

Η χρήση του θεωρήματος Fermat στην απόδειξη συμμετρικών ανισοτήτων

Διονύσης Γιάνναρος

1. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$$

Λύση

Αρκεί να βρούμε 3 μη αρνητικούς αριθμούς κ, λ, μ ώστε $\kappa + \lambda + \mu = 1$ και $\kappa\alpha^3 + \lambda\beta^3 + \mu\gamma^3 \geq \alpha^2\beta$, (1) για όλους τους θετικούς α, β, γ .

Αν αυτό συμβεί, τότε γράφουμε τις δυο όμοιες ανισότητες

$$\mu\alpha^3 + \kappa\beta^3 + \lambda\gamma^3 \geq \beta^2\gamma, \quad (2) \quad \text{και}$$

$$\lambda\alpha^3 + \mu\beta^3 + \kappa\gamma^3 \geq \gamma^2\alpha, \quad (3)$$

οπότε με πρόσθεση των (1), (2), (3) καταλήγουμε στην αρχική.

Η (1) γράφεται:

$$\kappa\alpha^3 + \lambda\beta^3 + (1 - \kappa - \lambda)\gamma^3 \geq \alpha^2\beta, \quad (4)$$

Η ισότητα στην (4) ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma$ (ειδικά όταν $\alpha = \beta = \gamma = 1$).

Αντικαθιστούμε στην (4) $\beta - \gamma = 1$ και λαμβάνουμε

$$\kappa\alpha^3 + \lambda + (1 - \kappa - \lambda) - \alpha^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } \alpha > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(\alpha) = \kappa\alpha^3 - \alpha^2 + \lambda + (1 - \kappa - \lambda)$$

Απαιτούμε $f(\alpha) \geq 0$ για κάθε $\alpha > 0$.

Είναι:

$$f(1) = 0, \text{ οπότε } f(\alpha) \geq f(1), \alpha > 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη, οπότε απ' το Θ. Fermat έχουμε

$$f'(x) = 0, \quad (5).$$

Από την $f'(\alpha) = 3\kappa\alpha^2 - 2\alpha$ έχουμε:

$$f'(1) = 3\kappa - 2$$

και για $\alpha = 1$ παίρνουμε

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{2}{3}.$$

Αν τώρα στην (4) θέσουμε $\alpha = \gamma = 1$, τότε έχουμε την $\lambda\beta^3 - \beta + \kappa + 1 - \kappa - \lambda \geq 0$ για κάθε $\beta > 0$.

Αν $g(\beta) = \lambda\beta^3 - \beta + \kappa + 1 - \kappa - \lambda \geq 0 = g(1)$, τότε με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε $\lambda = \frac{1}{3}$.

Προφανώς πλέον, $\mu = 0$.

Από την (1) με $\kappa = \frac{2}{3}, \lambda = \frac{1}{3}, \mu = 0$ έχουμε

$$\frac{2}{3}\alpha^3 + \frac{1}{3}\beta^3 \geq \alpha^2\gamma \quad \text{ή} \quad 2\alpha^3 + \beta^3 \geq 3\alpha^2\beta, \quad (6)$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε την (6).

Από την ανισότητα A.M - G.M. λαμβάνουμε

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\sqrt[3]{(\alpha^3)^2\beta^3} = 3\alpha^2\beta.$$

Ομοίως από τις (2), (3) παίρνουμε

$$\frac{2}{3}\beta^3 + \frac{1}{3}\gamma^3 \geq \beta^2\gamma, \quad (7) \quad \text{και}$$

$$\frac{2}{3}\gamma^3 + \frac{1}{3}\alpha^3 \geq \gamma^2\alpha, \quad (8).$$

Με πρόσθεση των (6), (7), (8) λαμβάνουμε την αποδεικτέα.

2. Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3\beta + \beta^3\gamma + \gamma^3\alpha \geq \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$

Λύση

Αναζητούμε 3 μη αρνητικούς αριθμούς κ, λ, μ με $\kappa + \lambda + \mu = 1$ και

$$\kappa\alpha^3\beta + \lambda\beta^3\gamma + \mu\gamma^3\alpha \geq \alpha^2\beta\gamma, \quad (1)$$

για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς α, β, γ .

Η (1) συνδυαζόμενη με τις ανάλογες ανισότητες

$$\mu\alpha^3\beta + \kappa\beta^3\gamma + \lambda\gamma^3\alpha \geq \alpha\beta^2\gamma, \quad (2) \quad \text{και}$$

$$\lambda\alpha^3\beta + \mu\beta^3\gamma + \kappa\gamma^3\alpha \geq \alpha\beta\gamma^2, \quad (3)$$

οπότε με πρόσθεση των (1), (2), (3) καταλή-
γουμε στην αρχική.

Η ισότητα στην (1) ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma (=1)$,
οπότε θέτοντας $\beta = \gamma = 1$ λαμβάνουμε

$$\kappa\alpha^3 + \lambda + \mu \geq \alpha^2 \Leftrightarrow \kappa\alpha^3 - \alpha^2 + \mu + \lambda \geq 0$$

για κάθε $\alpha \geq 0$.

Για τη συνάρτηση $f(\alpha) = \kappa\alpha^3 - \alpha^2 + \mu + \lambda$ α-
παιτούμε να είναι $f(\alpha) \geq 0$ και επειδή $f(1) = 0$
(είναι $\mu = 1 - \kappa - \lambda$) απ' το Θ. Fermat θα είναι
 $f'(1) = 0$. Επειδή

$$f'(\alpha) = 3\kappa\alpha^2 - 2\alpha + (1 - \kappa - \lambda)$$

έχουμε:

$$f'(1) = 3\kappa - 2 + 1 - \kappa - \lambda = 0 \Leftrightarrow 2\kappa - \lambda = 1, (4)$$

Ομοίως από την (1) και για $\alpha = \gamma = 1$ λαμβά-
νουμε

$$\lambda\beta^3 + \kappa\beta + \mu - \beta \geq 0$$

που με $\mu = 1 - \kappa - \lambda$ είναι

$$\lambda\beta^3 + \kappa\beta + (1 - \kappa - \lambda) - \beta \geq 0$$

για κάθε $\beta \geq 0$

Με ανάλογη πορεία, όπως αυτή που προηγήθηκε
βρίσκουμε ότι $3\kappa + \lambda = 1$, (5).

Λύνοντας το σύστημα των (4), (5) έχουμε:

$$\kappa = \frac{4}{7}, \lambda = \frac{1}{7}, \text{ οπότε θα είναι } \mu = \frac{2}{7}.$$

Συνεπώς, η (1) γίνεται

$$\frac{4}{7}\alpha^3\beta + \frac{1}{7}\beta^3\gamma + \frac{2}{7}\gamma^3\alpha \geq \alpha^2\beta\gamma,$$

την οποία θα αποδείξουμε.

Από την ανισότητα Α.Μ – Γ.Μ. έχουμε:

$$\frac{4}{7}\alpha^3\beta + \frac{1}{7}\beta^3\gamma + \frac{2}{7}\gamma^3\alpha \geq \alpha^2\beta\gamma$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^3\beta + \beta^3\gamma + 2\gamma^3\alpha \geq 7\alpha^2\beta\gamma$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3\beta + \alpha^3\beta + \alpha^3\beta + \alpha^3\beta + \beta^3\gamma + \gamma^3\alpha + \gamma^3\alpha \geq 7\sqrt[7]{\alpha^{14}\beta^7\gamma^7} = 7\alpha^2\beta\gamma$$

Ομοίως λαμβάνουμε από τις (2) και (3) τις

$$2\alpha^3\beta + 4\beta^3\gamma + \gamma^3\alpha \geq 7\alpha\beta^2\gamma \text{ και}$$

$$\alpha^3\beta + 2\beta^3\gamma + 4\gamma^3\alpha \geq 7\alpha\beta\gamma^2$$

Με πρόσθεση των τριών τελευταίων, λαμβά-
νουμε την αρχική.

3. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\gamma} + \frac{\gamma^3}{\alpha} \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Λύση

Η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha^4\gamma + \beta^4\alpha + \gamma^4\beta \geq \alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \text{ ή}$$

$$\alpha^4\gamma + \beta^4\alpha + \gamma^4\beta \geq \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta\gamma^2$$

Εργαζόμενοι όπως και στα δυο προηγούμενα
παραδείγματα έχουμε τις επόμενες ανισότητες:

$$\bullet \quad 5\alpha^4\gamma + 6\beta^4\alpha + 2\gamma^4\beta \geq 13\alpha^2\beta^2\gamma$$

$$\bullet \quad 6\alpha^4\gamma + 2\beta^4\alpha + 5\gamma^4\beta \geq 13\alpha^2\beta^2\gamma$$

$$\bullet \quad 2\alpha^4\gamma + 5\beta^4\alpha + 6\gamma^4\beta \geq 13\alpha^2\beta^2\gamma$$

απ' όπου, με πρόσθεση παίρνουμε

$$13(\alpha^4\gamma + \beta^4\alpha + \gamma^4\beta) \geq 13\alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\gamma} + \frac{\gamma^3}{\alpha} \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Παρατήρηση

Με τον ίδιο τρόπο παρουσιάσαμε στο προηγού-
μενο τεύχος (τ. 137) του περιοδικού, λύση του
παρακάτω θέματος.

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς
πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{\alpha^9}{\beta\gamma} + \frac{\beta^9}{\gamma\alpha} + \frac{\gamma^9}{\alpha\beta} \geq \alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha + \beta + \gamma)$$

**4. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μη
αρνητικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει**

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), (1)$$

Λύση

Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 \geq \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta\gamma^2$$

Ισχύουν:

$$\bullet \quad 2\alpha^5 + 2\beta^5 + \gamma^5 \geq 5\sqrt[5]{(\alpha^5)^2(\beta^5)^2\gamma^5} = 5\alpha^2\beta^2\gamma$$

$$\bullet \quad \alpha^5 + 2\beta^5 + 2\gamma^5 \geq 5\alpha\beta^2\gamma^2$$

$$\bullet \quad 2\alpha^5 + \beta^5 + 2\gamma^5 \geq 5\alpha^2\beta\gamma^2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω λαμβά-
νουμε την ζητούμενη ανισότητα (1).

**5. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετι-
κούς αριθμούς α, β, γ ισχύει**

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$$

Λύση

Η πορεία της λύσης που θα δώσουμε χρησιμοποιεί τα ίδια χαρακτηριστικά, όπως και στις λύσεις των προηγούμενων παραδειγμάτων. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Fermat και θα αξιοποιήσουμε της συμμετρία της ανισότητας.

Θα προσπαθήσουμε αρχικά να βρούμε έναν αριθμό, έστω $\lambda \in \mathbb{Q}$, ώστε να ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} \geq \frac{3}{2} \frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + \beta^\lambda + \gamma^\lambda}, \quad (1)$$

για όλους τους θετικούς αριθμούς α, β, γ .

Η αρχική ανισότητα ισχύει ως ισότητα, μόνο όταν $\alpha = \beta = \gamma (=1)$.

Η (1) αν θέσουμε $\beta = \gamma = 1$ γίνεται

$$\frac{\alpha}{2} \geq \frac{3}{2} \frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + 2}, \quad (2)$$

με την απαίτηση να ισχύει για κάθε $\alpha > 0$. Μετά τις πράξεις η (2) γίνεται

$$\alpha^{\lambda+1} + 2\alpha - 3\alpha^\lambda \geq 0$$

Αν $f(\alpha) = \alpha^{\lambda+1} - 3\alpha^\lambda + 2\alpha$, $\alpha > 0$, απαιτούμε $f(\alpha) \geq 0$, ενώ παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$. Συνεπώς σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι $f'(1) = 0$.

Είναι:

$$f'(\alpha) = (\lambda+1)\alpha^\lambda - 3\lambda\alpha^{\lambda-1} + 2 \text{ και}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

Επομένως για $\lambda = \frac{3}{2}$ η (1) γίνεται:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

Θα αποδείξουμε την (3).

$$(3) \Leftrightarrow 2\alpha^{\frac{3}{2}} + 2\beta^{\frac{3}{2}}\alpha + \gamma^{\frac{3}{2}}\alpha \geq 3\alpha^{\frac{3}{2}}\beta + 3\alpha^{\frac{3}{2}}\gamma$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha \left(\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} \right) \geq 3\alpha^{\frac{1}{2}}(\beta + \gamma), \quad (4)$$

Από την ανισότητα Α.Μ.- Γ.Μ έχουμε:

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} \geq 3\alpha^{\frac{1}{2}}\beta \text{ και}$$

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} \geq 3\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma$$

Με πρόσθεση των δυο τελευταίων λαμβάνουμε την (4) που είναι ισοδύναμη με την (3).

Με ανάλογη πορεία καταλήγουμε και στις

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}}} \text{ και}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}}}$$

Με πρόσθεση των τριών τελευταίων, καταλήγουμε στην ζητούμενη.

6. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} + \frac{\beta^3 + \gamma^3}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2} + \frac{\gamma^3 + \alpha^3}{\gamma^2 + \gamma\alpha + \alpha^2} \geq \frac{2(\alpha + \beta + \gamma)}{3}$$

Λύση

Η δοσμένη ισχύει ως ισότητα όταν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Λόγω συμμετρίας αναζητούμε, αν υπάρχει,

$\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \geq \frac{\alpha^\lambda + \beta^\lambda}{3}, \quad (1)$$

Αν θέσουμε στην (1) $\beta = 1$, τότε προκύπτει

$$\frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^2 + \alpha + 1} \geq \frac{\alpha^\lambda + 1}{3} \Leftrightarrow 3(\alpha^2 + 1) \geq (\alpha^\lambda + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$$

$$3(\alpha^2 + 1) - (\alpha^\lambda + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) \geq 0, \text{ για κάθε } \alpha > 0.$$

Έστω $f(\alpha) = 3(\alpha^2 + 1) - (\alpha^\lambda + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$, $\alpha > 0$.

Είναι:

$$f(1) = 0, \text{ συνεπώς } f(\alpha) \geq f(1), \text{ άρα από το } \Theta.$$

Fermat θα είναι $f'(1) = 0$.

Από την $f'(1) = 0$ προκύπτει $\lambda = 1$, οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \geq \frac{\alpha + \beta}{3}, \quad (2)$$

Θα αποδείξουμε την (2).

Είναι:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \geq \frac{\alpha + \beta}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \geq \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 2(\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

που ισχύει.

Επομένως από την ισχύ της (2) και τις ανάλογές της ανισότητες

$$\frac{\beta^3 + \gamma^3}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2} \geq \frac{\beta + \gamma}{3} \text{ και}$$

$$\frac{\gamma^3 + \alpha^3}{\gamma^2 + \gamma\alpha + \alpha^2} \geq \frac{\gamma + \alpha}{3}$$

με πρόσθεση, προκύπτει άμεσα η ζητούμενη.

7. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta + \gamma}} + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma + \alpha}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha + \beta}} \geq 2$$

Λύση

Όταν $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 0)$ και για οποιαδήποτε μετάθεση αυτών ισχύει ως ισότητα.

Επομένως θα αναζητήσουμε $\lambda \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta + \gamma}} \geq \frac{2\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + \beta^\lambda + \gamma^\lambda}, \quad (1)$$

Από την (1) με $\beta = 1, \gamma = 1$ λαμβάνουμε την

$$\sqrt{\alpha} \geq \frac{2\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + 1} \Leftrightarrow (\alpha^\lambda + 1)\sqrt{\alpha} - 2\alpha^\lambda \geq 0,$$

για κάθε $\alpha > 0$.

Αν $f(\alpha) = (\alpha^\lambda + 1)\sqrt{\alpha} - 2\alpha^\lambda$ τότε $f(\alpha) \geq 0$ για κάθε $\alpha > 0$ και $f(1) = 0$, οπότε απ' το Θ. Fermat θα είναι $f'(1) = 0$.

Ισχύει:

$$f'(\alpha) = \lambda\alpha^{\lambda-1}\sqrt{\alpha} + \frac{\alpha^{\lambda+1}}{2\sqrt{\alpha}} - 2\lambda\alpha^{\lambda-1}$$

$$\text{και } f'(1) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Έτσι λοιπόν,

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta + \gamma}} \geq \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad (2)$$

Αποδεικνύουμε την (2).

Είναι:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta + \gamma}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha(\beta + \gamma)}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(\beta + \gamma)}} \geq \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}$$

διότι

$$\sqrt{\alpha(\beta + \gamma)} \leq \frac{\alpha + (\beta + \gamma)}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0$.

Έτσι με πρόσθεση της (2) με τις ανάλογές της

$$\sqrt{\frac{\beta}{\gamma + \alpha}} \geq \frac{2\beta}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha + \beta}} \geq \frac{2\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

προκύπτει η ζητούμενη.

8. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 8\gamma\alpha}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 8\alpha\beta}} \geq 1$$

Λύση

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma (= 1)$.

Θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}} \geq \frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + \beta^\lambda + \gamma^\lambda}, \quad (1)$$

Θέτουμε στην (1) $\beta = \gamma = 1$, οπότε λαμβάνουμε την

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8}} \geq \frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + 2}, \quad \alpha > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8}} - \frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + 2}, \quad \alpha > 0$$

Απαιτούμε $f(\alpha) \geq 0$, οπότε θα έχουμε $f(\alpha) \geq f(1)$, συνεπώς σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι και $f'(1) = 0$.

Είναι:

$$f'(\alpha) = \frac{8}{(\alpha^2 + 8)\sqrt{\alpha^2 + 8}} - \frac{2\lambda\alpha^{\lambda-1}}{(\alpha^\lambda + 2)^2}$$

$$\text{και την } f'(1) = 0 \text{ προκύπτει } \lambda = \frac{4}{3}.$$

Από την (1) για $\lambda = \frac{4}{3}$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}} \geq \frac{\alpha^{\frac{4}{3}}}{\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}}}, \quad (2)$$

Θα αποδείξουμε την ισχύ της (2).

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}} &\geq \frac{\alpha^{\frac{4}{3}}}{\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}} \geq \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}}} \\ &\Leftrightarrow \left(\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}} \right)^2 \geq \alpha^{\frac{2}{3}} (\alpha^2 + 8\beta\gamma) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}} \right)^2 \geq \alpha^{\frac{8}{3}} + 8\alpha^{\frac{2}{3}}\beta\gamma$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}} \right)^2 - \left(\alpha^{\frac{4}{3}} \right)^2 \geq 8\alpha^{\frac{2}{3}}\beta\gamma$$

$$\Leftrightarrow \left(2\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}} \right) \cdot \left(\beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}} \right) \geq 8\alpha^{\frac{2}{3}}\beta\gamma, \quad (3)$$

Όμως από την ανισότητα AM-GM έχουμε

$$\beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}} \geq 2\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} \text{ και}$$

$$\alpha^{\frac{4}{3}} + \alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}} \geq 4\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}}$$

Με πολλαπλασιασμό των παραπάνω ανισοτήτων λαμβάνουμε την ανισότητα (3).

Έτσι, έχουμε:
$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}} \geq \frac{\alpha^{\frac{4}{3}}}{\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}}}$$

Ομοίως

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 8\gamma\alpha}} \geq \frac{\beta^{\frac{4}{3}}}{\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}}} \text{ και}$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 8\alpha\beta}} \geq \frac{\gamma^{\frac{4}{3}}}{\alpha^{\frac{4}{3}} + \beta^{\frac{4}{3}} + \gamma^{\frac{4}{3}}}$$

με την πρόσθεση των οποίων λαμβάνουμε την αποδεικτέα.

9. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$ ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\beta^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\gamma^3}} \geq 1$$

Λύση

Η ισότητα στην δοσμένη ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Λόγω της υπόθεσης $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$ αναζητούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} \geq \lambda\alpha^2 + \mu$$

για κάθε $\alpha > 0$ και με την ισότητα να ισχύει για $\alpha = 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} - \lambda\alpha^2 - \mu \geq 0$$

με το « $=$ » για $\alpha = 1$, δηλαδή $f(\alpha) \geq f(1)$, οπότε απ' το Θ. Fermat θα είναι $f'(1) = 0$.

Από την

$$f'(\alpha) = -\frac{12\alpha^2}{(1+8\alpha^3)\sqrt{1+8\alpha^3}} - 2\lambda\alpha$$

και την $f'(1) = 0$ προκύπτει ότι $\lambda = -\frac{2}{9}$ και από

την ισότητα

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} = \lambda\alpha^2 + \mu$$

για $\alpha = 1$ και $\lambda = -\frac{2}{9}$ έχουμε $\mu = \frac{5}{9}$.

Επομένως, θα αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} \geq -\frac{2}{9}\alpha^2 + \frac{5}{9}, \quad (1)$$

Πράγματι είναι:

$$\sqrt{1+8\alpha^3} = \sqrt{(1+2\alpha)(1-2\alpha+4\alpha^2)} \leq \frac{1+2\alpha+1-2\alpha+4\alpha^2}{2} = 1+2\alpha$$

επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} \geq \frac{1}{1+2\alpha^2}$$

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{1+2\alpha^2} + \frac{2}{9}\alpha^2 \geq \frac{5}{9}$$

που ισχύει, γιατί μετά τις πράξεις καταλήγουμε στην προφανή $4(\alpha^2 - 1)^2 \geq 0$.

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} \geq -\frac{2}{9}\alpha^2 + \frac{5}{9}$$

και ομοίως

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\beta^3}} \geq -\frac{2}{9}\beta^2 + \frac{5}{9} \text{ και}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\gamma^3}} \geq -\frac{2}{9}\gamma^2 + \frac{5}{9}$$

και με την πρόσθεση αυτών καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+8\alpha^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\beta^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\gamma^3}} &\geq -\frac{2}{9}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{15}{9} \\ &= -\frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{15}{9} = 1 \end{aligned}$$

δηλαδή την αποδεικτέα.

10. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ισχύει

$$\frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\beta}{1-\beta^2} + \frac{\gamma}{1-\gamma^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Λύση

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Αναζητούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{\alpha}{1-\alpha^2} \geq \lambda \alpha^2 + \mu$$

για κάθε $\alpha > 0$ και με την ισότητα να ισχύει όταν $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Με την ίδια διαδικασία, όπως του προηγούμενου παραδείγματος βρίσκουμε ότι $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \mu = 0$.

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε την

$$\frac{\alpha}{1-\alpha^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \alpha^2, (1)$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα AM- GM για τους αριθμούς

$$2\alpha^2, 1-\alpha^2, 1-\alpha^2$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{2\alpha^2 + 1 - \alpha^2 + 1 - \alpha^2}{3} \geq \sqrt[3]{2\alpha^2(1-\alpha^2)^2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{2\alpha^2(1-\alpha^2)^2} \Rightarrow \alpha(1-\alpha^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

οπότε

$$\frac{1}{\alpha(1-\alpha^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

(από την υπόθεση ισχύει $0 < \alpha < 1$) και τελικά

$$\frac{\alpha}{1-\alpha^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \alpha^2$$

δηλαδή η (1).

Ομοίως έχουμε

$$\frac{\beta}{1-\beta^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \beta^2 \quad \text{και}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \gamma^2$$

απ' όπου με πρόσθεση των τριών ανισοτήτων λαμβάνουμε την αρχική.

11. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\gamma+1} + \frac{\gamma}{\alpha+1} \geq \frac{3}{4}$$

Λύση

Η ισότητα στην δοσμένη ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$. Σ' αυτό το παράδειγμα θα ενεργήσουμε λίγο διαφορετικά διατηρώντας όμως τη δομή της μεθόδου που χρησιμοποιούμε.

Θεωρούμε π.χ. τη συνάρτηση

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \geq \kappa \alpha + \lambda$$

για κάθε $\alpha > 0$ η δε ισότητα σ' αυτή να ισχύει για $\alpha = \frac{1}{3}$, οπότε είναι

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} \kappa + \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \kappa$$

Συνεπώς είναι:

$$\frac{1}{\alpha+1} \geq \kappa \alpha + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \kappa \right) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha+1} - \kappa \alpha - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \kappa \geq 0.$$

Για τη συνάρτηση

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} - \kappa \alpha - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \kappa$$

είναι

$$g(\alpha) \geq 0 = g\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{επομένως σύμφωνα με το } \theta.$$

$$\text{Fermat θα είναι } g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Από την

$$g'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha+1)^2} - \kappa$$

για $\alpha = \frac{1}{3}$ λαμβάνουμε

$$0 = g'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{16} - \kappa \Leftrightarrow \kappa = -\frac{9}{16}, \text{ οπότε } \lambda = \frac{15}{16}$$

Τελικά έχουμε

$$\frac{1}{\alpha+1} \geq -\frac{9}{16} \alpha + \frac{15}{16}, (1).$$

Η (1) ισχύει γιατί μετά τις πράξεις γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{(3\alpha-1)^2}{16(1+\alpha)} \geq 0.$$

Από την ισχύ της

$$\frac{1}{\alpha+1} \geq -\frac{9}{16}\alpha + \frac{15}{16}$$

προκύπτει ότι

$$\frac{\gamma}{\alpha+1} \geq -\frac{9}{16}\alpha\gamma + \frac{15}{16}\gamma$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha}{\beta+1} \geq -\frac{9}{16}\alpha\beta + \frac{15}{16}\alpha \text{ και}$$

$$\frac{\beta}{\gamma+1} \geq -\frac{9}{16}\beta\gamma + \frac{15}{16}\beta$$

Με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\gamma+1} + \frac{\gamma}{\alpha+1} \geq -\frac{9}{16}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \frac{15}{16}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\gamma+1} + \frac{\gamma}{\alpha+1} \geq -\frac{9}{16}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \frac{15}{16},$$

(2)

Γνωρίζουμε ότι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

οπότε λόγω της υπόθεσης είναι

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{9}{16}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \frac{15}{16} \geq -\frac{3}{16} + \frac{15}{16} = \frac{3}{4}$$

Άρα, αν $\alpha + \beta + \gamma = 1$, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\gamma+1} + \frac{\gamma}{\alpha+1} \geq \frac{3}{4}.$$

12. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha + \beta + \gamma = 3$ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta^2+1} + \frac{\beta}{\gamma^2+1} + \frac{\gamma}{\alpha^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Λύση

Η ισότητα στην δοσμένη ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Με όμοια διαδικασία, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αναζητούμε αριθμούς κ, λ ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{\beta^2+1} \geq \kappa\beta + \lambda$$

Βρίσκουμε $\kappa = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, οπότε είναι:

$$\frac{1}{\beta^2+1} \geq -\frac{1}{2}\beta + 1, \quad (1)$$

η οποία ισχύει γιατί μετά τις αναγκαίες πράξεις καταλήγουμε στην

$$\frac{\beta(\beta-1)^2}{2(\beta^2+1)} \geq 0.$$

Έτσι από την (1) έχουμε $\frac{\alpha}{\beta^2+1} \geq -\frac{1}{2}\alpha\beta + \alpha$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\frac{\beta}{\gamma^2+1} \geq -\frac{1}{2}\beta\gamma + \beta \text{ και}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha^2+1} \geq -\frac{1}{2}\gamma\alpha + \gamma$$

Με πρόσθεση των τριών τελευταίων λαμβάνουμε την

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta^2+1} + \frac{\beta}{\gamma^2+1} + \frac{\gamma}{\alpha^2+1} &\geq (\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= 3 - \frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \end{aligned}$$

Όμως είναι γνωστό ότι

$$3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \leq (\alpha + \beta + \gamma)^2$$

δηλαδή $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq 3$, οπότε

$$-\frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geq -\frac{3}{2}$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha}{\beta^2+1} + \frac{\beta}{\gamma^2+1} + \frac{\gamma}{\alpha^2+1} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

13. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2} \geq \frac{3}{2}$$

Λύση

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma (=1)$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{Q}$ ώστε να ισχύει η

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2} \geq \frac{3}{2} \frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + \beta^\lambda + \gamma^\lambda} \quad (1)$$

για κάθε $\alpha, \beta, \gamma > 0$

Η (1) για $\beta = \gamma = 1$ γίνεται:

$$\frac{\alpha^2}{2} \geq \frac{3\alpha^\lambda}{2(\alpha^\lambda + 2)} \Leftrightarrow \alpha^{\lambda+2} + 2\alpha^2 \geq 3\alpha^\lambda \Leftrightarrow \alpha^{\lambda+2} - 3\alpha^\lambda + 2\alpha^2 \geq 0$$

για κάθε $\alpha > 0$.

Για τη συνάρτηση

$$f(\alpha) = \alpha^{\lambda+2} - 3\alpha^\lambda + 2\alpha^2 \geq 0$$

είναι $f(1) = 0$, οπότε απ' το Θ. Fermat θα είναι

$f'(1) = 0$, απ' όπου, $\lambda = 3$.

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε την

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2 + \gamma^2} \geq \frac{3\alpha^3}{2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta^2 + \gamma^2} \geq \frac{3\alpha}{2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) \geq 3\alpha(\beta^2 + \gamma^2) = 3\alpha\beta^2 + 3\alpha\gamma^2, \quad (2)$$

Όμως, από την ανισότητα AM-GM παίρνουμε:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \beta^3 \geq 3\alpha\beta^2 \text{ και}$$

$$\alpha^3 + 2\gamma^3 \geq 3\alpha\gamma^2$$

και με πρόσθεσή τους προκύπτει η (2).

Επομένως έχουμε την ανισότητα

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2 + \gamma^2} \geq \frac{3\alpha^3}{2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}$$

και τις ανάλογες $\frac{\beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \geq \frac{3\beta^3}{2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}$ και

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2} \geq \frac{3\gamma^3}{2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}$$

Με πρόσθεση των τριών αυτών λαμβάνουμε την ζητούμενη.

14. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4$ ισχύει

$$\frac{1}{11 + \alpha^2} + \frac{1}{11 + \beta^2} + \frac{1}{11 + \gamma^2} + \frac{1}{11 + \delta^2} \leq \frac{1}{3}$$

Λύση

Με ανάλογη πορεία όπως στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{1}{1 + \alpha^2} \leq \frac{7}{72} - \frac{1}{72}\alpha \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2(\alpha - 5) \leq 0, \quad (1)$$

που ισχύει αφού από την υπόθεση είναι

$\alpha - 5 < 0$. Έτσι, έχουμε:

$$\frac{1}{1 + \alpha^2} \leq \frac{7}{72} - \frac{1}{72}\alpha, \quad \frac{1}{1 + \beta^2} \leq \frac{7}{72} - \frac{1}{72}\beta$$

$$\frac{1}{1 + \gamma^2} \leq \frac{7}{72} - \frac{1}{72}\gamma, \quad \frac{1}{1 + \delta^2} \leq \frac{7}{72} - \frac{1}{72}\delta$$

Με πρόσθεση των παραπάνω ανισοτήτων λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{11 + \alpha^2} + \frac{1}{11 + \beta^2} + \frac{1}{11 + \gamma^2} + \frac{1}{11 + \delta^2} \leq \frac{28}{72} - \frac{1}{72}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$\frac{28}{72} - \frac{4}{72} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$

15. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$ ισχύει

$$\frac{1}{\alpha^3 + 2} + \frac{1}{\beta^3 + 2} + \frac{1}{\gamma^3 + 2} \geq 1$$

Λύση

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2}$, $x > 0$ και

λόγω της υπόθεσης αναζητούμε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{x^3 + 2} \geq \kappa x^2 + \lambda$$

για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$

.

Έτσι, αρχικά έχουμε:

$$\frac{1}{3} = \kappa + \lambda \quad (1)$$

Απαιτούμε την ισχύ της

$$\frac{1}{x^3 + 2} - \kappa x^2 - \lambda \geq 0$$

για κάθε $x > 0$, με την ισότητα για $x = 1$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι $g'(1) = 0$, όπου

$$g(x) = \frac{1}{x^3 + 2} - \kappa x^2 - \lambda$$

Από αυτές τις συνθήκες βρίσκουμε ότι $\kappa = -\frac{1}{6}$,

οπότε από την (1) έχουμε: $\lambda = \frac{1}{2}$.

Έτσι είναι:

$$\frac{1}{x^3 + 2} \geq -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)^2(x+2)}{x^3 + 2} \geq 0$$

που ισχύει. Επομένως έχουμε τις σχέσεις

$$\frac{1}{\alpha^3 + 2} \geq -\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\beta^3 + 2} \geq -\frac{1}{6}\beta^2 + \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\frac{1}{\gamma^3 + 2} \geq -\frac{1}{6}\gamma^2 + \frac{1}{2}$$

Με πρόσθεση καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{\alpha^3 + 2} + \frac{1}{\beta^3 + 2} + \frac{1}{\gamma^3 + 2} \geq -\frac{1}{6}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{3}{2} = 1$$



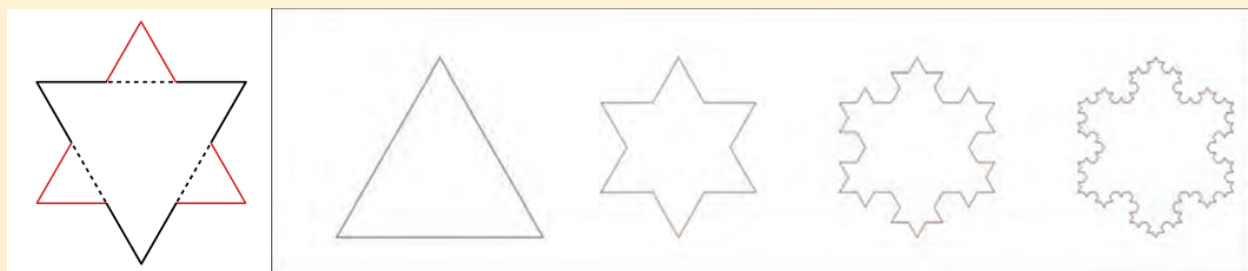
Η Νιφάδα του Koch

Χρήστος Ράδος – μαθητής Α Λυκείου

Η νιφάδα του Κοχ (Koch) ένα φράκταλ από το ορατό και μη.

Είναι ένα φράκταλ (ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης), το οποίο περιγράφηκε για πρώτη φορά από τον Helge von Koch το 1904. Κατασκευάζεται ξεκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο αφαιρώντας το εσωτερικό τρίτο κάθε πλευράς, δημιουργώντας ένα άλλο ισόπλευρο τρίγωνο στη θέση όπου αφαιρέθηκε η πλευρά και στη συνέχεια επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία άπειρες φορές.

Σχηματικά:



Ερευνητικό ερώτημα:

Είναι η κατασκευή της νιφάδας του Κοχ ένας τρόπος περιγραφής ενός ισόπλευρου τριγώνου, με την ελάχιστη δυνατή ποσότητα αριθμητικών δεδομένων; Διερευνήστε εάν μπορούμε ή όχι να κάνουμε αυτό το σχήμα μη αναγνωρίσιμο από τους ανθρώπους, αλλάζοντας την περίμετρο, το εμβαδόν και τις πλευρές του.

Θεωρία

Ένα σχήμα δεν αναγνωρίζεται από τον άνθρωπο, αν παραμορφώσουμε τη βασική του δομή τόσο πολύ που να μην μοιάζει πλέον με τον εαυτό του με κανέναν ουσιαστικό τρόπο. Μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, αλλά θα συνδυάσουμε το σχήμα μας με άλλα, με αποτέλεσμα να μην είναι οικείο στους ανθρώπους.

Τα αριθμητικά δεδομένα αναφέρονται σε δεδομένα που αντιπροσωπεύουν ποσότητες ή μετρήσεις και μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή αριθμών.

Ένα τρίγωνο ορίζεται ως μια κλειστή καμπύλη γραμμή 3 σημείων. Έτσι, έχει 3 πλευρές, αυτές που ορίζονται από 2 από τα σημεία, και 3 γωνίες, αυτές που ορίζονται από 2 από τις πλευρές. Δεδομένου ότι χρειαζόμαστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, θα πρέπει επίσης να έχει όλες τις γωνίες και τις πλευρές του ίσες. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ένα τρίγωνο ορίζεται με 3 σημεία, καθένα από τα οποία αποτελείται από ένα ζεύγος συντεταγμένων (x, y) . Αυτή είναι επομένως η ελάχιστη ποσότητα αριθμητικών δεδομένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Για την ελάχιστη ποσότητα αριθμητικών δεδομένων, θα εφαρμόσουμε τα εξής:

- 1) Να ορίσουμε τον αλγόριθμο κατασκευής (Νιφάδα του Κοχ) και να καθορίσουμε τις αλλαγές στα δεδομένα (περίμετρος, εμβαδόν, πλευρές).
- 2) Να καθορίσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων της πρόσθεσης των νέων τριγώνων.

Πρόταση: Όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις του αλγορίθμου κατασκευής, η περίμετρος τείνει στο άπειρο, ενώ το εμβαδόν σε σταθερό αριθμό.

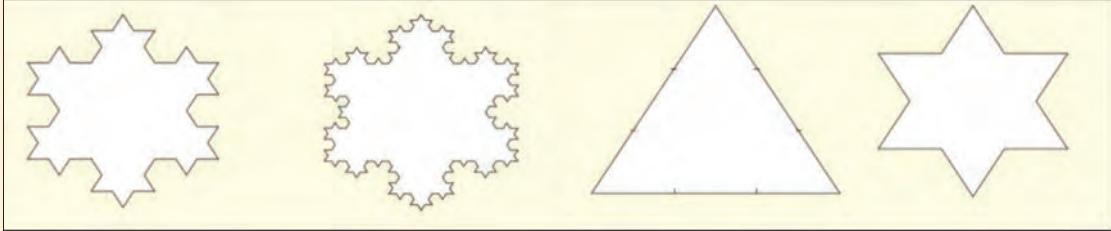
Απόδειξη:

Θα βρούμε πρώτα το πλήθος των πλευρών σε κάθε σχήμα. Παρατηρούμε ότι το πρώτο τρίγωνο έχει 3 πλευρές, το δεύτερο 12, το τρίτο 48 και το τέταρτο 192. Επομένως, παρατηρούμε ότι κάθε φορά οι πλευρές του νέου τριγώνου είναι 4 φορές περισσότερες από τις πλευρές του προηγούμενου. Συμβολίζουμε με S_n τον αριθμό που έχει το n -οστό τρίγωνο, ενώ με S_{n-1} τον αριθμό των πλευρών του $(n - 1)$ -οστού τριγώνου. Επομένως, προκύπτει ο τύπος: $S_n = S_{n-1} \cdot 4$

Ο αριθμός των πλευρών κάθε σχήματος δημιουργεί μια γεωμετρική πρόοδο. Καταλήξαμε σε αυτό το συμπέρασμα, δεδομένου ότι ο λόγος του S_n προς το S_{n-1} είναι ίσος με 4.

Συμβολίζουμε λ τον λόγο αυτής της προόδου. Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\lambda = 4$. Δεδομένου ότι γνωρίζουμε τόσο το S_1 όσο και το λ , μπορούμε τώρα να βρούμε το S_n συναρτήσει του S_1 . Αυτό προκύπτει άμεσα από τον τύπο για την εύρεση του n -οστού όρου μιας γεωμετρικής προόδου. Επομένως, προκύπτει:

$$S_n = S_1 \cdot \lambda^{n-1} \Rightarrow S_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$



Θα βρούμε τώρα την περίμετρο κάθε τριγώνου $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, μετά κάθε επανάληψη, όπου $S_1, S_2, \dots, S_n$ είναι ο αριθμός των πλευρών που έχει κάθε αντικείμενο αντίστοιχα.

