

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

43^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

28 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2026

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (2 - a)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0,$$

όπου x είναι ο άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του a για τις οποίες:

(α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο \mathbb{R} .

(β) Η μία ρίζα της εξίσωσης είναι διπλάσια της άλλης.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του με κέντρο O . Η ευθεία AO τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο E , $E \neq \Delta$, ώστε $OE = O\Delta$. Η κάθετη ευθεία προς την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Z και η παράλληλη από το A προς την πλευρά $B\Gamma$ τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο N , $N \neq A$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία N , Z , E , Γ είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου n , για τις οποίες ο καθένας από τους αριθμούς $n - 210$ και $n + 210$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 4

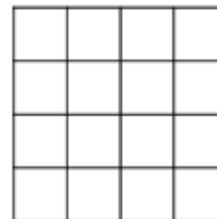
Σε ένα πίνακα 4×4 χωρισμένο σε 16 μικρά τετράγωνα 1×1 τοποθετούμε 4 λευκά και 4 μαύρα πιόνια, έτσι ώστε να ισχύουν:

(α) Κάθε μικρό τετράγωνο 1×1 περιέχει το πολύ ένα πιόνι.

(β) Κάθε (οριζόντια) γραμμή περιέχει ακριβώς 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

(γ) Κάθε (κατακόρυφη) στήλη περιέχει ακριβώς 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

Να βρείτε πόσες διαφορετικές τοποθετήσεις υπάρχουν.



*Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

43^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

28 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2026

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Έστω O το περίκεντρο και H το ορθόκεντρο ενός οξυγώνιου τριγώνου $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$. Έστω O_1 το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία $B\Gamma$. Η ευθεία AH τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Δ , ($\Delta \neq A$). Η ευθεία $O_1\Delta$ τέμνει το τόξο $BA\Gamma$ του κύκλου ($AB\Gamma$) στο σημείο E , ($E \neq \Delta$). Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (ODE) , ο κύκλος $(OB\Gamma)$ και η ευθεία OH συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο, διαφορετικό του O).

Πρόβλημα 2

Να βρείτε όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους n για τους οποίους η τιμή της παράστασης

$$A = 15^n + 5^n + 3^n + 1$$

είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3

Σε καθένα από τα 64 τετράγωνα ενός 8×8 πίνακα γράφουμε έναν αριθμό από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Η συμπλήρωση του πίνακα λέγεται έγκυρη, αν για κάθε δύο τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά ή κοινή κορυφή, οι αριθμοί που περιέχουν είναι πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1). Να βρεθεί ο μέγιστος ακέραιος k με την ιδιότητα ότι σε κάθε έγκυρη συμπλήρωση του πίνακα, υπάρχει αριθμός από το A που εμφανίζεται τουλάχιστον k φορές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοιες ώστε να ισχύει

$$f(xy + 1) - f(x)f(y) = 2xy + 1,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

*Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!*