ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

43η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

28 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2026

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (2-a)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0,$$

όπου x είναι ο άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος.
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του a για τις οποίες:
(α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$.
(β) Η μία ρίζα της εξίσωσης είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση
(α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = (2-a)^2 - 4(-2a^2 + 5a - 3) = 9a^2 - 24a + 16 = (3a-4)^2$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$, αν είναι

$$\Delta = (3a-4)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{4}{3} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

(β) Για $a \neq \frac{4}{3}$ οι δύο ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{a - 2 \pm (3a-4)}{2}, \text{ δηλαδή } x_1 = 2a - 3 \text{ και } x_2 = -a + 1.$$

Έχουμε τις περιπτώσεις:

- $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow 2a - 3 = 2(-a+1) \Leftrightarrow 4a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}$.
- $x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow -a + 1 = 2(2a-3) \Leftrightarrow 5a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{5}$.

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $a = \frac{5}{4}$ και $a = \frac{7}{5}$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ $<$ ΑΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του με κέντρο Ο. Η ευθεία ΑΟ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Ε, Ε $\neq$ Δ, ώστε ΟΕ $=$ ΟΔ. Η κάθετη ευθεία προς την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε τέμνει την πλευρά

ΑΓ στο σημείο Ζ και η παράλληλη από το Α προς την πλευρά ΒΓ τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Ν, $\text{Ν} \neq \text{Α}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Ζ, Ε, Γ είναι ομοκυκλικά.

Πρώτη λύση

Φέρουμε την ΝΕ (δεν ξέρουμε ότι περνάει από το Ο). Τα τμήματα ΕΔ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο, επομένως,

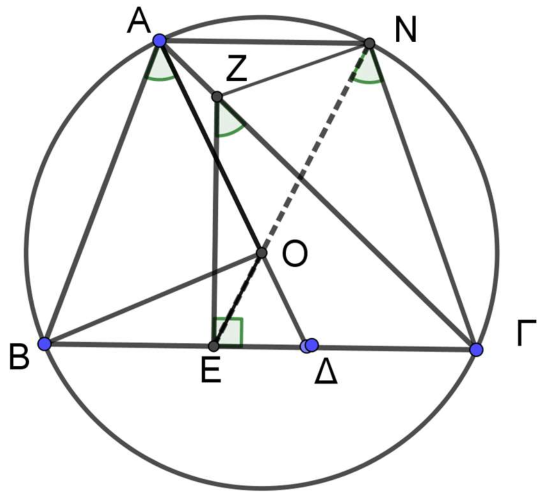
$$\text{ΒΔ} = \text{ΓΕ}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΝΓΒ έπεται ότι $\text{ΝΓ} = \text{ΑΒ}$ και

$$\widehat{\text{ΑΒΔ}} = \widehat{\text{ΝΓΕ}}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΝΕΓ είναι ίσα, οπότε

$$\widehat{\text{ΕΝΓ}} = \widehat{\text{ΒΑΔ}}. \qquad (3)$$



Σχήμα 1

Όμως

$$\widehat{\text{ΒΑΔ}} = \widehat{\text{ΒΑΟ}} = 90^\circ - \widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\text{ΕΖΓ}} \qquad (4).$$

Από τις (3) και (4) έπεται ότι $\widehat{\text{ΕΝΓ}} = \widehat{\text{ΕΖΓ}}$, επομένως τα σημεία Ν, Ζ, Ε, Γ είναι ομοκυκλικά.

Δεύτερη λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι το ΑΒΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Τότε η ευθεία ΜΝ είναι η μεσοκάθετος των βάσεων ΒΓ, ΑΝ, και αποτελεί άξονα συμμετρίας τους. Αφού τα σημεία Α, Ο, Δ είναι συνευθειακά, και τα σημεία Ν, Ε, είναι συμμετρικά των Α, Δ, αντίστοιχα, ως προς την ευθεία ΜΝ, έπεται ότι και τα σημεία τα σημεία Ε, Ο, Ν είναι επίσης συνευθειακά. Επιπλέον, οι ευθείες ΜΟ, ΖΕ είναι κάθετες στην ΒΓ, και άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΜ, ΟΝΜ ($\text{ΑΜ} = \text{ΜΝ}, \text{ΑΟ} = \text{ΝΟ}, \text{ΜΟ} = \text{ΜΟ}$) παίρνουμε την ισότητα των γωνιών

$$\text{Ο}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = \text{Ο}\hat{\text{Ν}}\text{Μ}.$$

Από εδώ μπορούμε να συνεχίσουμε με διάφορους τρόπους:

(1ος τρόπος) Με τέμνουσα των ΜΟ, ΖΕ, την ευθεία ΕΟΝ σχηματίζονται οι εντός-εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες:

$$\text{Μ}\hat{\text{Ο}}\text{Ν} = \text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Ν}.$$

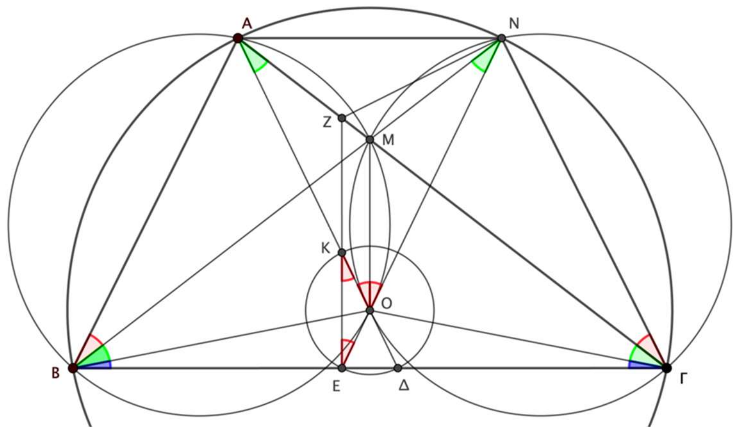
Λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΓ, παίρνουμε

$$\text{Ο}\hat{\Gamma}\text{Μ} = \text{Ο}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = \text{Ο}\hat{\text{Ν}}\text{Μ},$$

οπότε το τετράπλευρο ΟΓΝΜ είναι εγγράψιμο. Επομένως,

$$\text{Ζ}\hat{\Gamma}\text{Ν} = \text{Μ}\hat{\Gamma}\text{Ν} = \text{Μ}\hat{\text{Ο}}\text{Ν} = \text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Ν}.$$

Συνεπώς, τα σημεία N, Z, E, Γ είναι ομοκυκλικά.



(2ος τρόπος) Αν K είναι το σημείο τομής του κύκλου (O, OΔ) με την ΑΓ, τότε $KE \perp B\Gamma$, αφού το τρίγωνο KEΔ είναι ορθογώνιο με διάμεσο την EO. Άρα το K βρίσκεται πάνω στην ZE, και από το ισοσκελές τρίγωνο EOK, έχουμε

$$E\widehat{K}O = K\widehat{E}O = Z\widehat{E}N.$$

Με τέμνουσα των MO, ZE, την ευθεία AKO σχηματίζονται οι εντός εναλλάξ γωνίες ίσες:

$$E\widehat{K}O = K\widehat{O}M = A\widehat{O}M.$$

Λόγω του ισοσκελούς τριγώνου BON, παίρνουμε

$$O\widehat{A}M = O\widehat{N}M = O\widehat{B}M,$$

οπότε το τετράπλευρο OBAM είναι εγγράψιμο. Επομένως,

$$Z\widehat{\Gamma}N = A\widehat{\Gamma}N = A\widehat{B}N = A\widehat{B}M = A\widehat{O}M = Z\widehat{E}N.$$

Συνεπώς, τα σημεία N, Z, E, Γ είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου ν, για τις οποίες ο καθένας από τους αριθμούς $\nu - 210$ και $\nu + 210$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Έστω ότι

$$\nu - 210 = \alpha^2 \quad \text{και} \quad \nu + 210 = \beta^2, \qquad (1)$$

όπου α, β θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι $0 < \alpha < \beta$ και

$$\beta^2 - \alpha^2 = (\nu + 210) - (\nu - 210) = 420 \iff$$

$$(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 420 \qquad (2)$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\beta + \alpha) - (\beta - \alpha) = 2\alpha, \text{άρτιος}, \qquad (3)$$

οπότε προκύπτει ότι οι αριθμοί $(\beta+\alpha),(\beta-\alpha)$ είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί. Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $(\beta+\alpha)$, $(\beta-\alpha)$ είναι και οι δύο άρτιοι.
Η σχέση (2) γίνεται

$$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=420 \Leftrightarrow (\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

από την οποία , λόγω του ότι οι αριθμοί $(\beta+\alpha)$, $(\beta-\alpha)$ είναι και οι δύο άρτιοι, προκύπτουν τα ζεύγη

$$(\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(2\cdot 3, 2\cdot 5\cdot 7) \text{ ή } (\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(2\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 7)$$

$$\text{ή } (\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(2\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5) \text{ ή } (\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(2, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)$$

$$\Leftrightarrow (\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(6,70) \text{ ή } (\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(10,42)$$

$$\text{ή } (\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(14,30) \text{ ή } (\beta-\alpha,\beta+\alpha)=(2,210) \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(32,38) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(16,26) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(8,27) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(104,106) \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) λαμβάνουμε:

$$\nu=\alpha^2+210 \qquad \text{και} \quad \nu=\beta^2-210\,,$$

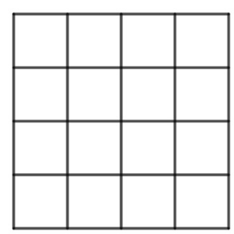
και λόγω των σχέσεων (4) έχουμε:

$$\nu=32^2+210=1234 \text{ ή } \nu=16^2+210=466$$

$$\text{ή } \nu=8^2+210=274 \text{ ή } \nu=104^2+210=11026.$$

Πρόβλημα 4

Σε ένα πίνακα 4×4 χωρισμένο σε 16 μικρά τετράγωνα 1×1 τοποθετούμε 4 λευκά και 4 μαύρα πιόνια, έτσι ώστε να ισχύουν:



(α) Κάθε μικρό τετράγωνο 1×1 περιέχει το πολύ ένα πιόνι.
(β) Κάθε (οριζόντια)γραμμή περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.
(γ) Κάθε (κατακόρυφη)στήλη περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

Να βρείτε πόσες διαφορετικές τοποθετήσεις υπάρχουν.

Λύση

Καταρχήν παρατηρούμε ότι από τους όρους (β) και (γ) για τοποθέτηση ενός λευκού και ενός μαύρου πιονιού σε κάθε γραμμή και στήλη προκύπτει ότι δεν μπορούν να υπάρχουν δύο γραμμές της ιδίας μορφής ή δύο στήλες της ιδίας μορφής.
Οι δυνατοί συνδυασμοί για να τοποθετήσουμε 2 πιόνια σε μια γραμμή με τέσσερα τετράγωνα είναι $\binom{4}{2}=6$. Οι τοποθετήσεις αυτές είναι οι εξής:

T1: (Π, Π, 0, 0), **T2:** (0, 0, Π, Π),

T3: (Π, 0, Π, 0), **T4:** (0, Π, 0, Π),

T5: (Π, 0, 0, Π), **T6:** (0, Π, Π, 0).

Επειδή για κάθε τοποθέτηση δύο πιονιών σε μία γραμμή μένουν δύο θέσεις κενές, παρατηρούμε ότι τα ζεύγη ανά δύο είναι **συμπληρωματικά**: Το Τ1 με το Τ2, το Τ3 με το Τ4 και το Τ5 με το Τ6.

Επειδή πρέπει να έχουμε 4 γραμμές που καμία δεν πρέπει να είναι ίδια με την άλλη, πρέπει να επιλέξουμε 4 διαφορετικές τοποθετήσεις από τις 6 βρήκαμε παραπάνω.
Επιπλέον, για να έχει και κάθε στήλη δύο πιόνια πρέπει οι γραμμές που θα επιλέξουμε να εμφανίζουν όλες τις στήλες του πίνακα με δύο πιόνια. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει μόνο αν επιλέξουμε δύο ζεύγη συμπληρωματικών γραμμών. Οι δυνατές επιλογές δύο συμπληρωματικών ζευγών από τα τρία ζεύγη που έχουμε είναι $\binom{3}{2} = 3$. Έτσι προκύπτουν τα τετράγωνα

Π	Π		
		Π	Π
Π		Π	
	Π		Π

Π	Π		
		Π	Π
Π			Π
	Π	Π	

Π		Π	
	Π		Π
Π			Π
	Π	Π	

Για κάθε ένα από τα 3 παραπάνω τρία τετράγωνα υπάρχουν 4!=24 διαφορετικές μεταθέσεις των γραμμών οι οποίες δεν επηρεάζουν το πλήθος των πιονιών των στηλών. Επειδή σε κάθε τετράγωνο έχουμε τοποθετήσει δύο ζεύγη συμπληρωματικών γραμμών οι στήλες που προκύπτουν είναι διαφορετικές ανά δύο.

Επομένως, για κάθε ένα από τα τρία τετράγωνα έχουμε 24 σωστές τοποθετήσεις, οπότε ο συνολικός αριθμός των τοποθετήσεων, ανεξάρτητα από το χρώμα των πιονιών, είναι:

$$3 \cdot 24 = 72.$$

Επειδή σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ζητάμε να υπάρχει ένα λευκό και ένα μαύρο πιόνι, πρέπει να ορίσουμε το χρώμα των πιονιών. Παρατηρούμε ότι, αν ορίσουμε το χρώμα ενός οποιουδήποτε πιονιού (π.χ. το πρώτο πάνω αριστερά είναι Λ), τότε τα χρώματα των υπόλοιπων πιονιών στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη καθορίζονται αυτόματα (πρέπει να είναι Μ). Τότε το δεύτερο πιόνι της τρίτης γραμμής και της δεύτερης στήλης πρέπει να είναι λευκά, οπότε στη συνέχεια το δεύτερο πιόνι της τρίτης στήλης και το δεύτερο πιόνι της τέταρτης γραμμής πρέπει να είναι μαύρα. Τελικά το δεύτερο πιόνι της δεύτερης γραμμής και της τέταρτης στήλης πρέπει να είναι λευκό.

Λ	Μ		
		Μ	Λ
Μ		Λ	
	Λ		Μ

Γενικά για κάθε μία από τις 72 τοποθετήσεις υπάρχουν **2 τρόποι** να οριστούν τα χρώματα, είτε ξεκινώντας με λευκό το πρώτο διαθέσιμο πιόνι, είτε με μαύρο. Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών τοποθετήσεων είναι :

$$72 \cdot 2 = 144.$$

Υπάρχουν ακόμη οι τρεις περιπτώσεις χρησιμοποίησης από δύο φορές των συμπληρωματικών ζευγών, στις οποίες υπάρχουν ίδιες γραμμές και ίδιες στήλες, όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

Π	Π		
		Π	Π
Π	Π		
		Π	Π

Π		Π	
	Π		Π
Π		Π	
	Π		Π

Π			Π
	Π	Π	
Π			Π
	Π	Π	

Ο περιορισμός για την ύπαρξη ενός λευκού και ενός μαύρου πιονιού σε κάθε γραμμή και στήλη δίνει τη δυνατότητα διαφοροποίησης των γραμμών που είναι ίδιες.
Στη περίπτωση αυτή σε κάθε πίνακα έχουμε δύο διαφορετικές γραμμές, οπότε οι διαφορετικές μεταθέσεις τους είναι όσο το πλήθος των συνδυασμών των 4 γραμμών ανά 2, δηλαδή $\binom{4}{2} = 6$.
Επιπλέον η χρησιμοποίηση λευκών και μαύρων πιονιών δίνει από δύο διαφορετικές περιπτώσεις στα ζεύγη των ίδιων γραμμών, οπότε σε καθέναν από τους παραπάνω πίνακες προκύπτουν 4 διαφορετικές τοποθετήσεις, όπως φαίνεται παρακάτω για τον πρώτο πίνακα:

Λ	Μ		
		Λ	Μ
Μ	Λ		
		Μ	Λ

Λ	Μ		
		Μ	Λ
Μ	Λ		
		Λ	Μ

Μ	Λ		
		Μ	Λ
Λ	Μ		
		Λ	Μ

Μ	Λ		
		Λ	Μ
Λ	Μ		
		Μ	Λ

Επομένως συνολικά στις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν: $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

Έτσι συνολικά προκύπτουν $144 + 72 = 216$ διαφορετικές τοποθετήσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος.

Δεύτερη λύση

Έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ μια αναδιάταξη του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ η οποία περιγράφει την τοποθέτηση πιονιών στον πίνακα ως εξής:

στην $i-οστή$ γραμμή του πίνακα, τοποθετούμε πιόνι στη στήλη α_i, για $i = 1, 2, 3, 4$.

Για παράδειγμα, η αναδιάταξη $(1, 3, 2, 4)$ δηλώνει τον παρακάτω πίνακα τοποθέτησης των τεσσάρων λευκών πιονιών:

Λ			
		Λ	
	Λ		
			Λ

Υπάρχουν $4! = 24$ αναδιατάξεις του $\{1, 2, 3, 4\}$, άρα τόσοι είναι οι τρόποι τοποθέτησης των λευκών πιονιών ώστε να μην υπάρχουν δύο λευκά πιόνια στην ίδια στήλη ή στην ίδια γραμμή.
Ας μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα μαύρα πιόνια (Μ), ώστε να μην υπάρχουν δύο μαύρα πιόνια στην ίδια στήλη ή στην ίδια γραμμή, και να μην υπάρχουν δύο πιόνια στο ίδιο κελί. Ένα παράδειγμα που συμπληρώνει τον παραπάνω πίνακα είναι το παρακάτω

Λ	Μ		
Μ		Λ	
	Λ		Μ
		Μ	Λ

Η τοποθέτηση των μαύρων πιονιών παραπάνω αντιστοιχεί στην αναδιάταξη $(2, 1, 4, 3)$ και είναι μια αναδιάταξη της $(1, 3, 2, 4)$ χωρίς σταθερό σημείο.
Το πλήθος των αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ χωρίς σταθερό σημείο είναι 9:

(2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2), (4,3,2,1).

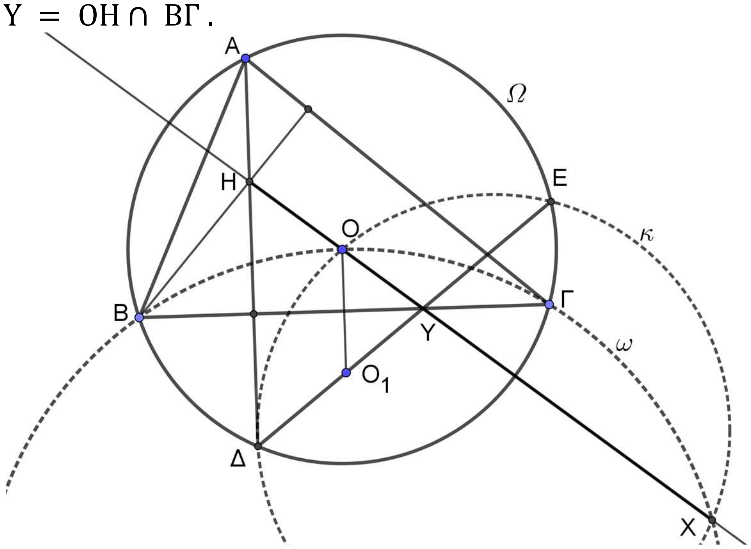
Για κάθε μια από τις 24 δυνατές τοποθετήσεις των λευκών πιονιών στον πίνακα, υπάρχουν λοιπόν 9 δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των μαύρων πιονιών. Συνεπώς, συνολικά υπάρχουν $24 \cdot 9 = 216$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

ΛΥΚΕΙΟ

Πρόβλημα 1

Έστω Ο το περίκεντρο και Η το ορθόκεντρο ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Έστω O_1 το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ΒΓ. Η ευθεία ΑΗ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Δ (Δ≠Α). Η ευθεία $O_1\Delta$ τέμνει το τόξο ΒΑΓ του κύκλου (ΑΒΓ) στο σημείο Ε ($E \neq \Delta$). Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (ΟΔΕ), ο κύκλος (ΟΒΓ) και η ευθεία ΟΗ συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο, διαφορετικό του Ο).

Λύση. (1ος τρόπος) Θέτουμε $\Omega = (A\,B\,\Gamma)$, $\omega = (O\,B\,\Gamma)$ και $\kappa = (O\,\Delta\,E)$.
Θέτουμε επίσης $Y = OH \cap B\Gamma$.

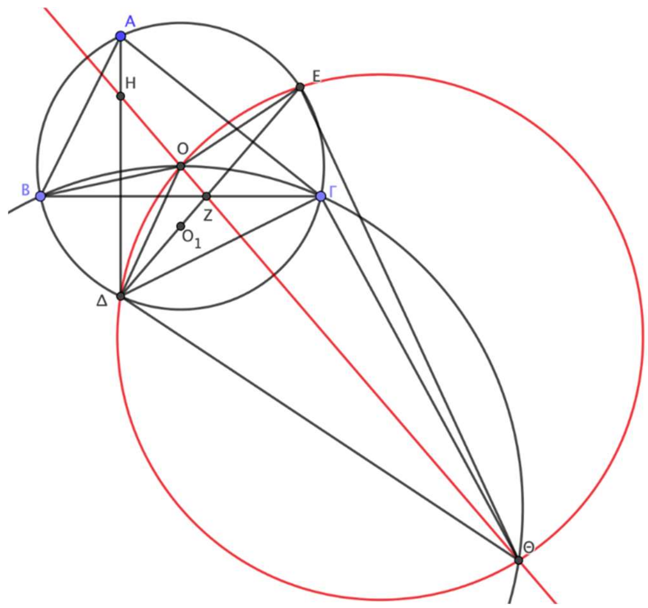


Θεωρούμε τη συμμετρία ως προς την ευθεία ΒΓ. Είναι γνωστό από προηγούμενο
- το Ο απεικονίζεται στο O_1,
- το Η απεικονίζεται στο Δ.

Άρα η ευθεία ΟΗ απεικονίζεται στην ευθεία $O_1\Delta$.
Επειδή το Υ ανήκει στην ΒΓ, μένει σταθερό από τη συμμετρία, οπότε το Υ (που είναι σημείο της ΟΗ) πρέπει να ανήκει και στην εικόνα της ΟΗ, δηλαδή στην $O_1\Delta$.
Άρα $Y \in O_1\Delta$. Επειδή Δ, E, O_1 είναι συνευθειακά, έχουμε $O_1\Delta \equiv \Delta E$, οπότε: $Y \in \Delta E$. Συνεπώς $Y = B\Gamma \cap \Delta E$.
Ο κύκλος $\kappa = (O\,\Delta\,E)$ τέμνει τον Ω στα σημεία Δ, E, άρα ο ριζικός άξονας των κ και Ω είναι η ευθεία ΔΕ.
Ο κύκλος $\omega = (O\,B\,\Gamma)$ τέμνει τον Ω στα σημεία B, Γ, άρα ο ριζικός άξονας των ω και Ω είναι η ευθεία ΒΓ .
Οι δύο αυτοί ριζικοί άξονες τέμνονται στο σημείο $\Delta E \cap B\Gamma = Y$. Άρα το Υ είναι το ριζικό κέντρο των τριών κύκλων κ, ω, Ω .
Από την ιδιότητα του ριζικού κέντρου, το Υ ανήκει και στον ριζικό άξονα των κ και ω. Έστω $X \neq O$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων κ και ω (το πρώτο είναι το Ο). Ο ριζικός

άξονας δύο τεμνόμενων κύκλων είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία τομής τους, άρα είναι η ΟΧ. Επομένως, τα σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}$ είναι συνευθειακά.
Όμως από τον ορισμό $\mathrm{Y} = \mathrm{OH} \cap \mathrm{B\Gamma}$ έχουμε ότι τα $\mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{Y}$ είναι συνευθειακά, δηλαδή η ευθεία ΟΥ ταυτίζεται με την ευθεία ΟΗ. Επομένως το Χ (που ανήκει στην ΟΥ) ανήκει στην ΟΗ.

2ος τρόπος



Είναι γνωστό ότι το Δ είναι το συμμετρικό του Η ως προς την ΒΓ. Αφού το O_1 είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ΒΓ, οι ευθείες ΗΟ και $\Delta\mathrm{O}_1$ τέμνονται πάνω στην ΒΓ, έστω στο Ζ. Έστω Θ το σημείο τομής της ΗΟ με τον κύκλο (ΔΟΕ). Τότε είναι

$$\mathrm{OZ} \cdot \mathrm{Z\Theta} = \mathrm{\Delta Z} \cdot \mathrm{ZE}.$$

Αφού $\mathrm{B}, \Delta, \Gamma, \mathrm{E}$ ομοκυκλικά, είναι

$$\mathrm{\Delta Z} \cdot \mathrm{ZE} = \mathrm{BZ} \cdot \mathrm{Z\Gamma}.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{OZ} \cdot \mathrm{Z\Theta} = \mathrm{BZ} \cdot \mathrm{Z\Gamma},$$

δηλαδή τα σημεία $\mathrm{B}, \mathrm{O}, \Gamma, \Theta$ είναι ομοκυκλικά, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους n ώστε η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 15^n + 5^n + 3^n + 1$$

να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Για $n = 0$, η τιμή της παράστασης είναι $4 = 2^2$. Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει λύση με $n > 0$.
Έστω ότι η τιμή της παράστασης είναι τέλειο τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι είναι

$$A \equiv 5^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \ (mod\ 3).$$

Αφού τα τέλεια τετράγωνο modulo 3 είναι μόνο το 0 και το 1, ο n θα πρέπει να είναι περιττός.

Έστω $n = 2k + 1$ για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο k.

(1ος **τρόπος**) Έστω $v_2(m)$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον ακέραιο m. Είναι $3^{n-1} = 9^k \equiv 1(mod\ 8)$, οπότε $3^n + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 4(mod\ 8)$. Άρα ο αριθμός $3^n + 1$ είναι άρτιος που διαιρείται από το 4, αλλά όχι από το 8. Συνεπώς, $v_2(3^n + 1) = 2$.

Αφού $5 \equiv 1(mod\ 4)$ είναι $5^n + 1 \equiv 2(mod\ 4)$. Άρα ο αριθμός $5^n + 1$ είναι άρτιος που διαιρείται από το 2, αλλά όχι από το 4. Άρα, $v_2(5^n + 1) = 1$.

Τότε είναι

$$v_2(15^n + 5^n + 3^n + 1) = v_2\big((5^n + 1)(3^n + 1)\big) = v_2(5^n + 1) + v_2(3^n + 1) = 1 + 2 = 3$$

δηλαδή περιττός, άτοπο.

(2ος **τρόπος**) Παρατηρούμε ότι

$$15^n + 1 = (15 + 1)(15^{n-1} - 15^{n-2} + \cdots - 15 + 1),$$

οπότε

$$15^n + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 16).$$

Επίσης,

$$5^n + 3^n = (5 + 3)(5^{n-1} - 5^{n-2} \cdot 3 + \cdots - 5 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}).$$

Η παράσταση στην παρένθεση είναι αλγεβρικό άθροισμα n όρων, δηλαδή περιττού πλήθους περιττών αριθμών, οπότε είναι περιττός αριθμός. Επομένως,

$$5^n + 3^n \equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 16).$$

Συνεπώς,

$$15^n + 5^n + 3^n + 1 \equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 16),$$

δηλαδή το 8 διαιρεί τον αριθμό $15^n + 5^n + 3^n + 1$, αλλά το 16 όχι, άτοπο.

Πρόβλημα 3

Σε καθένα από τα 64 τετράγωνα ενός 8×8 πίνακα γράφουμε έναν αριθμό από το σύνολο Α={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Η συμπλήρωση του πίνακα λέγεται έγκυρη, αν για κάθε δύο τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά ή κοινή κορυφή, οι αριθμοί που περιέχουν είναι πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1). Να βρεθεί ο μέγιστος ακέραιος k με την ιδιότητα ότι σε κάθε έγκυρη συμπλήρωση του πίνακα, υπάρχει αριθμός από το Α που εμφανίζεται τουλάχιστον k φορές.

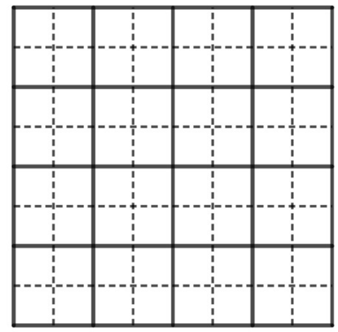
Λύση

Εξετάζουμε ποιοι αριθμοί από το σύνολο $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο. Έτσι διακρίνουμε τα υποσύνολα:

$\mathrm{B} = \{2, 4, 6, 8\}$ που όλα τα στοιχεία του έχουν κοινό διαιρέτη το 2

$\Gamma = \{3, 6, 9\}$ που όλα τα στοιχεία του έχουν κοινό διαιρέτη το 3

$\Delta = \{1, 5, 7\}$ που τα στοιχεία του είναι αριθμοί σχετικά πρώτοι με κάθε άλλον αριθμό από το σύνολο Α.



Στη συνέχεια χωρίζουμε το 8×8 τετράγωνο σε 16 τετράγωνα 2×2. Σε κάθε τέτοιο τετράγωνο όλα τα μικρά τετράγωνα είναι γειτονικά με βάση την υπόθεση. Επομένως σε αυτό μπορεί να γραφεί μόνο ένα στοιχείο του συνόλου Β και ένα μόνο στοιχείο του συνόλου Γ. Όταν το στοιχείο αυτό είναι το 6, τότε δεν μπορεί να γραφεί κανένα άλλο στοιχείο από τα σύνολα Β και Γ. Επομένως με στοιχεία από τα σύνολα Β και Γ μπορούμε να καλύψουμε το πολύ 32 μικρά τετράγωνα.

Απομένουν για συμπλήρωση άλλα 32 μικρά τετράγωνα στα οποία θα πρέπει να γραφούν αριθμοί από το σύνολο Δ. Σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, αν γράψουμε στις 32 θέσεις 3 αριθμούς, τότε ένα τουλάχιστον από αυτούς θα γραφεί

$$\left\lceil \frac{32}{3} \right\rceil = 11 \text{ φορές.}$$

2	1	2	5	2	7	2	1
3	5	3	7	3	1	3	5
4	7	4	1	4	5	4	7
9	1	9	5	9	7	9	1
8	5	8	7	8	1	8	5
3	7	3	1	3	5	3	7
2	1	2	5	2	7	2	1
9	5	9	7	9	1	9	5

Στο διπλανό τετράγωνο του σχήματος έχουμε γράψει τους αριθμούς των συνόλων Β και Γ , χωρίς το κοινό στοιχείο τους το 6, με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιηθεί κάθε στοιχείο όσο γίνεται λιγότερες φορές. Έχουν όλα αυτά τα στοιχεία γραφεί στην πρώτη, την τρίτη, την πέμπτη και στην έβδομη στήλη του πίνακα, έτσι ώστε να μην είναι ο ίδιος αριθμός σε γειτονικά μικρά τετράγωνα. Έτσι στις 32 δυνατές θέσεις έχουν γραφεί οι αριθμοί 2, 3 και 9 από 8 φορές και οι αριθμοί 4 και 8 από 4 φορές, δηλαδή όλοι αυτοί οι αριθμοί έχουν γραφεί λιγότερες από 11 φορές στον πίνακα.

Στη δεύτερη, στη τέταρτη, στην έκτη και στην όγδοη στήλη έχουμε τοποθετήσει τους αριθμούς του συνόλου Δ προσπαθώντας να χρησιμοποιηθεί έκαστος όσο λιγότερες φορές είναι δυνατόν. Έτσι βλέπουμε ότι οι αριθμοί 1 και 5 έχουν χρησιμοποιηθεί 11 φορές και ο αριθμός 7 έχει χρησιμοποιηθεί 10 φορές.

Επομένως, έχουμε βρει μία έγκυρη τοποθέτηση αριθμών στον πίνακα στην οποία εμφανίζονται δύο αριθμοί από το σύνολο Α 11 φορές. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια έγκυρη συμπλήρωση του πίνακα στην οποία όλοι οι αριθμοί του συνόλου Α εμφανίζονται λιγότερες από 11 φορές, τότε εξετάζοντας τα 2×2 τετράγωνα, όπως παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι με οι αριθμοί 2, 3, 4, 6, 8 και 9 μπορούν να γραφούν το πολύ σε 32 μικρά τετράγωνα, οπότε μένουν για συμπλήρωση από τους αριθμούς 1, 5, 7 τουλάχιστον 32 τετράγωνα με χρησιμοποίηση εκάστου εξ αυτών το πολύ 10 φορές, που είναι άτοπο.

Άρα ο ζητούμενος μέγιστος αριθμός είναι ο $k = 11$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f: ℝ ⟶ ℝ, που είναι τέτοιες ώστε

$$f(xy+1)-f(x)f(y)=2xy+1, \qquad (1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση
Θέτουμε $y=0$ στη δεδομένη σχέση, έστω (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(1)-f(x)f(0)=1, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Αν είναι $f(0) \neq 0$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{f(1)-1}{f(0)}=c \in \mathbb{R}, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

η οποία δεν επαληθεύει τη δεδομένη εξίσωση, αφού

$$c-c^2=2xy+1 \Leftrightarrow 2xy=c-c^2-1,, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{άτοπο.}$$

Άρα είναι $f(0)=0$ και τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $f(1)=1$.

Επίσης με $x=1, y=-1$ στη σχέση (1) προκύπτει:

$$f(0)-f(1)f(-1)=-1 \Rightarrow f(-1)=1.$$

Εκτελούμε στη σχέση (1) την αλλαγή μεταβλητών: $x \to xy,\ y \to 1$, οπότε

$$f(xy+1)-f(xy)f(1)=2xy+1, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$$

$$f(xy+1)-f(xy)=2xy+1, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$f(x)f(y)=f(xy), \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Θέτουμε $y=1$ στη σχέση (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(x+1)-f(x)f(1)=2x+1, \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f(x+1)=f(x)+2x+1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

Θέτουμε $x \to -x+1, y=-1$ στη σχέση (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(x-1+1)=f(-x+1)f(-1)+2(x-1)+1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f(1-x)=f(x)-2x+1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \qquad (5)$$

από την οποία με $x \to -x$ προκύπτει

$$f(1+x)=f(-x)+2x+1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (4) και (6) λαμβάνουμε:

$$f(x) = f(-x), \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

Τελικά, από τη σχέση (1) για $x \to x, y \to -x$, λόγω και των (3) – (7) λαμβάνουμε:

$$f(1-x^2) - f(x)f(-x) = 1 - 2x^2, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (f(x) - 2x + 1)(f(x) + 2x + 1) - \big(f(x)\big)^2 = 1 - 2x^2, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \big(f(x)\big)^2 + 2f(x) + 1 - 4x^2 - \big(f(x)\big)^2 = 1 - 2x^2, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

για την οποία βλέπουμε εύκολα ότι επαληθεύει τη δεδομένη σχέση.