Περίμετρος:

$$P_1 = 3, \text{ εφόσον } S_1 = 3$$

$$P_2 = \frac{1}{3} S_2 = \frac{12}{3} = 4$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_3 = \frac{48}{9}$$

Γνωρίζοντας τώρα ότι $S_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, προκύπτει:

$$P_n = \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{Επαγωγικά λαμβάνουμε: } P_n = S_n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Έχοντας βρει την περίμετρο του n -οστού σχήματος, θα μελετήσουμε την συμπεριφορά της, χρησιμοποιώντας όριο. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty$

Παρατηρούμε ότι είναι ασύμπτωτη και όσο αυξάνεται το n , η περίμετρος τείνει στο άπειρο. Αυτό συμβαίνει επειδή έχουμε μια εκθετική συνάρτηση με βάση μεγαλύτερη από 1.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων(n), το εμβαδόν τείνει σε σταθερό αριθμό ίσο με $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Θα βρούμε το εμβαδόν στο αρχικό τρίγωνο και έπειτα στις νιφάδες. Θεωρούμε A_1 το εμβαδόν του πρώτου τριγώνου και $A_2, A_3, \dots, A_n$ το εμβαδόν των προσθετών τριγώνων σε κάθε επανάληψη. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσο με 1. Επομένως για το πρώτο τρίγωνο ισχύει:

$$\eta_{60^\circ} = \frac{v}{1} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

με v το ύψος του τριγώνου. Η δεύτερη νιφάδα αποτελείται από το αρχικό τρίγωνο και από 3 μικρότερα, που έχουν μήκος πλευρών ίσο με $\frac{1}{3}$. Άρα θα υπολογίσουμε το ύψος καθενός από τα καινούρια τρίγωνα:

$$\eta_{60^\circ} = \frac{v}{1/3} \Rightarrow v = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Άρα το εμβαδόν A_2 είναι ίσο με: $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{36}$. Συναρτήσει του A_1 προκύπτει: $\frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{3}/36}{\sqrt{3}/4} = \frac{1}{9} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{9}$.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, υπολογίζουμε, πάλι για το τρίτο αντικείμενο, ότι τα καινούρια τρίγωνα έχουν εμβαδό:

$$\eta_{60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v}{1/9} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{18^2} \Rightarrow A_3 = \frac{\sqrt{3}}{18^2}$$

Συναρτήσει του A_1 , προκύπτει:

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\sqrt{3}/18^2}{\sqrt{3}/4} = \frac{1}{9^2} \Rightarrow A_3 = \frac{A_1}{9^2}$$

Επαγωγικά προκύπτει ότι θα ισχύει:

$$A_n = \frac{A_1}{9^n}.$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την καινούρια προστιθέμενη περιοχή μετά από την ν-οστή επανάληψη. Προσέξτε ότι ο αριθμός των πλευρών S_n είναι ίσος με τον αριθμό των τριγώνων T_n , καθώς κάθε νέα πλευρά δημιουργεί ένα καινούριο τρίγωνο. Έτσι, από μια προηγούμενη απόδειξη λαμβάνουμε ότι:

$$S_n = T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

Συμβολίζουμε με N_n την προστιθέμενη περιοχή μετά την n-οστή επανάληψη και έχουμε:

$$N_n = T_n \cdot A_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{A_1}{9^n} = \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right) \cdot A_1.$$

Συνεπώς τώρα μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η συνολική επιφάνεια κάθε σχήματος είναι το άθροισμα του εμβαδού του αρχικού με την νέα προστιθέμενη περιοχή. Θεωρούμε ότι E είναι το συνολικό εμβαδό σε κάθε νιφάδα και τρίγωνο. Οπότε προκύπτει:

$$E = A_1 + \sum_{k=1}^n N_n = A_1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{4^{k-1}}{9^{k-1}}\right) \cdot \frac{3}{9} A_1 = A_1 + \frac{3}{9} A_1 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}.$$

Διαπιστώνουμε ότι έχουμε ένα γεωμετρικό άθροισμα, το οποίο γράφεται ως: $S = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$, $\lambda = \frac{4}{9}$.

Επομένως τελικά το συνολικό εμβαδόν είναι ίσο με $E = A_1 + \frac{3}{9} A_1 \cdot \frac{1-(4/9)^n}{1-4/9} = A_1 + \frac{3}{5} A_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$.

Λαμβάνοντας το όριο του A_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_1 + \frac{3A_1}{5} = \frac{8A_1}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$,

επειδή $\frac{4}{9} < 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^n \rightarrow 0$, όταν το n τείνει στο άπειρο.

Συμπεράσματα:

1) Καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι, ενώ η περίμετρος της νιφάδας του Κοχ αποκλίνει στο άπειρο καθώς το n τείνει επίσης στο άπειρο, το εμβαδόν τείνει σε έναν σταθερό αριθμό, ίσο με $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

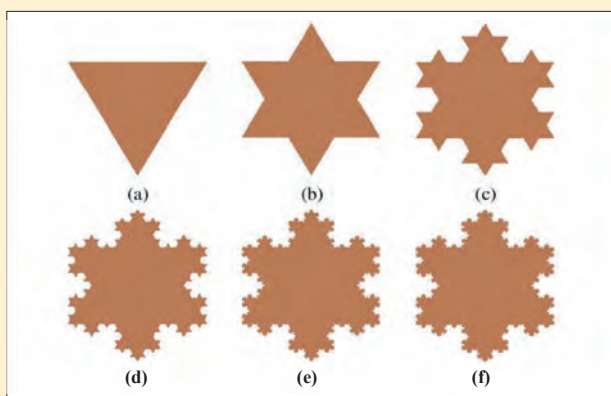
2) Δεδομένου ότι το εμβαδόν σε κάθε επανάληψη αλλάζει συνεχώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το αρχικό τρίγωνο έχει αλλάξει μετά από έναν ορισμένο αριθμό βημάτων. Το ίδιο ισχύει και για την περίμετρο. Λόγω αυτών των αλλαγών μπορούμε να δηλώσουμε ότι έχουμε παραμορφώσει τη δομή του πρώτου τριγώνου τόσο πολύ, συνδυάζοντας περισσότερα σχήματα, που δεν μοιάζει με τον εαυτό του με κανέναν ουσιαστικό τρόπο. Ως εκ τούτου, καταφέραμε να κάνουμε το δισδιάστατο σχέδιο μη αναγνωρίσιμο από τους ανθρώπους.

Θα το εξετάσουμε αυτό βέβαια και πειραματικά για να διαπιστώσουμε με ακρίβεια σε ποιο σχήμα, το αρχικό τρίγωνο γίνεται μη αναγνωρίσιμο από τους ανθρώπους.

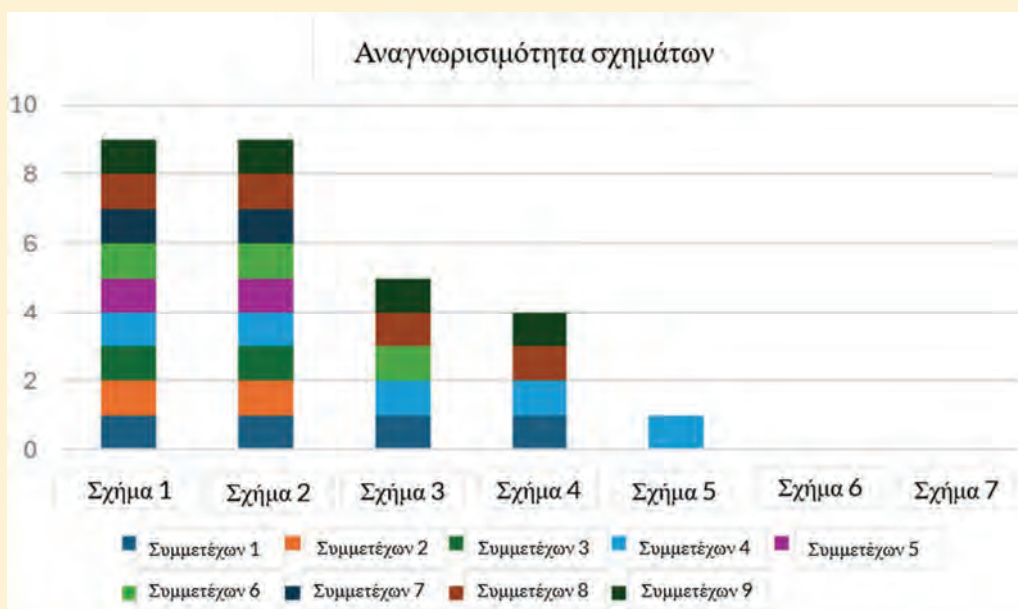
Πείραμα:

Στο πείραμα συμμετείχαν 9 άτομα ηλικίας 14-15 με παρόμοιο επίπεδο γνώσεων στα Μαθηματικά, τα οποία δεν γνώριζαν εξ αρχής για τον τρόπο κατασκευής της νιφάδας. Δόθηκε στους συμμετέχοντες ένα ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε τα παρακάτω 7 πρώτα σχήματα του αλγορίθμου της κατασκευής της νιφάδας του Κοχ. Ρωτήθηκαν αν αναγνωρίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο στην γεωμετρική κατασκευή που τους δινόταν. Με ναι ή όχι είναι οι απαντήσεις των συμμετεχόντων στο αν διακρίνουν το τρίγωνο αυτό ή όχι. Υπέθεσα ότι το αντικείμενο 7 θα ήταν μη αναγνωρίσιμο από όλους, ενώ ότι το όσο αυξανόταν η πολυπλοκότητα του σχήματος, τόσο πιο δύσκολο θα ήταν να διακρίνουν τα άτομα αυτά το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο.

Συμμετέχοντες/ Σχήματα	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι
2	ναι	όχι	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι	ναι
3	ναι	όχι	όχι	ναι	όχι	ναι	όχι	ναι	ναι
4	ναι	όχι	όχι	ναι	όχι	όχι	όχι	ναι	ναι
5	όχι	όχι	όχι	ναι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι
6	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι
7	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι	όχι



Τα σχήματα 1-6, από το αρχικό τρίγωνο στην νιφάδα κατά την πέμπτη επανάληψη/βήμα. Το έβδομο σχήμα φαίνεται στα δεξιά. Παρακάτω υπάρχει ένα γράφημα που περιγράφει ποσοτικά τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας.



Τελικό συμπέρασμα:

Παρατηρούμε ότι πειραματικά στο δείγμα μας, το 6ο σχήμα γίνεται μη ορατό από τους ανθρώπους, κάτι που οφείλεται στις αλλαγές των αριθμητικών δεδομένων του αρχικού σχήματος, σχετικά με την περίμετρο, το εμβαδόν και τις πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου. Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει την αρχική διαπίστωση ότι ο αλγόριθμος κατασκευής της νιφάδας του Κοχ είναι πράγματι ένας τρόπος να κάνουμε ένα σχήμα μη αναγνωρίσιμο από τους ανθρώπους.

Βιβλιογραφία

- Unrecognizable Definition and Meaning* | Collins English Dictionary, www.collinsdictionary.com/dictionary/english/unrecognizable. Accessed 3 Jan. 2025.
- What Is Discrete Data vs. Continuous Data? Uses and Examples* | Indeed.Com, www.indeed.com/career-advice/career-development/what-is-discrete-data. Accessed 3 Jan. 2025.
- “Τρίγωνο.” *Wikipedia*, Wikimedia Foundation, 21 Nov. 2024, el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CF%81%CE%AF%CE%B3%CF%89%CE%BD%CE%BF.
- “Fractal Curve.” *Wikipedia*, Wikimedia Foundation, 22 June 2024, en.wikipedia.org/wiki/Fractal_curve.
- “Koch Snowflake.” *Wikipedia*, Wikimedia Foundation, 14 Jan. 2025, en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake.
- “ΑΛΓΕΒΡΑ.”, ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2656/Algebra_A-Lykeiou_html-empl/. Accessed 6 Apr. 2025.
- “Koch Snowflake.” *From Wolfram MathWorld*, mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html. Accessed 6 Apr. 2025.

Δημήτριος Κάππος μια εξέχουσα προσωπικότητα

Σίμος Σεχόπουλος

Σε μία σεμνή και συγκινητική τελετή ο Δήμος Δωρίδας τίμησε την Κυριακή στις **28 Σεπτεμβρίου 2025**, τη μνήμη και το έργο του μεγάλου Λιδωρικιώτη **μαθηματικού, Ερευνητή και Καθηγητή διεθνούς κύρους**



Δημητρίου Α. Κάππου, με τα αποκαλυπτήρια της προτομής του στην κεντρική πλατεία του Λιδωρικού.

Η τελετή ξεκίνησε στην αίθουσα του Δημοτικού Συμβουλίου με συντονίστρια την Κα Αργυρώ Λαγγουράνη Πρόεδρο της Δημ. Κοινότητας Λιδωρικού.

Χαιρετισμούς απηύθυναν ο Δήμαρχος Δωρίδας, κ. Δημήτριος Γιαννόπουλος, ο γιός του τιμώμενου, κ. Λουδοβίκος Κάππος, Ομότιμος Καθηγητής του Πανεπιστήμιου της Βασιλείας στη Ελβετία, και ο πρόεδρος της Ε.Μ.Ε., κ. Αργύρης Φελλούρης, Ομότιμος Καθηγητής του ΕΜΠ.

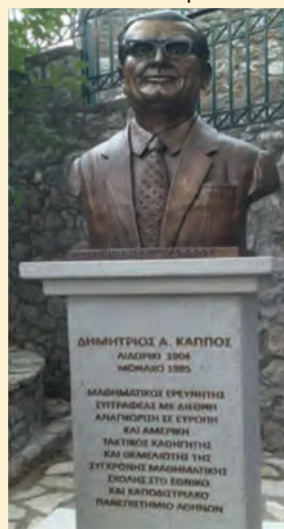
Στη συνέχεια, οι ομιλητές κ. Στέλιος Νεγρεπόντης, Ομότιμος Καθηγητής ΕΚΠΑ -κατέλαβε την πανεπιστημιακή έδρα του Κάππου στο ΕΚΠΑ-, ο Σίμος Σεχόπουλος μαθηματικός, π. Γυμνασιάρχης, π. Προϊστάμενος Δ' Εκπαίδευσης και ο κ. Σταύρος Μαργέλλος, οικονομολόγος, τ. Διευθυντής Υπουργείου Πολιτισμού, παρουσίασαν πτυχές της ζωής, του έργου και της παρακαταθήκης του Δημητρίου Κάππου, υπογραμμίζοντας τη διεθνή ακτινοβολία του αλλά και τη βαθιά του σχέση με το Λιδωρίκι.

Η προσπάθειες για την επίτευξη του ανωτέρω έργου που ξεκίνησαν το 2015, είναι αποτέλεσμα συντονισμένων πρωτοβουλιών της **Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, του Συνδέσμου Λιδωρικιωτών «Η ΓΚΙΩΝΑ» του οποίου ο Κάππος διετέλεσε Πρόεδρος και του Δήμου Δωρίδας**. Πράγματι πριν δέκα χρόνια ο Ειδικός Γραμματέας της Ε.Μ.Ε. Χρυσοβέργης Μιχάλης, ο Λιδωρικιώτης Μαθηματικός Σίμος Σεχόπουλος και ο Σταύρος Μαργέλος εκπρόσωπος της «ΓΚΙΩΝΑΣ», επισκέφτηκαν τον τότε Δήμαρχο Δωρίδας Γιώργο Καπετζώνη και του ζητήσαν με διάφορες ενέργειες να τιμηθεί ο Λιδωρικιώτης Καθηγητής. Εκεί τέθηκε και το θέμα της προτομής καθώς και της επισκευής της πατρικής οικίας του Κάππου, την οποία δώρισαν τα παιδιά του στο Δήμο. Αποτέλεσμα αυτής της επίσκεψης ήταν να γίνουν δύο ημερίδες στο Λιδωρίκι προς τιμή του Κάππου υπό την αιγίδα της Ε.Μ.Ε. **το 2015 και το 2018** και άρχισαν οι διαδικασίες για την αναζήτηση του κατάλληλου καλλιτέχνη που θα φιλοτεχνούσε την προτομή. Στη συνέχεια με νέα Δημοτική αρχή και Δήμαρχο το Δημήτριο Γιαννόπουλο, έγινε η τοποθέτηση της προτομής του στην πλατεία του Λιδωρικού καθώς και η πρόσφατη επισκευή της οροφής της οικίας Κάππου.

Γιατί όμως σήμερα αξίζει να θυμόμαστε τον Δημήτριο Κάππο;

Γιατί δεν ήταν μόνο ένας σπουδαίος Μαθηματικός, ήταν ένας **ακούραστος εργάτης της γνώσης**. Γεννήθηκε στις **27 Σεπτεμβρίου του 1904 στο Λιδωρίκι**, όπου μεγάλωσε και τελείωσε το σχολείο. Το 1924 σε ηλικία 20 ετών γράφτηκε στο Μαθηματικό τμήμα της Φυσικομαθηματικής Σχολής του ΕΚΠΑ και πήρε το πτυχίο του τον Δεκέμβριο του 1927. Στη συνέχεια υπηρέτησε τη θητεία του στο στρατό. Το 1929 άρχισε να εργάζεται ως καθηγητής των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αρχικά διορίστηκε στο Γυμνάσιο Λιδωρικού.

Το 1932 πήρε μέρος σε διαγωνισμό, μεταξύ των καθηγητών Μέσης Εκπαίδευσης, που οργάνωσε το Υπουργείο Παιδείας, για ευρύτερες σπουδές στο εξωτερικό. Ήρθε πρώτος σε σειρά επιτυχίας, μεταξύ των διαγωνισθέντων μαθηματικών, πήρε την υποτροφία και την αντίστοιχη εκπαιδευτική άδεια. Του δόθηκε έτσι η δυνατότητα, να μετεκπαιδευτεί στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου. Αρχικά συνεργάστηκε με τον διάσημο καθηγητή **Arnold Sommerfeld** οποίος εκτίμα τη βαθιά μαθηματική κατάρτιση του Κάππου και του πρότεινε διδακτορική διατριβή στη Φυσική. Να σημειωθεί ότι επτά διδακτορικοί μαθητές του Sommerfeld πήραν **Βραβείο Νόμπελ (Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli κλπ.)** Όμως η απόλυτη αυστηρότητα των Μαθηματικών, την οποία δεν βρίσκει ο Κάππος στη Φυσική, τον οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μέλλον του είναι στα Μαθηματικά. Έτσι πηγαίνει κοντά στον κορυφαίο της Μαθηματικής διανόησης, **Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή**, όπου κοντά



του μυείται στα μυστικά της πρωτοποριακής Μαθηματικής Έρευνας. Η παιδεία του δίπλα στον Καραθεοδωρή διήρκησε μία πενταετία, ενώ η μετέπειτα επικοινωνία τους ήταν συνεχής. Κατόπιν και πριν έλθει στην Ελλάδα εργάστηκε σε διάφορα Πανεπιστήμια του εξωτερικού ως συνεργάτης Καθηγητής, ως Υφηγητής, ως αναπληρωτής Καθηγητής και ως Επιμελητής του του **Van Der Waerden** στο Παν. της Λειψίας. Από το 1944 και μετά διαγράφει μία λαμπρή καριέρα συνεργαζόμενος με τους μεγαλύτερους Ευρωπαίους και Αμερικανούς επιστήμονες. Ο περίφημος Ρώσος Καθηγητής του Πανεπιστημίου της Μόσχας **Kolmogorof** αναγνωρίζει ότι ο Κάππος συμπληρώνει με την Αλγεβρική Θεμελίωσή του, τη δική του περίφημη Πιθανοθεωρία. Το γεγονός αυτό αποτελεί αδιαμφισβήτητη σφραγίδα για τον πραγματικά πρωτοποριακό χαρακτήρα του έργου του Κάππου.

Η ζωή και το έργο του πλέον, απλώνουν ρίζες σε τρεις ηπείρους, από τα χωριά της Ελλάδας μέχρι τα αμφιθέατρα της Ευρώπης, της Αμερικής κι από τις “συναντήσεις” με θρύλους όπως ο δάσκαλό του Καραθεοδωρή, ο Sommerfeld, ο Van Der Waerden, ο Kolmogorof, ο Χάουπτ κλπ, μέχρι τις αίθουσες όπου νέοι μαθητές μάθαιναν για πρώτη φορά τι θα πει σύνολο και απόδειξη. Με την έλευση του Κάππου στο Πανεπιστήμιο Αθηνών το 1952, αρχίζει η νέα εποχή για τα Μαθηματικά στην Ελλάδα. Με τη φωτισμένη ηγεσία του, την περίοδο αυτή, τα Μαθηματικά στην Ελλάδα γνώρισαν πραγματικά μεγάλη άνθηση και έκαναν έντονα αισθητή την παρουσία της χώρας μας και στο διεθνή επιστημονικό χώρο. Ανατρέπει την μέχρι τότε διαδρομή των μαθηματικών που διδάσκονταν στη χώρα μας και που ήταν προσανατολισμένη στη συνέχεια της Μέσης Εκπαίδευσης. Με τον ερχομό του, ανοίγει ένα νέο παράθυρο και φέρνει νέα εποχή στην Επιστήμη των Μαθηματικών. Περνώντας λοιπόν τα “σύνορα” ο Κάππος δίνει απάντηση, στο τι είναι τα Μαθηματικά εκείνης της εποχής και ασφαλώς, όχι η προέκταση του Γυμνασίου.

Οι μαθητές του γέμισαν ως καθηγητές τα ελληνικά σχολεία και τα ελληνικά και ξένα πανεπιστήμια. Ήταν η λεγόμενη «Σχολή Κάππου». (**Αναστ. Μάλλιος, Γερ. Λεγάτος, Φρέδος Παπαγγέλου καθηγητής στο Μάντσεστερ, Παύλος Γεωργίου, Βασ. Στάικος, η πρώτη γυναίκα καθηγήτρια πανεπιστημίου Σουζάνα Παπαδοπούλου, Ευστρ. Κουνιάς, Αντ. Παναγιωτόπουλος τέως πρύτανης Παν. Πειραιά, Παν. Παυλάκος, Νιόβη Κεχαγιωπούλου, Αθ. Καρτσάδος, όλοι πανεπιστημιακοί δάσκαλοι.**) Τα βιβλία του, αυτά που διδάσκονταν οι Έλληνες φοιτητές ήταν ότι καλύτερο υπήρχε στην Ευρώπη εκείνη την εποχή. Μεγάλη ήταν η προσφορά του Κάππου στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το 1962 συμμετέχει στην Επιτροπή Πειραματικής Μελέτης και διδασκαλίας των Μαθηματικών στη Μέση εκπαίδευση και το 1968 στην Επιτροπή καταρτισμού του νέου αναλυτικού προγράμματος Μαθηματικών. Δύο από τους συνεργάτες του Κάππου, υπό την εποπτεία του, οι, **Ηλίας Ντζιώρας** και **Βασίλειος Στάικος** συγγράφουν την Ανάλυση και την Άλγεβρα για το Λύκειο. Επίσης διετέλεσε μία περίοδο **αντιπρόεδρος** στην **Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (1961, 1965 και 1967)**, επίσης το ακαδημαϊκό έτος, **Κοσμήτορας της Φυσικομαθηματικής Σχολής του ΕΚΠΑ** καθώς και πρόεδρος στο Εθνικό Κέντρο Έρευνας Φυσικών Επιστημών (ΕΚΕΦΕ) «Δημόκριτος» στην Αγία Παρασκευή.

Μία σημαντική για την γενέτειρά του αλλά και τον ίδιο πρωτοβουλία ήταν η ίδρυση μαζί με άλλους συμπατριώτες του στην Αθήνα, το 1956, του Συνδέσμου Λιθωρικιωτών «Η ΓΚΙΩΝΑ», συνδέσμου με πολλές δραστηριότητες, από τότε μέχρι σήμερα, στον οποίο Σύνδεσμο ο Κάππος διετέλεσε ο πρώτος Πρόεδρος επί σειρά ετών.

Τον Ιανουάριο του 1985 ενώ βρισκόταν στο Μόναχο και ολοκλήρωνε το μνημειώδες έργο του «**Πιθανότητες στην Κβαντική Μηχανική**» άφησε την τελευταία του πνοή κοντά στην οικογένειά του. Η απώλεια για την Επιστήμη των Μαθηματικών στην Ελλάδα ήταν μεγάλη. Γι’ αυτό και η μνήμη του παραμένει ζωντανή τόσο στο χώρο της Επιστήμης όσο και στους συμπατριώτες και στην ιδιαίτερη πατρίδα του.



Από αριστερά: Σ. Μαργέλλος, Σ. Νεγρεπόντης, Α. Φελλούρης, Α. Λαγγουράνη, Σ. Σεχόπουλος



Σημείωση: Για να δείτε όλες τις ομιλίες ξεχωριστά σε 7 αναρτήσεις και τα αποκαλυπτήρια γράφετε στην αναζήτηση στο You Tube «Δημήτριος Κάππος» Τα τρία παιδιά του Κάππου : Λουδοβίκος, ομότιμος καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας στην Ελβετία, Ανδρέας, Βιοφυσικός π. Διευθυντής στο Υπουργείο Περιβάλλοντος στο Αμβούργο και η Ίριδα, γιατρός π. Διευθύντρια στο Νοσοκομείο Ευαγγελισμός.



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Δεν ξέρω αν θα μπορούσαμε να συνεννοηθούμε χωρίς τους αριθμούς και όπως έλεγε ο Φιλόλαος “όλα τα πράγματα που μπορούν να γίνουν γνωστά έχουν από έναν αριθμό, γιατί είναι αδύνατο να συλλάβουμε ή να γνωρίσουμε οτιδήποτε χωρίς αριθμό”.

Η αρμονία των αριθμών για το νέο έτος

$$2026 = (2+0+2+5) \times (2+0+2+5) \times 25 + 1,$$

$$2026 = (20+25) \times (20+25) + 1$$

$$2026 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3) + 1,$$

$$2026 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2 + 1$$



Οι τέλειοι αριθμοί

Οι τέλειοι αριθμοί είναι σπάνιοι, έχουν την ιδιότητα ότι οι διαιρέτες τους δίνουν άθροισμα πάλι τον ίδιο αριθμό π.χ. $6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+4+7+14$. Ακόμα έχουν και την ιδιότητα να είναι άθροισμα διαδοχικών αριθμών $6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+3+4+5+6+7$. Μπορούν επίσης να γραφούν με τη μορφή: $6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1)$, $28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1)$.

Οι φίλιοι αριθμοί

Φίλιοι αριθμοί είναι ζεύγη θετικών ακεραίων αριθμών που ο καθένας από αυτούς ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου (εκτός του εαυτού του). Παράδειγμα: οι αριθμοί **220** και **284** είναι φίλιοι. Οι γνήσιοι διαιρέτες του 220 είναι: 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110 και το άθροισμά τους είναι: $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$. Αντίστοιχα οι γνήσιοι διαιρέτες του 284 είναι οι: 1,2,4,71,142 και το άθροισμά τους $1+2+4+71+142 = 220$.

Τέλειο τετράγωνο

Ξέρετε ότι αν στην μονάδα προσθέσετε το γινόμενο 4 διαδοχικών αριθμών, θα έχετε τέλειο τετράγωνο;

Κύβοι και τετράγωνο

Μπορείτε με εννέα κύβους να κάνετε ένα τετράγωνο;



Ο Γλάρος και τα πλοία

Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από δύο νησιά του Αιγαίου και κινούνται με 20 μίλια την ώρα για να συναντηθούν. Η απόσταση μεταξύ τους είναι 120 μίλια. Ένας Γλάρος ξεκινάει μαζί με το ένα πλοίο αλλά με διπλάσια ταχύτητα και όταν φτάσει στο άλλο ξαναγυρνάει στο πρώτο για να ξαναφύγει κάνοντας τη διαδρομή από το ένα στο άλλο μέχρι που συναντήθηκαν. Πόσα μίλια έκανε συνολικά ο Γλάρος;

Η διαδρομή στο παιχνίδι

Στο γήπεδο του μπάσκετ ενός σχολείου τα παιδιά δύο ομάδων παίζουν το εξής παιχνίδι: Βάζουν σε ευθεία γραμμή σε 70 εκατοστά από κάθε μπασκέτα ένα μπαλάκι του τένις και ανά 70 εκατοστά άλλα επτά. Ύστερα ένα παιδί από κάθε ομάδα ξεκινάει από τη μπασκέτα και συγκεντρώνει τα μπαλάκια ένα-ένα στη βάση της μπασκέτας. Ο μαθητής της **A** ομάδας ξεκίνησε από το πρώτο μπαλάκι που είναι κοντά στη μπασκέτα ενώ ο μαθητής της **B** ομάδας ξεκίνησε από το τελευταίο. Οι μαθητές κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Ποια ομάδα θα συγκεντρώσει πρώτη τα μπαλάκια; Πόσα μέτρα ήταν η διαδρομή του κάθε παίχτη;



Ο Ανθοπώλης

Ο Ανθοπώλης έχει 68 τριαντάφυλλα, 56 γαρύφαλλα και 60 βιολέτες και φτιάχνει ανθοδέσμες. Σε κάθε ανθοδέσμη βάζει τον ίδιο αριθμό λουλουδιών από κάθε είδος. Πόσες ανθοδέσμες θα φτιάξει; Τι λουλούδια θα περισσέψουν;



Το σιντριβάνι

Στην πλατεία υπάρχει ένα κυκλικό σιντριβάνι και γύρω από αυτό κυκλικά είναι ανθοκήπιο. Ένας σωλήνας 10 μέτρων είναι στο ανθοκήπιο από το ένα άκρο μέχρι το άλλο και ακουμπάει στο σιντριβάνι. Τι εμβαδό έχει το ανθοκήπιο;

Απαντήσεις των Γρίφων του τεύχους 137

Τα Δύο Ρολόγια

Το πρώτο ρολόι **χάνει 2 λεπτά** κάθε ώρα. Το δεύτερο ρολόι **κερδίζει 3 λεπτά** κάθε ώρα. Άρα, η **διαφορά** μεταξύ τους αυξάνεται κατά: $2+3=5$ λεπτά την ώρα. Οι λεπτοδείκτες θα ξανασυναντηθούν όταν περάσουν 12 ώρες ($12 \cdot 3=36$ και $12 \cdot 2=24$). Δηλαδή σε 12 ώρες το ένα θα δείχνει 12 και 36 ενώ το άλλο 12 παρά 24.

Την ίδια ακριβώς ώρα θα δείχνουν σε δώδεκα 12ωρα δηλαδή σε $12 \cdot 12=144$ ώρες, αφού $5 \cdot 144=720=60 \cdot 12$. Το πρώτο θα έχει προχωρήσει $36 \cdot 12=432$ λεπτά (6 ώρες και 72 λεπτά) ενώ το άλλο θα έχει χάσει $24 \cdot 12=288$ λεπτά (6 ώρες παρά 72 λεπτά), άρα οι δείκτες θα είναι στην ίδια θέση.

Λευκά και Μαύρα

Μετακινούμε όλα τα λευκά μπαλάκια εκτός από ένα στο δοχείο με τα μαύρα. Έτσι εάν διαλέξουμε αυτό το δοχείο, είναι σίγουρο πως θα τραβήξουμε λευκό μπαλάκι αφού μέσα σε αυτό έμεινε μόνο ένα λευκό. Αν όμως διαλέξουμε το άλλο έχουμε 49/99 πιθανότητα να πάρουμε λευκό. Άρα η συνολική πιθανότητα να πάρουμε λευκό και να κερδίσουμε γίνεται περίπου 75%.

Μαθητές φίλοι

Η πιθανότητα είναι 100% διότι αν οι μαθητές του σχολείου είναι π.χ. 200 και υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό φίλων, οι δυνατές τιμές μαθητών φίλων για κάθε μαθητή του σχολείου είναι 0,1,2,3,4,5, ..., 198,199 δηλ. κάποιος μαθητής θα έχει 0 μαθητές φίλους, κάποιος 1, κάποιος 2, ...και κάποιος 199. Όμως ο μαθητής που έχει 199 φίλους έχει φίλο κάθε άλλο μαθητή άρα δεν γίνεται κάποιος μαθητής να έχει 0 φίλους. Συνεπώς η υπόθεση ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό φίλων οδηγεί σε αντίφαση. Άρα δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών φίλων.

Αγόρια και Κορίτσια

Στην Α τάξη τα κορίτσια ήταν $\kappa=2$.α Στην Β τάξη είναι $(2.\alpha-1)$ άρα $(2.\alpha-1).\alpha=91$. Αν λύσουμε την εξίσωση $2.\alpha^2-\alpha-91=0$ έχουμε $\alpha=7$ δηλαδή τα αγόρια είναι 7 και τα κορίτσια $2 \cdot 7-1=13$.

Η Γιορτή

Έφαγαν 1,2,3,4,5,6,7, 8,10,12 ή 1,2,3,4,5,6,7, 9,10,11

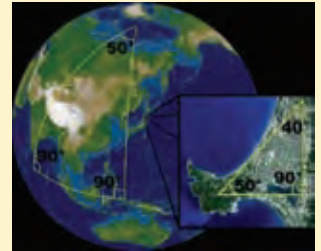
Ο Κωπηλάτης

Το καπέλο του ο κωπηλάτης το βρήκε σε μισή ώρα και είχε απομακρυνθεί 7 χιλιόμετρα. Επομένως η ταχύτητα της ροής του ποταμού είναι 14 χιλιόμετρα την ώρα. Η κίνηση του καπέλου είναι ανεξάρτητη από την κίνηση του κωπηλάτη.

Συνέχεια από τη σελίδα 8

Οι απαρχές της βρίσκονται στα Ελληνικά μαθηματικά, ενώ σημαντικές εξελίξεις και ανακαλύψεις στην ιστορία της τριγωνομετρίας προσέφεραν, κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα, τα Αραβικά μαθηματικά. Η πλήρη μορφή της επιτεύχθηκε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα με τον Napier και άλλους σπουδαίους μαθηματικούς, ενώ το 1859 με τη δημοσίευση του βιβλίου «Σφαιρική τριγωνομετρία: για χρήση σε σχολεία και κολέγια» από τον Άγγλο μαθηματικό **Isaac Todhunter** (βιβλίο διαθέσιμο στο διαδίκτυο) πήρε και την τελική της μορφή. Από τότε οι μόνες σημαντικές εξελίξεις ήταν η εφαρμογή των μεθόδων αυτών με χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, κάτι που διευκόλυνε απίστευτα τους μακροσκελείς υπολογισμούς.

Πατέρας της σφαιρικής τριγωνομετρίας θεωρείται ο μαθηματικός και αστρονόμος **Μενέλαος ο Αλεξανδρινός** (1^{ος} – 2^{ος} αιώνας μ.Χ.), ενώ **Ευκλείδης** και **Αρχιμήδης** μελέτησαν τις ιδιότητες των χορδών και των χαραγμένων γωνιών σε κύκλους, ενώ απέδειξαν και θεωρήματα που ισοδυναμούν σε σύγχρονους τριγωνομετρικούς τύπους. Ο **Αρίσταρχος** χρησιμοποίησε ορθογώνια τρίγωνα για να υπολογίσει την απόσταση της Γης από τον Ήλιο και την Σελήνη, ενώ οι **Ίππαρχος** και **Πτολεμαίος** χρησιμοποίησαν μαθηματικούς καταλόγους οι οποίοι μετέτρεπαν γωνίες κύκλου σε μήκος χορδής, η γνωστή σε μας τριγωνομετρική συνάρτηση του ημιτόνου. Γενικότερα οι αρχαίοι Έλληνες ήταν αυτοί που ουσιαστικά μετέτρεψαν την τριγωνομετρία σε διατεταγμένη επιστήμη. Ο όρος τριγωνομετρία καθιερώθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό **Bartholomaus Pitiscus** σε ένα κλασικό έργο του, το οποίο δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά στη Χαϊδελβέργη το 1595. Ο κορυφαίος Ολλανδός μαθηματικός και γεωγράφος **Gemma Frisius** περιέγραψε για πρώτη φορά τη μέθοδο της τριγωνοποίησης, η οποία χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, ο πρωτοπόρος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός **Leonard Euler** ενσωμάτωσε πλήρως τους μιγαδικούς αριθμούς στην τριγωνομετρία, ο Σκωτσέζος μαθηματικός και αστρονόμος **John Napier** είχε επίσης σπουδαία συμβολή στη σφαιρική τριγωνομετρία, ενώ σημαντική συνεισφορά είχαν και οι μαθηματικοί **Maclaurin** και **Taylor** (17^{ος} και 18^{ος} αιώνας).



• Λογάριθμοι

Το 1761, ένας Άγγλος ωρολογοποιός και ξυλουργός κατασκεύασε ένα ρολόι που μετρούσε την ώρα με ακρίβεια στη θάλασσα. Ένα ρολόι, το οποίο παρέμενε ακριβές στο κατάστρωμα ενός πλοίου που έπλεε σε καταιγίδες, ανέμους και θαλασσοταραχές, ήταν απαραίτητο ώστε να γνωρίζουν την ώρα πίσω στην Αγγλία. Υπήρχε όμως



ένα **πρόβλημα**. Επειδή ένα τέτοιο ρολόι ήταν χειροποίητο, ήταν πολύ ακριβό. Έτσι, για χαμηλότερο κόστος, συχνά εφάρμοζαν μια εναλλακτική μέθοδο με βάση τη θέση του φεγγαριού και περισσότερους υπολογισμούς.

Οι υπολογισμοί για τον εντοπισμό της θέσης του πλοίου για κάθε μέτρηση έπαιρναν ώρες. Αλλά οι εξάντλες και τα ρολόγια ήταν άχρηστα, αν οι ναυτικοί δεν μπορούσαν να καθορίσουν τη θέση τους με αυτά. Ευτυχώς, τον 17^ο αιώνα ένας ερασιτέχνης μαθηματικός εφήυρε αυτό που τους έλειπε. Ο **John Napier** πάσχιζε για περισσότερο από 20 χρόνια στο κάστρο του στη Σκωτία να αναπτύξει τους λογαρίθμους, μια υπολογιστική τεχνική, η οποία απλοποίησε σε απίστευτο βαθμό τους καθημερινούς χρονοβόρους υπολογισμούς. Μέχρι την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστικών μηχανών στον 20^ο αιώνα, οι πολλαπλασιασμοί, οι διαιρέσεις και οι υπολογισμοί δυνάμεων και ριζών μεγάλων και μικρών αριθμών γίνονταν χρησιμοποιώντας λογαρίθμους.

• Σύγχρονη εποχή

Στη σύγχρονη εποχή **μαθηματικά μοντέλα** χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και την πρόβλεψη των καιρικών μοτίβων, των ρευμάτων στους ωκεανούς, των παλιρροιών και της συμπεριφοράς των κυμάτων. **Συστήματα πλοήγησης** (GPS) βασιζόμενα σε πολύπλοκα μαθηματικά μοντέλα είναι τοποθετημένα σε κάθε σκάφος. **Οικονομικά μοντέλα** χρησιμοποιούνται ευρέως για την ανάλυση του κόστους, της ζήτησης και της προσφοράς, βοηθώντας στον προσδιορισμό των βέλτιστων στρατηγικών για τις ναυτιλιακές επιχειρήσεις. Η **Στατιστική Ανάλυση** χρησιμοποιείται για την εξαγωγή συμπερασμάτων από τα ναυτιλιακά δεδομένα, όπως ανάλυση ναύλων, προμήθειες και ατυχήματα.

Γραφικά μοντέλα και διαγράμματα χρησιμοποιούνται στην οπτικοποίηση των δεδομένων αποκαλύπτοντας τάσεις, ανωμαλίες και σημαντικά σημεία. Ο **Δυναμικός Προγραμματισμός** χρησιμοποιείται για τη βελτιστοποίηση των διαδρομών των πλοίων, η οποία θα αποφέρει μείωση καυσίμων και χρόνο ταξιδιού. Η **Θεωρία Ουρών Αναμονής** χρησιμοποιείται για την ανάλυση των χρόνων αναμονής σε λιμάνια και τερματικούς σταθμούς δίνοντας αποτελεσματικές λύσεις για την αποφυγή συμφορήσεων.

Τα Μαθηματικά αποτελούν μέχρι σήμερα ένα αναπόσπαστο μέρος της ασφαλούς και αποτελεσματικής λειτουργίας των πλοίων στη Ναυτιλιακή Βιομηχανία, η οποία αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι της παγκόσμιας οικονομίας.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Βιβλία της ΕΜΕ

Περιοδικά

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

Νέο Βιβλίο

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 25€



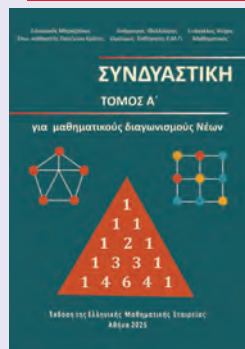
Τιμή βιβλίου: 20€

Νέο Βιβλίο

Νέο Βιβλίο



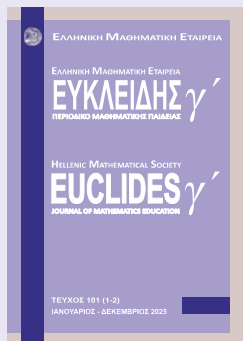
Τιμή βιβλίου: 15€



Τιμή βιβλίου: 15€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr