# 139

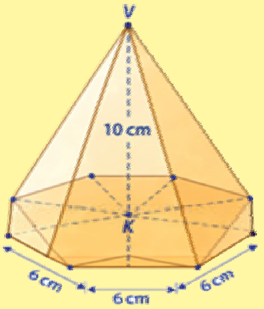
Μαθηματικό περιοδικό για το

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

# Ευκλείδης Α′ Γυμνάσιο

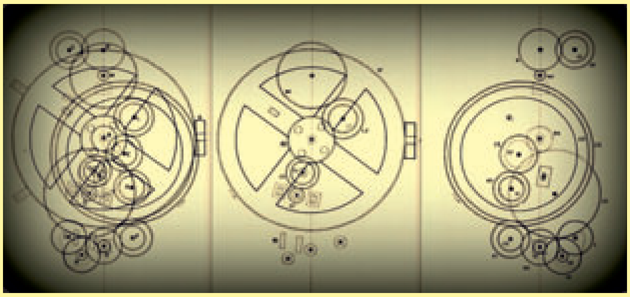
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2026 ευρώ 3











Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

# Ευκλείδης α΄

Τεύχος 139
Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2026
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34 Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός
Χριστόπουλος Παναγιώτης



**Γράμμα της Σύνταξης**

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες

Το 3° τεύχος του περιοδικού μας έρχεται να ολοκληρώσει την υπόλοιπη ύλη της τάξης σας με άρθρα πολύ σημαντικά. Το 4° τεύχος θα περιέχει επαναληπτικά θέματα από όλη την ύλη που διδαχτήκατε φέτος.

**«Χαλεπόν το ευ γνώναι»**

**Πιττακός ο Μυτιληναίος**, ένας από τους Επτά Σοφούς της αρχαιότητας.

Σε ελεύθερη μετάφραση:

«Δεν είναι εύκολο να διακρίνει κανείς τι είναι πραγματικά καλό ή σωστό»

ΚΑΛΟ ΠΑΣΧΑ

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

**Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών**

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

**Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού**

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων.
Α΄ τάξη Μαρία Παππά, Κάτια Σχίζα, Γεωργία Μαρκάτου, Χρήστος Ζιώγας
Β΄ τάξη Ειρήνη Κοτσακιλάφη, Τάσος Κρατημένος, Αντώνης Μαγουλάς, Χρίστος Κουστέρης
Γ΄ τάξη Θέμις Καψή, Παντελής Γρυπάρης, Θανάσης Χριστόπουλος, Γαρμπή Γερασιμούλα

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση: ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Εκτύπωση: printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου: Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

**Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00**

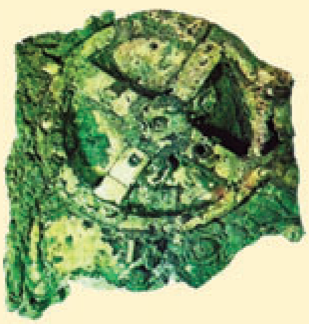
**Ετήσια συνδρομή** (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
**Ετήσια συνδρομή για Σχολεία** 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

# Ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων, ο πρώτος αναλογικός υπολογιστής της ανθρωπότητας

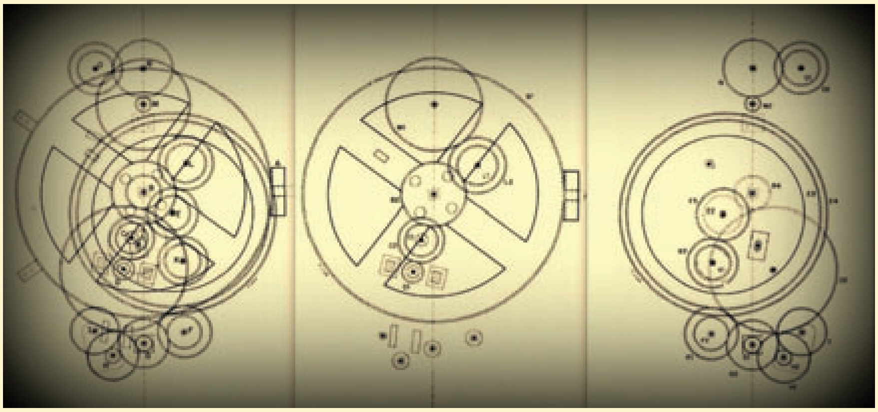
Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Το Νοέμβρη του 1900 σφουγγαράδες από τη Σύμη, νότια της Πελοποννήσου στη θάλασσα των Αντικυθήρων, σε ναυάγιο του 1ου αιώνα π.Χ. ανακάλυψαν σε βάθος 60 μέτρα, διάφορα αγάλματα και αντικείμενα. Μεταξύ αυτών και ένα παράξενο μεταλλικό αντικείμενο. Όταν το αντικείμενο αυτό έφτασε στα χέρια του Διευθυντή του Αρχαιολογικού Μουσείου Β. Στάη, διέκρινε κάποιο γρανάζι και κατάλαβε πως ήταν κάτι σημαντικό. Κρατήθηκε και μελετήθηκε 60 χρόνια μετά με ακτίνες Χ, για να λυθεί ο Γρίφος και να αποκαλυφθεί ότι αυτό ήταν η πιο σημαντική κατασκευή της ανθρωπότητας, που έγινε πριν από 2200 χρόνια.

### Μηχανισμός των Αντικυθήρων



Ο **Μηχανισμός των Αντικυθήρων** είναι στο Αρχαιολογικό μουσείο της Αθήνας. Επιστήμονες με ειδικές μηχανές και ακτίνες, έναν αιώνα τώρα το μελετούν και θα συνεχίσουν να μελετούν αυτό το κορυφαίο κατασκεύασμα της αρχαιότητας που αποτελείται από 82 περίπου ορειχάλκινα γρανάζια, αντιπροσωπεύοντας υψηλή τεχνολογία. Έχει βρεθεί ότι έκανε ακριβή υπολογισμό της θέσης του Ηλίου, της Σελήνης, των πλανητών, υπολόγιζε τις φάσεις της Σελήνης, προέβλεπε ηλιακές και σεληνιακές εκλείψεις, προσδιόριζε τις ημερομηνίες τέλεσης των αρχαίων αγώνων (Ολυμπιακοί, Ίσθμια, Πύθια, κλπ).



Ο Ήρωνας ανέφερε ότι το πρώτο γνωστό οδοντωτό ρολόι εφευρέθηκε τον 3ο αιώνα προ Χριστού από τον μεγάλο μαθηματικό, φυσικό και μηχανικό **Αρχιμήδη.** Τα τελευταία χρόνια ένας σπουδαίος καθηγητής, ο **Κώστας Κοτσανάς**, κατασκεύασε αυτές τις μηχανές που περιγράφονται ότι είχαν οι αρχαίοι Έλληνες και τις έκανε γνωστές σε όλο τον κόσμο, εκθέτοντας μηχανές του Ήρωνα, του Κτησίβιου, κ.ά. σε όλες τις Ηπείρους. Την έκθεση αυτή πρέπει να δουν όλα τα παιδιά, όλοι οι μαθητές. Είναι στο κέντρο της Αθήνας, είναι στην Αρχαία Ολυμπία και η μετακινούμενη πηγαίνει σε κάθε πόλη και χώρα.

**Διεθνές Επιστημονικό Συνέδριο για τον Μηχανισμό των Αντικυθήρων με θέμα:**

## «Ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων, Ίππαρχος ο Ρόδιος, Πατέρας της Αστρονομίας και οι Ηρωϊκοί Σφουγγαράδες της Σύμης»

Το Γυμνάσιο της Άνοιξης Ανατολικής Αττικής μας ενημέρωσε για το Διεθνές Συνέδριο που πραγματοποιήθηκε στη Σύμη στις 17 και 18 Ιανουαρίου 2026.
Το συνέδριο πραγματοποιήθηκε με την επιμέλεια του Κέντρου Σπουδών Παιδεία, και του καθηγητή του πανεπιστημίου Connecticut Ηλία Τομάζου με την συμμετοχή πολλών αξιόλογων επιστημόνων, όπως του καθηγητή Ξενοφώντα Μουσά, του καθηγητή Διονύσιου Κριάρη, του Κώστα Κοτσανά και του γιού του Παναγιώτη, του Μάνου Ρουμελιώτη, του Prof. Julio Saucedo Morales από το πανεπιστήμιο De Sonora, του Μεξικού, Δρ Αγγελική Σιμώνι, κα Ελένη Φαρμακίδου και άλλοι. Εκεί ανέδειξαν το επιστημονικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον που γέννησε ένα από τα σημαντικότερα τεχνολογικά επιτεύγματα της ανθρωπότητας, υπογραμμίζοντας τον ρόλο της μουσειακής αφήγησης ως γέφυρας μεταξύ επιστήμης και κοινωνίας.

**Σοφία Στρίγκου** Μαθηματικός MSc Διευθύντρια του Γυμνασίου Άνοιξης

Με συμμετοχή του σχολείου μας, του **Γυμνασίου Άνοιξης**, έγινε το Διεθνές Επιστημονικό Συνέδριο «***Ο ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΩΝ, Ίππαρχος ο Ρόδιος, Πατέρας της Αστρονομίας και οι Ηρωϊκοί Σφουγγαράδες της Σύμης***». Στο συνέδριο συμμετείχαν με εισηγήσεις και μελέτες η απόφοιτη μαθήτριά μας **Αλίκη Καρνάβου** και η καθηγήτρια μαθηματικών κα **Χριστίνα Πούλιου**.


Η συμμετοχή αυτή δεν αποτέλεσε απλώς μια τιμητική εκπροσώπηση του σχολείου, αλλά μια ουσιαστική συμβολή στον επιστημονικό διάλογο, μέσα από τεκμηριωμένη έρευνα και μεθοδική προσέγγιση. Η εργασία της μαθήτριας Αλ. Καρνάβου, αναδεικνύει τις δυνατότητες των μαθητών/τριών μας να προσεγγίζουν σύνθετα ζητήματα με κριτική σκέψη, επιστημονική εγκυρότητα και υπευθυνότητα. Παράλληλα, επιβεβαιώνει τον ρόλο του σχολείου ως χώρου καλλιέργειας ερευνητικού πνεύματος, δημιουργικότητας και ακαδημαϊκής συνέπειας.

Στήριξα με συνέπεια κα επιστημονική καθοδήγηση, ως μέντορας την προσπάθεια της μαθήτριας, συμβάλλοντας ουσιαστικά τόσο στη διαμόρφωση της εργασίας της όσο και στην επιτυχή παρουσίασή της. Η επιτυχία αυτή αποτελεί για το σχολείο μας εφαλτήριο για περαιτέρω ερευνητικές δράσεις στο μέλλον.

**Χριστίνα Πούλιου** Μαθηματικός του Γυμνασίου Άνοιξης

Στο όμορφο και φιλόξενο νησί της Σύμης, πραγματοποιήθηκε με επιτυχία το Συνέδριο για τον Μηχανισμό των Αντικυθήρων, προς τιμήν των Συμιακών Δυτών, ηρώων του βυθού, που βούτηξαν στα νερά των Αντικυθήρων και ανέσυραν τον θησαυρό του αρχαίου ναυαγίου.

Την πρώτη ημέρα του συνεδρίου, Σάββατο, συγγενείς, απόγονοι των ηρώων της Σύμης, περιέγραψαν τα γεγονότα της ανακάλυψης του ναυαγίου, όπως τα άκουσαν από τους παππούδες τους, με την απλότητα και εντιμότητα των τότε ανθρώπων. Στην συνέχεια και για όλη την πρώτη ημέρα, οι εισηγήσεις αφορούσαν την επιστημονική προσέγγιση του Μηχανισμού, από επιστήμονες και αρχαιολόγους.

Την δεύτερη ημέρα του συνεδρίου, Κυριακή, πραγματοποιήθηκαν εισηγήσεις, για τον Μηχανισμό στην εκπαίδευση. Συμμετείχαν το 1ο Γυμνάσιο Νέου Ψυχικού με υπεύθυνο καθηγητή κο **Νίκο Μπέσα**, διαδικτυακά, το Γυμνάσιο Άνοιξης με την καθηγήτρια **Χριστίνα Πούλιου** και την μαθήτρια **Αλίκη Καρνάβου** και το 10ο Γυμνάσιο Ιλίου με την καθηγήτρια **Μάγδα Φίλη**, διαδικτυακά.

Η εισήγηση της καθηγήτριας Χριστίνας Πούλιου, είχε θέμα « Ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων εμπνέει και διδάσκει», αναφερόμενη στην Εκπαιδευτική διάσταση του Μηχανισμού.

Η εισήγηση της μαθήτριας Αλίκης Καρνάβου, αναφερόταν στον Μηχανισμό από την οπτική μιας μαθήτριας Α΄ Λυκείου. Η συμμετοχή της σε επιστημονικό συνέδριο, είναι ένα σπάνιο γεγονός αλλά η συγκεκριμένη μαθήτρια έχει τις ικανότητες και ανταποκρίθηκε άριστα στις υψηλές απαιτήσεις του συνεδρίου. Απόδειξη το θερμό χειροκρότημα, τα δώρα που έλαβε, αλλά και οι προτάσεις για εκπαίδευση και διδασκαλία από τον πανεπιστημιακό καθηγητή του Αριστοτελείου πολυτεχνείου, κο Κυριάκο Ευσταθίου.

Το επιστημονικό συνέδριο της Σύμης, μας έδωσε την ευκαιρία, να γνωρίσουμε υπέροχους ανθρώπους της επιστήμης και των γραμμάτων. Μέσα σε αυτές τις ημέρες μας δίδαξαν ήθος, αγάπη για την επιστήμη, εργατικότητα και δημιουργικότητα. Μαζί θέσαμε στόχους για το μέλλον, συζητήσαμε, ανταλλάξαμε απόψεις και ιδέες. Θερμές ευχαριστίες στον καθηγητή αστρονομίας Ξενοφώντα Μουσά, τον κο Σπύρο Τομάζο, καθηγητή του Πανεπιστημίου Connecticut και το κέντρο σπουδών Παιδεία, για την άψογη διοργάνωση και επιμέλεια, τον κο Κώστα Κοτσανά, ιδρυτή των ομότιτλων μουσείων και τον γιό του Παναγιώτη και όλους τους ομιλητές και συντελεστές που εργάστηκαν για το συνέδριο. Μπορείτε να παρακολουθήσετε το συνέδριο στο YouTube όπου έχει αναρτηθεί σε τρία μέρη, από το διαδικτυακό κανάλι Φρυκτωρίες, του Σπάρτακου Πατεράκη.

Μετά το τέλος των εργασιών του συνεδρίου, παρουσία όλων των συνέδρων, των τοπικών αρχών και εκπροσώπων της πολιτείας, έγιναν μέσα σε κλίμα μεγάλης συγκίνησης, τα αποκαλυπτήρια του αγάλματος του **Δημήτριου Κοντού**, του καπετάνιου του καραβιού που ανακάλυψε το ναυάγιο των Αντικυθήρων, δωρεά του ευπατρίδη κου Γεώργιο Λουκά Γεώργα, μέσα σε κλίμα κατάνυξης, περηφάνιας και σεβασμού.

Το

άγαλμα αποτυπώνει το διαχρονικό πνεύμα της ναυτοσύνης των Ελλήνων, της τόλμης και της συλλογικής προσφοράς των Συμιακών δυτών. Της διαχρονικής τους θυσίας προς τον ελληνικό και παγκόσμιο πολιτισμό. Πίσω από κάθε μεγάλη επιστημονική ανακάλυψη βρίσκονται άνθρωποι που τόλμησαν.(Στην επιχείρηση για να ανασύρουν τα αντικείμενα του ναυαγίου,ένας δύτης έχασε τη ζωή του και δυο ακόμα έμειναν παράλυτοι από τη νόσο των δυτών).

# Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

**Θέμις Καψή**

## Το σημείο

Η έννοια του σημείου βασάνισε πολύ τους μαθηματικούς, αλλά και τους φιλοσόφους.

Ίσως όσο πιο απλό είναι κάτι, τόσο πιο δύσκολο είναι να το καταλάβουμε.


Ο γνωστός σε όλους Ευκλείδης ξεκίνησε το διάσημο έργο του «τα Στοιχεία» ορίζοντας το σημείο ως αυτό του οποίου δεν υπάρχει μέρος.

Τόσο αφηρημένο και μικρό. Ούτε να το διαιρέσει μπορεί κανείς, ούτε διαστάσεις έχει, ούτε συγκεκριμένη τοποθεσία στην ευκλείδεια γεωμετρία.

Κι όμως εμείς το αναπαριστούμε χρησιμοποιώντας μια κουκίδα και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:


Κι αν έχουμε δύο σημεία Α και Β, τα ενώνουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο ονομάζουμε ΑΒ και ορίζουμε και την απόσταση αυτών των δύο σημείων ως το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:


Έτσι λοιπόν έχουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που περιέχει άπειρα στον αριθμό σημεία.

Και εδώ θα μπορούσε να προκύψει μια ωραία ερώτηση:

**Πώς από άπειρα σημεία, που δεν έχουν διαστάσεις, κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με διαστάσεις που μπορούμε να μετρήσουμε;**


## Η ευθεία

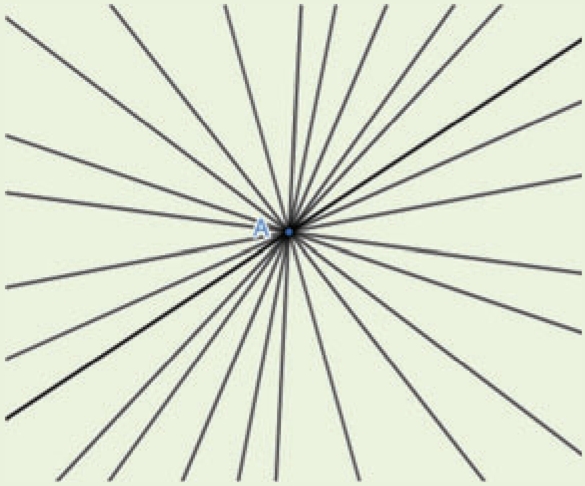
Στη συνέχεια προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα απεριόριστα, ώστε να προκύψει μια ευθεία που έχει άπειρο μήκος και δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:


Κι έτσι ξεκινώντας από ένα σημείο χωρίς διαστάσεις , φθάνουμε στην ευθεία με άπειρο μήκος.

**Πάλι κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί αν τα σημεία της ευθείας αυτής ακουμπάνε μεταξύ τους, ενώ δεν έχουν διαστάσεις…**


Στο σημείο αυτό πρέπει να καθησυχάσουμε τον αναγνώστη. Τα παραπάνω αποτελούν αφηρημένα γεωμετρικά αντικείμενα και έννοιες, οπότε … λογικό είναι να μην μπορούμε με τις αισθήσεις μας και έννοιες της καθημερινότητας να τα ερμηνεύσουμε.
Για την ακρίβεια, ίσως οι αισθήσεις μας οδηγήσουν και σε εσφαλμένες εντυπώσεις…
Ακόμα περισσότερο οι παραπάνω έννοιες αποτελούν θεμέλια της γεωμετρίας και ως εκ τούτου πολύ βασικά στοιχεία για να έχουμε τα μαθηματικά ως επιστήμη από την αρχαιότητα έως σήμερα, βασισμένα σε ορισμούς , αξιώματα και αποδείξεις!

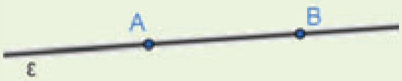
Συνεχίζοντας θα φέρουμε πολλές(άπειρες) στο πλήθος ευθείες οι οποίες έχουν ένα κοινό σημείο (από ένα σημείο διέρχονται άπειρες το πλήθος ευθείες)




Τις άπειρες ευθείες δεν μπορούμε ούτε να τις σχεδιάσουμε βέβαια, διότι αυτό θα απαιτούσε άπειρο χρόνο…

Μπορούμε όμως να φτιάχνουμε πολλές και να δίνουμε έτσι μια εικόνα του φανταστικού.

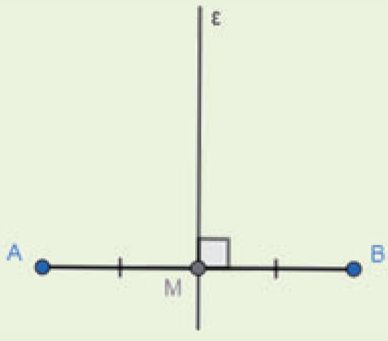
Βέβαια πολύ πιο εύκολο είναι να κατασκευάσουμε δύο σημεία και τη μοναδική ευθεία που διέρχεται από αυτά:




Αν και η ευθεία δεν θα σταματούσε δεξιά και αριστερά και δεν θα είχε «πάχος», για να την βλέπουμε.

Δεν πειράζει, όμως. Με αυτόν τον τρόπο συνεννοούμαστε αναπαριστώντας τα γεωμετρικά αντικείμενα.

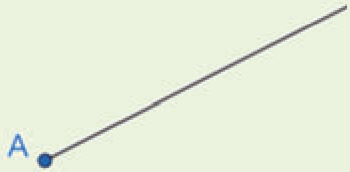
Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ορίζεται το μέσο αυτού, το οποίο είναι το σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.




## Η ημιευθεία

Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το Β, τότε το νέο σχήμα, που έχει αρχή το Α αλλά δεν έχει τέλος, λέγεται ημιευθεία.

Μία ημιευθεία αναπαρίσταται στο παρακάτω σχήμα:




## Το επίπεδο

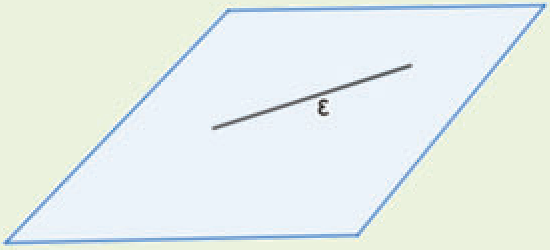
Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μια επιφάνεια στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία που κατασκευάσαμε, τότε αυτή η επιφάνεια είναι ένα επίπεδο.

Την έννοια του επιπέδου την έχουμε όλοι στο μυαλό μας από την καθημερινότητα. Έχουμε στο μυαλό μας ότι το επίπεδο είναι κάτι «ίσιο», σαν την επιφάνεια ενός τραπεζιού, έχει δηλαδή δύο διαστάσεις.

Κάποιες φορές χρησιμοποιείται και με αρνητική χροιά, πχ «επίπεδη σκέψη», σημαίνοντας την απουσία διακυμάνσεων.

Το αναπαριστούμε στα μαθηματικά με ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο συνήθως , χωρίς αυτό να σημαίνει ότι έχει συγκεκριμένο σχήμα, αλλά ούτε και πεπερασμένες διαστάσεις. Πώς θα μπορούσε άλλωστε να έχει πεπερασμένες διαστάσεις, αφού περιέχει ευθείες με άπειρο μήκος;

Το παρακάτω σχήμα είναι δανεισμένο από το σχολικό βιβλίο




## Ερωτήσεις – ασκήσεις:

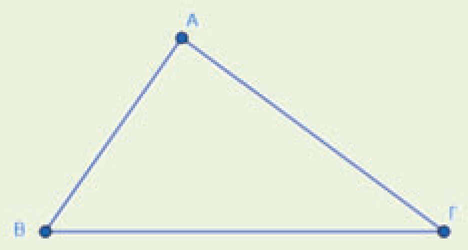
1. Πόσες ευθείες περιέχει ένα επίπεδο;

2. Πόσες ευθείες απαιτούνται για να ορίσουν ένα επίπεδο;
3. Πόσα σημεία ορίζουν μια ευθεία;
4. Πόσα σημεία ορίζουν ένα επίπεδο;
5. Αν κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο, μπορούμε να ορίσουμε ένα επίπεδο που να το περιέχει; Γιατί;

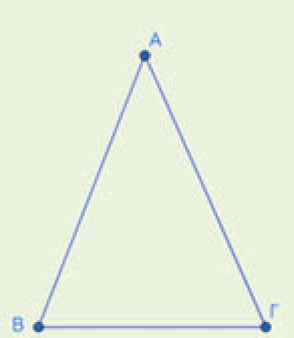
**Τρίγωνα**

Πώς χωρίζουμε τα τρίγωνα βάσει των πλευρών τους:

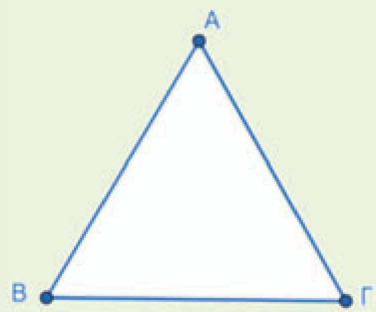
Τα τρίγωνα με βάση τις πλευρές τους χωρίζονται σε σκαληνά, όπου οι πλευρές είναι μεταξύ τους άνισες, ισοσκελή με δύο ίσες πλευρές και την τρίτη πλευρά να ονομάζεται βάση του τριγώνου και τέλος σε ισόπλευρα, όταν και οι τρείς πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.




Σκαληνό τρίγωνο



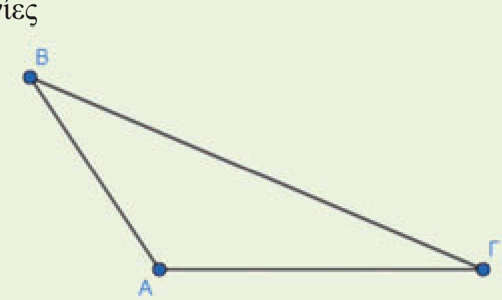

Ισοσκελές τρίγωνο



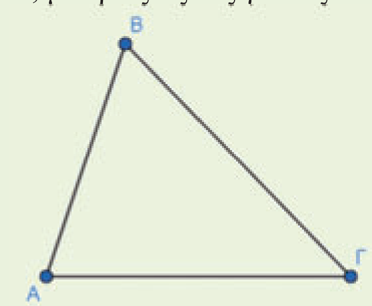

Ισόπλευρο τρίγωνο

Ως προς τις γωνίες τους τα τρίγωνα χωρίζονται σε:

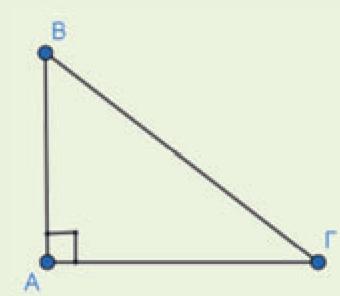
**Αμβλυγώνια**, με μία αμβλεία και δύο οξείες γωνίες




**Οξυγώνια**, με τρεις οξείες γωνίες

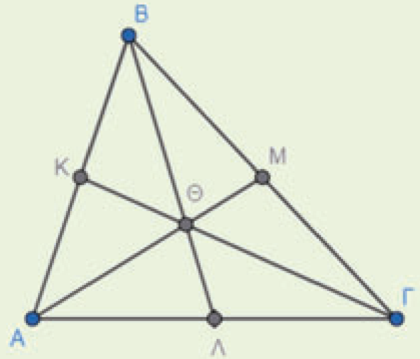



**Ορθογώνια**, με μία ορθή γωνιά και δύο οξείες γωνίες

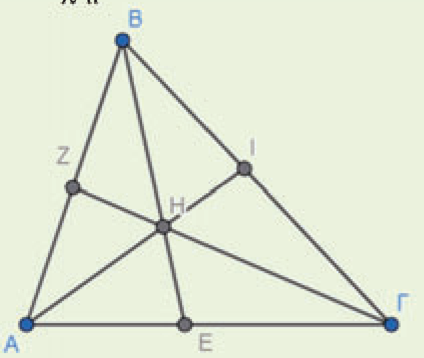



Στο τρίγωνο ορίζουμε τη διάμεσο που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του τριγώνου στο μέσο της απέναντι πλευράς.

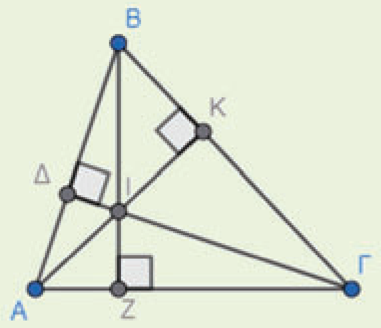
Σε κάθε τρίγωνο κατασκευάζουμε τρεις διάμεσους οι οποίες διέρχονται από ένα σημείο Θ (συντρέχουν) το οποίο ονομάζεται βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους του τριγώνου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, οπού Κ, Λ , Μ μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχά του τριγώνου ΑΒΓ:




Στο τρίγωνο ορίζουμε τη διχοτόμο γωνίας που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
Σε κάθε τρίγωνο κατασκευάζουμε τρεις διχοτόμους οι οποίες διέρχονται από ένα σημείο Η (συντρέχουν), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




Στο τρίγωνο ορίζουμε το ύψος ως το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του τριγώνου και είναι κάθετο στην
απέναντι πλευρά.
Σε κάθε τρίγωνο κατασκευάζουμε τρία ύψη τα οποία διέρχονται από ένα σημείο Ι (συντρέχουν), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

1. Κάθε διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.
2. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά απέναντι από την αμβλεία γωνιά βρίσκεται εντός του τριγώνου.
3. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο τα ύψη βρίσκονται εντός του τριγώνου.
4. Στο ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος, διχοτόμος και μεσοκάθετος της βάσης.
5. Σε ισόπλευρο τρίγωνο τα ύψη ταυτίζονται με τις διαμέσους.
6. Στο ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές ταυτίζονται με τις διχοτόμους.

Ευκλείδης

**Πηγές:**

George Lakoff & Rafael E. Núñez, ‘Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being’, 2000, Basic Books

Μαθηματικά Α Γυμνασίου, ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

https://gr.dreamstime.com/photos-images/ευκλείδης.html

## Α΄ Τάξη Εφαρμογές των ποσοστών και δεκαδικοί αριθμοί

**Δημήτρης Διαμαντίδης και Αντωνία Καμπουράκη**

Μια από τις έννοιες των Μαθηματικών που εφαρμόζονται ιδιαίτερα συχνά στην καθημερινή ζωή είναι τα ποσοστά. Οι εφαρμογές τους δεν είναι απλά πολλές, αλλά και αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους.
Για παράδειγμα η έκφραση 'δέκα τοις εκατό' ή αλλιώς '10%' μπορεί να σημαίνει διαφορετικά πράγματα, τα οποία εξαρτώνται από το κείμενο που τη συνοδεύει, δηλαδή από την κατάσταση ή το πρόβλημα στο οποίο αναφέρεται αυτό το ποσοστό.
Ας δούμε δύο βασικές από αυτές τις διαφορετικές περιπτώσεις:

**1η περίπτωση: μέρος όλου**

'Η τιμή ενός κινητού τηλεφώνου αυξήθηκε κατά 10%.'
Αυτό σημαίνει ότι αν η αρχική τιμή του τηλεφώνου ήταν 80 ευρώ, η τελική του τιμή είναι $80 + 8 = 88$ ευρώ, γιατί το 10% του 80 είναι 8.
Παρόμοια είναι και η περίπτωση της μείωσης:
'Ένας αθλητής, λόγω των προπονήσεών του σε ένα έτος έχασε το 10% του βάρους του.'
Αν ο αθλητής ζύγιζε 90 κιλά όταν ξεκίνησε τις προπονήσεις του, μετά από ένα έτος ζύγιζε $90 - 9 = 81$ κιλά. Αυτό γιατί το 10% των 90 κιλών είναι 9 κιλά.

'Μια αθλήτρια προπονήθηκε για 5,5 ώρες αυτή την εβδομάδα, ενώ την προηγούμενη εβδομάδα προπονήθηκε για 5 ώρες.'
Η διάρκεια της προπόνησής της σε σύγκριση με την προηγούμενη εβδομάδα αυξήθηκε κατά 0,5 ώρα. Το 0,5 είναι το 10% του 5, γιατί $0{,}5 \cdot 10 = 5$. Αυτό σημαίνει ότι η διάρκεια της προπόνησής της αυξήθηκε κατά 10%.

Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε αύξηση και μείωση μιας ποσότητας. Η αύξηση ή η μείωση εκφράζεται ως **το μέρος ενός όλου**.

**2η περίπτωση: σύγκριση**

Θέλουμε να αγοράσουμε μια μπάλα μπάσκετ.
'Η πολύχρωμη μπάλα είναι κατά 10% ακριβότερη από τη μονόχρωμη'.
Αυτό σημαίνει ότι αν η μονόχρωμη κοστίζει 20 ευρώ, η πολύχρωμη κοστίζει $20 + 2 = 22$ ευρώ, καθώς το 10% του 20 είναι 2.
Σε αυτή την περίπτωση, με το ποσοστό **συγκρίνουμε** μια ποσότητα με μια άλλη.
Άλλη μια περίπτωση σύγκρισης είναι η παρακάτω:
Το εμβαδόν ενός οικοπέδου Α είναι κατά 10% μεγαλύτερο από το εμβαδόν ενός οικοπέδου Β. Αυτό σημαίνει ότι αν το οικόπεδο Β έχει εμβαδόν 8 στρέμματα, το οικόπεδο Α έχει εμβαδόν 8,8 στρέμματα (το 0,8 είναι το 10% του 8).
Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις, το 'μέρος όλου' και τη 'σύγκριση' μπορούμε να εντάξουμε και άλλες. Μια από αυτές είναι 'το ποσοστό ως πιθανότητα'.
Στρίβουμε ένα συνηθισμένο κέρμα. Η πιθανότητα να έρθει γράμματα (Γ) είναι 50%. Αυτή η χρήση ποσοστού μπορεί να ενταχθεί στην περίπτωση 'μέρος όλου', καθώς η πιθανότητα εκφράζει το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων του στριψίματος του κέρματος, ως μέρος όλων των δυνατών εκβάσεων. Συγκεκριμένα, όλες οι δυνατές εκβάσεις είναι 2, κεφαλή (Κ) και γράμματα (Γ) και 1 από αυτές είναι η ευνοϊκή (Γ).
Αντίστοιχα στη ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού η πιθανότητα να έρθει τέσσερα είναι $\frac{1}{6}$ ή 16,7% περίπου, καθώς 6 είναι όλες οι δυνατές εκβάσεις και 1 από αυτές είναι ευνοϊκή.

**Ποσοστά και δεκαδικοί αριθμοί**

Για να υπολογίσουμε το 10% ενός αριθμού, ο οποίος εκφράζει μια ποσότητα, τότε πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με το 0,1.
Αυτό συμβαίνει γιατί το 10% της ποσότητας αντιστοιχεί στα $\frac{10}{100}$ της ποσότητας και:

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Έτσι στο 15% αντιστοιχεί το 0,15, στο 90% το 0,9, το 3% αντιστοιχεί στο 0,03, κ.λπ..
Η αντιστοίχιση ποσοστών σε δεκαδικούς μπορεί να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε ποσοστά.

Για παράδειγμα:
Τι ποσοστό του 80 είναι το 16;

$$\frac{16}{80} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Άρα το 16 είναι το 20% του 80.

Στη συνέχεια θα λύσουμε προβλήματα με ποσοστά, κυρίως με τη βοήθεια δεκαδικών.

### Πρόβλημα 1

**Μια μπλούζα κοστίζει σήμερα 35 ευρώ, ενώ πριν μία εβδομάδα κόστιζε 32 ευρώ.**
**α) Πόσο αυξήθηκε η τιμή της μπλούζας σε σύγκριση με την προηγούμενη εβδομάδα;**
**β) Πόσο φθηνότερη ήταν η μπλούζα την προηγούμενη εβδομάδα σε σύγκριση με σήμερα;**

### Απάντηση

Η τιμή της μπλούζας αυξήθηκε κατά 3 ευρώ.
α) Θα υπολογίσουμε τι ποσοστό του 32 είναι το 3:

$$\frac{3}{32} = 0{,}09375$$

Αυτό αντιστοιχεί στο 9,375%. Άρα η τιμή της μπλούζας αυξήθηκε περίπου κατά 9,4% σε σύγκριση με την προηγούμενη εβδομάδα.

β) Θα υπολογίσουμε τι ποσοστό του 35 είναι το 3:

$$\frac{3}{35} = 0{,}08571429$$

Αυτό αντιστοιχεί στο 8,571429%. Άρα η μπλούζα την προηγούμενη εβδομάδα ήταν φθηνότερη κατά 8,6% σε σύγκριση με σήμερα. Είναι λογικό τα ποσοστά στις απαντήσεις του (α) και του (β) να μην είναι ίσα, αν και αντιστοιχούν και στις δύο περιπτώσεις σε 3 ευρώ. Στο (α) το 3 είναι μέρος του 32, ενώ στο (β) είναι μέρος του 35. Επομένως, είναι λογικό να αναμένουμε το ποσοστό στο (α) να είναι ‘μεγαλύτερο’ από το ποσοστό στο (β), όπως φάνηκε και στην απάντηση, καθώς 9,4>8,6.

### Πρόβλημα 2

**Ο Χρήστος ο μηχανικός αυτοκινήτων πήγε στην οδοντίατρο, την Κατερίνα. Για έναν καθαρισμό δοντιών πλήρωσε 60 ευρώ, από τα οποία το 20% αντιστοιχούν σε φόρο που πρέπει να αποδώσει η Κατερίνα στο δημόσιο ταμείο. Με όλα τα χρήματα που της έμειναν, η Κατερίνα αγόρασε από το κατάστημα του Μιχάλη ένα επιστημονικό βιβλίο για τη δουλειά της. Από αυτά τα χρήματα ο Μιχάλης απέδωσε το 6% στο δημόσιο ταμείο και με τα υπόλοιπα αγόρασε ένα εξάρτημα αυτοκινήτου από το συνεργείο του Χρήστου. Ο Χρήστος απέδωσε το 20% των χρημάτων που έλαβε στο δημόσιο ταμείο και κράτησε τα υπόλοιπα. Πόσα χρήματα έμειναν στον Χρήστο;**

### Απάντηση

Ο Χρήστος έδωσε στην Κατερίνα 60 ευρώ. Η Κατερίνα κράτησε το 80% των χρημάτων καθώς απέδωσε το 20% στο δημόσιο ταμείο. Το 80% αντιστοιχεί στον αριθμό 0,8.

$$0{,}8 \cdot 60 = 48$$

Άρα η Κατερίνα κράτησε 48 ευρώ, από τα 60 που έλαβε.

Αυτά τα χρήματα τα ξόδεψε για ένα βιβλίο στο βιβλιοπωλείο του Μιχάλη. Ο Μιχάλης έλαβε 48 ευρώ, αλλά από αυτά κράτησε το 94% καθώς το 6% το απέδωσε στο δημόσιο ταμείο:

$$0{,}94 \cdot 48 = 45{,}12$$

Ο Μιχάλης κράτησε 45,12 ευρώ και τα έδωσε στον Χρήστο, για το εξάρτημα του αυτοκινήτου. Από αυτά τα χρήματα ο Χρήστος κράτησε το 80% καθώς το 20% το απέδωσε στο δημόσιο ταμείο.

$$0{,}8 \cdot 45{,}12 = 36{,}096$$

Άρα ο Χρήστος κράτησε 36,1 ευρώ περίπου από τα χρήματα που έλαβε.

### Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ)

Ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ) είναι 24%. Αυτό σημαίνει ότι αν η καθαρή αξία ενός προϊόντος είναι 100 ευρώ, τότε σε αυτή προστίθενται επιπλέον 24 ευρώ και άρα η τιμή πώλησης του προϊόντος διαμορφώνεται στα 124 ευρώ, ‘στο ράφι’ του καταστήματος.

Έτσι, αν ένας πελάτης αγοράσει αυτό το προϊόν θα πληρώσει στο κατάστημα 124 ευρώ, από αυτά το κατάστημα θα κρατήσει τα 100 και θα αποδώσει τα υπόλοιπα 24 ευρώ στο δημόσιο ταμείο, ως ΦΠΑ.
Έτσι, αν από την πώληση ενός άλλου προϊόντος, το κατάστημα θέλει να κρατήσει 40 ευρώ, τότε πόσο θα πρέπει να το πουλήσει;
Μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα με δύο τρόπους:

**Α΄ τρόπος**

Το 24% αντιστοιχεί στο 0,24:

$$0{,}24 \cdot 40 = 9{,}6$$

Άρα θα πρέπει να το πουλήσει στην τιμή των $40 + 9{,}6 = 49{,}6$ ευρώ.
Ο πελάτης θα πληρώσει 49,6 ευρώ για να το αγοράσει, από τα οποία τα 9,6 ευρώ είναι ο ΦΠΑ, τον οποίο το κατάστημα αποδίδει στο δημόσιο ταμείο.

**Β΄ τρόπος**

Εφόσον ο ΦΠΑ είναι 24% του 40, τότε η τελική τιμή του προϊόντος είναι το 124% του 40. Το 124% αντιστοιχεί στον αριθμό 1,24.

$$1{,}24 \cdot 40 = 49{,}6$$

Άρα θα πρέπει να το πουλήσει στην τιμή των 49,6 ευρώ.

Σε αυτό το πρόβλημα, το 24% εκφράζει:
- ‘μέρος όλου’, καθώς το 9,6 είναι το 24% του 40,
- ‘σύγκριση’, γιατί το 49,6 είναι κατά 24% μεγαλύτερο του 40.

Το 124% τι εκφράζει;
Σίγουρα δεν εκφράζει ‘μέρος όλου’. Άλλωστε δεν μπορεί το μέρος να είναι μεγαλύτερο από το όλο.
Επίσης δεν εκφράζει σύγκριση.
Το 124% είναι η ποσοστιαία εκδοχή του 1,24 με το οποίο πολλαπλασιάζουμε τα 40 ευρώ για να πάρουμε την τιμή πώλησης του προϊόντος, δηλαδή 49,6 ευρώ.

## Πρόβλημα 3

**Για τη συνταγή ενός κέικ για 8 μερίδες χρειάζεται συγκεκριμένη ποσότητα ζάχαρης. Ο Φίλιππος έφτιαξε το κέικ ακολουθώντας κατά γράμμα τη συνταγή, αλλά κατ’ αναλογία για 10 άτομα. Βρήκε ότι για 10 άτομα χρειάζεται 640 γραμμάρια ζάχαρης.**
**Πόσα γραμμάρια ζάχαρης χρειάζεται η συνταγή για 8 άτομα;**

**Απάντηση**

Η αύξηση των μερίδων της συνταγής κατά 2 (από 8 σε 10) αντιστοιχεί σε 25% των μερίδων της αρχικής συνταγής, καθώς:

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Αν $x$ είναι τα γραμμάρια ζάχαρης για 8 μερίδες, τότε για 10 μερίδες χρειάζεται το 125% της ζάχαρης της αρχικής συνταγής.
Από εδώ και πέρα θα το λύσουμε με δύο τρόπους:

**Α΄ τρόπος**

Το 125% της ζάχαρης αντιστοιχεί σε 640 γραμμάρια, άρα το 1% της ζάχαρης σε γραμμάρια είναι:

$$\frac{640}{125} = 5{,}12$$

Επομένως, το 100% της ζάχαρης, για τη συνταγή των 8 μερίδων, αντιστοιχεί σε:

$$5{,}12 \cdot 100 = 512$$

γραμμάρια ζάχαρης.

**Β΄ τρόπος**

Αν για τις 8 μερίδες χρειάζονται $x$ γραμμάρια ζάχαρης, για τις 10 μερίδες χρειάζεται το 125% αυτών, δηλαδή $1{,}25 \cdot x$.
Επομένως:

$$1{,}25 \cdot x = 640$$
$$x = \frac{640}{1{,}25}$$
$$x = 512$$

Άρα για τις 8 μερίδες χρειάζονται 512 γραμμάρια ζάχαρης.

## Πρόβλημα 4

**Ένα ζευγάρι ακουστικά κοστίζει 14,88 ευρώ, στο ράφι του καταστήματος. Μια πελάτισσα**

**πλήρωσε αυτό το ποσό και τα αγόρασε. Τι μέρος αυτού του ποσού κράτησε το κατάστημα, μετά την απόδοση του ΦΠΑ (24%) στο δημόσιο ταμείο;**

### Απάντηση

Η τιμή 14,88 ευρώ συμπεριλαμβάνει το 24% ΦΠΑ, άρα αντιστοιχεί στο 124% της τιμής χωρίς το ΦΠΑ, δηλαδή στο ποσό που θα μείνει στο κατάστημα μετά την αγορά.

Αν $x$ είναι το ποσό που θα μείνει στο κατάστημα, τότε:

$$1{,}24 \cdot x = 14{,}88$$
$$x = \frac{14{,}88}{1{,}24}$$
$$x = 12$$

Δηλαδή στο κατάστημα θα μείνουν 12 ευρώ.

### Πρόβλημα 5

**Μια οθόνη βγήκε στην αγορά στις 5 Ιανουαρίου. Η τιμή της αυξήθηκε στις 25 Ιανουαρίου κατά 15%, ενώ στις 15 Φεβρουαρίου μειώθηκε κατά 5%, σε σύγκριση με την τιμή που είχε στις 25 Ιανουαρίου.**
**Ποια ήταν η μεταβολή της τιμής της οθόνης στις 15 Φεβρουαρίου σε σύγκριση με την τιμή της στις 5 Ιανουαρίου;**

### Απάντηση

Η τιμή της οθόνης στις 25 Ιανουαρίου ήταν το 115% της τιμής της στις 5 Ιανουαρίου.

Άρα, αν η τιμή της στις 5 Ιανουαρίου ήταν $x$, τότε στις 25 Ιανουαρίου ήταν $1{,}15 \cdot x$.

Στις 15 Φεβρουαρίου, η τιμή της μειώθηκε κατά 5%, σε σύγκριση με την τιμή $1{,}15 \cdot x$.

Δηλαδή η τιμή της έφτασε στο 95% του $1{,}15 \cdot x$, δηλαδή:

$$0{,}95 \cdot 1{,}15 \cdot x = 1{,}0925 \cdot x$$

Άρα, η τιμή της οθόνης στις 15 Φεβρουαρίου έφτασε στο 109,25% της τιμής που είχε στις 5 Ιανουαρίου, δηλαδή αυξήθηκε συνολικά κατά 9,25%.

Ακολουθούν προτεινόμενα προβλήματα για λύση, στα ποσοστά.

### Πρόβλημα 6

**Ένα παντελόνι κοστίζει 62 ευρώ, στο ράφι του καταστήματος. Τι μέρος αυτού του ποσού θα κρατήσει το κατάστημα, μετά την απόδοση του ΦΠΑ (24%) στο δημόσιο ταμείο;**

### Πρόβλημα 7

**Ο Γιώργος έχει ένα κατάστημα με αθλητικά είδη. Πούλησε ένα κράνος ποδηλάτου πριν τις εκπτώσεις και το ίδιο κράνος μετά τις εκπτώσεις.**
**Ο ΦΠΑ (24%) που απέδωσε στο δημόσιο ταμείο για την πώληση του κράνους, πριν τις εκπτώσεις ήταν 12 ευρώ και μετά τις εκπτώσεις ήταν 10,8 ευρώ.**
**Ποιο ήταν το ποσοστό της έκπτωσης του κράνους;**

### Πρόβλημα 8

**Ο Θανάσης ξεκίνησε να προπονείται στις 10 Σεπτεμβρίου. Την 1η Οκτωβρίου αύξησε τον χρόνο ημερήσιας προπόνησής του κατά 20% σε σύγκριση με τις 10 Σεπτεμβρίου. Στις 10 Νοεμβρίου αύξησε το χρόνο ημερήσιας προπόνησής του 10% σε σύγκριση με την 1η Οκτωβρίου.**
**Όταν η Χρύσα ρώτησε τον Θανάση πόσο αύξησε τον χρόνο ημερήσιας προπόνησής του στις 10 Νοεμβρίου σε σύγκριση με τις 10 Σεπτεμβρίου, εκείνος απάντησε ‘στις 10 Σεπτεμβρίου έκανα 50 λεπτά προπόνηση την ημέρα και τώρα έχω αυξήσει τον χρόνο κατά 30%’.**
**Τότε η Χρύσα τον ξαναρώτησε: ‘Δηλαδή τώρα προπονείσαι 65 λεπτά την ημέρα;’**
**Ο Θανάσης της απάντησε πώς ‘όχι’.**
**Γιατί θεωρείτε ότι διαφωνούν ο Θανάσης και η Χρύσα;**

### Πρόβλημα 9

**Η απόδοση σε λάδι ενός χωραφιού είναι 40% αν 1 κιλό ελιές από αυτό το χωράφι μας δίνει 40% του κιλού λάδι, δηλαδή 0,4 κιλό λάδι, όταν το επεξεργαζόμαστε στο ελαιοτριβείο.**
**Η απόδοση ενός χωραφιού στην τοποθεσία Ανεμόπετρα ήταν 40% το 2024 και 30% το 2025. Αν η τιμή του λαδιού το 2025 είναι μεγαλύτερη κατά 20% από την τιμή του λαδιού το 2024, τότε ποια από τις δύο χρονιές θα έχει μεγαλύτερα έσοδα ο ιδιοκτήτης του χωραφιού Ανεμόπετρα, ανά κιλό ελιές;**

# Α΄ Τάξη Η Μαθηματική Σκέψη: Πρόκληση και Στρατηγική

Επιμέλεια: Ειρήνη Κοτσακιλάφη

*Η μαθηματική σκέψη καλλιεργείται μέσα από προκλήσεις που μας αναγκάζουν να οργανώσουμε τη λογική μας, να αξιολογήσουμε δεδομένα και να επιλέξουμε την κατάλληλη στρατηγική. Τα μαθηματικά είναι παιχνίδι, περιπέτεια και –κυρίως– τρόπος σκέψης. Σε όλο τον κόσμο πολλοί φοιτητές και επαγγελματίες καλούνται να ελέγξουν την ευστροφία και τη μαθηματική τους σκέψη, απαντώντας σε μικρά, έξυπνα προβλήματα που απαιτούν απλές μαθηματικές γνώσεις. Για να λύσουμε τα παρακάτω προβλήματα χρειαζόμαστε μόνο περιέργεια, λίγη επιμονή και διάθεση να δεις τα μαθηματικά σαν γρίφο. Η διαδικασία αυτή θα σε βοηθήσει να:*

- *εξασκήσεις τη λογική σου*
- *αναπτύξεις στρατηγικές επίλυσης*
- *μάθεις να σκέφτεσαι πιο γρήγορα και πιο ευέλικτα*
- *δεις τα μαθηματικά από μια πιο «παιχνιδιάρικη» πλευρά*

### Άσκηση 1

**Σε έναν αγώνα καλαθοσφαίρισης η αναλογία των αμυντικών ριμπάουντ προς τα επιθετικά ριμπάουντ της μιας ομάδας ήταν 2 προς 5. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν μπορεί να αντιπροσωπεύει τα συνολικά ριμπάουντ της ομάδας;**

**Α. 42  Β. 56  Γ. 64  Δ. 84  Ε. 98**

### Λύση :

Αφού η αναλογία των αμυντικών προς τα επιθετικά ριμπάουντ είναι 2:5 ,τα συνολικά ριμπάουντ θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 7.Από τους αριθμούς που δίνονται ο μόνος που δεν είναι πολλαπλάσιο του 7 είναι το Γ.64.

### Άσκηση 2

**Αν ισχύει η σχέση 4x – y = 6, με τι ισούται το $\frac{16^x}{2^y}$;**

**Α. $2^{x-y}$  Β. $8^{x-y}$  Γ. $2^{xy}$  Δ. $2^6$  Ε. $8^{4-y}$**

### Λύση :

Αρχικά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων έχουμε: $\frac{16^x}{2^y} = \frac{(2^4)^x}{2^y} = \frac{2^{4x}}{2^y} = 2^{4x-y}$ (1).
Όμως 4x-y=6,άρα κάνοντας αντικατάσταση η (1) γίνεται $2^6$ και η σωστή απάντηση είναι η Δ.

### Άσκηση 3

**Το αμφιθέατρο είναι γεμάτο κατά 35%. Μια ομάδα δεκατεσσάρων ατόμων μπαίνει στο αμφιθέατρο και κάθεται στις άδειες θέσεις. Το αμφιθέατρο είναι τώρα γεμάτο κατά 42%. Πόσα άτομα θα παραμείνουν στο αμφιθέατρο αν φύγουν 17 άτομα;**

**Α. 200  Β. 174  Γ. 84  Δ. 70  Ε. 67**

### Λύση :

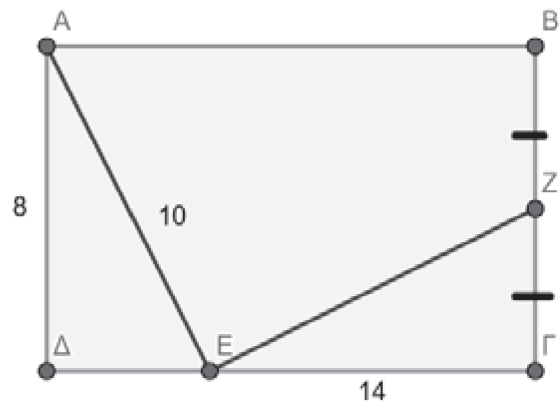
Τα 14 άτομα που μπαίνουν στο αμφιθέατρο αντιπροσωπεύουν το 42%-35%=7% των συνολικών θέσεων στο αμφιθέατρο. Έστω x ο συνολικός αριθμός των ατόμων που χωράει το αμφιθέατρο. Επομένως:
$0{,}07 \cdot x = 14$

$x = 14 \div 0{,}07$
$x = 200.$
Τώρα είναι γεμάτο κατά 42%: $0{,}42 \cdot 200 = 84$
Φεύγουν 17 άτομα: $84 - 17 = 67$. Η σωστή απάντηση είναι το Δ.

## Άσκηση 4

**Το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ποιο είναι το εμβαδόν του ΑΒΖΕ?**

**Α. 140 Β. 80 Γ. 96 Δ. 160 Ε.108**




**Λύση :**

Αρχικά για να υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς ΔΕ κάνουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ: $Ε\Delta^2 = ΑΕ^2 - Α\Delta^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$.
Έχουμε ΕΔ=$\sqrt{36} = 6$.
Στη συνέχεια η ΔΓ=ΔΕ+ΕΓ=6+14=20 και (ΑΒΓΔ)=$Α\Delta \cdot \Delta\Gamma = 8 \cdot 20 = 160$.
Επίσης, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι :

$$(Α\Delta Ε)=\frac{Α\Delta \cdot \Delta Ε}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

Όμως η ΒΓ=ΑΔ=8 και ΖΓ=$\frac{Β\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$.
Το εμβαδόν του τριγώνου ΖΓΕ είναι:

$$(Ζ\Gamma Ε)=\frac{Ε\Gamma \cdot Ζ\Gamma}{2} = \frac{14 \cdot 4}{2} = 28.$$

Τελικά (ΑΒΖΕ)=(ΑΒΓΔ)-(ΖΓΕ)-(ΑΔΕ)=160-28-24=108.

## Άσκηση 5

**Το σχολείο μας διοργάνωσε μια δράση για την ανακύκλωση κατά την οποία οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 4 ατόμων. Κάθε ομάδα έπρεπε να μαζέψει 15 τσάντες με σκουπίδια. Συνολικά όλοι οι μαθητές μάζεψαν 1305 τσάντες. Πόσοι μαθητές συμμετείχαν:**

**Α. 87 Β. 489 Γ. 264 Δ. 348 Ε. 124**

**Λύση :**

Συνολικά συλλέχθηκαν 1.305 σακούλες απορριμμάτων. Κάθε ομάδα έπρεπε να μαζέψει 15 σακούλες. Άρα ο αριθμός των ομάδων είναι:
$1305 \div 15 = 87$.Επομένως συμμετείχαν 87 ομάδες. Κάθε ομάδα αποτελείται από 4 μαθητές, άρα ο συνολικός αριθμός μαθητών είναι:$87 \cdot 4 = 348$ μαθητές. Σωστή απάντηση η Δ.

## Άσκηση 6

**Με ποιο κλάσμα από τα παρακάτω προσεγγίζεται καλύτερα ο αριθμός 0,37?**

**Α. 4/10 Β. 3/9 Γ. 4/9 Δ. 4/11 Ε. 3/11**

**Λύση :**

Δοκιμάζοντας να κάνουμε τις διαιρέσεις βλέπουμε ότι το Α=$\frac{4}{10}=0{,}4$.Το Β=$\frac{3}{9}=0{,}333$ και το Γ=4:9=0,444…Αντίστοιχα το Δ=4:11=0,3636…, αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση ,δεδομένου ότι το Ε θα είναι μικρότερος αριθμός.

**Άσκηση 7**

**Ο Γιώργος για να πιάσει τον στόχο στις εβδομαδιαίες πωλήσεις του και να πάρει μπόνους, πρέπει να πουλήσει 15 κινητά τηλέφωνα την ημέρα κατά μέσο όρο. Αυτή τη βδομάδα αποφάσισε να αυξήσει τις πωλήσεις του κατά 20%.Έως τώρα έχει καταφέρει αυτή την εβδομάδα να πουλήσει 16, 12, 11, 19, 22 κινητά τηλέφωνα. Ποιος θα πρέπει να είναι ο μέσος αριθμός πωλήσεων για τις 2 μέρες της εβδομάδας που απέμειναν?**

**Α. 16 Β. 21 Γ. 23 Δ. 40 Ε. 46**

**Λύση :**

Για να πιάσει το στόχο στις πωλήσεις πρέπει ημερησίως να πουλάει:

$$15+20\%\cdot 15=15+0{,}20\cdot 15=15+3=18.$$

Άρα πρέπει να πουλά 18 κινητά την ημέρα κατά μέσο όρο και $7\cdot 18=126$ κινητά συνολικά όλη την εβδομάδα. Οι πωλήσεις που έχει ήδη κάνει είναι: $16+12+11+19+22=80$.

Τις δύο τελευταίες μέρες χρειάζεται να πουλήσει 126-80=46 κινητά. Επομένως ο μέσος όρος των πωλήσεων θα είναι $46\div 2=23$ κινητά την ημέρα και σωστό το Γ.

**Άσκηση 8**

**Ένας κύβος περιέχει 64$m^3$νερού. Ένας κύλινδρος με ακτίνα βάσης r=1,5 $m^3$ βυθίζεται κάθετα πλήρως μέσα στο κύβο, εκτοπίζοντας 6,75π $m^3$ νερού. Πόσα m κάτω από την επιφάνεια του κύβου βρίσκεται ο κύλινδρος;**

**Α.1 Β.1,5 Γ.2 Δ.2,5 Ε.3**

**Λύση :**

Ο κύβος περιέχει 64 m³ νερού, η πλευρά του είναι α και ο όγκος του είναι: $V=a^3$. Κάνοντας αντικατάσταση έχω: $a^3=64\Rightarrow a=4$ m.

Άρα το ύψος του κύβου (και το βάθος του νερού) είναι 4 m. Δίνεται ότι ο κύλινδρος εκτοπίζει: $6{,}75\pi$ m$^3$.

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι: $V=\pi r^2 h$

$6{,}75\pi=\pi(1{,}5)^2 h$

$h=\frac{6{,}75}{2{,}25}=3$ m.

Αφού το ύψος του κυλίνδρου είναι 3, θα βρίσκεται 4-3=1m κάτω από την επιφάνεια του κύβου και σωστό είναι το Α.

**Άσκηση 9**

**Μια τιμή αυξήθηκε κατά 20% και στη συνέχεια μειώθηκε κατά 20%. Ποια είναι η συνολική μεταβολή;**

**Α. 0% Β. 4% μείωση Γ. 4% αύξηση Δ. 40% μείωση Ε. 40% αύξηση**

**Λύση :**

Με την αύξηση 20% ,η νέα τιμή θα είναι: $x\cdot 120\%=1{,}2x$. Στη συνέχεια μειώνεται κατά 20%.

Άρα η νέα τιμή θα είναι $1{,}2x\cdot 80\%=0{,}96x=96\%\cdot x$

Έχουμε μείωση 4% με σωστό το Β.

### Άσκηση 10

**Σε μια τάξη, η αναλογία αγοριών προς κορίτσια είναι 3:5. Αν υπάρχουν 40 μαθητές, πόσα αγόρια υπάρχουν;**

**Α. 15 Β. 20 Γ. 25 Δ. 30 Ε. 35**

**Λύση :**

Αφού η αναλογία αγοριών προς κορίτσια είναι 3:5, η αναλογία αγοριών προς όλους τους μαθητές είναι 3: 8. Συνεπώς $\frac{3}{8} = \frac{\chi}{40}$.

$8 \cdot \chi = 3 \cdot 40$

$8 \cdot \chi = 120$

$\chi = 120 : 8$

$x = 15$ με σωστό το Α.

### Άσκηση 11

**Ένα τρένο ταξιδεύει με 60 km/h για 2 ώρες και μετά με 80 km/h για 3 ώρες. Ποια είναι η μέση ταχύτητα;**

**Α. 70 km/h Β. 72 km/h Γ. 74 km/h Δ. 75 km/h Ε. 76 km/h**

**Λύση :**

Η μέση ταχύτητα ορίζεται ως: $u = \frac{συνολική\ απόσταση}{συνολικός\ χρόνος}$. Στο πρώτο μέρος της διαδρομής : $S_1$=60·2=120 km και στο δεύτερο μέρος $S_2$=80·3=240 km.Συνολική απόσταση: $120 + 240 = 360$ km και συνολικός χρόνος 5 ώρες.

Τέλος ,u=$\frac{360}{5} = 72km/h$ και σωστό είναι το Β.

### Άσκηση 12

**Η ακολουθία είναι: 2, 6, 18, 54, … Ποιος είναι ο 6ος όρος;**

**Α. 162 Β. 486 Γ. 972 Δ. 1458 Ε. 2916**

**Λύση :**

Παρατηρούμε ότι ο επόμενος όρος προκύπτει από τον προηγούμενο αν πολλαπλασιαστεί με το 3,οπότε ο $5^{ος}$ όρος θα είναι 54·3=162 και ο $6^{ος}$ όρος θα είναι 162·3=486,δηλαδή το Β.

### Άσκηση 13

**Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 25 και η διαφορά τους είναι 7. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός;**

**Α.16 Β.18 Γ. 15 Δ.9 Ε.11**

**Λύση :**

Έστω x= ο μεγαλύτερος αριθμός και y= ο μικρότερος αριθμός. Δίνεται ότι: $\mathrm{x + y = 25}$ και $\mathrm{x - y = 7}$. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις:

$$(\mathrm{x + y}) + (\mathrm{x - y}) = 25 + 7$$

$$2\mathrm{x} = 32$$

$\mathrm{x} = 16$ .Άρα διαλέγουμε το Α.

### Άσκηση 14

**Αν το εμβαδόν ενός κύκλου είναι 16π,ποια είναι η περιφέρειά του;**

**Α.4π Β.8π Γ.16π Δ.32π Ε.64π**

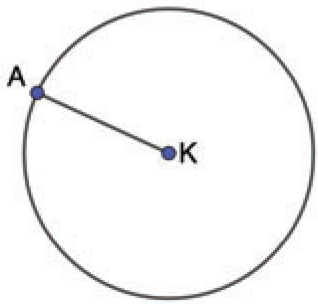
**Λύση :**

Αφού το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π και δίνεται από τον τύπο Ε=$\pi\rho^2$ με αντικατάσταση έχουμε 16π=$\pi\rho^2 \Rightarrow \rho = 4$,Η περιφέρεια δηλαδή το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο L=2πρ=2π4=8π και σωστό είναι το Β.

# Μήκος κύκλου

Δημήτρης Διαμαντίδης και Αντώνιος Μαγουλάς

Ο κύκλος είναι το επίπεδο σχήμα που αποτελείται από όλα τα σημεία του επιπέδου τα οποία έχουν την ίδια απόσταση από ένα άλλο σημείο, το κέντρο του. Στο παρακάτω σχήμα, το Κ είναι το κέντρο του κύκλου και όλα του τα σημεία απέχουν το ίδιο από το Κ.




Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το κέντρο του κύκλου και ένα οποιοδήποτε σημείο του κύκλου, ονομάζεται ακτίνα του κύκλου. Στο παραπάνω σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ είναι η ακτίνα του κύκλου. Το μήκος της ακτίνας είναι ίσο με την απόσταση οποιουδήποτε σημείου του κύκλου από το κέντρο του.

Ο παραπάνω κύκλος συμβολίζεται (Κ, ΑΚ). Αν το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι ρ, τότε μπορούμε να συμβολίσουμε τον κύκλο με (Κ, ρ).

Μέσω της καθημερινής μας εμπειρίας γνωρίζουμε αντικείμενα που έχουν κυκλικό σχήμα, όπως για παράδειγμα μια ρόδα ενός αυτοκινήτου, ή μια κυκλική πλατεία. Το τμήμα του επιπέδου που περικλείεται από τον κύκλο λέγεται κυκλικός δίσκος.

## Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου

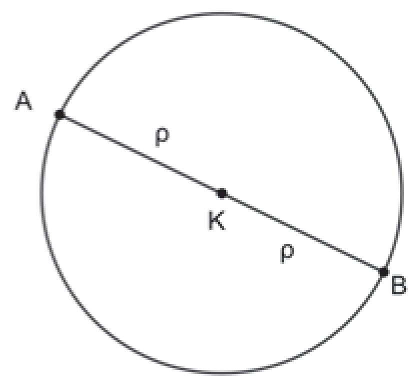
Με τον όρο «μήκος κύκλου» εννοούμε το μήκος της γραμμής που αποτελεί τον κύκλο.

Όπως γνωρίζουμε, το μήκος $L$ ενός κύκλου είναι ανάλογο της διαμέτρου του $\delta$ με λόγο $\pi$, όπου το $\pi$ είναι ο γνωστός άρρητος αριθμός, που συνήθως τον προσεγγίζουμε με το $3{,}14$, για λόγους υπολογισμών. Δηλαδή:

$$\frac{L}{\delta} = \pi$$

Εναλλακτικά γράφουμε $L = \pi\delta$ ή $L = 2\pi\rho$, όπου $\rho$ είναι η ακτίνα του ίδιου κύκλου.

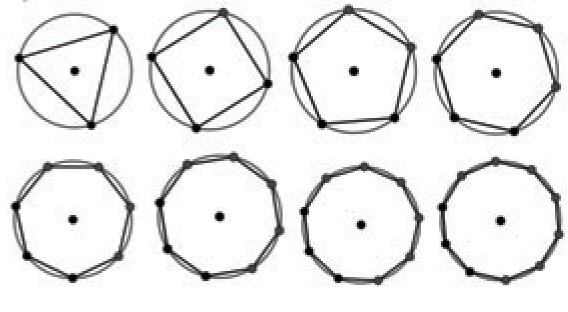
Στον κύκλο του παρακάτω σχήματος, η διάμετρος είναι η $\delta = AB$ και η ακτίνα είναι η $\rho = AK = KB$.




Πώς φτάνουμε όμως σε αυτό τον τύπο, για το μήκος του κύκλου;

Θα προσπαθήσουμε να δούμε την κεντρική ιδέα και υπόθεση πίσω από αυτόν.

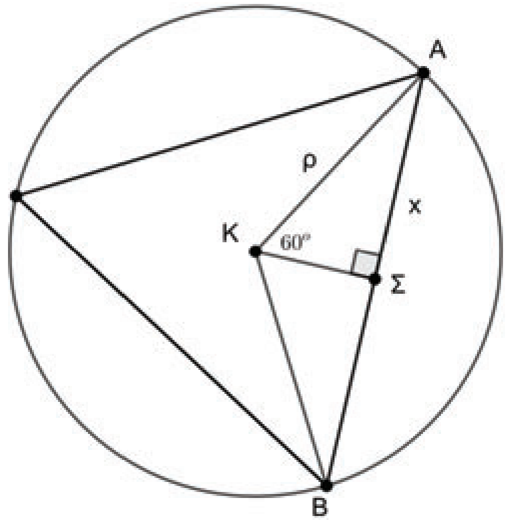
Ας υποθέσουμε ότι οι παρακάτω κύκλου έχουν ακτίνα ρ. Σχηματίζουμε σε αυτούς εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα, ξεκινώντας από ισόπλευρο τρίγωνο και συνεχίζουμε αυξάνοντας κατά ένα το πλήθος των πλευρών τους. Δηλαδή τετράγωνο, κανονικό πεντάγωνο, κανονικό εξάγωνο, κ.λπ.:



Αυτό που μπορεί να παρατηρήσει κανείς είναι ότι καθώς το πλήθος των πλευρών αυξάνεται, το πολύγωνο «πλησιάζει» τον κύκλο.
Έτσι, δεν είναι άστοχο να υποθέσει, ότι η περίμετρος του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου προσεγγίζει το μήκος του κύκλου, στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το κανονικό αυτό πολύγωνο, καθώς αυξάνεται το πλήθος των πλευρών του.
Υπενθυμίζουμε ότι:
Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου με $\nu$ πλευρές είναι ίση με:

$$\omega = \frac{360^o}{\nu}$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την περίπτωση του ισοπλεύρου τριγώνου, που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο $(K, \rho)$.




Η κεντρική γωνία του ισοπλεύρου είναι:

$$\frac{360^o}{3} = 120^o$$

Το $K\Sigma$ διχοτομεί τη γωνία, άρα, όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι $A\widehat{K}\Sigma = 60^o$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Sigma$, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε:

$$\eta\mu A\widehat{K}\Sigma = \frac{A\Sigma}{AK}$$

$$\eta\mu 60^o = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{\rho}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho$$

Άρα η κάθε πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με $x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\rho = \sqrt{3}\rho$, όπου $\rho$ είναι η ακτίνα του κύκλου.

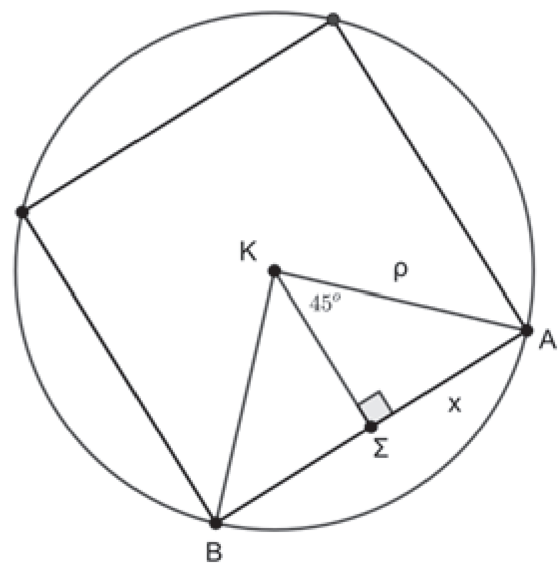
Άρα η περίμετρος του ισοπλεύρου είναι:

$$3x = 3\sqrt{3}\rho \cong 3 \cdot 1{,}732\rho = 5{,}196\rho$$

Συνεχίζουμε με την περίπτωση του τετραγώνου.

Εδώ η γωνία

$$A\widehat{K}\Sigma = 90^o : 2 = 45^o.$$




Ομοίως με την περίπτωση του ισοσκελούς, έτσι εργαζόμαστε και στην περίπτωση του τετραγώνου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Sigma$ έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{90^o}{2}\right) = \frac{x}{\rho}$$

$$\eta\mu 45^o = \frac{x}{\rho}$$

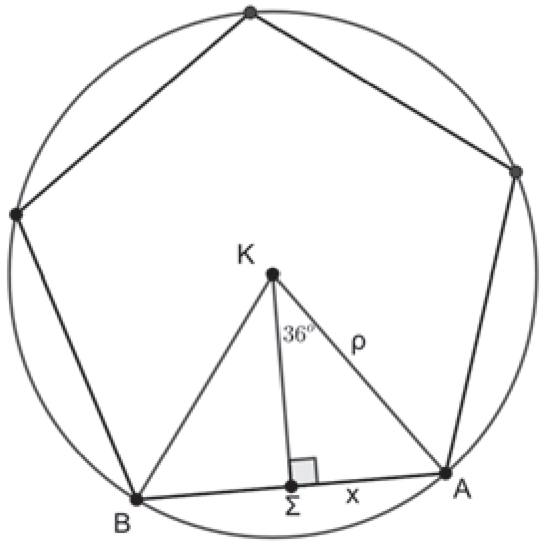
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{\rho}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho$$

$$x \cong 0{,}707\rho$$

Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με $2x = \sqrt{2}\rho \cong 1{,}414\rho$ και η περίμετρος του τετραγώνου είναι ίση με $4\sqrt{2}\rho \cong 5{,}656\rho$.

Ομοίως, στην περίπτωση του κανονικού πενταγώνου έχουμε:




$$\eta\mu\left(\frac{72^o}{2}\right) = \frac{x}{\rho}$$

$$\eta\mu 36^o = \frac{x}{\rho}$$

$$x = \rho \cdot \eta\mu 36^o$$

$$x \cong 0{,}5878\rho$$

Άρα η πλευρά του κανονικού πενταγώνου έχει μήκος $2x \cong 1{,}1756\rho$ και η περίμετρος του κανονικού πενταγώνου είναι $5{,}878\rho$.

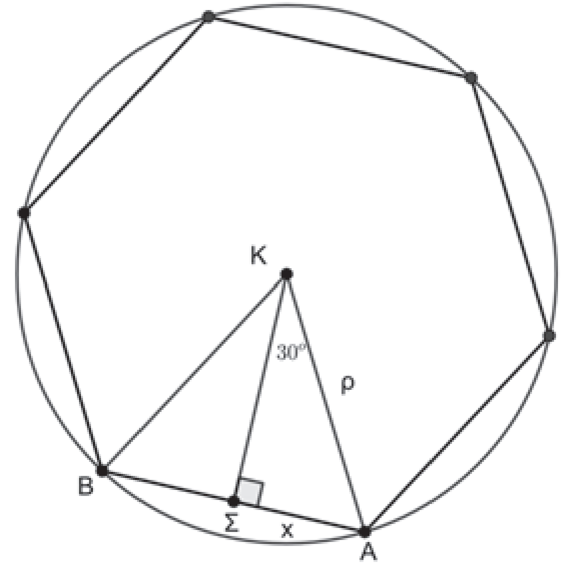
Για το κανονικό εξάγωνο έχουμε:

$$x = \rho \cdot \eta\mu 30^o$$

$$x = 0{,}5\rho$$

Άρα η πλευρά του είναι $2x = \rho$ και η περίμετρός του είναι $6\rho$.

Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε την περίμετρο για κανονικά πολύγωνα με περισσότερες πλευρές.




Συνοψίζοντας, με $\nu$ το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πενταγώνου, $\omega$ την κεντρική γωνία του και $\Pi$ την περίμετρό του, έχουμε:

| $\boldsymbol{\nu}$ | $\boldsymbol{\omega}$ | $\boldsymbol{\Pi}$ |
|---|---|---|
| 3 | $120^o$ | $\mathbf{3} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{120^o}}{2}\right)$ |
| 4 | $90^o$ | $\mathbf{4} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{90^o}}{2}\right)$ |
| 5 | $72^o$ | $\mathbf{5} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{72^o}}{2}\right)$ |
| 6 | $60^o$ | $\mathbf{6} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{60^o}}{2}\right)$ |
| 8 | $45^o$ | $\mathbf{8} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{45^o}}{2}\right)$ |
| 10 | $36^o$ | $\mathbf{10} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{36^o}}{2}\right)$ |
| 12 | $30^o$ | $\mathbf{12} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{30^o}}{2}\right)$ |
| 18 | $20^o$ | $\mathbf{18} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{20^o}}{2}\right)$ |
| 36 | $10^o$ | $\mathbf{36} \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\mathbf{10^o}}{2}\right)$ |
| … | … | **…** |

Δηλαδή, στην γενική περίπτωση ισχύει ότι:

$$\Pi = \nu \cdot 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς στον προηγούμενο πίνακα έχουμε:

| **ν** | ***Π* (προσεγγιστικά)** | **Διαφορά με το προηγούμενο (προσεγγιστικά)** |
|---|---|---|
| 3 | $5{,}196\rho$ | |
| 4 | $5{,}656\rho$ | $0{,}46\rho$ |
| 5 | $5{,}878\rho$ | $0{,}222\rho$ |
| 6 | $6\rho$ | $0{,}122\rho$ |
| 8 | $6{,}123\rho$ | $0{,}123\rho$ |
| 10 | $6{,}18\rho$ | $0{,}057\rho$ |
| 12 | $6{,}21\rho$ | $0{,}03\rho$ |
| 18 | $6{,}25\rho$ | $0{,}04\rho$ |
| 36 | $6{,}275\rho$ | $0{,}025\rho$ |

Στην 3η στήλη του παραπάνω πίνακα καταγράφεται η διαφορά της περιμέτρου ενός κανονικού πολυγώνου, από την περίμετρο εκείνου που είναι επάνω από αυτό στον πίνακα.

Για παράδειγμα, η περίμετρος ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\rho$ είναι $6\rho$ και ενός κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε ίσο κύκλο είναι $5{,}878\rho$ περίπου. Άρα η διαφορά τους είναι $0{,}122\rho$ περίπου.

Οι διαφορές είναι προσεγγιστικές, γιατί και οι τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών που χρησιμοποιήσαμε ήταν κατά προσέγγιση.

Ωστόσο, στον πίνακα αυτό παρατηρούμε ότι:

- Η περίμετρος αυξάνεται, όταν αυξάνεται το πλήθος $\nu$ των πλευρών του πολυγώνου.
- Η διαφορά στην 3η στήλη έχει την τάση να μικραίνει, όταν προχωράμε σε πολύγωνα με μεγαλύτερο πλήθος πλευρών ($\nu$). Για παράδειγμα, η διαφορά περιμέτρων πενταγώνου και εξαγώνου είναι $0{,}122\rho$, ενώ η διαφορά 36-γώνου από 18-γωνο είναι $0{,}025\rho$, αν και μεσολαβούν 17 σχήματα (19-γωνο, 20-γωνο, …, 35-γωνο).

Συνεπώς η διαφορά των περιμέτρων 35-γώνου και 36-γώνου αναμένουμε να είναι ακόμα μικρότερη.

Με τη βοήθεια υπολογιστικού φύλλου ή με τη βοήθεια κώδικα, π.χ. σε Python, μπορούμε να επεκτείνουμε τους παραπάνω υπολογισμούς:

| **ν** | ***Π* (προσεγγιστικά)** | **Διαφορά με το προηγούμενο (προσεγγιστικά)** |
|---|---|---|
| 100 | $6{,}282\rho$ | $0{,}007\rho$ |
| 1.000 | $6{,}28317497\rho$ | $0{,}001175\rho$ |
| 10.000 | $6{,}283185204\rho$ | Πολύ κοντά στο 0 |
| 100.000 | $6{,}283185306\rho$ | Πολύ κοντά στο 0 |
| … | … | … |

Οι παρατηρήσεις που κάνουμε είναι παρόμοιες, με τις παραπάνω.

Έτσι έχουμε ισχυρές ενδείξεις, ότι για πολύ μεγάλο πλήθος πλευρών $\nu$, η περίμετρος του κανονικού πολυγώνου δεν μεταβάλλεται αισθητά: για $\nu = 100$ και περισσότερο παρατηρούμε ότι η περίμετρος είναι κοντά στο $6{,}28$.

Επιστρέφοντας στην αρχική μας υπόθεση, ότι «η περίμετρος του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου προσεγγίζει το μήκος του κύκλου, στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το κανονικό αυτό πολύγωνο, καθώς αυξάνεται το πλήθος των πλευρών του», αν αυτή είναι αληθής, τότε το $6{,}28\rho$ είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του μήκους του κύκλου με ακτίνα $\rho$.

Σύμφωνα με τον τύπο $\mathrm{L} = 2\pi\rho$ και χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική τιμή $3{,}14$ για το $\pi$, πράγματι έχουμε $\mathrm{L} = 6{,}28\rho$.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν μόνο μια ισχυρή ένδειξη ότι η αρχική υπόθεσή μας είναι σωστή. Βεβαίως η επιβεβαίωσή της χρειάζεται την μαθηματική απόδειξη με τη χρήση μαθηματικών πέρα από τα γνωστά στο Γυμνάσιο.

# Στερεομετρία

Θέμις Καψή – Λέων Κουτσούρης

## Λυμένες ασκήσεις στερεομετρίας

**Πρόβλημα 1. Κονσέρβα (κύλινδρος) – Όγκος, ύψος, υλικό και κόστος**

**Μια μεταλλική κονσέρβα έχει σχήμα κυλίνδρου ακτίνας βάσης r = 5 cm και χωρητικότητα 1,2 L.**

**Για λόγους κατασκευής, το συνολικό χαρτόνι/λαμαρίνα που χρειάζεται είναι κατά 8% περισσότερο από το ολικό εμβαδόν της επιφάνειας (λόγω επικαλύψεων).**

**α) Να υπολογίσετε το ύψος h της κονσέρβας (σε cm).**

**β) Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν επιφάνειας της κονσέρβας (σε cm²).**

**γ) Να υπολογίσετε πόση επιφάνεια λαμαρίνας χρειάζεται πραγματικά (με το +8%) και να την εκφράσετε σε m².**

**δ) Αν το κόστος είναι 7,50 € ανά m²,** πόσο κοστίζει το υλικό μιας κονσέρβας;


**Λύση**

α) Μετατρέπουμε τη χωρητικότητα:

1,2 L = 1200 cm³ (αφού 1 L = 1000 cm³).

Όγκος κυλίνδρου: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = V/(\pi r^2)$.

Άρα $h = 1200 / (3{,}14 \cdot 5^2) = 1200 / 78{,}50 \approx 15.29$ cm.

β) Ολικό εμβαδόν κυλίνδρου:

$E_{ολ} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ (δύο βάσεις + παράπλευρη).

$E_{ολ} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 15.29 \approx 637.00$ cm².

γ) Λόγω επικαλύψεων θέλουμε 8% επιπλέον:

$E_{πραγμ} = 1{,}08 \cdot E_{ολ}$.

$E_{πραγμ} \approx 1{,}08 \cdot 637.00 = 687.96$ cm².

Μετατροπή σε m²: 1 m² = 10.000 cm² ⇒ $E_{πραγμ} = (E_{πραγμ}/10.000)$ m².

Άρα $E_{πραγμ} \approx 0.0688$ m².

δ) Κόστος = $7{,}50 \cdot 0.0688 \approx 0.52$ € ανά κονσέρβα.

Σχόλιο: Το πρόβλημα συνδυάζει όγκο–εμβαδό–μετατροπές μονάδων–κοστολόγηση.

**Πρόβλημα 2. Παραλληλεπίπεδο με κυλινδρική οπή – Υπόλοιπος όγκος και βαφή**

**Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 14 cm × 10 cm × 12 cm.**

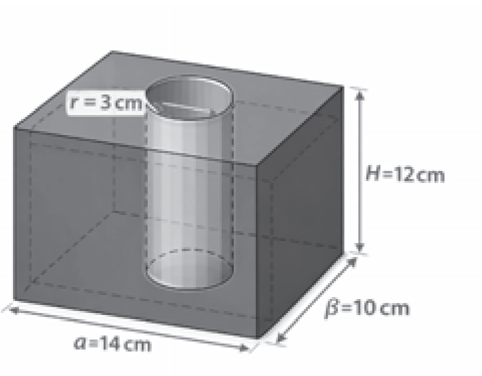
**Ανοίγουμε κυλινδρική οπή ακτίνας r = 3 cm που διαπερνά κάθετα όλο το ύψος.**

**α) Να υπολογίσετε τον αρχικό όγκο και τον όγκο της οπής (cm³).**

**β) Να υπολογίσετε τον υπόλοιπο όγκο και το ποσοστό (%) που απομένει.**

**γ) Θέλουμε να βάψουμε όλες τις εξωτερικές επιφάνειες του παραλληλεπιπέδου, αλλά και τα εσωτερικά τοιχώματα της οπής (όχι όμως τα «χείλη» σε μορφή στεφάνης).**

**Αν χρειάζονται 0,025 g/cm², πόση μπογιά απαιτείται;**




**Λύση**

α) Ο αρχικός όγκος παραλληλεπιπέδου είναι

$V_0 = \alpha \cdot \beta \cdot H$.

$V_0 = 14 \cdot 10 \cdot 12 = 1680$ cm³.

Ο όγκος της κυλινδρικής οπής είναι

$V_{οπ} = \pi r^2 H$.

$V_{οπ} = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 12 = 339.12\ cm^3$.

**β)** Υπόλοιπος όγκος: $V = V_0 - V_{οπ} =$
$= 1680 - 339.12 = 1340.88\ cm^3$.

Ποσοστό που απομένει: $(V/V_0) \cdot 100 \approx 79.81\%$.

**γ)** Για τη βαφή:

- Εξωτερική επιφάνεια παραλληλεπιπέδου: $S_{εξ} = 2(αβ + αH + βH)$.
  $S_{εξ} = 2(14 \cdot 10 + 14 \cdot 12 + 10 \cdot 12) = 856\ cm^2$.
- Εσωτερική επιφάνεια οπής: είναι μόνο η παράπλευρη του κυλίνδρου (χωρίς βάσεις): $S_{οπ} = 2πrH$.

$S_{οπ} = 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 12 = 226.08\ cm^2$.

Συνολικό βαφόμενο εμβαδό:

$$S = 856 + 226.08 = 1082.08\ cm^2.$$

Μπογιά:

$$m = 0,025 \cdot S \approx 0,025 \cdot 1082.08 = 27.05\ g.$$

**Πρόβλημα 3. Στάθμη σε κυλινδρική δεξαμενή – Σφαίρα, προσθήκη νερού και υπερχείλιση**

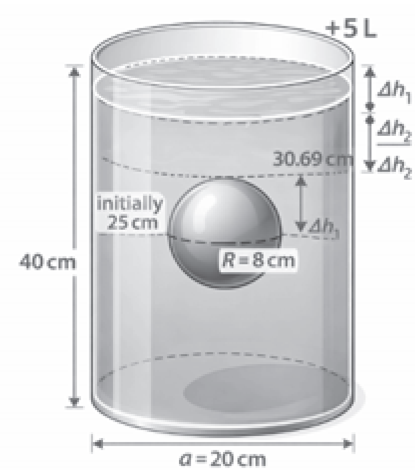
**Μια δεξαμενή έχει σχήμα κυλίνδρου ακτίνας 20 cm και ύψους 40 cm. Αρχικά το νερό έχει ύψος 25 cm.**

**Βυθίζουμε πλήρως μια μεταλλική σφαίρα ακτίνας 8 cm (δεν απορροφά νερό). Στη συνέχεια προσθέτουμε 5 L νερό.**

**α) Πόσο ανεβαίνει η στάθμη λόγω της σφαίρας;**

**β) Πόσο ανεβαίνει η στάθμη λόγω των 5 L;**

**γ) Ποιο είναι το τελικό ύψος στάθμης;**




**δ) Θα υπάρξει υπερχείλιση; Αν ναι, πόσα cm ξεπερνά το χείλος;**

**Λύση**

Εμβαδό βάσης δεξαμενής:

$$E = πr^2 = 3,14 \cdot 20^2 = 3,14 \cdot 400 = 1256\ cm^2.$$

**α)** Όταν ένα σώμα βυθίζεται πλήρως, εκτοπίζει όγκο ίσο με τον όγκο του.

Όγκος σφαίρας: $V_{σφ} = 4/3 \cdot πR^3$.

$V_{σφ} = 4/3 \cdot 3,14 \cdot 8^3 = 2143.57\ cm^3$.

Άνοδος στάθμης: $Δh_1 = V_{σφ} / E$.

$Δh_1 = 2143.57 / 1256 \approx 1.71\ cm$.

**β)** $5\ L = 5000\ cm^3$. Άνοδος: $Δh_2 = 5000/ 1256$.
$Δh_2 \approx 3.98\ cm$.

**γ)** Τελικό ύψος: $h = 25 + Δh_1 + Δh_2$.
$h \approx 25 + 1.71 + 3.98 = 30.69\ cm$.

**δ)** Το χείλος είναι στα 40 cm.
Συγκρίνουμε: $30.69\ cm \leq 40\ cm$.
Άρα δεν υπάρχει υπερχείλιση.

**Πρόβλημα 4.**

**Μια πυραμίδα έχει βάση κανονικό 7-γωνο (επτάγωνο).**

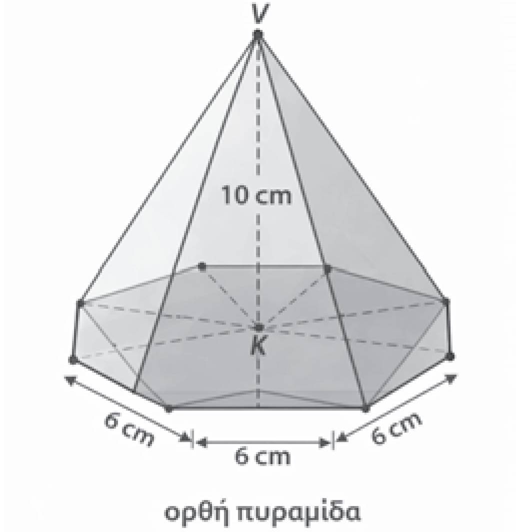
**α) Πόσες έδρες έχει συνολικά; Πόσες είναι οι παράπλευρες;**

**β) Πόσες ακμές έχει συνολικά;**

**γ) Πόσες κορυφές έχει;**

**δ) Δίνεται ότι το μήκος κάθε πλευράς της βάσης είναι 6 cm και το ύψος της πυραμίδας είναι 10 cm. Να εξηγήσετε (χωρίς να κάνετε υπολογισμούς εμβαδών) γιατί το ύψος μπορεί να βρίσκεται εκτός της πυραμίδας σε κάποιες πυραμίδες, αλλά σε «ορθή» πυραμίδα με κανονική βάση βρίσκεται πάντοτε στο εσωτερικό.**

**ε) Να περιγράψετε πώς θα ελέγχατε αν μια πυραμίδα είναι «ορθή» χρησιμοποιώντας μόνο μετρήσει αποστάσεων στην κάτοψη.**



**Λύση**

**α) Η βάση είναι 1 έδρα.** Κάθε πλευρά της βάσης δημιουργεί μία τριγωνική παράπλευρη έδρα. Άρα παράπλευρες έδρες = 7 και συνολικά έδρες = 7+1 = 8.

**β) Ακμές:** • Οι ακμές της βάσης είναι n. • Οι πλάγιες ακμές από την κορυφή προς κάθε κορυφή της βάσης είναι επίσης n. Σύνολο ακμών = n + n = 2n = 14.

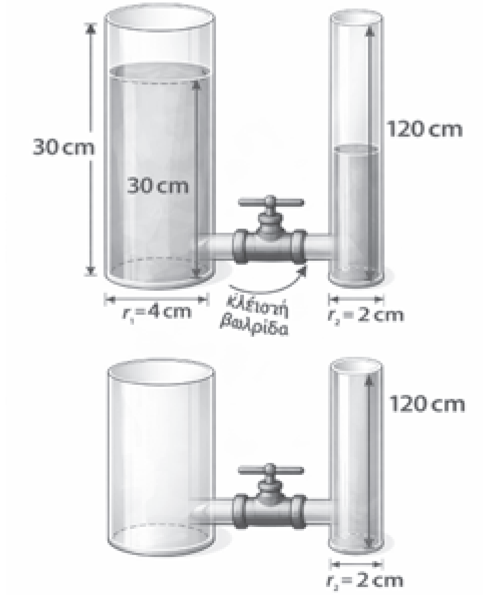
**γ) Κορυφές:** οι n κορυφές της βάσης + η κορυφή της πυραμίδας ⇒ n+1.
Άρα κορυφές = 8.

**δ) Το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή προς το επίπεδο της βάσης.** Σε μια γενική (μη ορθή) πυραμίδα, η προβολή της κορυφής μπορεί να πέσει εκτός του πολυγώνου-βάσης, άρα το ύψος μπορεί να είναι εκτός του στερεού. Όμως σε ορθή πυραμίδα με κανονική βάση, η κορυφή βρίσκεται πάνω από το κέντρο του κανονικού πολυγώνου, το οποίο ανήκει στο εσωτερικό του πολυγώνου· άρα η κάθετος πέφτει μέσα στη βάση και το ύψος βρίσκεται στο εσωτερικό.

**ε) Έλεγχος «ορθότητας»:** στην κάτοψη (προβολή στο επίπεδο βάσης) μετράμε τις αποστάσεις της προβολής της κορυφής από όλες τις κορυφές της βάσης. Αν αυτές είναι όλες ίσες, τότε η προβολή είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου και η πυραμίδα είναι ορθή (συμμετρία).

**Πρόβλημα 5. Δύο κυλινδρικοί σωλήνες – διατήρηση όγκου και μετατροπές**

**Δύο κατακόρυφοι κυλινδρικοί σωλήνες συνδέονται στη βάση τους με βαλβίδα και στο κάτω μέρος τους είναι στο ίδιο επίπεδο.**
**Ο 1ος έχει ακτίνα $r_1$=4 cm και ο 2ος ακτίνα $r_2$=2 cm.**
**Αρχικά η βαλβίδα είναι κλειστή και ο 1ος σωλήνας έχει νερό ύψους 30 cm, ενώ ο 2ος είναι άδειος.**
**Ανοίγουμε τη βαλβίδα και αφήνουμε όλο το νερό να περάσει από τον 1ο στον 2ο (θεωρείστε ότι δεν μένει νερό στον 1ο).**
**α) Να υπολογίσετε το τελικό ύψος του νερού στον 2ο σωλήνα.**
**β) Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού σε λίτρα.**
**γ) Αν ο 2ος σωλήνας έχει ύψος 80 cm, θα υπάρξει υπερχείλιση;**

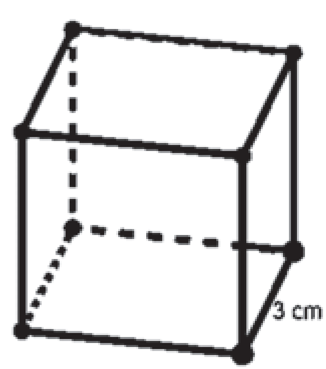



**Λύση**

Ο όγκος του νερού διατηρείται.
Αρχικός όγκος στον 1ο: $V = \pi r_1^2 h_1$.
$V = 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 30 = 1507.20$ cm³.
Στον 2ο, μετά τη μεταφορά:
$$V = \pi r_2^2 h_2 \Rightarrow h_2 = V/(\pi r_2^2).$$
$h_2 = 1507.20 / (3{,}14 \cdot 2^2) = 120.00$ cm.
Μετατροπή σε λίτρα: 1 L = 1000 cm³.
$$V = 1507.20/1000 = 1.507 \text{ L}.$$
Έλεγχος υπερχείλισης:
συγκρίνουμε $h_2$ με 80 cm.
120.00 cm > 80 cm ⇒ υπερχείλιση.

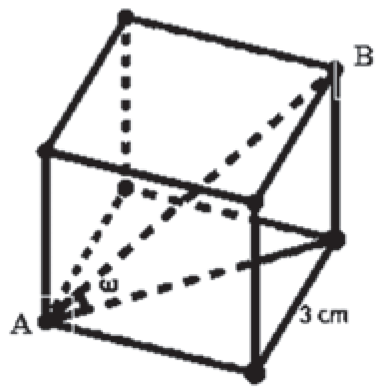
## Άλυτες Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο του κύβου με ακμή 3cm.



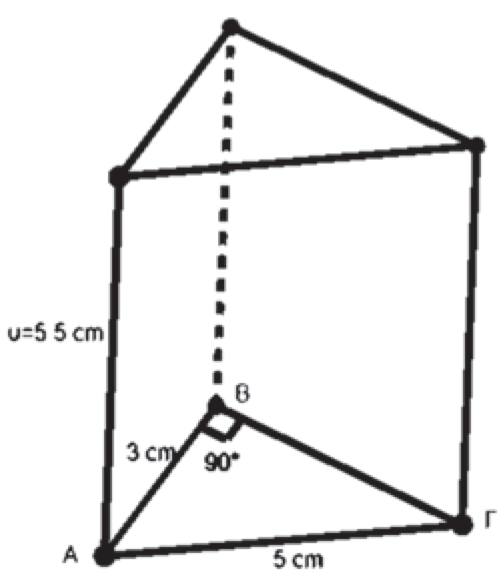
**2.** Στο παραπάνω σχήμα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ συναρτήσει της γωνίας ω.

Δίνεται ότι το μήκος της πλευρά του κύβου είναι ίσο με 3 cm



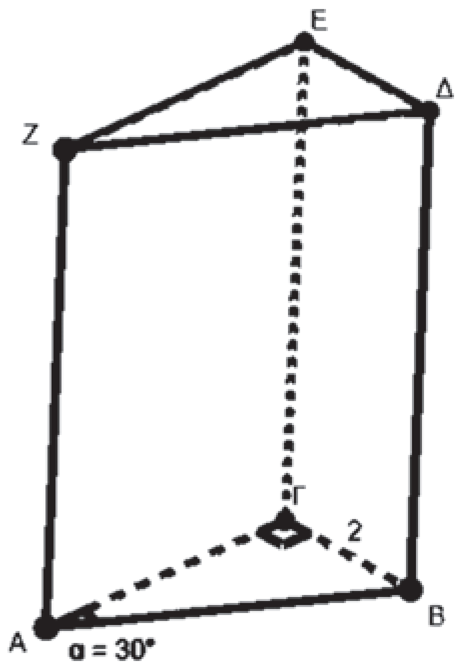

**3.** Στο παραπάνω σχήμα η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο με ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 5 cm.

Να υπολογίσετε το εμβαδό της βάσης, την παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος και τον όγκο του πρίσματος, με ύψος ίσο με 5,5 cm.

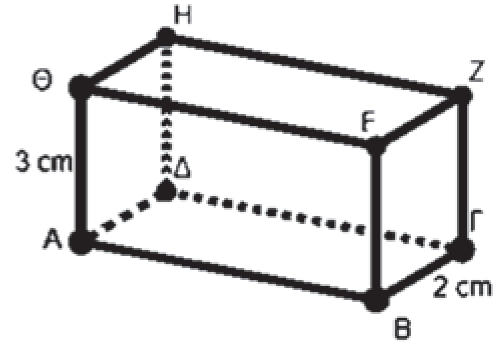



**4.** Στο παραπάνω τριγωνικό πρίσμα η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο με ΒΓ – 2 cm, και γωνία Α με μέτρο 30°

Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών της βάσης, το εμβαδό της βάσης και το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος, αν ΑΖ = 7 cm.




**5.** Στο παραπάνω πρίσμα η βάση ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και έχει εμβαδό 8 $cm^2$. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς ΑΒ., το εμβαδό της επιφάνειας του πρίσματος και ο όγκος του πρίσματος.



**Β΄ Τάξη**

# Μέση Τιμή και Διάμεσος περιγραφή δεδομένων στη στατιστική

**Γουρνά Σωτηρία - Μάλλιαρης Χρήστος**

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Περιγραφικής Στατιστικής στη Β΄ Γυμνασίου, τα μέτρα θέσης — και ειδικότερα η μέση τιμή και η διάμεσος — αποτελούν βασικά εργαλεία περιγραφής δεδομένων. Το παρόν άρθρο επιχειρεί μια εννοιολογική και διδακτική προσέγγιση των δύο μέτρων μέσα από λυμένες ασκήσεις και προβλήματα διερευνητικού χαρακτήρα. Στόχος είναι η μετάβαση από τον υπολογισμό στην ερμηνεία και από την εφαρμογή τύπων στην ανάπτυξη στατιστικής σκέψης.

Πολύ πριν αποκτήσει τον σύγχρονο μαθηματικό της χαρακτήρα, η Στατιστική γεννήθηκε από την ανάγκη καταγραφής της πραγματικότητας. Στις αρχαίες κοινωνίες καταγράφονταν πληθυσμοί, αγαθά και φόροι για διοικητικούς σκοπούς, θέτοντας άθελά τους τα θεμέλια μιας επιστήμης που αργότερα ονομάστηκε «Στατιστική», από το λατινικό *status* (κράτος). Από τον 17ο αιώνα και έπειτα, με την ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων, η Στατιστική απέκτησε μαθηματική δομή και εξελίχθηκε σε εργαλείο ανάλυσης και ερμηνείας δεδομένων.

Στην προσπάθεια κατανόησης ενός συνόλου αριθμητικών πληροφοριών προέκυψε ένα θεμελιώδες ερώτημα: πώς μπορούμε να περιγράψουμε «με έναν αριθμό» ένα πλήθος δεδομένων; Η αναζήτηση ενός αντιπροσωπευτικού κέντρου οδήγησε στη διαμόρφωση των μέτρων θέσης, με πιο χαρακτηριστικά τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

**Μέση Τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων λέγεται το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών των παρατηρήσεων δια του πλήθους των παρατηρήσεων:

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{Άθροισμα τιμών παρατηρήσεων}}{\text{Πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

**Παράδειγμα 1:**

**Η μέση τιμή των παρατηρήσεων 13, 15, 16, 20 είναι:**

$$\bar{x} = \frac{13+15+16+20}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

**Η μέση τιμή ως σημείο ισορροπίας**

Έστω δεδομένα $x_1$, $x_2$, …, $x_\nu$. με μέση τιμή $\bar{x}$. Ισχύει η σχέση $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x}) = 0$ (1)

Η ιδιότητα αυτή δείχνει ότι η μέση τιμή αποτελεί σημείο ισορροπίας των δεδομένων πάνω στην αριθμητική ευθεία. Κάθε απόκλιση «αριστερά» αντισταθμίζεται από αντίστοιχη «δεξιά».

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση (1) στα δεδομένα του παραδείγματος 1 θα έχουμε:

(13-16) + (15-16) + (16-16) + (20-16) = (-3) + (-1) + 0 + 4 = - 3 – 1 + 4 = 0

**Διάμεσος** ενός συνόλου παρατηρήσεων διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά είναι:

- η μεσαία τιμή-παρατήρηση για περιττό αριθμό παρατηρήσεων
- η μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων για άρτιο αριθμό παρατηρήσεων.

**Παράδειγμα 2:**

Η διάμεσος των παρατηρήσεων:

- 12, 14, **18**, 20, 22 είναι το 18.

- 12, 14, **15**, **17**, 20, 22 είναι το $\frac{15+17}{2} = 16$

**Η διάμεσος ως κέντρο θέσης**

Η διάμεσος χωρίζει τα δεδομένα σε δύο ίσου πλήθους ομάδες. Δεν επηρεάζεται από το μέγεθος των ακραίων τιμών, αλλά μόνο από τη θέση τους. Είναι λοιπόν ένα «κέντρο διάταξης», όχι «κέντρο ισορροπίας».

**Άσκηση 1**

**Δίνονται οι βαθμοί που πήραν στο διαγώνισμα των Μαθηματικών 11 μαθητές/μαθήτριες ενός τμήματος Β΄ Γυμνασίου:**

**20, 12, 14, 15, 15, 16, 13, 19, 20, 14, 18**

**Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμολογιών.**

**Λύση**: $Μέση\ τιμή = \frac{20+12+14+15+15+16+13+19+20+14+18}{11} = \frac{176}{11} = 16.$

Η μέση τιμή των βαθμολογιών είναι 16.

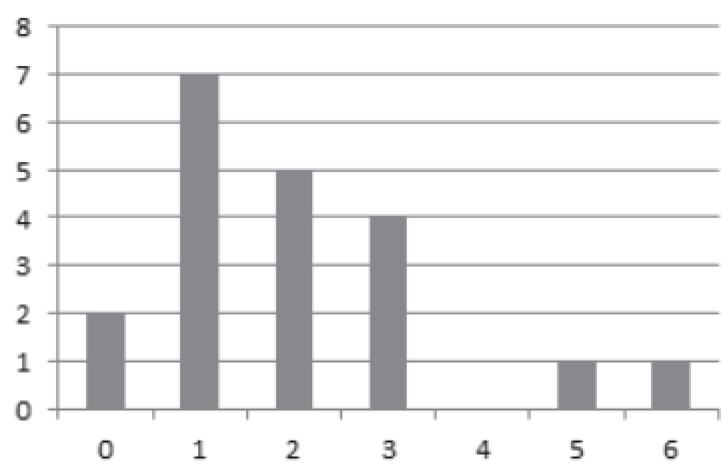
Για να βρούμε τη διάμεσο πρέπει να διατάξουμε τις βαθμολογίες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη:

12, 13, 14, 14, 15, **15**, 16, 18, 19, 20, 20

Το πλήθος των βαθμολογιών είναι περιττός αριθμός (11). Άρα, η διάμεσος είναι ο μεσαίος αριθμός, ο $6^{ος}$ αριθμός δηλαδή, συνεπώς η διάμεσος των βαθμολογιών είναι το 15.

**Άσκηση 2**

**Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει πόσα αδέλφια έχουν οι μαθητές ενός τμήματος της Β΄ Γυμνασίου. Να υπολογίσετε τη διάμεσο και τη μέση τιμή.**




**Λύση:**

Αν «διαβάσουμε» προσεκτικά το διάγραμμα θα δούμε ότι έχουμε τα εξής δεδομένα:
2 μαθητές/μαθήτριες δεν έχουν άλλα αδέλφια,
7 μαθητές/μαθήτριες έχουν 1 αδελφό ή αδελφή,
5 μαθητές/μαθήτριες έχουν 2 αδέλφια,
4 μαθητές/μαθήτριες έχουν 3 αδέλφια,
1 μαθητής/μαθήτρια έχουν 5 αδέλφια και
1 μαθητής/μαθήτρια έχουν 6 αδέλφια

Οι απαντήσεις που περιγράφονται στο διάγραμμα θα μπορούσαν να αποτυπωθούν και ως εξής:
0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 6.

Έχουμε λοιπόν 20 απαντήσεις η μέση τιμή των οποίων είναι:

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{0+0+1+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+3+5+6}{20}$$

$$= \frac{40}{20} = 2$$

Επειδή το πλήθος των απαντήσεων είναι άρτιος αριθμός (20), η διάμεσος θα ισούται με τη μέση τιμή των δύο μεσαίων αριθμών:

0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, **2**, **2**, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 6

Η διάμεσος είναι 2 αδέλφια.

### Άσκηση 3

**Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι το 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι: 3, 4, 5, 6, 11. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς, αν ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου. Η Σωτηρία λέει ότι η διάμεσος των 7 αριθμών είναι επίσης το 4. Συμφωνείτε με τη Σωτηρία;**

**Λύση:**

Έστω x και y οι 2 αριθμοί που μας λείπουν. Επειδή ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου μπορούμε να πούμε ότι y=2x. Η μέση τιμή των 7 αριθμών είναι 5 άρα:

Μέση τιμή=5 ή $\frac{3+4+5+6+11+x+2x}{7} = 5 \Rightarrow \frac{29+3x}{7} = 5 \Rightarrow 29+3x = 35 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

Οι αριθμοί που ψάχνουμε είναι το 2 και το 4. Για τον υπολογισμό της διαμέσου θα πρέπει να διατάξουμε τους 7 αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και θα έχουμε: 2, 3, 4, **4**, 5, 6, 11. Η διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή το 4, άρα η Σωτηρία έχει υπολογίσει σωστά.

### Άσκηση 4

**Δίνεται ο παρακάτω πίνακας δεδομένων:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **92** | **95** | **99** | **93** | **100** | **91** | **95** |

**Να προσθέσετε ακόμα μια τιμή στον πιο πάνω πίνακα ώστε η μέση τιμή και η διάμεσος να μην αλλάξουν.**

**Λύση:**

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής θα εφαρμόσουμε το γνωστό τύπο.

$\text{Μέση τιμή} = \frac{92+95+99+93+100+91+95}{7} = \frac{665}{7} = 95$, θα πρέπει λοιπόν να προσθέσουμε έναν ακόμη αριθμό ώστε η μέση τιμή των 8 αριθμών να εξακολουθεί να είναι το 95, δηλαδή το άθροισμα των αριθμών θα πρέπει να είναι ίσο με $95 * 8 = 760$, άρα ο αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε θα είναι το 95.

Ας δούμε τώρα τη διάμεσο. Αφού διατάξουμε τους 7 αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο θα έχουμε: 91, 92, 93, **95**, 95, 99, 100. Η διάμεσος των οποίων είναι η μεσαία παρατήρηση συνεπώς ο αριθμός 95. Εφόσον θέλουμε να προσθέσουμε έναν αριθμό και η διάμεσος να μην αλλάξει είναι φανερό ότι ο αριθμός αυτός θα είναι το 95. Τελικά ο αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε ώστε η μέση τιμή και η διάμεσος να μην μεταβληθούν είναι ο αριθμός 95.

**Σημείωση:** θα μπορούσαμε μετά τον υπολογισμό του αριθμού εκείνου που πρέπει να προσθέσουμε ώστε να μην αλλάξει η μέση τιμή, του 95 δηλαδή, να υπολογίσουμε τη διάμεσο των 8 αριθμών και να διαπιστώσουμε ότι η διάμεσος παραμένει η ίδια, άρα ο αριθμός που ψάχνουμε είναι το 95.

### Άσκηση 5

**Να βρείτε 5 αριθμούς με μέση τιμή 10 και διάμεσο 8. Έχει μοναδική λύση η άσκηση;**

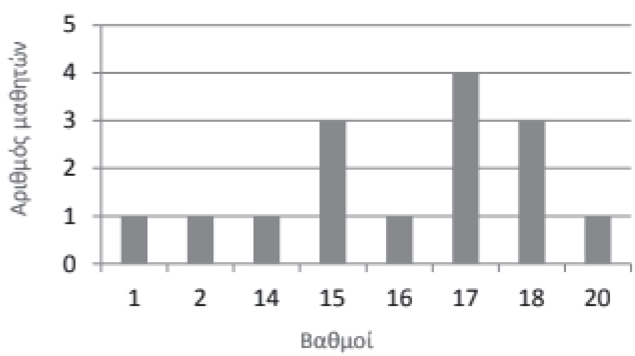
**Λύση:**

Ας ξεκινήσουμε με τη μέση τιμή. Αφού η μέση τιμή των 5 αριθμών είναι το 10 σημαίνει ότι το άθροισμα αυτών των αριθμών θα πρέπει να ισούται με 50. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι το 8 και επειδή οι αριθμοί είναι περιττού πλήθους θα πρέπει ο μεσαίος να είναι ο αριθμός 8. Ας τοποθετήσουμε τους 5 αριθμούς σε αύξουσα σειρά: α, β, 8, γ, δ. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει α+β+8+γ+δ=50 ή α+β+γ+δ=42, επιπλέον οι αριθμοί α και β θα πρέπει να είναι μικρότεροι ή ίσοι του 8 και ταυτόχρονα οι αριθμοί δ και δ θα πρέπει να είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 8. Είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση. Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες λύσεις της άσκησης: 6, 7, 8, 9, 20 ή 6, 7, 8, 10, 19 ή 5, 7, 8, 10, 20.

## Για εξάσκηση:

### Άσκηση 1

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται οι βαθμοί των μαθητών/μαθητριών μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμών.




(**Απ**. Μέση τιμή $= \frac{220}{11} = 20$, Διάμεσος=17)

### Άσκηση 2

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 16, 15, 13, 12. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των αριθμών. (**Απ.** Μέση τιμή=14, Διάμεσος=14)

### Άσκηση 3

Δίνονται οι παρατηρήσεις 10, 11, 12, 13, 30. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων. (**Απ.** Μέση τιμή=15,2 και Διάμεσος=12)

### Άσκηση 4

Βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων: 4, 7, 9, 10, 13, 15
(**Απ.** Μέση τιμή=9,67 και Διάμεσος=9,5)

### Άσκηση 5

Σε ποιο από τα παρακάτω σύνολα δεδομένων η μέση τιμή είναι ο ίδιος αριθμός; Σε ποια ισχύει το ίδιο για τη διάμεσο;

- **i.** 6, 2, 5, 4, 3, 4, 1
- **ii.** 2, 3, 7, 3, 8, 3, 2
- **iii.** 3, 1, 2, 1, 3, 2, 2
- **iv.** 4, 3, 4, 3, 4, 6, 4

(**Απ.** (i) και (iv) έχουν ίδια διάμεσο=4, (ii) και (iv) έχουν ίδια Μέση τιμή=4)

Γ΄ Τάξη

# Ασκήσεις τριγωνομετρίας

Χρήστος Κουστέρης

**Άσκηση 1. Αν $ημω = \frac{4}{5}$ και $90^\circ < ω < 180^\circ$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.**

**Λύση:** Ισχύει : $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + συν^2ω = 1$

$$\Leftrightarrow συν^2ω = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow συν^2ω = \frac{9}{25} \overset{συνω<0}{\Leftrightarrow} συνω = -\frac{3}{5}$$

Επομένως $ημω = \frac{4}{5}$ και $συνω = -\frac{3}{5}$ άρα $εφω = \frac{ημω}{συνω} \Leftrightarrow εφω = -\frac{4}{3}$

**Άσκηση 2. Αν $εφω = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $0^\circ < ω < 90^\circ$ ,να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.**

**Λύση:** $εφω = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{ημω}{συνω} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2ημω = \sqrt{5}συνω \Leftrightarrow 4ημ^2ω = 5συν^2ω \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left(1 - συν^2ω\right) = 5συν^2ω \Leftrightarrow 4 - 4συν^2ω = 5συν^2ω \Leftrightarrow 9συν^2ω = 4 \Leftrightarrow συν^2ω = \frac{4}{9} \overset{συνω>0}{\Leftrightarrow} \boxed{συνω = \frac{2}{3}}$$

Άρα $εφω = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{ημω}{συνω} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow ημω = \frac{\sqrt{5}συνω}{2} \Leftrightarrow ημω = \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3}}{2} \Leftrightarrow ημω = \frac{\sqrt{5}}{3}$

**Άσκηση 3. Αν ισχύει $ημx + συνx = \frac{1}{4}$ με $0^\circ < x < 90^\circ$ να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις (α)** $ημx \cdot συνx$ **(β)** $ημ^2x \cdot συνx + ημx \cdot συν^2x$ **(γ)** $\frac{1}{ημx} + \frac{1}{συνx}$ **(δ)** $ημ^3x + συν^3x$

**Λύση: (α)** $ημx + συνx = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(ημx + συνx\right)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow ημ^2x + 2ημx \cdot συνx + συν^2x = \frac{1}{16}$

$$\Leftrightarrow 1 + 2ημx \cdot συνx = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2ημx \cdot συνx = -\frac{15}{16} \Leftrightarrow ημx \cdot συνx = -\frac{15}{32}$$

**(β)** $ημ^2x \cdot συνx + ημx \cdot συν^2x = ημx \cdot συνx\left(ημx + συνx\right) = -\frac{15}{32} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{15}{128}$

**(γ)** $\frac{1}{ημx} + \frac{1}{συνx} = \frac{συνx + ημx}{ημx \cdot συνx} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{15}{32}} = -\frac{8}{15}$

**(δ)** $\eta\mu^3x+\sigma\upsilon\nu^3x=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu^2x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{15}{32}\right)=\frac{47}{128}$

**Άσκηση 4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει** $(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2\le 2$

**Λύση:** $(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2\le 2\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega-2\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega-2\le 0\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega-2\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\le 0\Leftrightarrow 1-2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega-2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\ge 0\Leftrightarrow(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)^2\ge 0$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επομένως θα ισχύει και η ισοδύναμή της αρχική

**Άσκηση 5. Αν** $0^\circ<\omega<90^\circ$ **να αποδείξετε ότι** $\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}}=\frac{1+\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

**Λύση:** $\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}}=\frac{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}\right)\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}\right)}{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}\right)\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}^2+2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}^2}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}^2-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}^2}$$

$$=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega+2\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu\omega)(1-\sigma\upsilon\nu\omega)}+1-\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega-1+\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{2+2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{2\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{\eta\mu^2\omega}}{2\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{2+2\eta\mu\omega}{2\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{2(1+\eta\mu\omega)}{2\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{1+\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

**Άσκηση 6. Αν x, y δύο γωνίες να αποδείξετε ότι** $\eta\mu^2x+\eta\mu^2y+2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y\le 2$

**Λύση:** $\eta\mu^2x+\eta\mu^2y+2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\le 2$

$\eta\mu^2x+\eta\mu^2y+2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\le 1+1$

$\eta\mu^2x+\eta\mu^2y+2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\le \eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2y+\sigma\upsilon\nu^2y$

$2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\le\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2y$

$\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2y-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\ge 0$

$(\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y)^2\ge 0$ το οποίο ισχύει πάντα ,άρα θα ισχύει και η αρχική ανισότητα η οποία κατέληξε σε αυτήν με ισοδύναμες σχέσεις.

## Συνδυαστικό Θέμα

**Α.** Για οποιαδήποτε γωνία θ να αποδείξετε ότι: $(\eta\mu\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (2\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 5$.

**Β.** Αν για την αμβλεία γωνία θ ισχύει : $5\eta\mu^2\theta - 29\eta\mu\theta + 20 = 0$

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ και στην συνέχεια να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς.

### Λύση

**Α.** Παίρνουμε το 1ο μέλος της σχέσης :

$$(\eta\mu\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (2\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \eta\mu^2\theta - 2\cdot\eta\mu\theta\cdot 2\sigma\upsilon\nu\theta + (2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (2\eta\mu\theta)^2 + 2\cdot 2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$= \eta\mu^2\theta - 4\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\eta\mu^2\theta + 4\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 5\eta\mu^2\theta + 5\sigma\upsilon\nu^2\theta = 5(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 5\cdot 1 = 5$$

**Β.** Η εξίσωση $5\eta\mu^2\theta - 29\eta\mu\theta + 20 = 0$ είναι 2ου βαθμού με άγνωστο το $\eta\mu\theta$ .

Θέτουμε $\eta\mu\theta = x$ επομένως έχουμε : $5x^2 - 29x + 20 = 0$

$\Delta = 29^2 - 4\cdot 5\cdot 20 = 841 - 400 = 441$

Άρα $x = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2\cdot 5} = \frac{29 + 21}{10} = \begin{cases} x = \frac{29+21}{10} = 5 \\ x = \frac{29-21}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{cases}$

Επειδή ισχύει : $0 \le \eta\mu\theta \le 1$ η λύση $x = 5$ απορρίπτεται επομένως $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$

Ισχύει : $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ για οποιαδήποτε γωνία $\theta$ .

Αντικαθιστώντας $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ έχουμε : $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{25}$$

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{\frac{9}{25}}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}}$

Δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$

Επειδή η γωνία είναι αμβλεία $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$

Επίσης $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ άρα $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

## Γ΄ Τάξη

# Επιλεγμένα Θέματα Άλγεβρας

**Τάκης Χρονόπουλος**

Τα θέματα αυτά είναι ένας οδηγός μελέτης με βασικές τεχνικές. Ξεκινούν από ένα μέτριο βαθμό δυσκολίας, ώστε να μην επιτρέπουν επιφανειακή αντιμετώπιση και ο κάθε μαθητής να αντιλαμβάνεται ότι θα πρέπει να προσπαθήσει περισσότερο. Δεν είναι κλειστού τύπου ερωτήματα, γιατί επιδιώκεται η καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης. Έχει παρατηρηθεί στα αποτελέσματα των γραπτών εξετάσεων, ότι η εν λόγω μεθοδολογία συμβάλλει στη βελτίωση της απόδοσης των μαθητών και την εμπέδωση της εξεταζόμενης ύλης.

### Αλγεβρικές Παραστάσεις και ταυτότητες

**Α.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

**i)** $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ **ii)** $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**iii)** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ **iv)** $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

**Β.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

**i.** (☺ -☺☹)$^2$ **ii.** (3😐 -☺)(3😐 +☺) **iii.** $\left(3\sqrt{2}+2\right)^2$ iv. $\left(3x^2+\frac{2}{3}\right)^3$

**Γ. i)** Να κάνετε τις πράξεις: $(2x-1)(x+1)(2x-3)$

**ii)** Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών α, β, γ, δ ώστε το πολυώνυμο $(2x-1)(x+1)(2x-3)$ να είναι ίσο με το πολυώνυμο $\alpha x^3 + (\beta-2)x^2 - \gamma x + 5\delta - 1$ .

**Δ.** Να αποδείξετε ότι

**i)** $6x^3 - 5x^2 - 21x - 10 = (3x+2)(2x^2 - 3x - 5)$

**ii)** $(x^2 - x - 3)^2 = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 9$

**iii)** $2(x-1)^2 - (2x-1)^2 = 4 - (x-1)(2x-3) - 5x$ .

**Ε.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^2-3x+5$ .

**i)** Να διατάξετε τις τιμές $P(-2)$ , $P(0)$ και $P(1)$.

**ii)** Να λυθεί η εξίσωση $2x + 1 = 2\,P(2)$ .

**iii)** Να λυθεί η εξίσωση $9\,P(2-x) = P(-3x)$ .

**ΣΤ. i)** Να αποδείξετε ότι $(3x+2)^2 + (2-3x)^2 + 2(3x+2)(2-3x) - 16=0$

**ii)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \left(3\sqrt{7}+2\right)^2 + \left(2-3\sqrt{7}\right)^2 + 2\left(2-3\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{7}+2\right) - \left(2\sqrt{7}\right)^2$$

**iii)** Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{3}{2024}+2\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2024}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2024}+2\right)\left(2-\frac{3}{2024}\right) = \left(\frac{3}{2026}+2\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2026}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2026}+2\right)\left(2-\frac{3}{2026}\right)$$

**Ζ.** Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων: $A = 1057^3 - 3\cdot 1057^2 \cdot 57 + 3\cdot 1057 \cdot 57^2 - 57^3$

$$B=\left(\frac{2011}{2023}\right)^2+2\cdot\frac{2011}{2023}\cdot\frac{12}{2023}+\left(\frac{12}{2023}\right)^2$$

## Παραγοντοποίηση και Εξισώσεις, Κλασματικές Αλγεβρικές Παραστάσεις

**Α.** Να παραγοντοποιηθούν:

**i)** $12-3\alpha^2$ **ii)** $x^3-3x^2-x+3$

**iii)** ☺$^2$ +4-4☺ **iv)** 😐☹$^3$- 😐☹

**v)** □$^2$○$^5$–64○$^7$ **vi)** □○–□Δ – ◊○+◊Δ

**vii)** –9Δ$^2$ +12Δ□–4□$^2$ **viii)** $36x^2-4(x-2y)^2$

**ix)** $\frac{49}{9}+\omega^2-\frac{14\omega}{3}$ **x)** $3-\frac{25\gamma^2}{16}$

**xi)** $5x^3y-10x^2y+3xy-6y$ **xii)** $6x^{30}y^{20}-20x^{40}y^{50}$

**xiii)** $9-\alpha^2+4\alpha\beta-4\beta^2$ **xiv)** $27x^3-27x^2+9x-1$

**Β.** Να λυθούν οι εξισώσεις

**i)** $(x^2-x)(x^2-9)(x^2+4)(3x-4)(4x+3)^2=0$ **ii)** $3x^4-2x^3+67=6x^2-4x+67$

**iii)** $27x^3-54x^2+36x-6=2$ **iv)** $9x^3-12x^2+3x+67=67-x$

**v)** $2023x^{2024}-7x^3+2x^2-2x-5=2023x^{2024}-x^3-x^2+10x-11$

**Γ.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K=\frac{3x^{2026}-12x^{2024}}{6x^3-12x^2+4x-8},\quad \Lambda=\frac{2023x^3-2023x^2+2023x-2023}{2023-2023x^4}$$

**i)** Για ποιες τιμές του χ ορίζονται; ii) Να απλοποιηθούν. **iii)** Για ποιες τιμές του x μηδενίζονται;

**Δ.** Να παραγοντοποιηθούν

**i)** $3\alpha^2+10\alpha\beta-13\beta^2$ **ii)** $36x^4+11x^2+1$

**iii)** $3x^4+x^2-4$ **iv)** $\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2-6\alpha+18\beta+9$

## Εξισώσεις και ανισώσεις

**Α.** Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

**i)** $(x^2-x-2)(2x^2-5x+1)(3-x^2+2x)=0$ **ii)** $(7x^2-5x)(4x^2-12)(2x-3)(2x^2+5)=0$

**iii)** $3-(2x-1)^2=x-(2x-1)(3x+2)$ **iv)** $(x-1)(2x-1)(3x+2)=(2x-1)^3-2x^3$

**v)** $5x^3-4x^2-8x-6=3x^3-x^2+3x-6$ **vi)** $5x^3-4x^2-6x+2=3x^3-3x^2+2x-2$

**vii)** $2x^3-x^2-4x=2x^2-x-4$ **viii)** $6x^3-3x^2-12x=2x^2-x-4$

**ix)** $(2x^2-x-4)(7x^3+5x^2)=(2x^2-x-4)(5x^3+4x^2-67x)$

**Β.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K=\frac{3x^2-5x+2}{5x^2-3x-2},\ ,\ \Lambda=\frac{x^2-2025x-2026}{-x^2+2024x+4052},\ M=\frac{6x^3-x^2-2x}{6x^3+7x^2+2x}$$

**i)** Για ποιες τιμές του χ ορίζονται; **ii)** Να απλοποιηθούν. **iii)** Για ποιες τιμές του x μηδενίζονται;

**Γ.** Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου που έχει περίμετρο:

**i)** 14 cm και εμβαδόν 12 $cm^2$ **ii)** 16 cm και διαγώνιο $\sqrt{34}$ cm

**Δ.** Για ποιες τιμές του χ ισχύουν:

**i)** $\frac{x-2}{3}-x<2-\frac{2x-1}{4}-\frac{5x+6}{6}$ **ii)** $12x+4\le 3x-5\le 25x-7$

**iii)** $\begin{cases}\frac{x-2}{3}\le\frac{3x+1}{2}\\ \frac{2x-3}{2}\ge\frac{x-1}{4}\end{cases}$ **iv)** $\begin{cases}-5\le x\le -1\\ x>-\frac{70}{3}\\ x<-\frac{7}{5}\end{cases}$

**Ε.** Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες. Πότε ισχύει το ίσον;

**i)** $9x^2+4y^2-x-y+27\ge 5x-21y+1$ **ii)** $16\alpha^2+2\ge 8\alpha$

## Συστήματα

**Α.** Να λύσετε τα συστήματα

**α)** $\begin{cases}x+2y=-3\\ 3x-4y=11\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}x^2+2y^2=-3\\ 3x^2-4y^2=11\end{cases}$ **γ)** $\begin{cases}\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=-3\\ \frac{3}{\alpha}-\frac{4}{\beta}=11\end{cases}$

**Β.** Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}2x+5y=9\\ 3x+y=7\end{cases}$

**α)** Να κατασκευάσετε πρόβλημα, που να οδηγεί στο παραπάνω σύστημα.
**β)** Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

**Γ**. Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4€. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

**Δ.** Δίνονται τα συστήματα: $\begin{cases}\frac{x-2}{3}-\frac{y+1}{4}=2-\frac{3x-1}{6}-\frac{y}{2}\\ x(y+2)+3x=3+y(x-5)\end{cases}$ (Σ1) και $\begin{cases}10x+3y=37\\ 5x+5y=3\end{cases}$ (Σ2)

**α)** Να αποδείξετε ότι το (Σ1) είναι ισοδύναμο με το (Σ2) **β)** Να λύσετε το σύστημα (Σ1)

**Ε.** Να κατασκευάσετε γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους που να έχει μοναδική λύση την: $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

**ΣΤ**. Να εξετάσετε αν οι τρείς ευθείες 2x+3y=4, 4x-5y=2, 3x+2y=1 συντρέχουν, δηλαδή διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο.

Γ΄ Τάξη

# Ένα παράδοξο στα στοχαστικά μαθηματικά

**Δημήτρης Διαμαντίδης και Αικατερίνη Σχίζα**

Στην Ρομποτολάνδη, μια χώρα που οι πολίτες της παρακολουθούν μανιωδώς τις τεχνολογικές εξελίξεις και αγαπούν τα μαθηματικά γίνεται κάθε χρόνο ένας μεγάλος διαγωνισμός ρομποτικής.


Στην πρώτη φάση του διαγωνισμού κάθε σχολείο συμμετέχει με όσες τάξεις του θέλει. Δηλαδή μπορούν να συμμετέχουν παιδιά από όλες τις τάξεις (Α΄, Β΄ και Γ΄). Ο διαγωνισμός γίνεται Σάββατο και η ημερομηνία είναι κοινή για όλα τα παιδιά που συμμετέχουν, σε όλη τη Ρομποτολάνδη.

Τα παιδιά προσέρχονται στο χώρο του διαγωνισμού, που είναι συνήθως ένα σχολείο και τους δίνεται ένα πρόβλημα, το οποίο λύνεται με έναν αλγόριθμο που πρέπει να σκεφτούν και να διατυπώσουν. Το πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μια λύσεις. Έχουν στη διάθεσή τους τρεις ώρες. Όταν τελειώσουν παραδίδουν τον αλγόριθμό τους (τη λύση τους) σε ένα χαρτί με το όνομά τους το οποίο σφραγίζεται, για να είναι ανώνυμη και αντικειμενική η βαθμολόγηση. Στη συνέχεια οι αλγόριθμοι αξιολογούνται από την κριτική επιτροπή, η οποία αποφασίζει ποια παιδιά αντιμετώπισαν επιτυχώς το πρόβλημα με τον αλγόριθμό τους. Στη συνέχεια ανακοινώνονται τα αποτελέσματα στα σχολεία, καθώς και οι σωστές λύσεις-αλγόριθμοι.

Στη δεύτερη φάση του διαγωνισμού υπάρχει ένας κάπως περίεργος κανόνας. Κάθε σχολείο συμμετέχει με μόνο μία τάξη του. Το ίδιο το σχολείο επιλέγει ποια τάξη θα είναι αυτή. Έτσι κληρώνεται ένα παιδί από κάθε τάξη, για να εξηγήσει στην κριτική επιτροπή, μέσω τηλεδιάσκεψης, κάποια από τις σωστές λύσεις και να απαντήσει σε ερωτήσεις: γιατί αυτή η λύση απαντά στο πρόβλημα, ποιο είναι το σκεπτικό, κ.λπ..

Οι μαθητές και μαθήτριες δύο τάξεων του 10ου Γυμνασίου της Κωδικούπολης (είναι η πρωτεύουσα της Ρομποτολάνδης), της Β΄ και της Γ΄ τάξης, συμμετείχαν στον διαγωνισμό. Στο παρακάτω πίνακα 1 φαίνονται οι συμμετοχές, ανά τάξη και ανά φύλο.

| Τάξη | Κορίτσια | Αγόρια | Σύνολο |
|---|---|---|---|
| Β΄ | 10 | 30 | 40 |
| Γ΄ | 60 | 10 | 70 |
| Σύνολο | 70 | 40 | 110 |

**Πίνακας 1: Τα παιδιά που συμμετείχαν από κάθε τάξη ανά φύλο, αριθμητικά.**

Παρακάτω (πίνακας 2) φαίνεται πόσα από αυτά τα παιδιά αντιμετώπισαν σωστά το πρόβλημα της πρώτης φάσης, με τον αλγόριθμο που έγραψαν.

| Τάξη | Κορίτσια | Αγόρια | Σύνολο |
|---|---|---|---|
| Β΄ | 9 | 18 | 27 |
| Γ΄ | 48 | 4 | 52 |
| Σύνολο | 57 | 22 | 79 |

**Πίνακας 1: Τα παιδιά που συμμετείχαν από κάθε τάξη ανά φύλο, αριθμητικά.**

Στους πίνακες 3 και 4 που ακολουθούν φαίνεται το ποσοστό επιτυχίας των παιδιών ανά φύλο και ανά τάξη.

| Κορίτσια | | | |
|---|---|---|---|
| Τάξη | Το έλυσαν | Σύνολο συμμετεχουσών | Ποσοστό επιτυχίας |
| Β΄ | 9 | 10 | 90% |
| Γ΄ | 48 | 60 | 80% |

**Πίνακας 3: Τα κορίτσια που έλυσαν το πρόβλημα ανά τάξη.**

Στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι στα κορίτσια, η Β΄ τάξη είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας από τη Γ΄ τάξη (90% και 80%, αντίστοιχα).
Το ίδιο παρατηρούμε και για τα αγόρια (πίνακας 4), αλλά με διαφορετικά ποσοστά: 60% για τη Β΄ τάξη και 40% για τη Γ΄ τάξη.

| Αγόρια | | | |
|---|---|---|---|
| **Τάξη** | **Το έλυσαν** | **Σύνολο συμμετεχόντων** | **Ποσοστό επιτυχίας** |
| **Β΄** | 18 | 30 | 60% |
| **Γ΄** | 4 | 10 | 40% |

**Πίνακας 4: Τα αγόρια που έλυσαν το πρόβλημα ανά τάξη.**

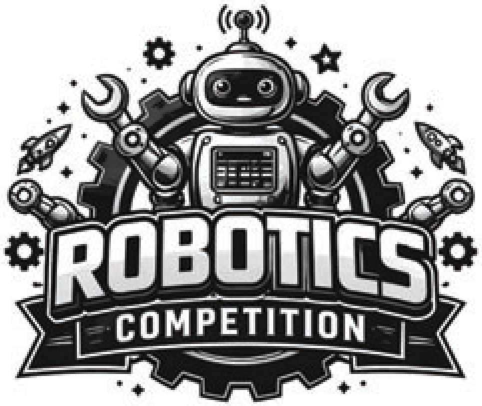
Ο υπεύθυνος του 10ου Γυμνασίου της Κωδικούπολης για τον διαγωνισμό, σκέφτηκε το εξής. Ας υποθέσουμε ότι για τη δεύτερη φάση του διαγωνισμού το σχολείο επιλέγει τη Β΄ τάξη για να συμμετέχει:

- Αν το παιδί που θα επιλεγεί είναι κορίτσι, τότε η πιθανότητα να κληρωθεί ένα παιδί που έχει λύσει σωστά το πρόβλημα της πρώτης φάσης είναι $\frac{9}{10} = 0{,}9$ ή 90%.
- Αν το παιδί που θα επιλεγεί είναι αγόρι, τότε η πιθανότητα να κληρωθεί ένα παιδί που έχει λύσει σωστά το πρόβλημα της πρώτης φάσης είναι $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ ή 60%.

Αν υποθέσουμε ότι για τη δεύτερη φάση του διαγωνισμού το σχολείο επιλέγει τη Γ΄ τάξη, τότε, οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

- Αν το παιδί που θα επιλεγεί είναι αγόρι, τότε η πιθανότητα να κληρωθεί ένα παιδί που έχει λύσει σωστά το πρόβλημα της πρώτης φάσης είναι $\frac{48}{60} = 0{,}8$ ή 80%.
- Αν το παιδί που θα επιλεγεί είναι αγόρι, τότε η πιθανότητα να κληρωθεί ένα παιδί που έχει λύσει σωστά το πρόβλημα της πρώτης φάσης είναι $\frac{4}{10} = 0{,}4$ ή 40%.

Για τη Β΄ τάξη φαίνεται λοιπόν ότι, ανά φύλο, υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κληρωθεί ένα παιδί που έχει λύσει το πρόβλημα, σε σύγκριση με τη Γ΄ τάξη. Ο υπεύθυνος του διαγωνισμού σκέφτηκε λοιπόν ότι αν θέλει το σχολείο να υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κληρωθεί παιδί που έχει λύση το πρόβλημα, τότε θα πρέπει να επιλέξει τη Β΄ τάξη. Είναι όμως έτσι;




Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται το πλήθος και το ποσοστό των παιδιών των ίδιων τάξεων του 10ου Γυμνασίου της Κωδικούπολης, αυτή τη φορά ανεξαρτήτως φύλου των παιδιών.

| Αγόρια και κορίτσια μαζί | | | |
|---|---|---|---|
| **Τάξη** | **Το έλυσαν** | **Σύνολο που συμμετείχε** | **Ποσοστό** |
| **Β΄** | 27 | 40 | 67,5% |
| **Γ΄** | 52 | 70 | 74% |

**Πίνακας 5: Τα παιδιά (ανεξαρτήτως φύλου) που έλυσαν το πρόβλημα ανά τάξη.**

Όπως φαίνεται:

- Αν το σχολείο επιλέξει τη Β΄ τάξη για τη δεύτερη φάση του διαγωνισμού, τότε η πιθανότητα να κληρωθεί ένα παιδί που έχει λύσει σωστά το πρόβλημα της πρώτης φάσης είναι $\frac{27}{40} = 0{,}675$ ή 67,5%.
- Αν το σχολείο επιλέξει τη Γ΄ τάξη για τη δεύτερη φάση του διαγωνισμού, τότε η πιθανότητα να κληρωθεί ένα παιδί που έχει λύσει σωστά το πρόβλημα της πρώτης φάσης είναι $\frac{52}{70} = 0{,}74$ ή 74%.

Ο υπεύθυνος του διαγωνισμού βρέθηκε μπροστά σε μια έκπληξη! Όταν εξέτασε τα στοιχεία ανά φύλο φάνηκε ότι στην Β΄ τάξη θα υπήρχε μεγαλύτερη πιθανότητα για κλήρωση παιδιού που έχει λύσει το πρόβλημα της πρώτης φάσης. Όμως όταν εξέτασε τα στοιχεία ανεξαρτήτως φύλου, τότε διαπίστωσε ότι η

αντίστοιχη πιθανότητα είναι μεγαλύτερη στη Γ΄ τάξη.
Στον πίνακα 6 φαίνεται ότι το ποσοστό επιτυχίας μεταξύ των κοριτσιών που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι πράγματι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό των αγοριών.

| Και οι δύο τάξεις μαζί | | | |
|---|---|---|---|
| **Φύλο** | **Το έλυσαν** | **Σύνολο που συμμετείχε** | **Ποσοστό** |
| **Κορίτσια** | 57 | 70 | 81,4% περίπου |
| **Αγόρια** | 22 | 40 | 55% |

**Πίνακας 6: Τα παιδιά (ανεξαρτήτως τάξης) που έλυσαν το πρόβλημα ανά φύλο.**

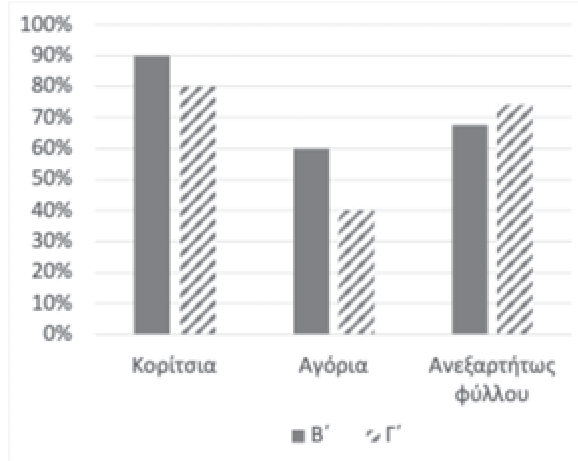
| Πιθανότητες να έλυσε το πρόβλημα | | | |
|---|---|---|---|
| | **Κορίτσια** | **Αγόρια** | **Και τα δύο φύλα** |
| **Β΄** | 0,9 | 0,6 | 0,675 |
| **Γ΄** | 0,8 | 0,4 | 0,74 |
| **Και οι δύο τάξεις** | 0,814 περίπου | 0,55 | |

**Πίνακας 7: Πιθανότητες, αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί, να έχει λύσει το πρόβλημα.**

Στον πίνακα 7 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες πιθανότητες, οι οποίες προκύπτουν από τον πίνακα 1 και από τους υπολογισμούς που προηγήθηκαν.

Δηλαδή:

- Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κορίτσι της Β΄, τότε όπως φαίνεται στο αντίστοιχο κελί του πίνακα, η πιθανότητα να έλυσε το πρόβλημα είναι 0,9.
- Αν επιλέξουμε τυχαία ένα αγόρι της Γ΄ αυτή η πιθανότητα είναι 0,4.
- Αν επιλέξουμε τυχαία κορίτσι, ανεξαρτήτως τάξης η πιθανότητα είναι 0,814 περίπου.
- Αν επιλέξουμε παιδί της Β΄ ανεξαρτήτως φύλου η πιθανότητα είναι 0,675, μικρότερη από την αντίστοιχη πιθανότητα για τη Γ΄ που είναι 0,74.




**Διάγραμμα 1: Το ποσοστό των παιδιών που απάντησαν σωστά στον διαγωνισμό, ανά τάξη, ως προς φύλο και ανεξαρτήτως φύλου.**

Στο διάγραμμα 1 βλέπουμε αυτό που παρατηρήσαμε και στα αριθμητικά δεδομένα των πινάκων 3, 4 και 5, το οποίο εξέπληξε τον υπεύθυνο του διαγωνισμού και μοιάζει «παράδοξο»: το ποσοστό των παιδιών που απάντησαν σωστά σε κάθε φύλο είναι υψηλότερο στην Β΄ τάξη, από την Γ΄. Αντίθετα, αν το δούμε ανεξαρτήτως φύλου, το ίδιο ποσοστό είναι μεγαλύτερο στην Γ΄ τάξη.
Γιατί συμβαίνει αυτό, όμως;
Το βλέπουμε στους υπολογισμούς μας, δεν αμφισβητείται!
Αλλά για να καταλάβουμε την αιτία του «παραδόξου», θα δούμε τη λύση κάπως αλλιώς.

| Τάξη | Κορίτσια | Αγόρια | Σύνολο |
|---|---|---|---|
| **Β΄** | 10 | 30 | 40 |
| **Γ΄** | 60 | 10 | 70 |

**Πίνακας 8: Τα παιδιά κάθε τάξης ανά φύλο, αριθμητικά.**

| Τάξη | Κορίτσια | Αγόρια |
|---|---|---|
| **Β΄** | $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ | $\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$ |
| **Γ΄** | $\frac{60}{70}=\frac{6}{7}$ | $\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$ |

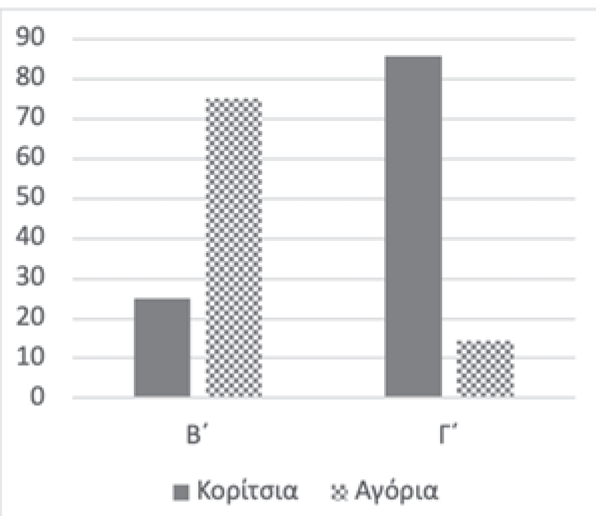
**Πίνακας 9: Τα παιδιά κάθε τάξης ανά φύλο, ως κλάσμα του συνόλου.**

| Τάξη | Κορίτσια | Αγόρια |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| **Β΄** | 25% | 75% |
| **Γ΄** | 86% περίπου | 14% περίπου |

**Πίνακας 10: Τα παιδιά κάθε τάξης ανά φύλο, ως ποσοστό.**

Στους τρεις παραπάνω πίνακες φαίνεται η κατανομή αγοριών και κοριτσιών σε κάθε τάξη αριθμητικά, σαν κλάσμα του συνόλου και σαν ποσοστό. Όπως βλέπουμε και στο διάγραμμα 2 που ακολουθεί στην Β΄ τάξη οι περισσότερες συμμετοχές ήταν από αγόρια (75% ή 0,75) και οι λιγότερες από κορίτσια (25% ή 0,25), ενώ στην Γ΄ τάξη οι περισσότερες συμμετοχές ήταν από κορίτσια (86% ή 0,86) και οι λιγότερες από αγόρια (14% ή 0,14). Η διαφορά αυτή είναι σημαντική και στις δύο τάξεις, υπέρ των αγοριών στην Β΄ και υπέρ των κοριτσιών στην Γ΄.




**Διάγραμμα 2: Το ποσοστό των παιδιών που συμμετείχαν στον διαγωνισμό από κάθε φύλο, ανά τάξη.**

Άρα:

- Σε μια κλήρωση μεταξύ των παιδιών της Β΄ τάξης είναι πιο πιθανό να κληρωθεί αγόρι (0,75), από κορίτσι (0,25).
- Αντίστοιχα, σε μια κλήρωση μεταξύ των παιδιών της Γ΄ τάξης είναι πιο πιθανό να κληρωθεί κορίτσι (0,86 περίπου), από αγόρι (0,14 περίπου).

Άρα η τάξη στην οποία παίζει μεγάλο ρόλο η «επίδοση» των κοριτσιών είναι η Γ΄, ενώ αντίστοιχα η «επίδοση» των αγοριών είναι σημαντική στην Β΄.

Όμως, για τα κορίτσια η πιθανότητα να έχουν απαντήσει σωστά στο πρόβλημα είναι μεγαλύτερη στην Β΄ (0,9) από την Γ΄ (0,8). Αντίστοιχα, για τα αγόρια η πιθανότητα να έχουν απαντήσει σωστά στο πρόβλημα είναι μεγαλύτερη στην Β΄ (0,6) και

Αυτό εκφράζεται υπολογιστικά με συντελεστές βάρους. Ο συντελεστής βάρους για τα αγόρια της Β΄ τάξης είναι 0,75, γιατί από τα παιδιά της Β΄ που συμμετείχαν το 75% ήταν αγόρια. Άρα, αν επιλεγεί τυχαία ένα παιδί της Β΄ η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,75. Αντίστοιχα για τα κορίτσια ο συντελεστής βάρους είναι 0,25.

Αν $P_B(Σ)$ είναι η πιθανότητα σωστής λύσης στην Β΄ τάξη, τότε σε αυτή συμβάλλει η πιθανότητα επιτυχίας των κοριτσιών 0,9, κατά 25% ή 0,25 και η πιθανότητα επιτυχίας των αγοριών 0,6 κατά 75% ή 0,75. Άρα είναι:

$$P_B(\Sigma) = 0{,}25 \cdot 0{,}9 + 0{,}75 \cdot 0{,}6 = 0{,}675$$

Έτσι λοιπόν η πιθανότητα επιτυχίας στην Β΄ «τραβιέται» προς το 0,6, λόγω του μεγαλύτερου βάρους 0,75.

Πράγματι, αυτή είναι η πιθανότητα που έχουμε ήδη υπολογίσει στους πίνακες 5 και 7.

Αντίστοιχα, αν συμβολίσουμε με $w_\alpha$ και $w_\kappa$ τους συντελεστές βάρους για τα αγόρια και τα κορίτσια στην τάξη αυτή και με $P_\Gamma(A)$ και $P_\Gamma(K)$ τις πιθανότητες σωστής λύσης για αγόρι της Γ΄ και κορίτσι της Γ΄, αντίστοιχα, τότε έχουμε:

$$P_\Gamma(E) = w_\alpha \cdot P_\Gamma(A) + w_\kappa \cdot P_\Gamma(K)$$

$$P_\Gamma(E) = 0{,}14 \cdot 0{,}4 + 0{,}86 \cdot 0{,}8 \approx 0{,}74$$

Εδώ η πιθανότητα επιτυχίας «τραβιέται», λόγω του βάρους 0,86, προς το 0,8.

Συνεπώς, το «παράδοξο» οφείλεται στους συντελεστές βάρους του κάθε φύλου ανά τάξη. Μπορείτε να βρείτε περισσότερα αναζητώντας στοιχεία για το «παράδοξο του Simpson».

# 86ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

17 Ιανουαρίου 2026

## Ενδεικτικές λύσεις

## Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις**

$$\mathbf{A} = [(-3)^3 + 27 - (-5)^3 + 10^2] \cdot (3^2 - 2^2),$$

$$\mathbf{B} = \frac{9 \cdot (-5^3 + 10^2)^4}{(2^3 - 3)^2},$$

**και να γράψετε τον αριθμό $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ ως δύναμη με βάση το 5.**

Λύση

$$\mathrm{A} = [(-3)^3 + 27 - (-5)^3 + 10^2] \cdot (3^2 - 2^2) = (-27 + 27 - (-125) + 100) \cdot (9 - 4)$$

$$= 225 \cdot 5 = 9 \cdot 25 \cdot 5 = 9 \cdot 5^3,$$

$$\mathrm{B} = \frac{9 \cdot (-5^3 + 10^2)^4}{(2^3 - 3)^2} = \frac{9 \cdot (-125 + 100)^4}{(8 - 3)^2} = \frac{9 \cdot (-25)^4}{5^2} = \frac{9 \cdot 25^4}{5^2} = \frac{9 \cdot (5^2)^4}{5^2} = \frac{9 \cdot 5^8}{5^2} = 9 \cdot 5^6.$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{9 \cdot 5^3}{9 \cdot 5^6} = 5^{-3}.$$

Πρόβλημα 2. **Ο θετικός ακέραιος $\boldsymbol{\alpha}$ είναι τέτοιος ώστε: $\mathbf{1} \le \boldsymbol{\alpha} \le \mathbf{40}$. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $\boldsymbol{\alpha}$ για τις οποίες το άθροισμα $\boldsymbol{MK\Delta\{\alpha, 20\} + MK\Delta\{\alpha, 40\}}$**

**(1) λαμβάνει τη μικρότερη δυνατή τιμή του,**

**(2) λαμβάνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του.**

Σημείωση. Με $MK\Delta\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων* $\alpha, \beta$.

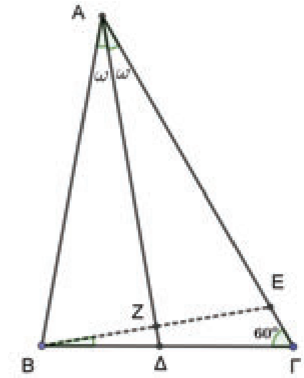
Λύση

(1) Η μικρότερη δυνατή τιμή του αθροίσματος είναι $1 + 1 = 2$ και αυτή συμβαίνει όταν $MK\Delta\{\alpha, 20\} = MK\Delta\{\alpha, 40\} = 1$, δηλαδή όταν ο θετικός ακέραιος $\alpha$, με $1 \le \alpha \le 40$, είναι σχετικά πρώτος προς τους αριθμούς 20 και 40, δηλαδή όταν

$$\alpha \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}.$$

(2) Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του αθροίσματος είναι $20 + 40 = 60$ και αυτή συμβαίνει όταν ο θετικός ακέραιος $\alpha$, με $1 \le \alpha \le 40$, είναι τέτοιος ώστε $MK\Delta\{\alpha, 20\} = 20$ και $MK\Delta\{\alpha, 40\} = 40 \Leftrightarrow \alpha = 40$.

**Πρόβλημα 3.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{\Gamma} = 60^o$. Το σημείο Δ της πλευράς ΒΓ είναι τέτοιο ώστε η ΑΔ να είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A} = 2\omega$ και ΑΒ = ΑΔ. Για το σημείο Ε της πλευράς ΑΓ ισχύει ότι: ΑΕ = ΑΒ. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΕ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι: ΒΖ = ΖΕ.
(β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\Gamma\hat{B}E$.
***Σημείωση.*** *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο γραπτό σας.*



Σχήμα 1

**Λύση**

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι και διάμεσος, οπότε ΒΖ = ΖΕ.

(β) Επειδή ΑΒ = ΑΔ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B} = A\hat{\Delta}B. \qquad (1)$$

Όμως η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, οπότε

$$A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{A}\Gamma = 60^o + \omega. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι: $\hat{B} = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{A}\Gamma = 60^o + \omega$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow 2\omega + \omega + 60^o + 60^o = 180^o \Rightarrow 3\omega = 60^0 \Rightarrow \omega = 20^0$$

Άρα είναι: $\hat{A} = 2\omega = 2 \cdot 20^o = 40^o$ και $\hat{B} = 60^o + \omega = 60^o + 20^o = 80^o$.
Επειδή ΑΕ = ΑΒ το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{B}E = A\hat{E}B = \frac{180^o - \hat{A}}{2} = \frac{180^o - 40^o}{2} = 70^o.$$

Στο τρίγωνο ΒΕΓ η γωνία $A\hat{E}B$ είναι εξωτερική, οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή έχουμε:

$$A\hat{E}B = \Gamma\hat{B}E + \hat{\Gamma} \Rightarrow 70^o = \Gamma\hat{B}E + 60^0 \Rightarrow \Gamma\hat{B}E = 70^o - 60^0 = 10^0.$$

**Πρόβλημα 4.** Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma \qquad \text{και} \qquad B = \overline{\beta\gamma} = 10\beta + \gamma,$$

με $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma$ ψηφία. Αν ισχύει $A - 3B = 542$, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού Α.

**Λύση**

$$A - 3B = 542 \Leftrightarrow 100\alpha + 10\beta + \gamma - 3(10\beta + \gamma) = 542$$
$$\Leftrightarrow 100\alpha = 20\beta + 2\gamma + 542 \Leftrightarrow 100\alpha = 2B + 542.$$

Επειδή τα $\beta \neq 0$ και $\gamma$ είναι ψηφία έπεται ότι $20 \leq 2B \leq 198$, οπότε

$$562 \leq 100\alpha = 2B + 542 \leq 740 \Leftrightarrow \alpha \in \{6, 7\}.$$

Αν $\alpha = 6$, τότε: $2B = 58 \Rightarrow B = \overline{\beta\gamma} = 29 \Rightarrow A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 629$.

Αν $\alpha = 7$, τότε: $2B = 158 \Rightarrow B = \overline{\beta\gamma} = 79 \Rightarrow A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 779$.

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Αν $\boldsymbol{a+4b=5}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης**

$$\mathbf{A}=(3a+12b)^3-(5a+20b)^2+\left[15\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2}\right]:\left(-\frac{5}{2}\right)^{-4}$$

**και να τη γράψετε ως δύναμη με βάση το 5.**

Λύση. Η παράσταση Α γράφεται:

$$\mathbf{A}=(3a+12b)^3-(5a+20b)^2+\left[15\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2}\right]:\left(-\frac{5}{2}\right)^{-4}$$

$$=(3(a+4b))^3-(5(a+4b))^2+\left[15\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^{2}\right]:\left(-\frac{2}{5}\right)^{4}$$

$$=27(a+4b)^3-25(a+4b)^2+\left(15\cdot\frac{(2^2)^2}{5^2}\right):\frac{2^4}{5^4}$$

$$=27\cdot5^3-25\cdot5^2+\frac{15\cdot2^4}{5^2}\cdot\frac{5^4}{2^4}=27\cdot5^3-25\cdot5^2+15\cdot5^2$$

$$=27\cdot5^3-10\cdot5^2=27\cdot5^3-2\cdot5^3$$

$$=5^3\cdot(27-2)=5^3\cdot25=5^3\cdot5^2=5^5.$$

Πρόβλημα 2. **Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του θετικού ακέραιου $\boldsymbol{\nu}$ για την οποία ο αριθμός $\mathbf{A=2178\cdot\nu}$ ισούται με το τετράγωνο θετικού ακέραιου και ο αριθμός $\mathbf{B=810\cdot\nu}$ ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου.**

Λύση

Γράφουμε τους αριθμούς 2178 και 810 ως γινόμενα πρώτων παραγόντων.
Έχουμε:

$$2178=2\cdot3^2\cdot11^2 \quad \text{και} \quad 810=2\cdot3^4\cdot5.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $2178=2\cdot3^2\cdot11^2$ γίνεται τέλειο τετράγωνο ακέραιου, όταν πολλαπλασιαστεί με ένα θετικό ακέραιο της μορφής:

$$2^{1+2\alpha}\cdot3^{2\beta}\cdot11^{2\gamma}\cdot K^2,\text{όπου } \alpha,\beta,\gamma\geq0 \text{ ακέραιοι}, K \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $810=2\cdot3^4\cdot5$ γίνεται τέλειος κύβος ακέραιου, όταν πολλαπλασιαστεί με ένα θετικό ακέραιο της μορφής:

$$2^{2+3\delta}\cdot3^{2+3\varepsilon}\cdot5^{2+3\zeta}\cdot\Lambda^3,\text{όπου } \delta,\varepsilon,\zeta\geq0 \text{ ακέραιοι}, \Lambda \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας 11 δεν υπάρχει στον αριθμό 810, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\gamma=0$. Επίσης ο παράγοντας 5 δεν υπάρχει στον αριθμό 2178, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\zeta=0$, οπότε θα πάρουμε $K^2=5^2$ που είναι τέλειο τετράγωνο.

Για την εύρεση του ελάχιστου θετικού ακέραιου $\nu$ που ικανοποιεί και τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, πρέπει να βρούμε και τις ελάχιστες δυνατές τιμές των συντελεστών $\alpha,\beta,\delta,\varepsilon$ για τις οποίες ισχύουν οι ισότητες

$$1+2\alpha=2+3\delta, 2\beta=2+3\varepsilon.$$

Αυτές είναι οι:

$$\alpha=2, \delta=1 \text{ και } \beta=1, \varepsilon=0.$$

Έτσι τελικά προκύπτει:

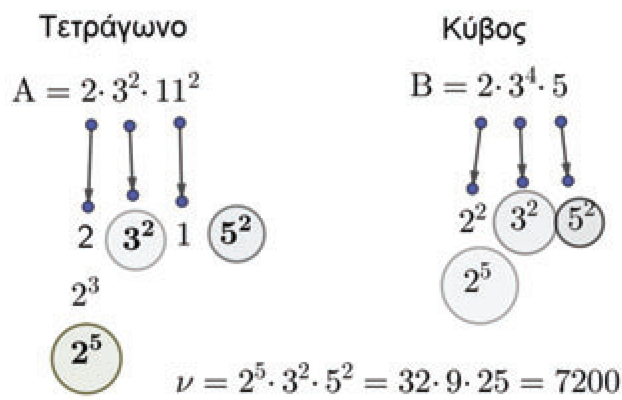
$$\nu=2^5\cdot 3^2\cdot 5^2=7200.$$

Πράγματι, τότε έχουμε:

$$2178\cdot\nu=2\cdot 3^2\cdot 11^2\cdot 2^5\cdot 3^2\cdot 5^2=(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11)^2$$

$$810\cdot\nu=2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 2^5\cdot 3^2\cdot 5^2=(2^2\cdot 3^2\cdot 5)^3$$

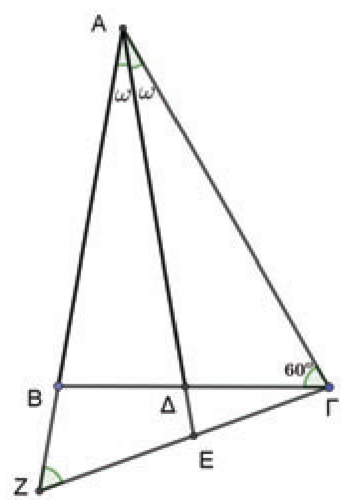
Εναλλακτικά, για τον προσδιορισμό της ελάχιστης δυνατής τιμής του θετικού ακέραιου $\nu$, μπορούμε να εργαστούμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




Πρόβλημα 3. **Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\mathbf{A\hat{\Gamma}B=60^o}$. Το σημείο Δ της πλευράς ΒΓ είναι τέτοιο ώστε η ΑΔ να είναι διχοτόμος της γωνίας**

$$\mathbf{B\hat{A}\Gamma=2\omega} \text{ και } \mathbf{AB=A\Delta}.$$

**Για το σημείο Ε της ευθείας ΑΔ ισχύει ότι: ΑΕ = ΑΓ.**
**Οι ευθείες ΑΒ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Ζ.**
**(α) Να βρείτε το μέτρο των γωνιών $\mathbf{A\hat{B}\Gamma}$ και $\mathbf{B\hat{A}\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.**
**(β) Να αποδείξετε ότι: ΓΔ = ΓΕ.**
**(γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathbf{A\hat{Z}\Gamma}$.**



Σχήμα 2

***Σημείωση.*** *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο γραπτό σας.*

Λύση

(α) Επειδή ΑΒ = ΑΔ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B}=A\hat{\Delta}B. \qquad (1)$$

Όμως η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, οπότε

$$A\hat{\Delta}B=\hat{\Gamma}+\Delta\hat{A}\Gamma=60^o+\omega. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι: $\hat{B}=\hat{\Gamma}+\Delta\hat{A}\Gamma=60^o+\omega$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{\mathrm{B}}+\widehat{\Gamma}=180^o \Rightarrow 2\omega+\omega+60^o+60^o=180^o \Rightarrow 3\omega=60^0 \Rightarrow \omega=20^0$$

Άρα είναι: $\widehat{\mathrm{A}}=2\omega=2\cdot 20^o=40^o$ και $\widehat{\mathrm{B}}=60^o+\omega=60^o+20^o=80^o$.

(β) Επειδή ΑΕ = ΑΓ το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}=\frac{180^o-\omega}{2}=\frac{180^o-20^o}{2}=80^o.$$

Επίσης, ισχύει ότι $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma=\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}=\widehat{\mathrm{B}}=80^o$, οπότε έχουμε $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma=\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma=80^o$.
Επομένως το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με ΓΔ = ΓΕ.

(γ) Η γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma=80^o$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΕ, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}+\omega \Rightarrow 80^o=\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}+20^o \Rightarrow \mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}=\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\Gamma=80^o-20^o=60^o.$$

Πρόβλημα 4. **Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι**

$$\boldsymbol{A=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta} \quad \textbf{και} \quad \boldsymbol{B=\overline{\beta\gamma\delta}=100\beta+10\gamma+\delta,}$$

**με $\boldsymbol{\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma,\delta}$ ψηφία. Αν ισχύει $\boldsymbol{A-5B=1260}$, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού Α.**

Λύση

$$A-5B=1260 \Leftrightarrow 1000\alpha+B-5B=1260 \Leftrightarrow 1000\alpha=1260+4\mathrm{B}.$$

Επειδή ο θετικός ακέραιος Β είναι τριψήφιος, θα είναι $100\leq B\leq 999$, οπότε:

$$1660\leq 1000\alpha=1260+4\mathrm{B}\leq 1260+4\cdot 999=5256 \Leftrightarrow \alpha\in\{2,3,4,5\}.$$

- Αν $\alpha=2$, τότε $2000=1260+4\cdot\overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta}=185$ και $A=2185$.
- Αν $\alpha=3$, τότε $3000=1260+4\cdot\overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta}=435$ και $A=3435$.
- Αν $\alpha=4$, τότε $4000=1260+4\cdot\overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta}=685$ και $A=4685$.
- Αν $\alpha=5$, τότε $5000=1260+4\cdot\overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta}=935$ και $A=5935$.

## Ασκήσεις για λύση (Ρουμανία 2025)

Ν58. **Να λύσετε στο σύνολο των θετικών ακέραιων την εξίσωση:**

$$\boldsymbol{x^2+y^2+xy(x-y)=17.}$$

ΜΟ Ρουμανίας 2025

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή $(x-y)^2+2xy+xy(x-y)=17$.
Αν θέσουμε $x-y=p\in\mathbb{Z}$, $xy=q\in\mathbb{N}^*$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$pq+2q+p^2=17 \Leftrightarrow q=\frac{17-p^2}{p+2} \Leftrightarrow q=\frac{17-4+4-p^2}{p+2} \Leftrightarrow q=\frac{13}{p+2}+2-p\in\mathbb{N}^*$$

Επομένως, $(p+2)|13$, οπότε $(p+2)\in\{-1,1,-13,13\}$ και $p\in\{-3,-1,-15,11\}$.

- Αν $p=-3$, τότε $q=-8<0$, απορρίπτεται.
- Αν $p=-1$, τότε $q=16$, οπότε έχουμε το σύστημα $x-y=-1, xy=16$, για τη λύση του οποίου προκύπτει η εξίσωση $x(x+1)=16$, η οποία δεν έχει λύση στους θετικούς ακέραιους.
- Αν $p=-15$, τότε $q=16$, οπότε έχουμε το σύστημα $x-y=-1, xy=16$, το οποίο έχει μοναδική λύση $(x,y)=(1,16)$.
- Αν $p=11$, τότε $q=-8<0$, απορρίπτεται.

Άρα η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $(x,y)=(1,16)$.

**Α89.** **Οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί $x, y, z$ ικανοποιούν τις σχέσεις**

$$xy + 4 \leq 2(x+z), \qquad yx + 4 \leq 2(y+x), \qquad zx + 4 \leq 2(z+y).$$

**Να αποδείξετε ότι: $x = y = z$.** ΜΟ Ρουμανίας 2025

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γράφονται

$$x(y-2) \leq 2(z-2), \qquad (1)$$
$$y(z-2) \leq 2(x-2), \qquad (2)$$
$$z(x-2) \leq 2(y-2), \qquad (3)$$

- Αν $x-2<0$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $z-2<0$, οπότε από την (1) έχουμε και ότι $y-2<0$. Άρα είναι $0 \leq x, y, z < 2$ και $xyz < 8$.

Επιπλέον, έχουμε $x(2-y) \geq 2(2-z) > 0$, $y(2-z) \geq 2(2-x) > 0$, $z(2-x) \geq 2(2-y) > 0$,

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει ότι

$$xyz(2-x)(2-y)(2-z) \geq 8(2-x)(2-y)(2-z) \overset{x,y,z<2}{\Longrightarrow} xyz \geq 8,$$

που είναι αντίθετο προς τη σχέση $xyz < 8$.

- Ομοίως, αν υποθέσουμε ότι $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$, τότε έχουμε $y>2, z>2$ και όπως παραπάνω καταλήγουμε σε άτοπο.

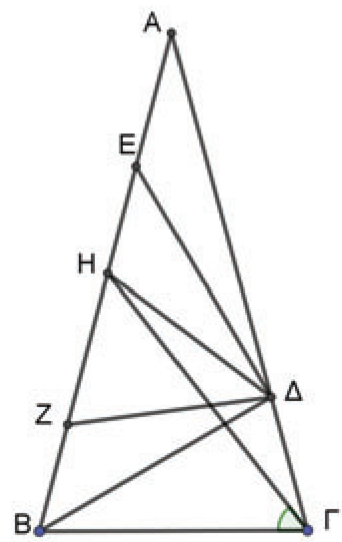
- Άρα είναι $x=2$, οπότε με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) – (3) λαμβάνουμε:

$y \leq z,\ y(z-2) \leq 0)\ \ \textit{και}\ \ 0 \leq y-2 \Rightarrow y \leq z \leq 2 \leq y \Rightarrow x = y = z = 2.$

**Γ69.** **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30^o$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ και τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Ε, Ζ, Η στην πλευρά ΑΒ έτσι ώστε: ΒΓ = ΒΔ = ΔΕ = ΕΖ και ΔΗ = ΔΖ.** Να αποδείξετε ότι **ΒΖ = ΗΕ** και να βρείτε το μέτρο της γωνίας **$\mathrm{B\hat{\Gamma}H}$**.

ΜΟ Ρουμανίας 2025

Λύση




Από τις υποθέσεις το τρίγωνο ΔΗΖ είναι ισοσκελές με ΔΗ = ΔΖ,
οπότε $\quad \Delta\hat{H}Z = \Delta\hat{Z}H \Rightarrow \Delta\hat{H}E = \Delta\hat{Z}B. \qquad (1)$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε:

$$\Delta\hat{B}Z = \Delta\hat{E}H. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) και την υπόθεση ΒΔ = ΔΕ, έπεται ότι τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΗ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και ΒΖ = ΗΕ.

Για την εύρεση του μέτρου της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Gamma}H}$ έχουμε:

Από ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o.$$

Επιπλέον, από την ισότητα ΒΖ = ΗΕ προκύπτει ότι

$$BH = EZ = \Delta E = B\Delta = B\Gamma,$$

οπότε το τρίγωνο ΒΓΗ είναι ισοσκελές και έχει

$$B\hat{\Gamma}H = \frac{180^o - \Gamma\hat{B}H}{2} = \frac{105^o}{2} = 52^o\ 30'$$

## Ασκήσεις για λύση

**Γ70.** Έστω Ο το περίκεντρο του οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΑΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΟ για δεύτερη φορά στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι: ΔΟ ⊥ ΑΓ.

**Γ71.** Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και με διάμετρο ΑΒ. Έστω Ε το μέσο του τόξου ∢ΑΒ. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΕΟΒΔ. Αν η ευθεία ΑΔ τέμνει τον κύκλο για δεύτερη φορά στο σημείο Ζ και Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΖ, να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{O\hat{\Gamma}B}$.

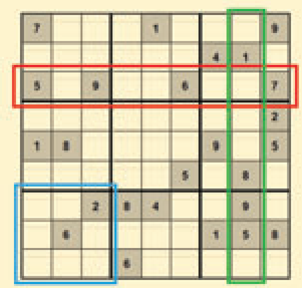
# Sudoku 数独

**_Βασσάλου Γιάννα_**

## Sudoku (σουντόκου) ένα διάσημο παιχνίδι λογικής

Το Sudoku είναι ένα πολύ δημοφιλές παιχνίδι. Ουσιαστικά πρόκειται για έναν γρίφο, ένα παζλ, τοποθέτησης ψηφίων σε πλέγμα που στηρίζεται στην συνδυαστική και βασίζεται στη λογική. Το Sudoku μοιάζει με ένα τετραγωνισμένο χαρτί, ένα πλέγμα με τετραγωνάκια, με 9 γραμμές και 9 στήλες. Μερικά από τα τετραγωνάκια του πλέγματος είναι από την αρχή συμπληρωμένα με αριθμούς ώστε να υπάρχει μόνο μία δυνατή λύση.

Στο κλασσικό sudoku στόχος είναι να γεμίσει το πλέγμα με ψηφία, ώστε κάθε στήλη, γραμμή και σε καθένα από τα υποπλέγματα τετράγωνα 3x3 που συνθέτουν το πλέγμα, τα οποία ονομάζονται κουτιά, μπλοκ ή περιοχές να περιέχουν όλα τα ψηφία από το 1 έως το 9.



Στα μαθηματικά, ιδιαίτερα στα διασκεδαστικά μαθηματικά, υπήρχαν από πολύ παλιά παιχνίδια τοποθέτησης ψηφίων σε πλέγμα, για παράδειγμα τα **μαγικά τετράγωνα**, στα οποία όμως ίσχυαν διαφορετικοί κανόνες για την συμπλήρωσή τους. Στα μαγικά τετράγωνα για παράδειγμα, οι αριθμοί σε κάθε στήλη, γραμμή και διαγώνιο πρέπει να έχουν το ίδιο άθροισμα.

## Η ιστορία του παζλ Sudoku

Το Sudoku σύμφωνα με την Wikipedia πρωτοεμφανίστηκε το 1892. Στην αρχή είχε μόνο τέσσερα τετράγωνα 3x3 και όχι εννιά όπως σήμερα. Με τη μορφή που το ξέρουμε σήμερα, επινοήθηκε από τον Αμερικανό Howard Garns, κατασκευαστή γρίφων και έξαπλώθηκε το 2005 χάρη στον Νεοζηλανδό Wayne Gould, αν και οι ρίζες του φτάνουν στα “Λατινικά Τετράγωνα” του 18ου αιώνα του μαθηματικού Leonhard Euler και τα Κινέζικα “Μαγικά Τετράγωνα” της αρχαιότητας. Ο Garns πρωτοδημοσίευσε το παζλ του σε κάποιες εφημερίδες το 1979 με το όνομα “Number Place”.

Από το 2004 ο γρίφος Sudoku εξαπλώθηκε γρήγορα σε εφημερίδες και περιοδικά ανά την υφήλιο. Στην Αγγλία υπήρχε και τηλεοπτική εκπομπή που μεταδιδόταν από το BBC. Γρήγορα έγινε τηλεοπτικό σόου Sudoku.  κάθε χρόνο διοργανώνεται ένας διαγωνισμός Sudoku από την Παγκόσμια Ομοσπονδία Παζλ. Στην χώρα μας, το 2026, θα διεξαχθεί για δέκατη τέταρτη συνεχόμενη χρονιά διαγωνισμός Sudoku και Puzzles. Πληροφορίες για τη συμμετοχή στο https://gp.worldpuzzle.org Οι Έλληνες συμμετέχοντες με τις **8 καλύτερες θέσεις στη κατάταξη των GP, θα λάβουν μέρος σε αγώνα μπαράζ που θα διενεργηθεί και οι 4 πρώτοι θα σχηματίσουν τις εθνικές ομάδες** που θα εκπροσωπήσουν τη χώρα μας στα Παγκόσμια Πρωταθλήματα Puzzles και Sudoku, τον **Οκτώβριο του 2026**, στην Ινδία.

## Είδη Sudoku

Υπάρχουν τριών ειδών Sudoku.

- Τα **Sudoku 4x4** όπως το διπλανό που είναι πιο απλά - πιο εύκολα γιατί έχουν λίγους αριθμούς. Σε αυτά πρέπει σε κάθε γραμμή, στήλη και τετράγωνο να τοποθετηθούν οι αριθμοί από το 1 έως το 4.

**1ο βήμα :** επειδή στην 1η γραμμή και στην 2η στήλη υπάρχουν οι αριθμοί 3, 2 και 4 στο τετραγωνάκι αυτό μπορούμε να βάλουμε μόνο το 1.

**2ο βήμα:** για να συμπληρωθεί το μωβ τετράγωνο στο τετραγωνάκι αυτό μπορούμε να βάλουμε μόνο το 2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | | | 2 |
| | 4 | 1 | |
| | 3 | 2 | |
| 4 | | | 1 |

**3ο βήμα :** για να συμπληρωθεί η 2η στήλη και το πράσινο τετράγωνο στο τετραγωνάκι αυτό μπορούμε να βάλουμε μόνο το 2.

Τα **Sudoku 6x6**, όπως το διπλανό, που είναι μέτριας δυσκολίας. Σε αυτά πρέπει, σε κάθε γραμμή, στήλη και ορθογώνιο, να τοποθετηθούν οι αριθμοί από το 1 έως το 6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 6 | | | |
| | 5 | | 6 | 2 | 1 |
| | | | | 3 | |
| | 6 | 5 | | | |
| 6 | 3 | | | | 5 |
| | 1 | 4 | 3 | | |

- Τα **Sudoku 9x9**, όπως το διπλανό, που είναι **πιο δύσκολα - πιο απαιτητικά**.
  Σε αυτά πρέπει σε κάθε γραμμή, στήλη και τετράγωνο να τοποθετηθούν οι αριθμοί από το 1 έως το 9.
  Σε ορισμένα **Sudoku 9x9** ζητείτε και οι διαγώνιοι του τετραγώνου να έχουν τα 9 ψηφία στη σειρά.

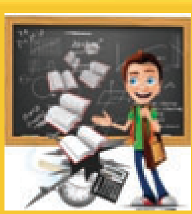
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | | | | |
| | | 3 | 6 | | | | | |
| | 7 | | | 9 | | 2 | | |
| | 5 | | | | 7 | | | |
| | | | | 4 | 5 | 7 | | |
| | | | 1 | | | | 3 | |
| | | 1 | | | | | 6 | 8 |
| | | 8 | 5 | | | | 1 | |
| | 9 | | | | | 4 | | |

**Δοκίμασε:**
Συμπλήρωσε τα προτεινόμενα Sudoku αρχίζοντας πρώτα από το διπλανό, 4x4 Sudoku.
Συνέχισε με τα δύο παραπάνω 6x6 και 9x9 .
Συνέχισε με το παρακάτω Sudoku 9x9,
Επίπεδο δυσκολίας: ★ ☆ ☆

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | 1 |
| | 4 | 2 | |
| 3 | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | | 1 | | 2 | | 9 | |
| | 6 | | 8 | 7 | 5 | | 4 | |
| 2 | | | | | | | | 7 |
| 5 | | 3 | | | | 2 | | 9 |
| | | | 3 | | 7 | | | |
| 6 | | 8 | | | | 3 | | 4 |
| 8 | | | | | | | | 5 |
| | 2 | | 7 | 6 | 8 | | 1 | |
| | 3 | | 2 | | 4 | | 6 | |

Θυμήσου ότι κάθε αριθμός έχει ***μοναδική*** θέση. Μόλις τοποθετήσεις τον αριθμό στο τετράγωνο, μην ξεχάσεις να τον αποκλείσεις από όλα τα τετράγωνα της γραμμής, στήλης και τετραγώνου 3x3.
Ποτέ μην τοποθετήσεις κάποιον αριθμό στην ***τύχη***, όταν επιλύεις γρίφους. Είναι βέβαιο ότι θα βρεθείς σε αδιέξοδο



# Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

**Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος**

## Άλυτα και ανοιχτά προβλήματα, εικασίες και θεωρήματα.

Ο κόσμος των Μαθηματικών είναι μαγικός. Τα Μαθηματικά κρύβουν μεγάλη μαγεία που όμως αυτή δεν γίνεται αντιληπτή σε πολλούς. Όταν ένας μαθηματικός προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα προκύπτουν άλλα και αυτό είναι το αιώνιο παιχνίδι που προκαλεί το μυαλό των μαθηματικών. Η ενασχόληση με τους αριθμούς μπορεί να προσφέρει μια αίσθηση απόλυτης ελευθερίας και σου δίνει κάθε δικαίωμα να πιστεύεις, να ρωτάς, να αμφισβητείς. Ο κόσμος των αριθμών είναι τεράστιος.

### ❖ Ανοιχτό πρόβλημα και Άλυτο πρόβλημα

Όταν διατυπώνεται μια πρόταση για κάτι που βλέπουμε ή υποψιαζόμαστε ότι ισχύει αλλά δεν το έχουμε αποδείξει ακόμα, τότε έχουμε ένα **ανοιχτό πρόβλημα.** Την πρόταση αυτή τη λέμε: **πρόβλημα** ή **εικασία ή υπόθεση**. π.χ. εικασία Goldbach: ***Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών*** (8=5+3, 20=17+3) είναι ανοιχτό πρόβλημα, δεν έχει απαντηθεί. **Άλυτο** είναι ένα πρόβλημα που έχει λυθεί, έχει δηλαδή αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτό που λέει η πρόταση. Την πρόταση αυτή τη λέμε **άλυτο πρόβλημα.** Παράδειγμα ο **τετραγωνισμός του κύκλου** λέγεται άλυτο πρόβλημα: Δηλαδή να κατασκευαστεί γεωμετρικά, με κανόνα και διαβήτη, ένα τετράγωνο ώστε το εμβαδό του να είναι το ίδιο με το εμβαδό ενός δοσμένου κύκλου. **(**$X^2=\pi R^2$, όπου Χ=πλευρά του τετραγώνου, π=3,14159..και R=η ακτίνα του κύκλου). Έχει αποδειχθεί ότι είναι αδύνατο. Το ίδιο το **Δήλιο πρόβλημα** και η **Τριχοτόμηση γωνίας.** Δήλιο πρόβλημα λέγεται ο διπλασιασμός ενός κύβου $\alpha^3$ να γίνει $\lambda^3=2\alpha^3$**.** Αυτά ήταν τα τρία μεγάλα προβλήματα στην Ελληνική αρχαιότητα.

### ❖ Θεώρημα

Όταν διατυπώνουμε μια πρόταση ή μια εικασία στα Μαθηματικά και με λογικούς συλλογισμούς έχουμε την απόδειξη για την αλήθειά της, τότε την πρόταση αυτή τη λέμε **θεώρημα**. Παράδειγμα το Πυθαγόρειο Θεώρημα: ***Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας***. Πολλά προβλήματα ήταν η αφορμή για την δημιουργία θεωρημάτων και πολλά θεωρήματα αποτέλεσαν την βάση για την επίλυση προβλημάτων. Αυτή η σχέση μεταξύ προβλημάτων και θεωρημάτων, με τους υπολογιστές πήρε νέες διαστάσεις.

### ❖ Μαθηματικά

Στον αγώνα του σκεπτόμενου ανθρώπου, για την αποκάλυψη προτάσεων καθολικά αποδεκτών, πρωτοπόρος υπήρξε ο **Θαλής** που θεμελίωσε την διαδικασία της απόδειξης. Οι παρατηρήσεις και οι πρακτικοί κανόνες που εφάρμοζε καθημερινά ο άνθρωπος από την αρχαιότητα, μελετήθηκαν με το αυστηρό μάτι της λογικής και έτσι οδηγηθήκαμε στις επιστήμες και στη Μαθηματική Επιστήμη που σήμερα μέσω αυτής έχουμε και την Τεχνητή Νοημοσύνη.

# Η Μαγεία των αριθμών

Η μελέτη των αριθμών στα μαθηματικά(θεωρία αριθμών) είναι ένα δύσκολο θέμα, ξέρουμε πολλές ιδιότητες των αριθμών, πολλές προτάσεις και θεωρήματα, αλλά οι αριθμοί-στοιχεία από τους οποίους οικοδομούνται , κρύβουν ακόμα μυστικά.

Ο λόγος για τους **πρώτους αριθμούς**, για τους αριθμούς που δεν έχουν διαιρέτες άλλους παρά μόνο τη μονάδα και τον εαυτό τους. Οι υπόλοιποι είναι οι σύνθετοι. Η μονάδα δεν είναι πρώτος ούτε σύνθετος, είναι θα λέγαμε ο γεννήτορας των αριθμών. Κάθε άρτιος (ζυγός) μπορεί να γραφεί άθροισμα δύο πρώτων π.χ. 12=7+5, 20=17+3, κλπ. Οι περιττοί (μονοί) γράφονται ως άθροισμα πρώτων π.χ. 15=13+2, 21=11+7+3. Δηλαδή οι πρώτοι είναι σαν τα στοιχεία της χημείας λέμε π.χ. το νερό είναι ένωση δύο στοιχείων οξυγόνου και υδρογόνου.

Μέχρι το 100 είναι 25 πρώτοι, μέχρι το 1000 είναι 168, μέχρι το 10.000 είναι 1229. Όσο μεγαλώνουν οι αριθμοί οι πρώτοι ελαττώνονται και μεταξύ τους μπορούμε να βρούμε διαδοχικούς σύνθετους όσους θέλουμε πάντα σε περιττό αριθμό γιατί εκτός από το 2 όλοι οι πρώτοι είναι περιττοί αριθμοί, άρα μεταξύ τους είναι πάντα περιττός αριθμός σύνθετων 23-19=4-1=3 είναι 20,21,22. Μεταξύ 2 και 3 δεν υπάρχει κανένας, μεταξύ 3 και 5 υπάρχει ένας, μεταξύ 29 και 23 υπάρχουν 29-23=6-1=5 οι 24,25,26,27,28. Υπάρχουν και ζεύγη πρώτων που λέγονται **δίδυμοι πρώτοι** π.χ. 3,5 ή 5,7, ή 11,13 ή 17, 19, κλπ. με ένα σύνθετο μεταξύ τους. Μέχρι το 100 είναι 8 ζεύγη μέχρι το 1000 είναι 35. Στον τύπο $K^2+K+41$ βάλτε όπου Κ τους αριθμούς 0,1,2,3,…, 39 και θα έχετε πρώτους αριθμούς (πολυώνυμο Euler).

**Ποιος αριθμός:** Ποιος αριθμός είναι και κύβος και τετράγωνο;
Ποιος αριθμός έχει το 1/6 μια μονάδα μεγαλύτερο από το 1/7 του;
Ποιος αριθμός έχει το 1/7 δύο μονάδες μεγαλύτερο από το 1/9 του;

**Πως γράφεται:** Πώς γράφεται ο αριθμός 12.345.679 με 11 φορές τον αριθμό 9; Πώς γράφεται ο αριθμός 20 μόνο με 4 φορές τον αριθμό 9. Πως γράφεται ο 55 με πέντε φορές το 4;

**Είναι παράξενοι:** Στον αριθμό 142857 έχουμε ανά τρία 142+857=999, ανά δύο 14+28+57=99, ανά ένα 1+4+2+8+5+7=27(2+7=9). Το γινόμενό του επί 6 αλλάζει τις 3άδες 142.857x6=857.142 με άλλους αριθμούς αλλάζει τη σειρά των ψηφίων του π.χ. επί 5 γίνεται 714285. Μπορούμε να βρούμε και άλλα: Μόνο με το **έξι** 666+666-6 x6=6 x6 x6 x6. Με όλα τα ψηφία $111.111.111^2$=12345678987654321, 100=0+1x2x3+4+5+6x7+8x9, 45=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9, ποιο είναι το γινόμενό τους; Μόνο με τους μονούς 1+3+5+7+9=25, 1 x3 x5 x7 x9=945, μόνο με τους ζυγούς 2+4+6+8=20, 2 x4 x6 x8=384.

**Μοτίβα:** **Οι αριθμοί 1089, 15, 961.** Έχουμε 1089x9=9801, βάζουμε στη μέση το 9 και έχουμε 10**9**989 x9=98**9**01, 10**99**89 x9=98**99**01, κοκ.

Βάζω πάντα στη μέση το 15 και έχω16=$4^2$, 1156=$34^2$ , 111556=$334^2$ , 11115556=$3334^2$, κοκ. Επίσης 961=$31^2$, βάζω μεταξύ των αριθμών μηδενικά, 90601=$301^2$ , 9006001=$3001^2$, κοκ.

**Ο Νερόμυλος:** Την παλιά εποχή που δεν υπήρχαν μηχανές, το σιτάρι για να γίνει αλεύρι το πήγαιναν στο νερόμυλο ή τον ανεμόμυλο. Ο μυλωνάς κρατούσε το 10% . Ο κύριος Γιώργος έφυγε με 100 κιλά αλεύρι, πόσα κιλά σιτάρι πήγε; (Δεν υπάρχουν απώλειες).

**Η ρίζα:** Στην $\sqrt{1+\alpha.\beta.\gamma.\delta}$ αντικαθιστούμε τα α, β, γ, δ με διαδοχικούς αριθμούς τι παρατηρείτε;

**Ένα παράξενο παιχνίδι:** Γράψτε το νούμερο που έχουν τα παπούτσια που φοράς και πρόσθεσε δύο μηδενικά να γίνει 4ψήφιος(π.χ. 4200). Αφαιρείτε από αυτό τον αριθμό το έτος που γεννηθήκατε. Προσθέστε τώρα το έτος που διανύουμε και κρατήστε από το αποτέλεσμα μόνο τα δύο τελευταία ψηφία. Αυτή είναι η ηλικία σας! Γιατί;

**Μαντέψτε τον αριθμό:** Μαντέψτε ένα διψήφιο αριθμό ή την ηλικία του φίλου σας. Ζητούμε να διπλασιάσει το πρώτο ψηφίο και στο γινόμενο να προσθέσει 3. Το νέο αριθμό να τον πολλαπλασιάσει επί 5 και στο εξαγόμενο να προσθέσει το δεύτερο ψηφίο. Αν εσείς από το αποτέλεσμα αφαιρέσετε 15, το αποτέλεσμα είναι ο διψήφιος (η ηλικία).

Περισσότερα «**Στα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**» έκδοση της ΕΜΕ.

## Ένα νέο βιβλίο από την ΕΜΕ


Στις εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας προστέθηκε ένα νέο βιβλίο που πρόσφατα κυκλοφόρησε, **«Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν» του Παναγιώτη Π. Χριστόπουλου.** Είναι ένα βιβλίο που μπορούν να διαβάσουν ευχάριστα μικροί και μεγάλοι, μαθητές και γονείς, με ευρύτητα στις μαθηματικές έννοιες. Σημαντικό και χρήσιμο στην εκπαιδευτική διαδικασία για τα Μαθηματικά. Στα 10 Κεφάλαια του βιβλίου θα βρείτε μεταξύ άλλων θέματα Γρίφων από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, αλλά και πολλά άλλα ενδιαφέροντα θέματα, πλάνες, παράδοξα, μαθηματικά παιχνίδια, μαθηματικά κόλπα των ταχυδακτυλουργών και αρκετά θέματα από την μαγεία των αριθμών.

Το βιβλίο προλογίζει ο πολυβραβευμένος και με το βραβείο SHAW PRIZE κ. **Δημήτρης Χριστοδούλου** ομότιμος Καθηγητής Μαθηματικών και Φυσικής του Ομοσπονδιακού Πολυτεχνείου της Ζυρίχης. Θυμίζουμε ότι σε ηλικία 16 ετών ο κ. Χριστοδούλου έγινε δεκτός στο Πρίνστον και 20 ετών πήρε διδακτορικό στη Φυσική αργότερα και στα Μαθηματικά. Στον πρόλογο του βιβλίου αναφέρει:

*«Η μαγεία των Μαθηματικών δεν είναι μόνο στην ικανότητα να λύνουμε προβλήματα, αλλά και στην δύναμη να ανακαλύπτουμε νέες ιδέες και να επεκτείνουμε τα όρια της γνώσης μας. Οι γρίφοι και τα πνευματικά παιχνίδια αποτελούν έναν εξαιρετικό τρόπο για να ενθαρρύνουμε την κριτική σκέψη και την μαθηματική προσέγγιση, τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην καθημερινή ζωή.»*

## Απαντήσεις στους γρίφους του προηγούμενου τεύχους 138

**Ο Δήμαρχος:** Τα φώτα που έβαλε ο εργολάβος δεν είναι 20 ούτε 24. Είναι 2 σε κάθε πλευρά και 2 σε κάθε γωνία 2x4+2x4=16. Άρα ο Δήμαρχος πρέπει να πληρώσει για 16 μόνο φώτα.

**Ο μαγικός αριθμός 9:** Το μυστικό είναι ο πολλαπλασιασμός με το 9. Όταν έχουμε ένα πολλαπλάσιο του εννέα και αθροίσουμε τα ψηφία του μέχρι να έχουμε μονοψήφιο αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα είναι πάντα 9.(Επίσης όταν από οιονδήποτε αριθμό αφαιρέσετε το άθροισμα των ψηφίων του, το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 9).

## Η Πίτα μας

Την παρασκευή 6-2-26 συνεδρίασε η επιτροπή του περιοδικού Ευκλείδη Α΄ για τα άρθρα που θα δημοσιεύσουμε στα δύο επόμενα τεύχη. Στη συνέχεια κόψαμε την πίτα μας, για να ευχηθούμε «**Καλή Χρονιά**». Το 2026 να είναι έτος με υγεία για όλους και στην Συντακτική Επιτροπή του περιοδικού να φέρει νέες ιδέες και δημιουργίες για το περιοδικό. Το 2026 να φέρει πρόοδο, ευτυχία και τη Μαθηματική σκέψη στους μαθητές μας.

# Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές


**Νέα τιμή** βιβλίου: 15€


**Νέα τιμή** βιβλίου: 10€


Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία της ΕΜΕ

**Νέο Βιβλίο**


Τιμή βιβλίου: 25€

**Νέο Βιβλίο**


Τιμή βιβλίου: 25€

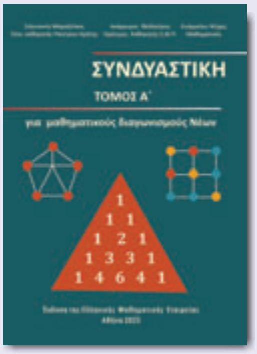
**Νέο Βιβλίο**


Τιμή βιβλίου: 20€

**Νέο Βιβλίο**

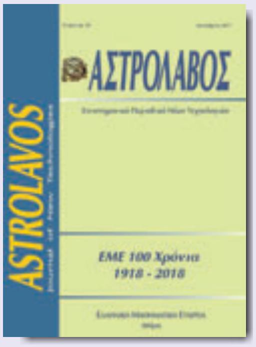

Τιμή βιβλίου: 15€

**Νέο Βιβλίο**

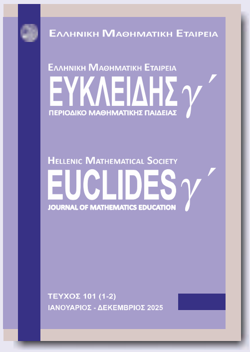



Τιμή βιβλίου: 15€

Περιοδικά




Τιμή τεύχους: 10€




Τιμή τεύχους: 10€


Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr