140

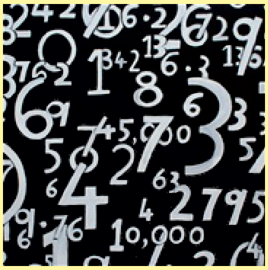
Μαθηματικό περιοδικό για το

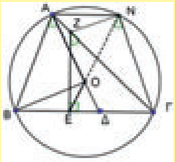
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

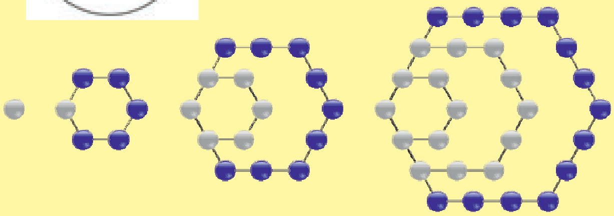
Ευκλείδης Α' Γυμνάσιο

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2026 ευρώ 3

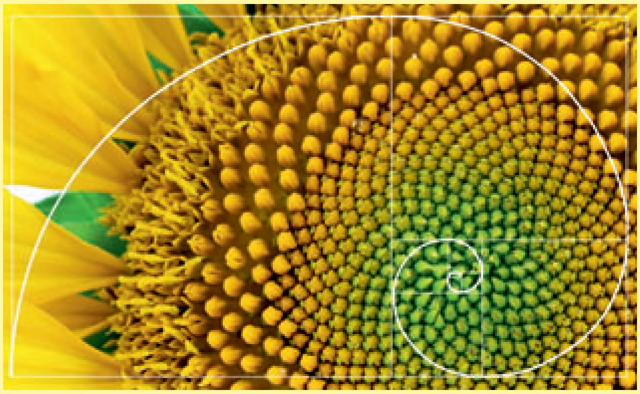
ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Κ+7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

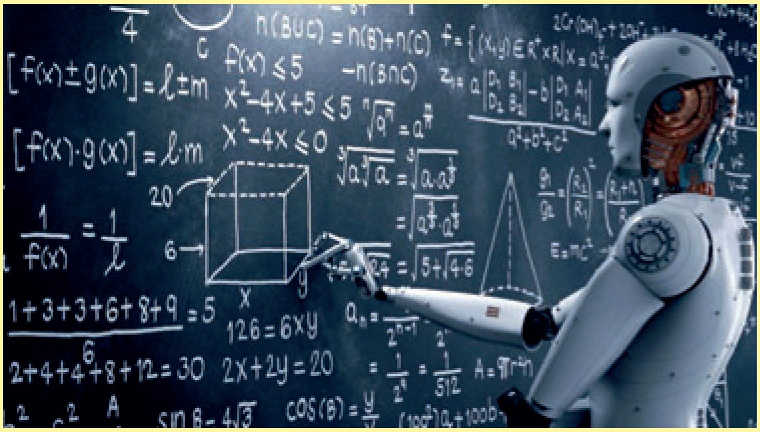


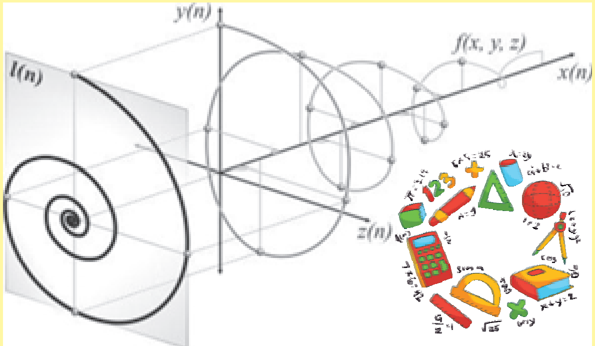




1 6 15 28







Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 140
Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2026
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34 Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής
Επιμέλεια Έκδοσης: Μαραγκάκης Στυλιανός, Χριστόπουλος Παναγιώτης

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες

Αγαπητοί μαθητές μαθήτριες

Το 4ο τεύχος του περιοδικού μας είναι πλούσιο σε θέματα επαναληπτικά που μπορούν να σας βοηθήσουν στις εξετάσεις. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ στις εξετάσεις σας.

Τη νέα σχολική χρονιά ένα ωραίο περιοδικό, με πρωτότυπα θέματα θα σας περιμένει.

ΚΑΛΕΣ ΔΙΑΚΟΠΕΣ

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Α. Κρέτσης

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Ο άνθρωπος που άλλαξε την πορεία του δυτικού πολιτισμού

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ο Λεονάρντο Φιμπονάτσι (*Fibonacci*) ή **Λεονάρντο της Πίζας (1170-1250)**

Κατά την εξέλιξη της ιστορίας των λαών, αρκετοί ανέπτυξαν ένα δικό τους σύστημα αρίθμησης, είτε δανείστηκαν αντίστοιχα άλλων λαών κάνοντας κάποιες τροποποιήσεις σ' αυτά. Το πιο παλιό σύστημα είναι το 12δικό από την νεολιθική εποχή και το 60αδικό σύστημα των Σουμερίων, το οποίο πήραν οι Βαβυλώνιοι πριν 4500 χρόνια και δημιούργησαν το θεσιακά αξιακό σύστημα για το ημερολόγιό τους των 360 ημερών. Οι Βαβυλώνιοι έκαναν χρήση μόνο δύο συμβόλων (για το 1 και το 10). Μπορούσαν να κάνουν δύσκολους υπολογισμούς και μάλιστα όπου χρειαζόταν το 0 άφηναν ένα κενό.

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν το δικό τους σύστημα, χρησιμοποιούσαν για αριθμητικά σύμβολα τα γράμματα της αλφαβήτου. Οι Ρωμαίοι είχαν άλλο με δικά τους σύμβολα. Αυτά μέχρις ότου διαδοθεί, πριν λίγους αιώνες, το **Ινδο-Αραβικό** όπως λέγεται δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, με τα δέκα ψηφία: **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, από τον Ιταλό μαθηματικό Λεονάρντο Φιμπονάτσι.** Ο **Φιμπονάτσι** εισήγαγε στην Ευρώπη το Ινδο-Αραβικό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, **το σύμβολο για το μηδέν και την υποδιαστολή.** Το **Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης** είναι σήμερα το μοναδικό σύστημα συμβόλων και αρίθμησης σε όλο τον κόσμο.

Σε μια σκοτεινή εποχή για τις επιστήμες στην Ευρώπη το 13ο αιώνα (1202) ο Φιμπονάτσι δημοσιεύει το LIBER ABACI(βιβλίο των υπολογισμών). Το βιβλίο αυτό, ήταν γεμάτο με τις μαθηματικές γνώσεις που είχε περισυλλέξει στα ταξίδια του τα οποία έκανε μαζί με τον έμπορο πατέρα του στη Βόρεια Αφρική. Στο βιβλίο αυτό έδειχνε την πρακτικότητα του **Ινδο-Αραβικού δεκαδικού συστήματος αρίθμησης** στην τήρηση εμπορικών βιβλίων, στις χρηματικές συναλλαγές, τις μετατροπές των μέτρων και σταθμών, στον υπολογισμό των επιτοκίων και άλλες εφαρμογές. Το βιβλίο έτυχε θερμής υποδοχής στους λόγιους της Ευρώπης και τους επηρέασε σημαντικά. Η διάδοση του συστήματος όμως έγινε μετά την εφεύρεση της τυπογραφίας. Ο Ιωάννης του Παλέρμο, μέλος της αυλής του Φρειδερίκου Β', παρουσιάζει στον Φιμπονάτσι έναν αριθμό προβλημάτων-προκλήσεων, από τα οποία έλυσε τα τρία.

Ένα από αυτά ήταν το εξής:

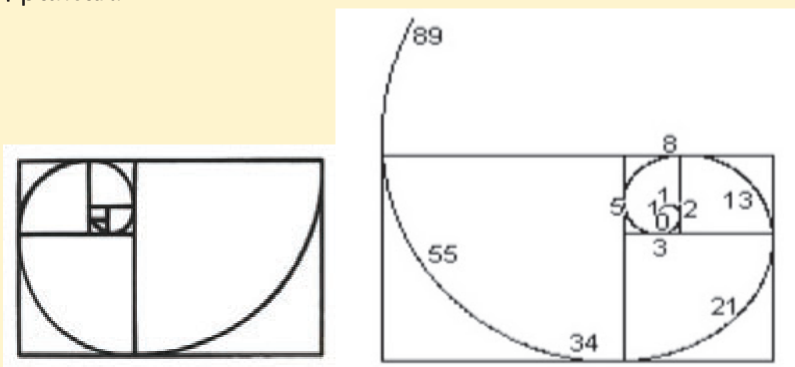
Κάποιος τοποθέτησε σε έναν αποκλεισμένο τόπο ένα ζευγάρι κουνέλια τα οποία αναπαράγονται με ρυθμό «ένα νέο ζευγάρι το μήνα και κάθε νέο ζευγάρι γίνεται γόνιμο δύο μήνες μετά κι αναπαράγεται με τον ίδιο ρυθμό». Πόσα ζευγάρια κουνελιών έχουν παραχθεί σε έναν χρόνο από το αρχικό ζεύγος;

Το αποτέλεσμα από τη λύση του προβλήματος είναι η ακολουθία των αριθμών:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946 ...

γνωστή ως **ακολουθία Φιμπονάτσι**, μια ακολουθία εξαιρετικά χρήσιμη στην επιστήμη που κάθε νέος όρος της είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων. Οι όροι της ακολουθίας ορίζονται από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ **με** $\alpha_0=0$ **και** $\alpha_1=1$**.** Εξετάζουμε το λόγο δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας: 2/1=2 , 3/2=1.5 , 5/3=1.666... , 8/5=1.6 , 13/8=1.625 , 21/13=1.615... , …... , **10946/6765=1,61803...** , …... παρατηρούμε ότι τείνει στον **φ**, όσο δηλαδή διαιρούμε μεγαλύτερους όρους της ακολουθίας ο λόγος προσεγγίζει όλο και περισσότερο τον γνωστό **"χρυσό λόγο"** που είναι ίσος με τον άρρητο αριθμό **φ** $=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618033...$ **.**

Ο Φιμπονάτσι πίστευε ότι αυτοί οι αριθμοί μπορούν να ξεκλειδώσουν τα μυστικά της Φύσης. Μπορούμε να το αντιληφθούμε αυτό αν λάβουμε υπόψη πως η ακολουθία, καθώς και η λογαριθμική σπείρα που δημιουργείται σε σχέση με τον φ απαντώνται σχεδόν παντού: Στη Φυσική, τη Βιολογία, τη Βοτανολογία, την Αστρονομία, την Πυρηνική φυσική, την Οικονομία, την Εκπαίδευση, την Ποίηση, την Μουσική, την Αρχαιολογία, την Αρχιτεκτονική, την Τέχνη και είναι μια βάση για τα Φράκταλ.



Η λογαριθμική σπείρα Φιμπονάτσι

Ας θαυμάσουμε την αρμονία των σχέσεων με το φ.

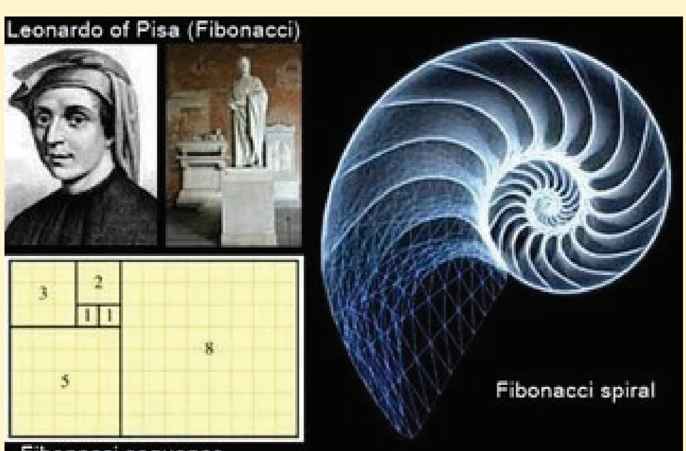
$\phi^1=1\phi+0$	**$\phi^2=1\phi+1$**	**$\phi^3=2\phi+1$**	**$\phi^4=3\phi+2$**	**$\phi^5=5\phi+3$**
$\phi^6=8\phi+5$	**$\phi^7=13\phi+8$**	**$\phi^8=21\phi+13$**	**$\phi^9=34\phi+21$**	**$\phi^{10}=55\phi+34$**
$\phi^{11}=89\phi+55$	**$\phi^{12}=144\phi+89$**	**$\phi^{13}=233\phi+144$**	**$\phi^{14}=377\phi+233$**	

$\phi^{\nu}=\nu^{ος}$ όρος της ακολουθίας επί $\phi+(\nu\text{-}1)^{ος}$ όρος.

Παρατηρήστε ότι στο δεύτερο μέρος της ισότητας οι συντελεστές του Φ είναι όροι της ακολουθίας Φιμπονάτσι, ενώ οι σταθεροί όροι που προστίθενται είναι επίσης όροι της ακολουθίας Φιμπονάτσι κατά μια θέση μικρότεροι.

Η Ινδία είναι που μας έδωσε την ιδιοφυή μέθοδο έκφρασης όλων των αριθμών μέσω δέκα συμβόλων, όπου κάθε σύμβολο λαμβάνει μία τιμή θέσεως και μία απόλυτη τιμή, ιδέα σημαντική που τώρα μας φαίνεται τόσο απλή ώστε να παραγνωρίζουμε το αληθινό της πλεονέκτημα.

Pierre Laplace (1749-1827)



Θεωρία Αριθμών και Πολυγωνικοί αριθμοί

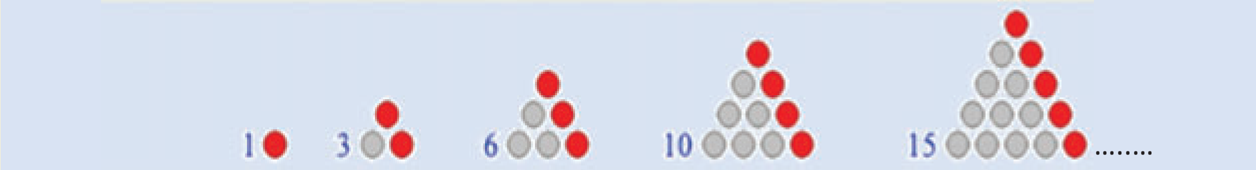
Βαρβάρα Καμπουρίδη

Η Θεωρία Αριθμών είναι κλάδος των Μαθηματικών που, όπως φανερώνει και το όνομά του, αναφέρεται και εξετάζει τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους. Ονομάζεται και Βασίλισσα των Μαθηματικών!

Βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών συναντά ο μαθητής από το Δημοτικό Σχολείο στο πλαίσιο του μαθήματος Αριθμητική: Ευκλείδεια διαίρεση, Βασικές ιδιότητες της Διαιρετότητας (πότε ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 2, 3, κτλ.), Πρώτοι αριθμοί (κόσκινο του Ερατοσθένη), Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.), Ευκλείδειος αλγόριθμος για την εύρεση του Μ.Κ.Δ., Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.). Η Θεωρία Αριθμών όμως, προχωρά πιο πέρα και εξετάζει θεωρήματα των Euler, Fermat, Riemann, Gauss (ονομάστηκε Πρίγκιπας των Μαθηματικών) και πολλών άλλων μεγάλων μαθηματικών. Ορισμένα από αυτά θα διδαχθούν οι μαθητές στο Λύκειο και περισσότερα όσοι αποφασίσουν να μπουν για τα καλά στην ουσία της μαθηματικής επιστήμης, να πάρουν μέρος σε διαγωνισμούς Μαθηματικών ή να σπουδάσουν Μαθηματικά.

Εδώ θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε κάποιους αριθμούς με βάση τις αναπαραστάσεις τους με τελείες. Ναι, καλά διαβάσατε, με τελείες. Οι αριθμοί αυτοί, οι πολυγωνικοί (οι τελείες σχηματίζουν πολύγωνα), μελετήθηκαν πρώτα από τους αρχαίους Έλληνες και αποτέλεσαν μέρος του συνδέσμου μεταξύ Γεωμετρίας και Θεωρίας Αριθμών. Οι μελετητές ανάγουν τη θεωρία των πολυγωνικών αριθμών στον Πυθαγόρα.

Α. Οι τρίγωνοι αριθμοί. Οι σχηματισμοί τους είναι τρίγωνα.



Πώς σχηματίζονται οι τρίγωνοι αριθμοί;

Ο πρώτος τρίγωνος αριθμός είναι ο 1, δεύτερος ο 3 (1+2), δηλαδή το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου ή αλλιώς $\frac{2\cdot 3}{2}$, τρίτος ο 6 (3+2+1),δηλαδή το άθροισμα του πρώτου, του δεύτερου και του τρίτου αριθμού, ή αλλιώς $\frac{3\cdot 4}{2}$, κ.ο.κ.

Ο νιοστός αριθμός θα είναι (1+2+3+….+ν) ή αλλιώς $\frac{\nu\bullet(\nu+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\nu^2+\nu)$ όπου ν φυσικός αριθμός.

Για παράδειγμα, ο 5ος αριθμός είναι $\frac{5\cdot 6}{2}=15$.

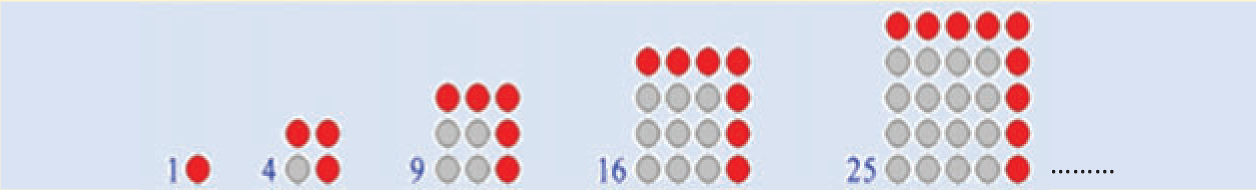
Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, με τον τύπο $\frac{1}{2}\cdot(\nu^2+\nu)$ μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των ν φυσικών αριθμών.

Ποιος είναι ο 20ος τρίγωνος αριθμός; Ποιος είναι ο 100ος τρίγωνος αριθμός;

Ποια η σχέση του 100ου τρίγωνου αριθμού με το άθροισμα 1+2+3+….+100;

Β. Οι τετράγωνοι αριθμοί. Οι σχηματισμοί τους είναι τετράγωνα.

Πώς σχηματίζονται οι τετράγωνοι αριθμοί;



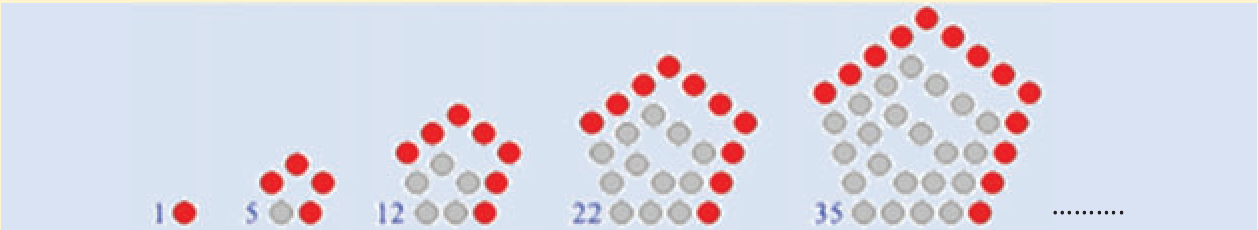
Μετράμε τις τελείες που χρειάζονται για να σχηματιστεί κάθε τετράγωνο στη σειρά και βρίσκουμε τον αντίστοιχο τετράγωνο αριθμό.

Ο δεύτερος τετράγωνος αποτελείται από 1+3 (1 γκρι και 3 κόκκινες τελείες) = 4= 2^2, ο τρίτος αποτελείται από (1+3) γκρι +5 κόκκινες = 1+ 3 + (2·3-1)= 9 = 3^2, ο τέταρτος (1+3+5) γκρι+7 κόκκινες= 1+3+5 + (2·4-1) =16=4^2, κ.ο.κ.,

Ο νιοστός 1+3+5 +…+ (2·ν-1) = $ν^2$.

Ποια είναι η σχέση του νιοστού τετράγωνου αριθμού με το άθροισμα των ν περιττών φυσικών αριθμών; Οι τετράγωνοι αριθμοί είναι 1, 2^2, 3^2, κ.ο.κ. Ο νιοστός τετράγωνος αριθμός είναι $ν^2$, όπου ν φυσικός αριθμός. Για παράδειγμα, ο $20^{ος}$ τετράγωνος αριθμός είναι ο 20^2 =400. Ποιος είναι ο $50^{ος}$ τετράγωνος αριθμός; και ποιος ο $100^{ος}$;

Γ. Οι πεντάγωνοι ή πενταγωνικοί αριθμοί. Οι σχηματισμοί τους είναι πεντάγωνα.

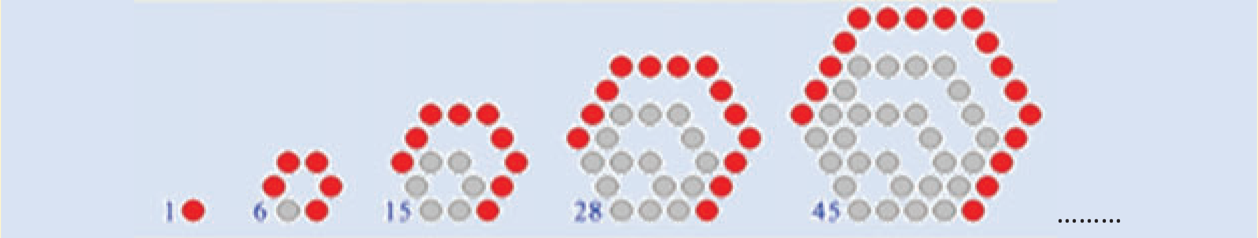


Μετράμε τις τελείες σε κάθε σχηματισμό πενταγώνων ξεκινώντας από τον πρώτο που είναι ο 1 και συνεχίζοντας με τον δεύτερο, τον 5 (1+4). Ο τρίτος πεντάγωνος αριθμός σχηματίζεται από τις 5 γκρι τελείες του $2^{ου}$ πεντάγωνου (εσωτερικό πεντάγωνο) + τις 7 κόκκινες τελείες που μαζί με τις 3 γκρι σχηματίζουν το εξωτερικό πεντάγωνο. Τις 3 γκρι τελείες τις παίρνουμε μία φορά. Άρα, 10+5-3= 12 ο τρίτος πεντάγωνος.

Ο τέταρτος πεντάγωνος σχηματίζεται από τις 5 + 10 + 15 τελείες αλλά τις 3 +5 γκρι τελείες τις παίρνουμε μία φορά 3+5=8. Άρα, 5+10+15-8 =22 ο τέταρτος πεντάγωνος.

Ο νιοστός πεντάγωνος αριθμός είναι ο $\frac{1}{2}\cdot(3ν^2 - ν)$.

Δ. Οι εξάγωνοι ή εξαγωνικοί αριθμοί.



Παρατηρούμε τους εξάγωνους αριθμούς (1, 6, 15, 28, 45…) και τους συγκρίνουμε με τους τρίγωνους (1, 3, 6, 10, 15, …). Οι αριθμοί 6, 15, ….είναι κοινοί και στις δύο ομάδες αριθμών. Αν συνεχίσουμε τη σύγκριση, διαπιστώνουμε ότι κάθε δεύτερος τρίγωνος αριθμός είναι και εξάγωνος ή αλλιώς, κάθε εξάγωνος αριθμός είναι και τρίγωνος. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ο νιοστός εξάγωνος αριθμός είναι ο $\frac{1}{2}\cdot(4ν^2 - 2ν) = 2ν^2 - ν$.

Αναλογικά με τα όσα παρατηρήσαμε παραπάνω μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι επτάγωνοι ή επταγωνικοί αριθμοί μπορούν να βρεθούν αν στον τύπο $\frac{1}{2}\cdot(5ν^2 - 2ν)$ αντικαθιστούμε τον ν με 1, 2, 3 κτλ. Οι επταγωνικοί αριθμοί είναι:1,7,18,34,55,…… Προσπαθήστε να τους αναπαραστήσετε με τελείες.

Με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζουμε, για παράδειγμα, τους 22-άγωνους αριθμούς $\frac{1}{2}\cdot(22ν^2 - 2ν)$, τους ν-γωνους αριθμούς, κ.ο.κ.

Η τελευταία μας παρατήρηση αφορά αριθμούς που ανήκουν σε δύο τουλάχιστον ομάδες, όπως οι εξάγωνοι αριθμοί, ο 36 που είναι και τετράγωνος και τρίγωνος, ο 210 που είναι πεντάγωνος και τρίγωνος και άλλοι. Όταν ασχολούμαστε με αριθμούς πάντα προκύπτει κάτι άλλο, κάτι άλλο και αυτή είναι η μαγεία που έχουν.

Πηγές: The Queen of Mathematics, Wikipedia, Θεωρία Αριθμών.

Α΄ Τάξη

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δημήτρης Διαμαντίδης και Λέοντας Κουτσουρής

Άσκηση 1η

Ένα αεροπλάνο τα τελευταία χρόνια φεύγει από το νησί για την Αθήνα κάθε 4 ημέρες. Από το ίδιο νησί φεύγει το καράβι «Μαρίνα» για τον Πειραιά κάθε 6 ημέρες. Σήμερα είναι Τετάρτη και το καράβι θα φύγει από το νησί για τον Πειραιά σε 2 ημέρες, δηλαδή την Παρασκευή.

α) Αν το αεροπλάνο και το καράβι φεύγουν και τα δύο από το νησί την Παρασκευή, για την Αθήνα και τον Πειραιά, αντίστοιχα, τότε τι ημέρα θα είναι όταν θα ξαναφύγουν και τα δύο την ίδια ημέρα από το νησί;

β) Για δύο φυσικούς αριθμούς Δ και δ ισχύει η ισότητα $\Delta = 4 \cdot \delta + 2$.

Αν σήμερα φεύγει το καράβι από το νησί για τον Πειραιά, τότε όταν περάσουν Δ ημέρες, εκείνη την ημέρα θα φεύγει το ίδιο καράβι από το νησί για τον Πειραιά;

Λύση

α) Ας υποθέσουμε ότι είναι η Παρασκευή που φεύγει το καράβι «Μαρίνα» και το αεροπλάνο από το νησί. Το πλήθος των ημερών που θα φύγει ξανά το αεροπλάνο από το νησί είναι πολλαπλάσιο του 4, ενώ το αντίστοιχο πλήθος ημερών για το καράβι είναι πολλαπλάσιο του 6.

Βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των 4 και 6:

$$ΕΚΠ(4,6) = 12$$

Επομένως:

Το πλήθος των ημερών στις οποίες θα φύγουν ξανά <u>την ίδια ημέρα</u> το αεροπλάνο και το καράβι από το νησί είναι 12.

Χωρίζουμε τις 12 ημέρες σε 7+5, δηλαδή 1 εβδομάδα και 5 ημέρες.

Εφόσον είναι Παρασκευή, σε 1 εβδομάδα θα είναι πάλι Παρασκευή και σε επιπλέον 5 ημέρες θα είναι Τετάρτη.

Άρα την μεθεπόμενη Τετάρτη το αεροπλάνο και το καράβι θα φύγουν ξανά μαζί από το νησί.

β) Αν το καράβι φεύγει σήμερα για τον Πειραιά, τότε για να φεύγει ξανά σε Δ ημέρες για τον ίδιο προορισμό, πρέπει το Δ να είναι πολλαπλάσιο του 6.

Είναι το Δ πολλαπλάσιο του 6;

Αυτό δεν ισχύει πάντα.

Π.χ.

- αν $\delta = 1$, τότε $\Delta = 6$,
- αν $\delta = 2$, τότε $\Delta = 10$,
- αν $\delta = 3$, τότε $\Delta = 14$,
- αν $\delta = 4$, τότε $\Delta = 18$,
- αν $\delta = 5$, τότε $\Delta = 22$,

  κ.λπ.

Παρατηρούμε ότι το Δ είναι πολλαπλάσιο του 6, για $\delta = 1, 4, 7, 10, \ldots$

Άσκηση 2η

Δίνεται ο αριθμός $x = 23\_1$, όπου λείπει το ψηφίο των δεκάδων.

α) Διαιρείται ο αριθμός x με το 5;

β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Αν ο αριθμός x διαιρείται με το 3.

ii. Αν ο αριθμός x διαιρείται με το 9.

iii. Αν ο αριθμός χ διαιρείται με το 3, αλλά όχι με το 9.

γ) Ποιο είναι το υπόλοιπο του x με διαιρέτη το 2;

Λύση

α) Ο αριθμός x δεν διαιρείται με το 5, γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι 1 και όχι 0 ή 5.

β) Ας συμβολίσουμε τον αριθμό x ως εξής:

$$\overline{23\delta 1}$$

Δηλαδή δ είναι το ψηφίο των δεκάδων.

i. Αν ο χ διαιρείται με το 3, τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή:

$$2 + 3 + \delta + 1 = 3 \cdot \nu$$

Ο ν είναι ένας θετικός ακέραιος.

Άρα:

$$6 + \delta = 3 \cdot \nu$$

Δηλαδή:

$$\delta = 3 \cdot \nu - 6$$

Όμως το δ είναι μονοψήφιος αριθμός, άρα η μόνες δυνατές τιμές για το ν είναι:

- $\nu = 2$, άρα $\delta = 0$.
- $\nu = 3$, άρα $\delta = 3$.
- $\nu = 4$, άρα $\delta = 6$.
- $\nu = 5$, άρα $\delta = 9$.

Για τις παραπάνω τιμές του δ οι τιμές του αριθμού χ είναι, αντίστοιχα 2301, 2331, 2361 και 2391.

ii. Αν ο αριθμός χ διαιρείται με το 9, τότε διαιρείται και με το 3, καθώς το 9 είναι πολλαπλάσιο του 3.
Επομένως, ο αριθμός ή οι αριθμοί που αναζητούμε είναι ανάμεσα σε εκείνους του (i), αρκεί το άθροισμα των ψηφίων τους να διαιρείται με το 9.
Κάνουμε τον σχετικό έλεγχο:

- $2 + 3 + 0 + 1 = 6$, όχι.
- $2 + 3 + 3 + 1 = 9$, ναι.
- $2 + 3 + 6 + 1 = 12$, όχι.
- $2 + 3 + 9 + 1 = 15$, όχι.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 2331.

iii. Η απάντηση είναι οι υπόλοιποι τρεις αριθμοί από αυτούς που βρήκαμε στο (i), αν εξαιρέσουμε τον αριθμό που βρήκαμε στο (ii).
Δηλαδή: 2301, 2361 και 2391.

Άσκηση 3η

Έχουμε δύο μονάδες μέτρησης μήκους, την Α και τη Β.

Μια μονάδα Α είναι τα $\frac{4}{5}$ μιας μονάδας Β.

α) Ποια είναι μεγαλύτερη μονάδα, Α ή Β;
β) Να συμπληρώσετε την ισότητα:

$$\ldots \cdot \boldsymbol{A} = \ \ldots \cdot \ \boldsymbol{B}$$

γ) Ένα ξύλο, μετρημένο με την μονάδα Α είναι 120 Α.
Αν μετρηθεί με τη μονάδα Β, ο αριθμός που θα εκφράζει το μήκος του, χωρίς να τον βρείτε, περιμένετε να είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από 120; Μπορείτε να βρείτε πόσο θα είναι;

Λύση

α) Εφόσον η Α είναι τα $\frac{4}{5}$ της Β, άρα μεγαλύτερη είναι η Β.

β) Εφόσον το μήκος της Α είναι τα $\frac{4}{5}$ του μήκους της Β, τότε 4 φορές το μήκος της Β ισούται με 5 φορές το μήκος της Α.
Πράγματι:

$$A = \frac{4}{5} \cdot B$$

$$5 \cdot A = 5 \cdot \frac{4}{5} B$$

$$\boldsymbol{5 \cdot A = 4 \cdot B}$$

γ) Εφόσον η μονάδα μέτρησης Β είναι μεγαλύτερη από την Α, αυτό που αναμένουμε είναι να χωράει λιγότερες φορές στο μήκος του ίδιου ξύλου, από όσες χωράει η Α.
Επομένως το μήκος του ξύλου μετρημένο με την μονάδα Β θα είναι μικρότερος αριθμός από 120.
Αν το μήκος του ίδιου ξύλου μετρημένο ως προς την Β είναι x, τότε:

$$x \cdot B = 120 \cdot A$$

$$x \cdot B = 24 \cdot 5 \cdot A$$

$$x \cdot B = 24 \cdot (5 \cdot A)$$

$$x \cdot B = 24 \cdot 4 \cdot B$$

$$x = 96 \cdot B$$

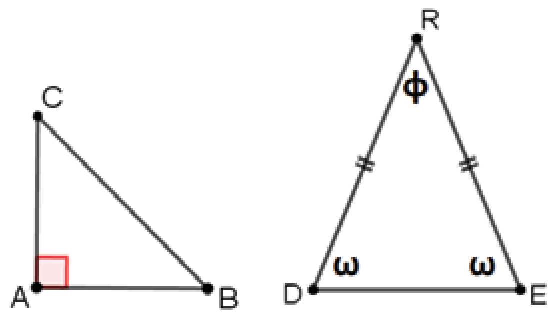
Ή αλλιώς:

$$120 \cdot A = 120 \cdot \frac{4}{5} \cdot B = \frac{480}{5} \cdot B = 96 \cdot B$$

Άρα το ξύλο έχει μήκος 96 Β.

Άσκηση 4η

Το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές και ορθογώνιο με ορθή την γωνία Α και το τρίγωνο DRE είναι ισοσκελές με κορυφή ισοσκελούς την R.
Επίσης μια γωνία του ισοσκελούς είναι ίση με τα $\frac{4}{3}$ της γωνίας που αντιστοιχεί στην κορυφή Β του ABC.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABC.
β) Να αποδείξετε ότι το DRE είναι ισόπλευρο.

γ) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι το DRE δεν είναι ισόπλευρο, τότε να σχεδιάσετε ρόμβο με γωνία ίση με την R του DRE.

Λύση

α) Οποιοδήποτε ισοσκελές και ορθογώνιο έχει δύο ίσες οξείες γωνίες με μέτρο 45^o.
Άρα $\hat{B} = \hat{C} = 45^o$ (και φυσικά η $\hat{A} = 90^o$).

β) Τα $\frac{4}{3}$ της $\hat{B}$ είναι $\frac{4}{3} \cdot 45^o = 4 \cdot 15^o = 60^o$.

Επομένως μια από τις γωνίες του ισοσκελούς DRE είναι ίση με 60^o.
Αυτό όμως σημαίνει ότι το DRE είναι ισόπλευρο, όποια και αν είναι αυτή.
Πράγματι, στο DRE ισχύει ότι:

$$2\omega + \varphi = 180^o$$

- Αν $\omega = 60^o$, τότε:
$$2 \cdot 60^o + \varphi = 180^o$$
$$\varphi = 180^o - 120^o$$
$$\varphi = 60^o$$
Άρα το DRE έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

- Αν $\varphi = 60^o$, τότε:
$$2\omega + 60^o = 180^o$$
$$2\omega = 180^o - 60^o$$
$$2\omega = 120^o$$
$$\omega = 120^o : 2$$
$$\omega = 60^o$$
Άρα το DRE έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

Επομένως σε κάθε περίπτωση το DRE είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 5η

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\boldsymbol{A = (-3 - 6) \cdot (+3 - 5)}$$

$$\boldsymbol{B = -6 + [-1 + (-13 + 2)]}$$

$$\boldsymbol{\Gamma = [+2 + (-3 + 1)] + (-2 - 3) \cdot (+2)}$$

α) Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων A και B (κάνοντας τις πράξεις).
β) Αν μόνο δύο από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς, τότε ποιες είναι;
(I) Είναι $A = B$.
(II) Οι A και B είναι αντίθετοι αριθμοί.
(III) Ο αριθμός Δ είναι μικρότερος από τον Γ.
(IV) Μόνο μία από τις προτάσεις I, II, III, IV είναι αληθής.

γ) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:
$$\boldsymbol{A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta}$$

Λύση

α) Είναι:
$$A = (-9) \cdot (-2) = 18$$

$$B = -6 + [-1 + (-11)] = -6 + (-12)$$
$$B = -18$$

$$\Gamma = [+2 + (-2)] + (-5) \cdot (+2)$$
$$\Gamma = 0 - 10 = -10$$

β) Από το (α) καταλαβαίνουμε ότι αληθής είναι σίγουρα η (II) και ψευδής σίγουρα η (I).
Επίσης η (IV) είναι ψευδής, γιατί γνωρίζουμε ότι ακριβώς δύο από τις προτάσεις είναι αληθείς.

Μέχρι τώρα:

(I)	Ψευδής
(II)	Αληθής
(III)	?
(IV)	Ψευδής

Άρα η πρόταση (III) είναι αληθής, λόγω του δεδομένου ότι: «μόνο δύο από τις προτάσεις είναι αληθείς».

γ) Σύμφωνα με το (β) «ο αριθμός Δ είναι μικρότερος από τον Γ», άρα $\Delta < -10$.
Συνεπώς:
- Α: θετικός
- Β: αρνητικός
- Γ: αρνητικός
- Δ: αρνητικός

Επομένως το γινόμενο $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta$ είναι αρνητικό.

Άσκηση 6η

Σε ένα σχολείο το 70% των παιδιών παίζουν μπάσκετ και το 20% των παιδιών που παίζουν μπάσκετ είναι κορίτσια.
α) Τι ποσοστό των παιδιών του σχολείου είναι τα κορίτσια που παίζουν μπάσκετ;

β) Αν τα παιδιά που δεν παίζουν μπάσκετ είναι 45, τότε πόσα είναι τα κορίτσια που παίζουν μπάσκετ;

Λύση

α) Το 70% αντιστοιχεί στα $\frac{70}{100}$ ή $\frac{7}{10}$ των παιδιών του σχολείου.
Το 20% αντιστοιχεί στα $\frac{20}{100}$ ή $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ των παιδιών του σχολείου που παίζουν μπάσκετ.
Άρα τα κορίτσια είναι το $\frac{1}{5}$ των $\frac{7}{10}$ των παιδιών του σχολείου, δηλαδή:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{10}=\frac{7}{50}=\frac{14}{100}$$

Αυτό αντιστοιχεί στο 14% των παιδιών του σχολείου.
Άρα το 14% των παιδιών του σχολείου είναι κορίτσια που παίζουν μπάσκετ.

β) Τα παιδιά που δεν παίζουν μπάσκετ είναι το 30% των παιδιών του σχολείου, δηλαδή τα $\frac{30}{100}$ ή $\frac{3}{10}$.
Αυτό αντιστοιχεί σε 45 παιδιά.
Άρα το $\frac{1}{10}$ των παιδιών του σχολείου είναι $45:3=15$ παιδιά.
Επομένως τα παιδιά του σχολείου είναι:

$$10\cdot 15=150$$

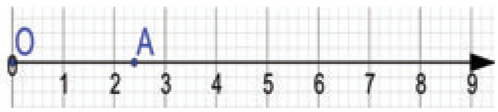
Άρα τα κορίτσια που παίζουν μπάσκετ αντιστοιχούν στο 14% του 150, δηλαδή:

$$0{,}14\cdot 150=21$$

Επομένως τα κορίτσια που παίζουν μπάσκετ είναι 21.

Άσκηση 7η

Το παρακάτω σχήμα είναι <u>ενδεικτικό</u>.
Η «μονάδα του άξονα» είναι ίση με 2,5 cm και ο x είναι ένας αριθμός αντίθετος του αριθμού που είναι στο σημείο Α.



(οι υποδιαιρέσεις του πλέγματος χωρίζουν σε ίσα μέρη τον άξονα)
α) Να βρείτε την απόσταση των σημείων Ο και Α.
β) Ποιος είναι ο αριθμός x; Ποιος είναι ο $-x$;
γ) Να βρείτε την απόσταση σε εκατοστά του αριθμού $y=x^2+\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2$, από το 0.

Λύση

Κάθε μονάδα είναι χωρισμένη σε 5 ίσες υποδιαιρέσεις. Επομένως κάθε υποδιαίρεση του άξονα έχει μήκος 0,5 cm.
α) Άρα $OA=12\cdot 0{,}5=6\ cm$, καθώς από το Ο έως το Α έχουμε 12 υποδιαιρέσεις του άξονα.

β) Κάθε υποδιαίρεση αντιστοιχεί σε 0,2 μονάδες του άξονα, έτσι ώστε 5 υποδιαιρέσεις να αντιστοιχούν στην μονάδα του άξονα.
Το σημείο Α αντιστοιχεί στον αριθμό:

$$12\cdot 0{,}2=2{,}4$$

Άρα ο $x=-2{,}4$ καθώς είναι ο αντίθετος του αριθμού στο Α. Επομένως $-x=2{,}4$.

γ) Αντικαθιστώντας τον x με $-2{,}4$ έχουμε:

$$y=(-2{,}4)^2+\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$y=5{,}76+\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\right)^2$$

$$y=5{,}76+\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$y=5{,}76+\frac{2}{3}-\frac{1}{144}$$

$$y=\frac{576}{100}+\frac{2}{3}-\frac{1}{144}$$

Βρίσκουμε το ΕΚΠ των:

$$100=2^2\cdot 5^2$$

$$3=3^1$$

$$144=2^4\cdot 3^2$$

Το ΕΚΠ είναι το γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων στην μεγαλύτερη δύναμη, άρα $2^4\cdot 3^2\cdot 5^2=3.600$.

Επομένως:

$$y=\frac{20.736}{3.600}+\frac{2.400}{3.600}-\frac{25}{3.600}$$

$$y=\frac{23.111}{3.600}$$

Α΄ Τάξη

Απλή μέθοδος των τριών

Τάκης Χρονόπουλος

Αναλογία στα Μαθηματικά λέγεται μια ισότητα κλασμάτων (λόγων).

Η **απλή μέθοδος των τριών** είναι μια διάταξη δυο προτάσεων που αφορά δυο σχετιζόμενα μεγέθη, στις οποίες γνωρίζουμε 3 από τις 4 τιμές και ζητείται ο υπολογισμός της τέταρτης τιμής.

Πχ. 6 εργάτες τελειώνουν μια εργασία σε 9 μέρες.
27 εργάτες τελειώνουν μια εργασία σε x μέρες.

Η **απλή μέθοδος των τριών** αφορά ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα και σε κάθε περίπτωση η άσκηση λύνεται διαφορετικά.
Δυο ποσά (μεγέθη) λέγονται **ανάλογα** όταν κάθε φορά που πολλαπλασιάζονται (ή διαιρούνται) οι τιμές του ενός μεγέθους με έναν αριθμό , αντίστοιχα πολλαπλασιάζονται (ή διαιρούνται) οι τιμές του άλλου μεγέθους με τον ίδιο αριθμό.
Πχ. 4 [ίδιες] σοκολάτες κοστίζουν 5 ευρώ. Οι τριπλάσιες σοκολάτες θα κοστίζουν τα τριπλάσια χρήματα. Οι μισές σοκολάτες θα κοστίζουν τα μισά χρήματα. Άρα τα ποσά «τιμή» σοκολάτας και «ποσότητα» σοκολατών είναι **ανάλογα**.

Στα ανάλογα ποσά, τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα.
Δυο ποσά (μεγέθη) λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν κάθε φορά που πολλαπλασιάζονται (ή διαιρούνται) οι τιμές του ενός μεγέθους με έναν αριθμό , αντίστοιχα διαιρούνται (ή πολλαπλασιάζονται) οι τιμές του άλλου μεγέθους με τον ίδιο αριθμό.
Πχ. 6 εργάτες [ίσης απόδοσης] τελειώνουν μια εργασία σε 9 μέρες. Οι τριπλάσιοι εργάτες θα τελειώσουν την ίδια εργασία στο 1/3 του χρόνου. Οι μισοί εργάτες θα τελειώσουν την ίδια εργασία στον διπλάσιο χρόνο. Άρα τα ποσά «πλήθος» εργατών και «χρόνος» ολοκλήρωσης εργασίας είναι **αντιστρόφως ανάλογα**.

Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, τα γινόμενα κάθε γραμμής είναι ίσα.
Σε κάθε άσκηση με απλή μέθοδο των τριών, ελέγχουμε αν τα ποσά είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα, ως εξής:
Αναρωτιόμαστε αν η διπλάσια ποσότητα του 1^{ου} ποσού αντιστοιχεί στη διπλάσια ή στην μισή ποσότητα του 2^{ου} ποσού.

- Αν η απάντηση είναι «στη διπλάσια», τότε τα ποσά είναι ανάλογα.
- Αν η απάντηση είναι «στην μισή», τότε τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.
- Αν η απάντηση δεν είναι ούτε «στη διπλάσια» ούτε «στην μισή», τότε τα ποσά δεν είναι ούτε ανάλογα ούτε αντιστρόφως ανάλογα.

Η διαπίστωση ότι τα ποσά είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα αποτελεί μέρος της λύσης.
Λέγεται **απλή** μέθοδος των τριών, γιατί υπάρχει και η **σύνθετη** μέθοδος των τριών. Ας δούμε πως είναι ένα παράδειγμα σύνθετης μεθόδου των τριών:

Πχ. 6 άλογα (που τρώνε με τον ίδιο ρυθμό) τρώνε 6 μπάλες σανό σε 6 ώρες.
x άλογα (που τρώνε με τον ίδιο ρυθμό) τρώνε 8 μπάλες σανό σε 4 ώρες.

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

4 σοκολάτες κοστίζουν 5 ευρώ. Πόσες σοκολάτες μπορούμε να αγοράσουμε με 15 ευρώ; Πόσο κοστίζουν οι 22 σοκολάτες; Όλες οι σοκολάτες είναι ίδιες.

ΛΥΣΗ: 4 σοκολάτες κοστίζουν 5 ευρώ. Οι διπλάσιες σοκολάτες κοστίζουν τα διπλάσια ευρώ. Άρα τα ποσά «τιμή» σοκολάτας και «ποσότητα» σοκολατών είναι **ανάλογα**.

ΣΤΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ, ΤΑ ΧΙΑΣΤΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ

Αυτό που παρατηρήσαμε, ισχύει γενικότερα. Ας το διατυπώσουμε λίγο πιο επίσημα:
Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου x, σε ένα πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών με ανάλογα ποσά, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που είναι πάνω από τον άγνωστο x με το σχηματιζόμενο κλάσμα

των γνωστών τιμών αντεστραμμένο.

4 σοκολάτες κοστίζουν 5 ευρώ.
<u>**x** σοκολάτες κοστίζουν 15 ευρώ.</u>

$$\frac{4}{x}=\frac{5}{15}$$
$$5\cdot x=4\cdot 15$$
$$5\cdot x=60$$
$$x=60:5=12 \text{ σοκολάτες}$$

Παρατηρούμε ότι $x=4\cdot\dfrac{15}{5}$

4 σοκολάτες κοστίζουν 5 ευρώ.
<u>22 σοκολάτες κοστίζουν **x** ευρώ.</u>

$$\frac{4}{22}=\frac{5}{x}$$
$$4\cdot x=5\cdot 22$$
$$4\cdot x=110$$
$$x=110:4=27,5 \text{ ευρώ}$$

Παρατηρούμε ότι $x=5\cdot\dfrac{22}{4}$

Η παραπάνω πρόταση είναι η **σύντομη μέθοδος** αφού διαπιστώσουμε ότι τα ποσά είναι ανάλογα.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

6 εργάτες τελειώνουν μια εργασία σε 9 μέρες. Πόσοι εργάτες τελειώνουν την ίδια εργασία σε 27 μέρες; Σε πόσες μέρες τελειώνουν την ίδια εργασία 15 εργάτες; Όλοι οι εργάτες έχουν ίση απόδοση.

ΛΥΣΗ: 6 εργάτες τελειώνουν μια εργασία σε 9 μέρες. Οι διπλάσιοι εργάτες τελειώνουν την ίδια εργασία στις μισές μέρες. Άρα τα ποσά «πλήθος» εργατών και «χρόνος» ολοκλήρωσης εργασίας είναι **αντιστρόφως ανάλογα**.

ΣΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ, ΤΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΚΑΘΕ ΓΡΑΜΜΗΣ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ

6 εργάτες τελειώνουν σε 9 μέρες.
<u>**x** εργάτες τελειώνουν σε 27 μέρες.</u>

$$27\cdot x=6\cdot 9$$
$$27\cdot x=54$$
$$x=54:27=2 \text{ εργάτες}$$

Παρατηρούμε ότι $x=6\cdot\dfrac{9}{27}$

6 εργάτες τελειώνουν σε 9 μέρες.
<u>15 εργάτες τελειώνουν σε **x** μέρες.</u>

$$15\cdot x=6\cdot 9$$
$$15\cdot x=54$$
$$x=54:15=3,6 \text{ μέρες}$$

Παρατηρούμε ότι $x=9\cdot\dfrac{6}{15}$

Αυτό που παρατηρήσαμε, ισχύει γενικότερα. Ας το διατυπώσουμε λίγο πιο επίσημα:
Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου x, σε ένα πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών με αντιστρόφως ανάλογα ποσά, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που είναι πάνω από τον άγνωστο x με το σχηματιζόμενο κλάσμα των γνωστών τιμών όπως είναι στην κατάταξη.
Η παραπάνω πρόταση είναι η **σύντομη μέθοδος** αφού διαπιστώσουμε ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.
Σχόλιο: Σε Φυσική ή Χημεία, όταν αναφέρονται σε απλή μέθοδο των τριών συνήθως εννοούν μόνο την περίπτωση των ανάλογων ποσών.

ΣΥΝΘΕΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Κάθε πρόβλημα με σύνθετη μέθοδο των τριών μπορεί να λυθεί είτε πιο αναλυτικά αναλύοντας την σε υποπροβλήματα όπου εξετάζεται διαδοχικά το ζητούμενο μέγεθος με το υπό σύγκριση μέγεθος αν είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα είτε πολύ γρήγορα συνδυάζοντας κατευθείαν τις σύντομες μεθόδους.

1ο λυμένο παράδειγμα

6 άλογα (που τρώνε με τον ίδιο ρυθμό) τρώνε 6 μπάλες σανό σε 6 ώρες.
<u>**Πόσα άλογα (που τρώνε με τον ίδιο ρυθμό) τρώνε 8 μπάλες σανό σε 4 ώρες;**</u>

1η λύση (αναλυτική, χρονοβόρα)
Αν το σπάσουμε σε διαδοχικά υποπροβλήματα, βοηθά στην κατανόηση .
1ο βήμα: Θεωρούμε ότι όλα τα άλογα τρώνε με τον ίδιο ρυθμό.
Αφήνουμε σταθερές προς το παρόν τις ώρες και αναζητούμε πως μεταβάλλεται το πλήθος των αλόγων

όταν αλλάζουμε τον αριθμό των μπάλων σανό

6 άλογα τρώνε 6 μπάλες σανό [σε 6 ώρες]
x άλογα τρώνε 8 μπάλες σανό [σε 6 ώρες]

Τα 6 άλογα τρώνε 6 μπάλες σανό σε 6 ώρες. Τα διπλάσια άλογα θα έτρωγαν στον ίδιο χρόνο τις διπλάσιες μπάλες σανό. Άρα τα ποσά «πλήθος» αλόγων και «αριθμός» μπάλων σανό που τρώνε είναι **ανάλογα**.

[Άρα τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα και ο άγνωστος ισούται με τον από πάνω αριθμό του επί το κλάσμα των άλλων μεγεθών αντεστραμμένο]

Άρα $\frac{6}{x}=\frac{6}{8}$ δηλαδή με τον σύντομο τρόπο $x=6\cdot\frac{8}{6}$ που βγαίνει $x=8$ άλογα

Δηλαδή x=8 άλογα τρώνε 8 μπάλες σανό σε 6 ώρες.

άλογα	σανό
6	6
x	8
	ΑΝΑΛΟΓΑ

2ο βήμα: Αφήνουμε σταθερές προς το παρόν τις μπάλες σανό και αναζητούμε πως μεταβάλλεται το πλήθος των αλόγων όταν αλλάζουμε τον αριθμό των ωρών

x=8 άλογα τρώνε [8 μπάλες σανό] σε 6 ώρες.
y άλογα τρώνε [8 μπάλες σανό] σε 4 ώρες.

Τα 8 άλογα σε 6 ώρες τρώνε 8 μπάλες σανό. Τα διπλάσια άλογα θα έτρωγαν την ίδια ποσότητα στις μισές ώρες. Άρα τα ποσά «πλήθος» αλόγων και «αριθμός» ωρών που τρώνε είναι **αντιστρόφως ανάλογα**.

[Άρα τα γινόμενα κάθε γραμμής είναι ίσα και ο άγνωστος ισούται με τον από πάνω αριθμό του επί το κλάσμα των άλλων μεγεθών όπως είναι]

Άρα $y\cdot 4=x\cdot 6$ δηλαδή με τον σύντομο τρόπο $y=x\cdot\frac{6}{4}=\left(6\cdot\frac{8}{6}\right)\cdot\frac{6}{4}=6\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{6}{4}$ που βγαίνει $y=12$ άλογα

Άρα όταν 6 άλογα τρώνε 6 μπάλες σανό σε 6 ώρες.
τότε 12 άλογα θα τρώνε 8 μπάλες σανό σε 4 ώρες.

Δεν αλλάζει κάτι αν στο 1ο βήμα αφήναμε σταθερές τις μπάλες σανό και στο 2ο βήμα τις ώρες, δηλαδή δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα η σειρά με την οποία κάνουμε τα διαδοχικά βήματα.

άλογα	ώρες
x=8	6
y	4
	ΑΝΤΙΣΤΡ.

2η λύση (σύντομη)

Τα 6 άλογα τρώνε 6 μπάλες σανό σε 6 ώρες. Τα διπλάσια άλογα θα έτρωγαν στον ίδιο χρόνο τις διπλάσιες μπάλες σανό. Άρα τα ποσά «πλήθος» αλόγων και «αριθμός» μπάλων που τρώνε είναι **ανάλογα**.

Τα 6 άλογα σε 6 ώρες τρώνε 6 μπάλες σανό. Τα διπλάσια άλογα θα έτρωγαν την ίδια ποσότητα στις μισές ώρες. Άρα τα ποσά «πλήθος» αλόγων και «αριθμός» ωρών που τρώνε είναι **αντιστρόφως ανάλογα**.

Μέθοδος / κανόνας : ***Αρχικά συγκρίνουμε το μέγεθος στο οποίο ανήκει ο άγνωστος x με καθένα από τα άλλα μεγέθη κι ελέγχουμε αν είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα.***

Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου x, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που είναι πάνω από τον άγνωστο x (δηλαδή τον αριθμό που βρίσκεται στην ίδια στήλη με τον άγνωστο) με καθένα από τα κλάσματα που σχηματίζονται από τις αντίστοιχες τιμές των άλλων μεγεθών του προβλήματος - αντεστραμμένο το κλάσμα, όταν τα μεγέθη είναι ανάλογα - όπως είναι το κλάσμα, όταν τα μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα. Οπότε στο πρόβλημα:

6 άλογα (που τρώνε με τον ίδιο ρυθμό) τρώνε 6 μπάλες σανό σε 6 ώρες.
x άλογα (που τρώνε με τον ίδιο ρυθμό) τρώνε 8 μπάλες σανό σε 4 ώρες.

Άρα $x=6\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{6}{4}$ που βγαίνει αμέσως x = 12

άλογα	σανό	ώρες
6	6	6
χ	8	4
	ΑΝΑΛΟΓΑ	ΑΝΤΙΣΤΡ.

(το 6/8 αντιστρέφεται γιατί είναι ανάλογα το πλήθος αλόγων με αριθμό μπάλων σανό)

(το 6/4 παραμένει ίδιο γιατί είναι αντιστρόφως ανάλογα το πλήθος αλόγων με αριθμό ωρών)

2ο λυμένο παράδειγμα

6 ελαιοχρωματιστές βάφουν 6 ίδια σπίτια σε 6 μέρες, δουλεύοντας 6 ώρες κάθε μέρα.
Πόσοι ελαιοχρωματιστές βάφουν 12 ίδια σπίτια σε 4 μέρες , δουλεύοντας 9 ώρες κάθε μέρα;

Δεχόμαστε ότι όλοι οι ελαιοχρωματιστές εργάζονται με τον ίδιο ρυθμό.

Σύντομη λύση (αιτιολογήσεις + τελική πράξη)

6 ελαιοχρωματιστές βάφουν 6 ίδια σπίτια σε κάποιες μέρες. Οι διπλάσιοι ελαιοχρωματιστές θα έβαφαν στον ίδιο χρόνο τα διπλάσια σπίτια. Άρα τα ποσά «αριθμός» ελαιοχρωματιστές και «πλήθος» σπιτιών που βάφουν είναι **ανάλογα**.
6 ελαιοχρωματιστές βάφουν σε 6 μέρες κάποια σπίτια. Οι διπλάσιοι ελαιοχρωματιστές θα έβαφαν τα ίδια σπίτια στον μισό χρόνο. Άρα τα ποσά «αριθμός» ελαιοχρωματιστές και «πλήθος» ημερών που βάφουν είναι **αντιστρόφως ανάλογα**.
6 ελαιοχρωματιστές βάφουν δουλεύοντας 6 ώρες κάθε μέρα κάποια σπίτια. Οι διπλάσιοι ελαιοχρωματιστές θα έβαφαν τα ίδια σπίτια στις μισές ώρες εργαζόμενοι καθημερινά. Άρα τα ποσά «αριθμός» ελαιοχρωματιστών και «πλήθος» ωρών που εργάζονται καθημερινά είναι **αντιστρόφως ανάλογα**.

ελαιοχρ.	σπίτια	μέρες	ώρες
6	6	6	6
x	12	4	9
	ΑΝΑΛΟΓΑ	ΑΝΤΙΣΤΡ.	ΑΝΤΙΣΤΡ.

Απάντηση: $x=6\cdot\frac{12}{6}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{6}{9}=12$ ελαιοχρ/τιστές

Δηλαδή 12 ελαιοχρωματιστές βάφουν 12 ίδια σπίτια σε 4 μέρες , δουλεύοντας 9 ώρες κάθε μέρα όταν 6 ελαιοχρωματιστές βάφουν 6 ίδια σπίτια σε 6 μέρες, δουλεύοντας 6 ώρες κάθε μέρα.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΝΑΥΑΓΟΥΣ ΚΑΙ ΤΑ ΤΡΟΦΙΜΑ

Εκφώνηση: Ένα πλοίο έχει πλήρωμα 20 άτομα και τρόφιμα για 40 μέρες. Μετά από ταξίδι 2 ημερών έφυγαν 5 άτομα και πήγαν σε άλλο πλοίο. Ύστερα από ταξίδι άλλων 12 ημερών, παρέλαβε και μερικούς ναυαγούς και τα τρόφιμα εξαντλήθηκαν 16 μέρες νωρίτερα. Πόσοι ήταν οι ναυαγοί;

Σχόλια: *Τα προβλήματα που έχουμε κάποια άτομα με τρόφιμα για μερικές μέρες λύνονται δύσκολα χρησιμοποιώντας απλή μέθοδο των τριών, μιας και τα ποσά πλήθος ατόμων και αριθμός ημερών τροφίμων είναι αντιστρόφως ανάλογα.*
Ένας τρόπος να παρακαμφθούν οι δυσκολίες της μεθόδου αυτής, είναι να δουλέψουμε με μερίδες φαγητού με την παραδοχή ότι ένα άτομο τρώει μια μερίδα φαγητού κάθε μέρα ή αλλιώς σε κάθε άτομο αντιστοιχεί μια μερίδα φαγητού για 1 μέρα, 2 μερίδες φαγητού συνολικά για 2 μέρες, 3 μερίδες φαγητού για 3 μέρες κ.ο,κ. Η άσκηση θα λυθεί και με τους δυο τρόπους για να φανεί πόσο υπερέχει σαν μέθοδος η λύση με τις μερίδες.

Λύση (με αντιστρόφως ανάλογα ποσά)
Το πλοίο έχει πλήρωμα 20 άτομα και τρόφιμα για 40 μέρες
Περνάνε 2 μέρες, οπότε 20 άτομα έχουν τρόφιμα για 40-2=38 μέρες.
Φεύγουν 5 άτομα οπότε μένουν 20-5=15 άτομα.

20 άτομα έχουν τρόφιμα για 38 μέρες
<u>τα 15 άτομα έχουν τρόφιμα για x μέρες</u>

Επειδή τα διπλάσια άτομα με τα ίδια τρόφιμα, θα περνούσαν τις μισές μέρες, τα ποσά «πλήθος» ατόμων και «αριθμός» ημερών που έχουν τρόφιμα, είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Άρα $15\cdot x=20\cdot 38$ δηλαδή $x=\frac{152}{3}$ μέρες

Δηλαδή μετά από 2 μέρες έχουμε 15 άτομα με $\frac{152}{3}$ ημερών φαγητό μαζί τους

Περνάνε άλλες 12 μέρες, οπότε τα 15 άτομα έχουν τρόφιμα για $\frac{152}{3}-12=\frac{152}{3}-\frac{36}{3}=\frac{116}{3}$ μέρες.

Παραλαμβάνουν y ναυαγούς. Εφόσον τα τρόφιμα εξαντλήθηκαν 6 μέρες νωρίτερα, αυτό σημαίνει ότι εξαντλήθηκαν 40-16=24 μέρες από την αρχή του ταξιδιού.
Όταν παρέλαβαν τους ναυαγούς είχαν περάσει ήδη 12+2=14 μέρες, άρα υπήρχαν τρόφιμα που επαρκούσαν για 15+y άτομα για 24-14 =10 μέρες

15 άτομα έχουν τρόφιμα για $\frac{116}{3}$ μέρες
<u>τα (15+y) άτομα έχουν τρόφιμα για 10 μέρες</u>

Άρα $(15+y)\cdot 10=15\cdot\frac{116}{3}$ δηλαδή 15+y=58 άρα y=58-15=43 είναι οι ναυαγοί

Αναστάσιος Κρατημένος, Βηθλεέμ Δέσποινα Ξύδη

«Απόδραση από τη Β΄ Γυμνασίου: ένα επαναληπτικό μαθηματικό ταξίδι»

Η περίοδος πριν από τις προαγωγικές εξετάσεις αποτελεί μια σημαντική ευκαιρία για τους μαθητές να οργανώσουν τη γνώση τους και να εδραιώσουν βασικές μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκαν κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Η επανάληψη δεν πρέπει να περιορίζεται σε μηχανιστική επίλυση ασκήσεων, αλλά να στοχεύει στην κατανόηση, τη σύνδεση εννοιών και την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης.

Στο παρόν άρθρο προτείνεται ένα σύνολο επαναληπτικών δραστηριοτήτων με τη μορφή ενός «μαθηματικού παιχνιδιού απόδρασης», στο οποίο οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν διαδοχικές δοκιμασίες από την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία, καθώς και ένα σύνολο ασκήσεων που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της φετινής διδαχθείσας ύλης. Η προσέγγιση αυτή στοχεύει στην ενίσχυση της ενεργητικής συμμετοχής και της αυτενέργειας, μετατρέποντας την επανάληψη σε μια δημιουργική και ευχάριστη διαδικασία.

Δραστηριότητα: «Απόδραση από τη Β’ Γυμνασίου»
Ήρθε η ώρα να αλλάξετε επίπεδο και να προχωρήσετε στη Γ΄ Γυμνασίου. Για να γίνει αυτό με απόλυτη επιτυχία, πρέπει να ολοκληρώσετε τις παρακάτω δοκιμασίες…

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 1

Η πόρτα της τάξης είναι κλειδωμένη. Ο κωδικός; Πενταψήφιος, με τελευταίο ψηφίο τον αριθμό 5. Για τα υπόλοιπα ψηφία πρέπει να σπάσετε τον κώδικα ανάλογων ποσών.

16	8	4	12	20
				5

- Στη 1η κενή θέση του πίνακα βρίσκεται το 1ο ψηφίο του κωδικού.
- Στη 2η κενή θέση του πίνακα βρίσκεται το 4ο ψηφίο του κωδικού.
- Στη 3η κενή θέση του πίνακα βρίσκεται το 3ο ψηφίο του κωδικού
- Στη 4η κενή θέση του πίνακα βρίσκεται το 2ο ψηφίο του κωδικού.

Βρείτε τον κωδικό και η πόρτα θα ανοίξει! Προχωρήστε στην επόμενη δοκιμασία…

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 2

Συνεχίζοντας διακρίνετε μια σκάλα.
Προσοχή! Πρέπει να προσέξετε τα πρώτα σκαλοπάτια της γιατί είναι χαλασμένα…
Για την επισκευή τους πρέπει να λυθούν οι αντίστοιχες τους παραστάσεις.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προτεραιότητα πράξεων και τις ιδιότητες δυνάμεων.

Σκαλοπάτι 1 $\Sigma_1 = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}+2}$

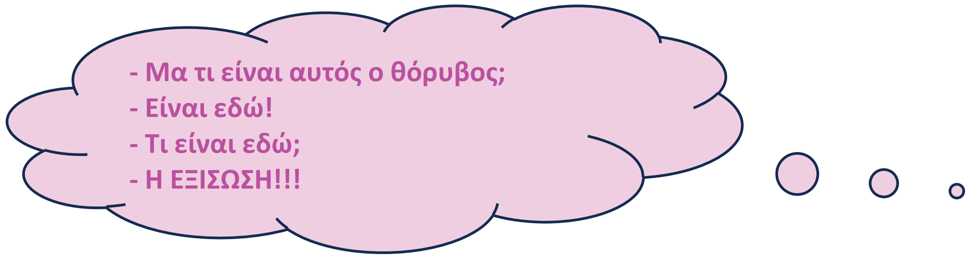
Σκαλοπάτι 2 $\Sigma_2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} \cdot \left[2\cdot(4+3-8)^3 + \frac{13}{8} - 1\right]$

Σκαλοπάτι 3 $\Sigma_3 = (2-1)^2 + (3-2)^3 + (4-3)^4 + (5-4)^5 + (8-9)^{101}$

Σκαλοπάτι 4 $\Sigma_4 = \dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2}{1-\frac{5}{8}}$

Εξαιρετικά, ανεβήκατε επίπεδο! Εάν κάποιο σκαλοπάτι δεν το βρήκατε σωστά και έσπασε ας θυμηθούμε την προτεραιότητα των πράξεων!

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 3



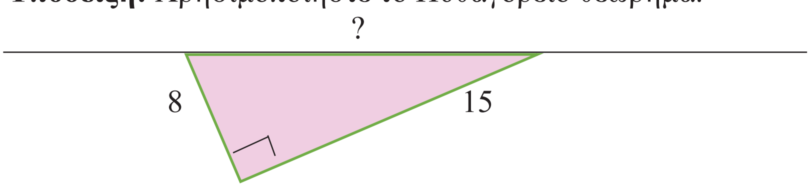
Για να συνεχίσετε, πρέπει να την προσπεράσετε έντεχνα και να βρείτε τον άγνωστο ήχο x που κρύβει με βάση τους κανόνες της…

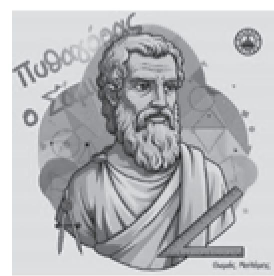
$$\frac{2-x}{2} + 1 - x + \frac{2x-3}{3} + 2x \cdot \frac{1}{6} = (-1)^{2026} + \frac{4-3x}{4}$$

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 4

Μπροστά σας, υπάρχει μια γέφυρα. Πρέπει να διαλέξετε το κατάλληλο ξύλο ώστε να το τοποθετήσετε ακριβώς για να περάσετε απέναντι. Μαζί σας δεν έχετε χάρακες και γεωμετρικά εργαλεία αλλά μόνο τον Πυθαγόρα!

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.





ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 5

Και τώρα η ώρα της κρίσης…Πρέπει να απαντήσετε σωστά στο κουίζ.

- Ποια είναι η κλίση της ευθείας $2y - x = 4052$;
- Να βρεθεί η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $-\frac{4}{3}$.
- Να βρεθεί η ευθεία που έχει κλίση $-\frac{4}{3}$ και διέρχεται από το σημείο Α(2,-1).
- Εάν η κλίση της ευθείας είναι ίση με -1 να βρεθεί ο αριθμός κ:

$$y = \left(\frac{k+1}{2} - k + 4 - \frac{3-2k}{3}\right) \cdot x - 8$$

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 6

Τέλος, ας βρούμε που θα είναι η νέα μας αίθουσα. Έχοντας ως χάρτη ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ας ακολουθήσουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι παρακάτω συναρτήσεις:

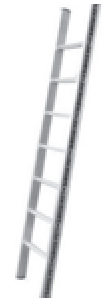
$y = 2x$, $\quad y = x + 6 \quad$ $6x - y = 24$

Η αίθουσα βρίσκεται στο σημείο που αυτές οι ευθείες «συναντώνται».
Μπορείς να βρεις την αίθουσα;

Επαναληπτικές ασκήσεις συνδυαστικής σκέψης …

ΑΣΚΗΣΗ 1

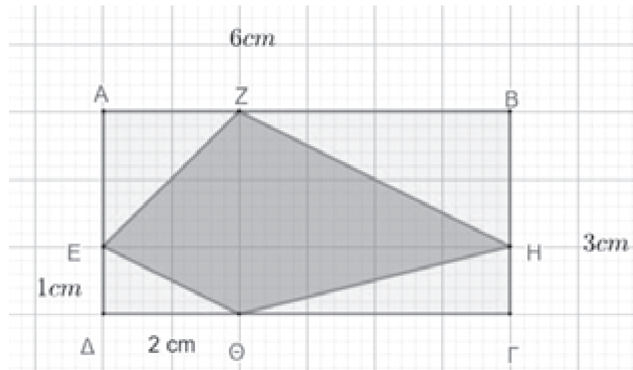
Μια σκάλα μήκους 5 m ακουμπά σε τοίχο και η βάση της απέχει 3 m από αυτόν. Ο τοίχος με το έδαφος σχηματίζουν γωνία 90^o.



- **i.** Να βρεθεί το ύψος στο οποίο φτάνει η σκάλα.
- **ii.** Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος, να βρεθεί η κλίση.
- **iii.** Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.
- **iv.** Αν η βάση μετακινηθεί ώστε να απέχει 4 m από τον τοίχο και το μήκος της σκάλας παραμένει 5 m, να βρεθεί το νέο ύψος.

ΑΣΚΗΣΗ 2

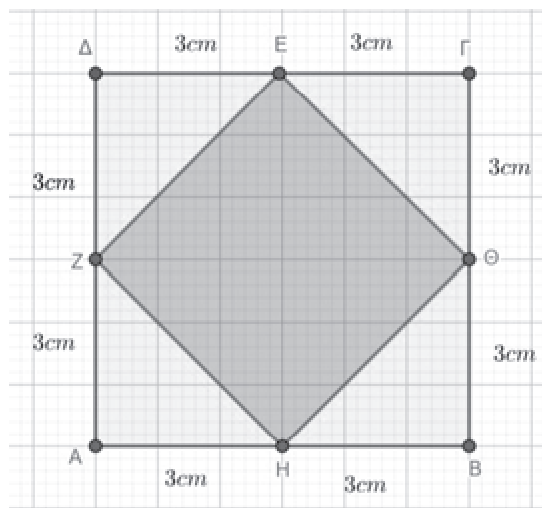
Δίνεται το σχήμα.



- **i.** Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο χωρίο ΕΖΗΘ με **2 τρόπους**.
- **ii.** Να φτιάξετε ένα τετράγωνο, το οποίο να έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο ΕΖΗΘ.
- **iii.** Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι:
  - **Α.** Διπλάσιο
  - **Β.** Τριπλάσιο
  - **Γ.** Ενναπλάσιο από το τριγωνικό μέρος $ΕΔΘ$;

ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο σχήμα, δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των πλευρών ΓΔ, ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα.



- **i.** Να υπολογίσετε τον εμβαδόν του ΕΖΗΘ.
- **ii.** Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο, το οποίο να έχει το ίδιο εμβαδόν με το τετράγωνο ΕΖΗΘ.
- **iii.** Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι:
  - **Α.** Διπλάσιο
  - **Β.** Τετραπλάσιο
  - **C.** Ίσο από το τριγωνικό μέρος $ΔΕΖ$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου με σχήμα ορθογωνίου έχει μήκος 24 m και πλάτος 18 m.

Να βρείτε το εμβαδόν του.

- **i.** Να βρείτε το μήκος της διαγώνιου του.
- **ii.** Αν κάποιος περπατήσει 4 φορές τη διαγώνιο, πόσα μέτρα θα διανύσει;

ΑΣΚΗΣΗ 5

Η Χριστίνα και ο Γιάννης είναι αδέρφια. Σήμερα, ο Γιάννης έχει διπλάσια ηλικία από την Χριστίνα. Αν πριν από 4 χρόνια η ηλικία του Γιάννη ήταν τετραπλάσια από την ηλικία της Χριστίνας, ποια είναι σήμερα η ηλικία του Γιάννη και της Χριστίνας;

Το προτεινόμενο υλικό στοχεύει στην ενεργοποίηση βασικών γνώσεων της Β΄ Γυμνασίου μέσα από μια παιγνιώδη προσέγγιση. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη διασύνδεση Άλγεβρας και Γεωμετρίας, καθώς οι μαθητές καλούνται να αξιοποιήσουν συνδυαστικά γνώσεις από διαφορετικά μαθηματικά πεδία.

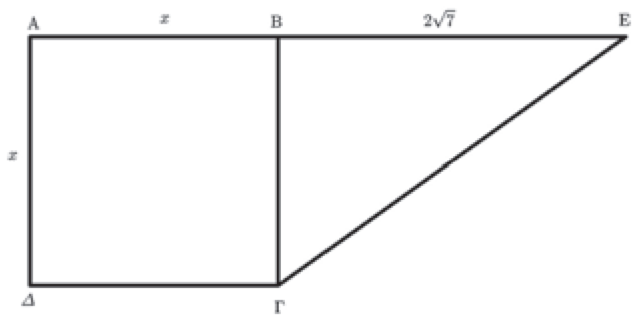
Άλγεβρα Β΄ Γυμνασίου

Θοδωρής Παγώνης

Οι ασκήσεις που ακολουθούν δημιουργήθηκαν, γράφηκαν και λύθηκαν από τους μαθητές Α΄ Λυκείου **Μαριάννα Κατσαντώνη και Γεώργιο Ζώτο.** Στην διάρκεια συγγραφής η δική μου συνεισφορά ήταν η παρότρυνση και η καθοδήγηση καθώς και ο τελικός έλεγχος.

Άσκηση 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του οποίου το μήκος της πλευράς του είναι η λύση της εξίσωσης $\frac{2x-3}{3}+\frac{x+5}{4}=\frac{x}{2}+2,75$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα $ΒΕ=2\sqrt{7}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού x.
β. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΓΕ.
γ. Να βρείτε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΒΓΕ.
δ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού y ώστε να ισχύει $Πy+E^2=372$, όπου Π η περίμετρος του τετραγώνου ΑΒΓΔ και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ.

Λύση

α. Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γίνεται: $\frac{2x-3}{3}+\frac{x+5}{4}=\frac{x}{2}+2,75$,

$12\frac{2x-3}{3}+12\frac{x+5}{4}=12\frac{x}{2}+12\cdot 2,75$, $\quad 4(2x-3)+3(x+5)=6x+33$,

$8x-12+3x+15=6x+33$, $\quad ,8x+3x-6x=33+12-15 \quad 5x=30$, $\quad x=6$,

επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 6.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΓΕ^2=ΒΕ^2+ΒΓ^2$,

$$ΓΕ^2=\left(2\sqrt{7}\right)^2+6^2,\quad ΓΕ^2=28+36,\quad ΓΕ^2=64,\quad ΓΕ=\sqrt{64},\quad ΓΕ=8$$

γ. Είναι: $E=\frac{ΒΓ\cdot ΒΕ}{2}$, $\quad E=\frac{6\cdot 2\sqrt{7}}{2}$, $\quad E=\frac{12\sqrt{7}}{2}$, $\quad E=6\sqrt{7}$

δ. Η περίμετρος Π του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $Π=4\cdot 6$, $Π=24$

Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γίνεται: $Πy+E^2=372$, $\quad 24y+\left(6\sqrt{7}\right)^2=372$

$24y+252=372$, $24y=372-252$, $24y=120$, $y=5$, $x=6$

Άσκηση 2

Δυο φίλοι, ο Γιώργος και ο Θοδωρής συγκεντρώνουν χρήματα για να πάνε διακοπές το καλοκαίρι. Ο Γιώργος έχει συγκεντρώσει έως τώρα τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων του Θοδωρή. Αν ο Γιώργος συγκεντρώσει 20€ ακόμη και ο Θοδωρής ξοδέψει 10€ για να αγοράσει ένα φορτιστή κινητού τότε οι δυο φίλοι θα έχουν ακριβώς τα ίδια χρήματα. Να βρείτε πόσα χρήματα είχαν αρχικά συγκεντρώσει οι δυο φίλοι.

Λύση

Έστω x τα χρήματα που έχει ο Θοδωρής. Τότε ο Γιώργος έχει $\frac{2x}{3}$.

Μετά την συγκέντρωση των 20€ από τον Γιώργο και τα 10€ που ξόδεψε ο Θοδωρής οι δύο φίλοι θα έχουν: Γιώργος: $\frac{2x}{3}+20$ Θοδωρής: $x-10$ Όμως τότε οι δυο φίλοι θα έχουν τα ίδια χρήματα, άρα: $\frac{2x}{3}+20=x-10$, $3\frac{2x}{3}+3\cdot 20=3x-3\cdot 10$, $2x+60=3x-30$,

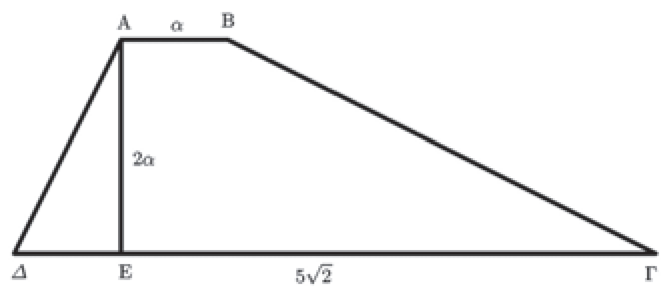
$2x-3x=-30-60$, $-x=-90$, $x=90$.

Επομένως οι δυο φίλοι αρχικά είχαν συγκεντρώσει: Γιώργος: $\frac{2\cdot 90}{3}=60$€,

Θοδωρής: $90-10=80$€.

Άσκηση 3

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $ΑΒ=α$, $ΓΔ=5\sqrt{2}$ και ύψος $ΑΕ=2α$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν ισχύει $\frac{α}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{2}+3}{6}$, τότε:

α. Να δείξετε ότι $α=\sqrt{2}$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

γ. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $ΔΕ=ΓΔ-\sqrt{32}$, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

Λύση

α. Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γίνεται: $\frac{α}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{2}+3}{6}$, $6\frac{α}{3}+6\frac{1}{2}=6\frac{2\sqrt{2}+3}{6}$,

$2α+3=2\sqrt{2}+3$, $2α=2\sqrt{2}$, $α=\sqrt{2}$

β. Για $α=\sqrt{2}$ έχουμε: $ΑΒ=α=\sqrt{2}$, $ΑΕ=2α=2\sqrt{2}$ και $ΓΔ=5\sqrt{2}$, επομένως για το εμβαδόν Ε του τραπεζίου ΑΒΓΔ θα έχουμε:

$E=\frac{(B+\beta)\upsilon}{2}$, $E=\frac{(\Gamma\Delta+AB)AE}{2}$, $E=\frac{\left(5\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}}{2}$, $E=\frac{\left(6\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}}{2}$, $E=\frac{24}{2}$, $E=12$,

γ. Είναι: $\Delta E=\Gamma\Delta-\sqrt{32}$, $\Delta E=5\sqrt{2}-\sqrt{16\cdot 2}$, $\Delta E=5\sqrt{2}-4\sqrt{2}$, $\Delta E=\sqrt{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $A\Delta^2=\Delta E^2+AE^2$,

$A\Delta^2=\sqrt{2}^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2$, $A\Delta^2=2+8$, $A\Delta^2=10$, $A\Delta=\sqrt{10}$.

Άσκηση 4

Δίνονται οι παραστάσεις $A=4(x-2)+3(3-x)$ και $B=9x-2\left(3x-\frac{9}{2}\right)$.

α. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις Α και Β.
β. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει Α=Β.
γ. Για την τιμή του x που βρήκατε στο β ερωτήματος να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma=4x-2(x-4)$ δεν είναι ούτε θετική, ούτε αρνητική.

Λύση

α. Είναι: $A=4(x-2)+3(3-x)$, $A=4x-8+9-3x$, $A=x+1$ και $B=9x-2\left(3x-\frac{9}{2}\right)$,

$B=9x-6x+9$, $B=3x+9$.

β. Έχουμε: $A=B$, $x+1=3x+9$, $x-3x=9-1$, $-2x=8$, $x=-4$

γ. Η παράσταση Γ γίνεται: $\Gamma=4x-2(x-4)$, $\Gamma=4x-2x+8$, $\Gamma=2x+8$

και για $x=-4$ έχουμε: $\Gamma=2x+8$, $\Gamma=2\cdot(-4)+8$, $\Gamma=-8+8$, $\Gamma=0$

επομένως ούτε θετική, ούτε αρνητική.

Άσκηση 5

α. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες: $\sqrt{64}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{8100}$, $\sqrt{72}$.
β. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις $A=\sqrt{81}+2x-\sqrt{64}+\sqrt{9}$ και $B=6\sqrt{2}+4y-\sqrt{72}+\sqrt{4}$.
γ. Να λυθούν οι εξισώσεις Α=0 και Β=0.
δ. Τις ρίζες των παραπάνω εξισώσεων να τις τοποθετήσετε στην παρακάτω ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Λύση

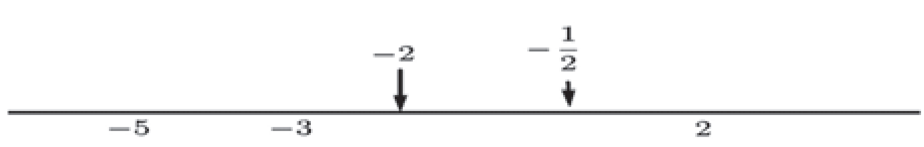
α. Είναι: $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{8100}=90$, $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

β. Είναι: $A=\sqrt{81}+2x-\sqrt{64}+\sqrt{9}$, $A=9+2x-8+3$, $A=2x+4$ και

$B=6\sqrt{2}+4y-\sqrt{72}+\sqrt{4}$, $B=6\sqrt{2}+4y-6\sqrt{2}+2$, $B=4y+2$,

γ. Έχουμε: $A=0$, $2x+4=0$, $2x=-4$, $x=-2$, και $B=0$, $4y+2=0$, $4y=-2$ $y=-\frac{1}{2}$

δ.



Άλγεβρα & Γεωμετρία

Αμπράζης Στυλιανός

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1η : Α. Να βρείτε τον άγνωστο x στην εξίσωση: $2\cdot(x-1)+5=4x-25$

Β. Για x=14, να λύσετε την ακόλουθη εξίσωση που έχει ως άγνωστο το y:

$$\frac{y}{x-10}-\frac{y-2}{x-12}=1-\frac{y}{4}$$

Γ. Για x=14, να λύσετε την ακόλουθη εξίσωση που έχει ως άγνωστο το ω:

$$\frac{\omega}{x-7}+\frac{2\omega+1}{2}=\omega-\frac{2\omega-8}{14}$$

Λύση: Α. Έχουμε: $2\cdot(x-1)+5=4x-25\Rightarrow$

$2x-2+5=4x-25\Rightarrow -2x=-28\Rightarrow x=14$

Β. Για x=14, η εξίσωση γίνεται:

$\frac{y}{4}-\frac{y-2}{2}=1-\frac{y}{4}\Rightarrow y-2(y-2)=4-y\Rightarrow$

$y-2y+4=4-y\Rightarrow y+y-2y=4-4\Rightarrow$

$0y=0$, αόριστη ή ταυτότητα

Γ. Για x=14, η εξίσωση γίνεται:

$\frac{\omega}{7}+\frac{2\omega+1}{2}=\omega-\frac{2\omega-8}{14}\Rightarrow$

$2\omega+7(2\omega+1)=14\omega-(2\omega-8)\Rightarrow$

$2\omega+14\omega-14\omega+2\omega=-7+8\Rightarrow 4\omega=1,\ \omega=\frac{1}{4}.$

Άσκηση 2η : Α. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $K=2x-3(x+2)-x$, $\Lambda=17+4(5-3x)$

Β. Για $K=-2x-6$ και $\Lambda=-12x+37$ να βρείτε το x λύνοντας την εξίσωση:

$$4K=\Lambda-61$$

Γ. Για $K=-2x-6$ και $\Lambda=-12x+37$ να βρείτε το x λύνοντας την εξίσωση:

$$\frac{K}{2}=\Lambda+4$$

Λύση: Α. Έχουμε: $K=2x-3(x+2)-x$

$=2x-3x-6-x=-2x-6$ και

Ακόμη: $\Lambda=17+4(5-3x)$

$=17+20-12x=-12x+37$

Β. Η εξίσωση γράφεται: $4K=\Lambda-61\Rightarrow$

$4(-2x-6)=-12x+37-61\Rightarrow$

$-8x+12x=37-61+24\Rightarrow 4x=0\Rightarrow x=0$

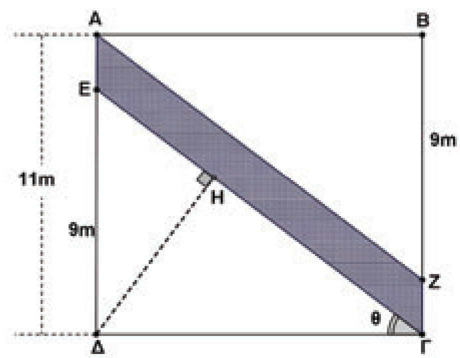
Γ. Η εξίσωση γράφεται: $\frac{K}{2}=\Lambda+4\Rightarrow$

$\frac{-2x-6}{2}=-12x+37+4\Rightarrow$

$-2x-6=-24x+82\Rightarrow 22x=88\Rightarrow x=4$

Άσκηση 3η: Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ΒΖ=ΔΕ=9m και ΑΔ=ΒΓ=11m.

Για τη γωνία θ του σχήματος γνωρίζουμε ότι: $\eta\mu\theta=\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{4}{5}$ και $\varepsilon\varphi\theta=\frac{3}{4}$.



Α. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΓΕ, ΑΒ.

Β. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΔΗ του τριγώνου ΓΔΕ.

Γ. Αν στον παραλληλόγραμμο διάδρομο ΑΖΓΕ κατασκευαστεί ένα ψηφιδωτό με κόστος 257€ ανά τετραγωνικό μέτρο, να βρείτε το χρηματικό κόστος της κατασκευής αυτής.

Λύση: Α. Έχουμε:

$$\eta\mu\theta=\frac{E\Delta}{E\Gamma}\Rightarrow\frac{3}{5}=\frac{9}{E\Gamma}\Rightarrow E\Gamma=15m$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\Gamma\Delta}{E\Gamma}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{\Gamma\Delta}{15}\Rightarrow \Gamma\Delta=12m$$

Τότε, ΑΒ=ΓΔ=12m.

Β. Από το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΔΓΕ έχουμε:

$$E=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\frac{\Delta\Gamma\cdot\Gamma E}{2}=\frac{12\cdot 9}{2}=54m^2$$

Αλλά θα ισχύει και η σχέση:

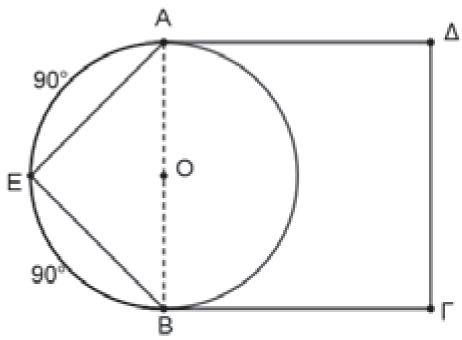
$$E=54\Rightarrow\frac{E\Gamma\cdot\Delta H}{2}=54\Rightarrow\frac{15\cdot\Delta H}{2}=54\Rightarrow$$

$15\cdot \Delta H = 108 \Rightarrow \Delta H = 7,2m$

Γ. Για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΖΓΕ θα έχουμε: $E = \beta\cdot\upsilon = AE\cdot\Gamma\Delta = 2\cdot 12 = 24m^2$

Το κόστος κατασκευής είναι: $24\cdot 257 = 6168$ €.

Άσκηση 4η : Ο κυκλικός δίσκος (O, ρ) του σχήματος έχει μήκος 10π m.



Α. Να βρείτε την ακτίνα ρ και το εμβαδόν του.
Β. Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που είναι εντός του τετραγώνου κι εκτός του κυκλικού δίσκου. Γνωρίζοντας ότι τα 10 m^2 γκαζόν κοστίζουν 88€, να υπολογίσετε το συνολικό κόστος αν την επιφάνεια εντός του τετραγώνου κι εκτός του κυκλικού δίσκου τη φυτέψουμε με αυτό το γκαζόν.
Γ. Παίρνουμε το σημείο Ε ώστε τα τόξα ΑΕ και ΒΕ να είναι από 90° το καθένα. Να βρείτε το εμβαδόν του πενταγώνου ΑΕΒΓΔ και την ακτίνα R ενός δεύτερου κυκλικού δίσκου που θα έχει εμβαδόν πενταπλάσιο από το εμβαδόν του αρχικού κυκλικού δίσκου.

Λύση: Α. Είναι $L=10\pi \Rightarrow 2\pi\rho = 10\pi \Rightarrow \rho = 5m$

$E = \pi\rho^2 \Rightarrow E = \pi 5^2 \Rightarrow E = 25\pi m^2$

Β. Ισχύει $E_{\zeta\eta\tau} = \delta^2 - \frac{1}{2}\pi\rho^2 = 10^2 - \frac{25\pi}{2} =$

$100 - 12,5\pi = 60,75\ m^2$

Το κόστος είναι $88:10 = 8,8$ €$/m^2$

Οπότε το συνολικό κόστος θα είναι:

$$60,75\cdot 8,8 = 534,6 \text{ €}$$

Γ. Έχουμε $A\hat{E}B = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. Έστω $AE = BE = x$, οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε

$x^2 + x^2 = 10^2 \Rightarrow 2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50$

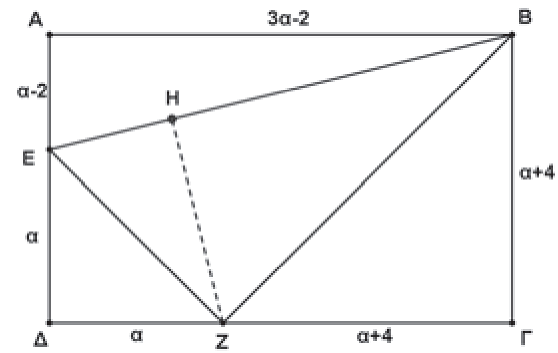
Το εμβαδόν του πενταγώνου ΑΕΒΓΔ είναι:

$\frac{x^2}{2} + \delta^2 = \frac{50}{2} + 100 = 125\ m^2$

Τέλος θέλουμε $\pi R^2 = 5\cdot E \Rightarrow$

$\pi R^2 = 5\cdot 25\pi \Rightarrow R^2 = 125 \Rightarrow R = 5\sqrt{5}$ m

Άσκηση 5η: Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει περίμετρο 52m.



Α. Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ και ΑΕ.
Β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΒΖΕ και να αποδείξετε ότι αυτό είναι ορθογώνιο τρίγωνο.
Γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΕ φέρνοντας το ύψος ΖΗ να υπολογίσετε το μήκος του.

Λύση: Α. Ισχύει: $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E = 52 \Rightarrow$

$3\alpha - 2 + \alpha + 4 + 2\alpha + 4 + 2\alpha - 2 = 52 \Rightarrow$

$8\alpha = 48 \Rightarrow \alpha = 6$

Οπότε: $AB = 3\cdot 6 - 2 = 16m$, $B\Gamma = 6 + 4 = 10m$ και $AE = 6 - 2 = 4m$

Β. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ και ΔΕΖ παίρνουμε:

$BE^2 = AB^2 + AE^2 \Rightarrow BE^2 = 16^2 + 4^2 \Rightarrow$

$BE^2 = 256 + 16 \Rightarrow BE^2 = 272 \Rightarrow BE = 4\sqrt{17}m$

Ακόμη προκύπτει: $BZ^2 = B\Gamma^2 + \Gamma Z^2 \Rightarrow$

$BZ^2 = 200 \Rightarrow BZ = 10\sqrt{2}m$

$EZ^2 = \Delta Z^2 + E\Delta^2 \Rightarrow EZ^2 = 72 \Rightarrow EZ = 6\sqrt{2}m$

Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΒΖΕ είναι:

$BZ + EZ + BE = 16\sqrt{2} + 4\sqrt{17}m$

Έχουμε: $BZ^2 + ZE^2 = 200 + 72 = 272$

$BE^2 = 272$, άρα $BE^2 = BZ^2 + ZE^2$

Από το Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος προκύπτει ότι το τρίγωνο ΒΖΕ είναι ορθογώνιο με $B\hat{Z}E = 90^\circ$.

Γ. Για το εμβαδόν του τριγώνου ΒΖΕ έχουμε

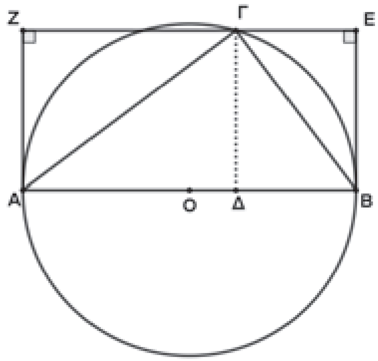
$\frac{BE\cdot ZH}{2} = \frac{BZ\cdot EZ}{2} \Rightarrow 4\sqrt{17}\cdot ZH = 60\sqrt{2}^2 \Rightarrow$

$ZH = \frac{120}{4\sqrt{17}} \Rightarrow ZH = \frac{30}{\sqrt{17}} \Rightarrow ZH = \frac{30\sqrt{17}}{17}m$

Άσκηση 6η: Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=5m έχουμε μια διάμετρο ΑΒ όπως στο σχήμα.
Α. Να βρείτε το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Β. Έχοντας χορδή ΑΓ=8m, να υπολογίσετε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

Γ. Στο σχήμα το ΑΒΕΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΒΕΖ που είναι εξωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση: Α. Είναι $L = 2\pi\rho \Rightarrow L = 10\pi m$

$\mathrm{E} = \pi\rho^2 \Rightarrow \mathrm{E} = \pi 5^2 \Rightarrow \mathrm{E} = 25\pi m^2$

Β. Έχουμε $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 90°$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουνε: $\Gamma B^2 + \Gamma A^2 = AB^2 \Rightarrow \Gamma B^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ $\Gamma B^2 = 100 - 64 \Rightarrow \Gamma B^2 = 36 \Rightarrow B\Gamma = 6m$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι:

$$\mathrm{E} = \frac{\Gamma A \cdot \Gamma B}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24m^2$$

Έχοντας $\mathrm{E} = 24m^2$ μπορούμε να πάρουμε:

$$\mathrm{E} = 24 \Rightarrow \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = 24 \Rightarrow \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2} = 24 \Rightarrow$$

$$\frac{10 \cdot \Gamma\Delta}{2} = 24 \Rightarrow 10 \cdot \Gamma\Delta = 48 \Rightarrow \Gamma\Delta = 4,8m$$

Γ. Θα έχουμε $\Gamma\Delta = BE = AZ = 4,8m$. Οπότε:

$$(AZ\Gamma) + (BE\Gamma) = (ABEZ) - (AB\Gamma) =$$

$$AB \cdot BE - \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2} = AB \cdot \Gamma\Delta - \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2} = (AB\Gamma).$$

Άσκηση 7η: Α. Σε κυκλικό δίσκο εμβαδού $314cm^2$ να βρείτε την ακτίνα του και το μήκος της περιμέτρου του.

Β. Σε κύλινδρο με την κάθε μια από τις δύο βάσεις του να είναι ο κυκλικός δίσκος του Α ερωτήματος, γνωρίζουμε ότι το ύψος του είναι διπλάσιο της ακτίνας του. Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του κυλίνδρου.

Γ. Αν το κυλινδρικό δοχείο του προηγούμενου ερωτήματος περιέχει εξολοκλήρου χυμό μπανάνας αξίας 2 ευρώ το κάθε λίτρο, ποια είναι η συνολική αξία του περιεχομένου;

Λύση: Α. Έχουμε: $\mathrm{E} = 314 \Rightarrow \pi\rho^2 = 314 \Rightarrow$

$$\rho^2 = \frac{314}{3,14} \Rightarrow \rho^2 = 100 \Rightarrow \rho = 10cm$$

$$L = 2\pi\rho \Rightarrow L = 20\pi cm$$

Β. Το ύψος του κυλίνδρου θα είναι $\upsilon = 2\rho = 20cm$ οπότε για το συνολικό του εμβαδόν έχουμε: $\mathrm{E} = \mathrm{E}_\pi + 2 \cdot \mathrm{E}_\beta = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \upsilon + 2 \cdot \mathrm{E}_\beta$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 314 = 1884cm^2$$

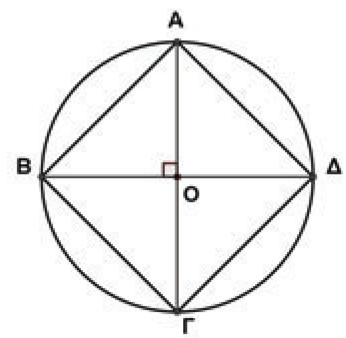
Ο όγκος του κυλίνδρου θα είναι:

$V = \mathrm{E}_\beta \cdot \upsilon = 314 \cdot 20 = 6280cm^3$ ή $6280ml$.

Γ. Ο όγκος του δοχείου σε λίτρα είναι: $6280 : 1000 = 6,28L$, οπότε η αξία του χυμού είναι: $6,28 \cdot 2 = 12,56$ €.

Άσκηση 8η: Α. Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ=10cm, να βρείτε το μήκος του και το εμβαδόν του.

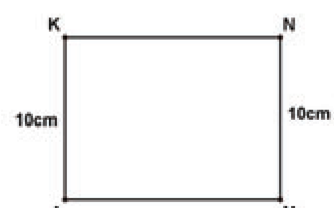
Β. Στον κύκλο του Α ερωτήματος φέρνουμε τις κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, οπότε δημιουργούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Γ. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ γνωρίζουμε ότι το πλάτος του είναι 10cm. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικό του κυκλικού δίσκου και εξωτερικό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το εμβαδόν του ΚΛΜΝ, να βρείτε:

i) το μήκος του ΚΛΜΝ και

ii) την περίμετρο του ΚΛΜΝ.



Λύση: Α. Είναι $L = 2\pi\rho = 20\pi cm$ και

$$\mathrm{E} = \pi\rho^2 \Rightarrow \mathrm{E} = \pi 10^2 \Rightarrow \mathrm{E} = 100\pi cm^2$$

Β. Έστω $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = x$, οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε:

$$AB^2 = \rho^2 + \rho^2 \Rightarrow AB^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow$$

$$AB^2 = 200 \Rightarrow AB = 10\sqrt{2}cm$$

Η περίμετρος και το εμβαδόν τού τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $\Pi = 4 \cdot AB = 4 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} = 40 \cdot \sqrt{2}cm$

$$\mathrm{E} = AB^2 = 200cm^2$$

Γ. Έστω $\Lambda M = KN = y$, οπότε για το εμβαδόν του ΚΛΜΝ παίρνουμε:

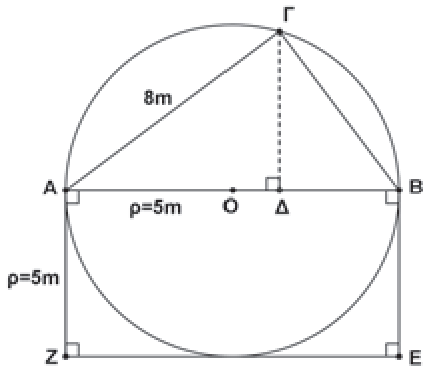
$10 \cdot y = 100\pi - 200 \Rightarrow 10 \cdot y \simeq 314 - 200 \Rightarrow$

$10 \cdot y \simeq 114 \Rightarrow y \simeq 11,4cm$

Τέλος, η περίμετρος τού ΚΛΜΝ είναι:

$\Pi = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 11,4 = 42,8cm$

Άσκηση 9η: Σε κύκλο με κέντρο Ο έχουμε την ακτίνα του ρ=5m.



Α. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου καθώς και το εμβαδόν του.
Β. Αν η χορδή ΑΓ έχει μήκος 8m, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το μήκος του ύψους ΓΔ.
Γ. Σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΕΖ με ΑΖ=ρ=5m, όπως είναι στο σχήμα. Βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του συνολικού σχηματιζόμενου σχήματος.

Λύση: Α. Είναι $L = 2\pi\rho = 10\pi m$ και

$E = \pi\rho^2 \Rightarrow E = \pi 5^2 \Rightarrow E = 25\pi m^2$

Β. Θα είναι $A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε: $\Gamma B^2 + \Gamma A^2 = AB^2 \Rightarrow \Gamma B^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$

$\Gamma B^2 = 100 - 64 \Rightarrow \Gamma B^2 = 36 \Rightarrow B\Gamma = 6m$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι:

$$E = \frac{\Gamma A \cdot \Gamma B}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24m^2$$

Έχοντας $E = 24m^2$ μπορούμε να πάρουμε:

$E = 24 \Rightarrow \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2} = 24 \Rightarrow \dfrac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2} = 24 \Rightarrow$

$\dfrac{10 \cdot \Gamma\Delta}{2} = 24 \Rightarrow 10 \cdot \Gamma\Delta = 48 \Rightarrow \Gamma\Delta = 4,8m$

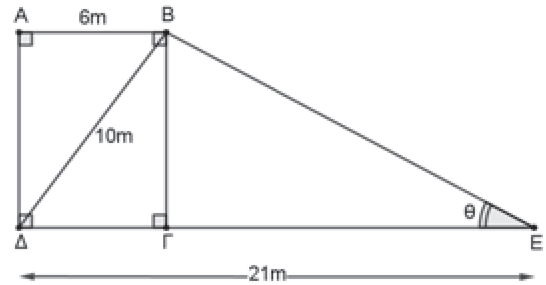
Γ. Η περίμετρος θα είναι:

$$AZ + ZE + EB + \frac{L}{2} = (20 + 5\pi)m$$

Το εμβαδόν θα είναι:

$$AB \cdot AZ + \frac{\pi\rho^2}{2} = (50 + 12,5\pi)m^2$$

Άσκηση 10η: Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά ΑΒ=6m και τη διαγώνιό του ΒΔ=10m.



Α. Αν γνωρίζουμε ότι ΔΕ=21m, να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του ΑΒΕΔ.
Β. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο ή όχι.
Γ. Αν $\hat{E} = \theta$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Κ:

$$K = (-2)^3 \cdot \eta\mu\theta + (-3)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - 5 \cdot 3^2 \cdot \varepsilon\varphi\theta - \frac{3}{17}\kappa$$

Λύση: Α. Στο ορογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$A\Delta^2 + AB^2 = B\Delta^2 \Rightarrow A\Delta^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow$

$A\Delta^2 + 36 = 100 \Rightarrow A\Delta^2 = 64 \Rightarrow A\Delta = 8m$

Έχουμε $A\Delta = B\Gamma = 8m$ και $AB = \Gamma\Delta = 6m$, οπότε $\Gamma E = \Delta E - \Gamma\Delta = 21 - 6 = 15m$.

Στο ορογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$BE^2 = B\Gamma^2 + \Gamma E^2 \Rightarrow BE^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow$

$BE^2 = 64 + 225 \Rightarrow BE^2 = 289 \Rightarrow BE = 17m$

Η περίμετρος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΕΔ θα είναι: $\Pi = 6 + 17 + 21 + 8 = 52m$

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(21 + 6) \cdot 8}{2} = 27 \cdot 4 = 108m^2$$

Β. Παίρνουμε: $B\Delta^2 + BE^2 = 10^2 + 17^2 =$

$= 100 + 289 = 389$, $\Delta E^2 = 21^2 = 441$

Άρα, έχοντας $B\Delta^2 + BE^2 \neq \Delta E^2$, σύμφωνα με το Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος, το τρίγωνο ΒΔΕ δεν είναι ορθογώνιο.

Γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ είναι:

$\eta\mu\theta = \dfrac{B\Gamma}{BE} = \dfrac{8}{17}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\Gamma E}{BE} = \dfrac{15}{17}$ και

$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{B\Gamma}{\Gamma E} = \dfrac{8}{15}$, οπότε η παράσταση Κ γράφεται: $K = (-2)^3 \cdot \dfrac{8}{17} + (-3)^2 \cdot \dfrac{15}{17} - 5 \cdot 3^2 \cdot \dfrac{8}{15} - \dfrac{3}{17}$

$-8 \cdot \dfrac{8}{17} + 9 \cdot \dfrac{15}{17} - 3 \cdot 8 - \dfrac{3}{17} = 4 - 24 = -20$

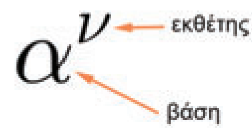
Β΄ Τάξη Οι δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό αριθμό

Ανδρέας Τριανταφύλλου

Ερώτημα: Από που προέκυψαν οι δυνάμεις; Ποια ανάγκη μας οδήγησε να τις επινοήσουμε;

Φανταστείτε να γράφαμε σε όλα μας τα κείμενα παραστάσεις όπως αυτές:
3+3+3+3+3+3+3+3 ή
3·3·3·3·3·3·3·3 ή γενικότερα
α·α·α·α·α·α·α

Με στόχο να περιορίσουμε την έκταση των μαθηματικών παραστάσεων ώστε να μπορούμε πιο εύκολα να τις κατανοούμε και να κάνουμε σύνθετους υπολογισμούς, επινοήσαμε τα παρακάτω:
Αντί για 3+3+3+3+3+3+3+3 γράφουμε **8·3** ενώ
Αντί να γράφουμε 3·3·3·3·3·3·3·3 γράφουμε $\mathbf{3^8}$
Αντί να γράφουμε α·α·α·α·α·α·α·α γράφουμε $\boldsymbol{\alpha^8}$



Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται μαζί για να σχηματίσουν ένα γινόμενο ονομάζονται παράγοντες του γινομένου.

Όταν επαναλαμβάνεται ο ίδιος παράγοντας, μπορούμε
να χρησιμοποιήσουμε ένα εκθέτη για την απλοποίηση της γραφής.

Ο εκθέτης μας λέει πόσες φορές η βάση χρησιμοποιείται ως παράγοντας. Ο κοινός παράγοντας ονομάζεται βάση.

Έτσι, $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha\cdot\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}\cdot\alpha$, όπου α ρητός αριθμός και ν>1, όπου ν φυσικός.

- Για ν = 1, γράφουμε $\alpha^1 = \alpha$
- Η δύναμη α^ν διαβάζεται και νιοστή δύναμη του α.
- Η δύναμη α^2 λέγεται και τετράγωνο του α ή α στο τετράγωνο.
- Η δύναμη α^3 λέγεται κύβος του α ή α στον κύβο.

Με βάση τα παραπάνω, είναι λογικό αντί να γράφουμε $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$, να γράφουμε $\left(\frac{3}{5}\right)^4$.

Βέβαια $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{3^4}{5^4}$ οπότε προκύπτει ότι: $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$

Γενικότερα μπορούμε να γράψουμε: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$.

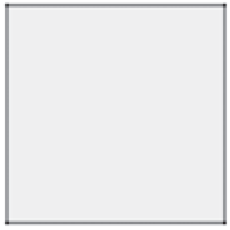
Ερώτηση: Τι θα μπορούσε να συμβολίζει η δύναμη α^0 όταν ο α είναι ρητός αριθμός **διαφορετικός από το 0**;

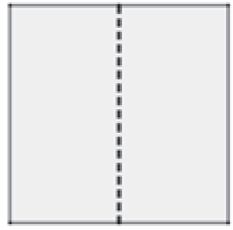
Δραστηριότητα 1

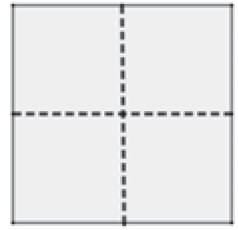
Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε μία σελίδα φωτοτυπικού χαρτιού.

Αρχίζουμε διπλώνοντάς τη στη μέση, αν ανοίξουμε τη διπλωμένη σελίδα έχει χωριστεί σε 2 σε 2 μέρη.

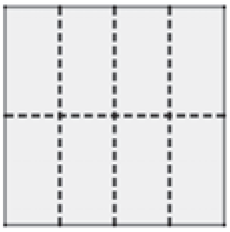
Ξαναδιπλώνουμε τη σελίδα και συνεχίζουμε διπλώνοντας στη μέση τη διπλωμένη σελίδα, την οποία αν ανοίξουμε τώρα έχει χωριστεί σε 4 μέρη.

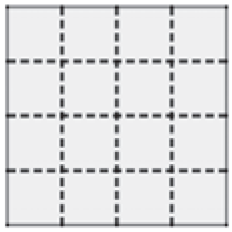

μηδεν (0) διπλώσεις


1η


2η

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία μπορούμε να συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα.


3η


4η

Διπλώσεις σελίδας	**Μέρη σελίδας**
0	1
1η	$1 \cdot 2 = 2$
2η	$2 \cdot 2 = 4$
3η	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
4η	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
5η	
6η	

Δραστηριότητα 2

Ας υποθέσουμε ότι στέλνετε ένα μήνυμα σε ένα από τους φίλους σας. Αυτός ο φίλος, μετά ένα λεπτό στέλνει μηνύματα σε δύο φίλους. Στη συνέχεια ο καθένας από αυτούς τους φίλους, μετά από ένα λεπτό, στέλνει μηνύματα σε δύο φίλους και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται.

α. Πόσα μηνύματα κειμένου θα σταλούν μέσα σε 4 λεπτά;

β. Ποιά είναι η σχέση μεταξύ του αριθμού των μηνυμάτων και του αριθμού των λεπτών;

γ. Μετά από πόσα λεπτά θα έχουν σταλεί περισσότερα από 500 και λιγότερα από 1.000 μηνύματα;

Χρόνος σε λεπτά	**Αριθμός μηνυμάτων κειμένου**
0	1
1	$1 \cdot 2$
2	$2 \cdot 2$
3	$2 \cdot 2 \cdot 2$
4	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
5	

α) Να συζητήσετε, με βάση τον πίνακα, ποια τιμή είναι λογικό να αντιστοιχίσουμε στη δύναμη 2^0;

β) Να εξετάσετε αν το συμπέρασμά σας για την δύναμη 2^0 ισχύει γενικότερα για κάθε μη μηδενικό ρητό αριθμό α, δηλαδή αν $\alpha^0=1$.

Σε αυτό θα σας βοηθήσει η ιδιότητα $\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$

Δραστηριότητα3

Μια απάντηση με βάση τον ορισμό $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} = 1 \cdot \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$, όπου α ρητός αριθμός και ν>1, με ν φυσικό αριθμό.

Που θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε είναι $\boxed{\alpha^0 = 1 \text{ με } \alpha \neq 0}$, αφού α^0 σημαίνει μηδέν παράγοντες α.

Ιδιότητες των Δυνάμεων

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη θετικό ακέραιο αριθμό, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οιδυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται, είναι οι εξής:

$\boxed{\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}}$, αφού $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\kappa\ \pi\alpha\rho/\tau\varepsilon\varsigma} \cdot \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\kappa\ \pi\alpha\rho/\tau\varepsilon\varsigma} = \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\kappa+\lambda\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

Όταν πολλαπλασιάζουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, το αποτέλεσμα είναι μια δύναμη με την ίδια βάση και εκθέτη το άθροισμα των εκθετών

$\boxed{\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}}$ αφού $\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \dfrac{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha(\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma)}{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha(\lambda\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma)} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha}_{\kappa-\lambda\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$

Όταν διαιρούμε δυνάμεις με την ίδια βάση, το αποτέλεσμα είναι μια δύναμη με την ίδια βάση και εκθέτη τη διαφορά των εκθετών

$\boxed{(\alpha \cdot \beta)^\kappa = \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa}$ αφού $(\alpha \cdot \beta)^\kappa = \underbrace{(\alpha \cdot \beta) \cdot \ldots \cdot (\alpha \cdot \beta)}_{\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} = \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} \cdot \underbrace{\beta \cdot \ldots \cdot \beta}_{\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} = \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa$

Όταν υψώνουμε ένα γινόμενο σε δύναμη, υψώνουμε κάθε όρο του γινομένου στη δύναμη.

$\boxed{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha}\right)^\kappa = \dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}}$ αφού $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha}\right)^\kappa = \underbrace{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}_{\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} = \dfrac{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}{\beta \cdot \ldots \cdot \beta} = \dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$

Όταν υψώνουμε ένα πηλίκο σε δύναμη, υψώνουμε κάθε όρο του πηλίκου στη δύναμη.

$\boxed{(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}}$ αφού $(\alpha^\kappa)^\lambda = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha}_{\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma})^\lambda = \underbrace{\underbrace{(\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha)}_{\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} \cdot \underbrace{(\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha)}_{\kappa\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}}_{\lambda\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} =$

$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha}_{\kappa \cdot \lambda\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

Όταν υψώνουμε μια δύναμη σε άλλη δύναμη, υψώνουμε τη βάση στο γινόμενο των δυνάμεων.

Ασκήσεις εμπέδωσης

- Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων, με τη μορφή μιας δύναμης

(α) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^6 =$ **(β)** $[(-4)^5]^{-2} =$ **(γ)** $(-6)^5 : (+6)^2 =$

(δ) $2^3 \cdot 8^3 \cdot 4^2 =$ **(ε)** $3^4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 27^0 =$ **(στ)** $(\alpha^4 \cdot \alpha)^4 \div \alpha^5 =$

(ζ) $(-5)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot (-5)^4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 =$ **(η)** $3^{12} \div 3^3 + 3^3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^7 - (3^2)^4 =$

- Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω σχέσεις βάζοντας ✓ στον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

	Σωστό	Λάθος
Α) $3^3 + 3^2 = 3^5$		
Β) $4^{-3} \cdot 4^5 = 4^{15}$		
Γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^3$		
Δ) $[(-2)^4]^3 = (-2)^7$		
Ε) $(6-4)^2 = 6^2 - 4^2$		
Στ) $5^{-3} : 5 = 5^{-2}$		
Ζ) $\frac{9^{11}}{3^{11}} = 3^{11}$		
Η) $(-5)^5 \cdot (-5)^3 = -5^8$		

- Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα και παρατηρήστε τον κανόνα.

Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	Α	Β
2•2•2•2•2	2^5	32	3•3•3•3•3	3^5	243	4•4•4•4•4	4^5	1.024	x•x•x•x•x	x^5
2•2•2•2			3•3•3•3			4•4•4•4			x•x•x•x	
2•2•2			3•3•3			4•4•4			x•x•x	
2•2			3•3			4•4			x•x	
2			3			4			x	

1. Τι παρατηρείτε καθώς απαντάτε στη στήλη Β;
2. Τι παρατηρείτε καθώς απαντάτε στη στήλη Γ;
3. Τι συμβαίνει με την τιμή της δύναμης όταν μειώνεται ο εκθέτης;
4. Στη στήλη Β, πώς σχετίζεται η τιμή σε κάθε κελί με το πάνω ή το κάτω κελί του;

- Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη:

(α) $4^2 \cdot 2^3 =$ **(β)** $(4)^4 \cdot 2^2 =$ **(γ)** $((3)^4)^1 : 3^3 =$
(δ) $(3)^3 \cdot (9)^6 =$ **(ε)** $32^6 : 4^3 =$ **(στ)** $8^3 : 3^9 =$

Ασκήσεις και θέματα κριτικής σκέψης

1) Να υπολογίσετε νοερά το γινόμενο $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3$

2) Να τοποθετήσετε σε μία σειρά, από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, τους παρακάτω αριθμούς: $\left(\frac{3}{5}\right)^4$, $\left(\frac{4}{3}\right)^3$, $\left(\frac{3}{5}\right)^0$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^6$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$

3) Δημιουργούμε όλες τις δυνατές δυνάμεις της μορφής $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma$ όπου τα α, β, γ παίρνουν τιμές 4, 7 και 9 όχι κατ ανάγκη σε αυτή τη σειρά. Ποια από τις δυνάμεις αυτές δίνει το μεγαλύτερο αποτέλεσμα;

4) Παρατηρήστε προσεκτικά την παρακάτω αριθμητική παράσταση:
$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{-6}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{-8}{9}\right)^3$. Χωρίς να εκτελέσετε πράξεις να υπολογίσετε το αποτέλεσμα στην απλούστερη δυνατή του μορφή.

5) Δίνεται το εξής πρόβλημα: «Ένα αυτοκίνητο αγοράστηκε τον Ιανουάριο του 2007 στην τιμή των 16.200€. Στην αγορά των αυτοκινήτων ισχύει ο εξής κανόνας: Ένα αυτοκίνητο κάθε 4 χρόνια χάνει το $\frac{1}{3}$ της αξίας που είχε στην αρχή της τετραετίας. Ποια ήταν η τιμή του στο τέλος Δεκεμβρίου του έτους 2023;». Δίνεται επιπλέον η αριθμητική παράσταση $16.200 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Να εξηγήσετε γιατί η παράσταση αυτή είναι ένας σύντομος, από άποψη πράξεων, τρόπος να υπολογιστεί η αξία του αυτοκινήτου στο τέλος του 2023.

6) Ο καθηγητής των Μαθηματικών στη Β΄ Γυμνασίου έγραψε στον πίνακα την παράσταση: $\left(\frac{2\alpha - 4}{\alpha + 1}\right)^0$ και ζήτησε από τους μαθητές και τις μαθήτριες να υπολογίσουν το αποτέλεσμα. Ένα μεγάλο μέρος των παιδιών της τάξης υποστήριξε ότι το αποτέλεσμα είναι πάντα 1, αφού ο εκθέτης της δύναμης είναι 0. Να σχολιάσετε την άποψη αυτή.

Γ΄ Τάξη

Γραμμικά συστήματα. Επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων

Σωτηρία Γουρνά - Χρήστος Μάλλιαρης

Η μελέτη των γραμμικών συστημάτων αποτελεί βασικό κεφάλαιο της Άλγεβρας στη Γ΄ Γυμνασίου, καθώς εισάγει τους μαθητές σε μεθόδους επίλυσης προβλημάτων που εμφανίζονται τόσο στα μαθηματικά όσο και σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Θα επιχειρήσουμε μια συνοπτική και σαφή παρουσίαση της σχετικής θεωρίας, με έμφαση στην κατανόηση της έννοιας του γραμμικού συστήματος και των λύσεων του, παράλληλα, θα παρουσιάσουμε τις βασικές μεθόδους επίλυσης, όπως η γραφική επίλυση, η μέθοδος της αντικατάστασης και η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών, με κατάλληλα παραδείγματα. Τέλος, θα υπάρχουν επιλεγμένες ασκήσεις και προβλήματα διαβαθμισμένης δυσκολίας, με στόχο την εμπέδωση των γνώσεων και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Τα συστήματα δεν είναι μόνο απλές ασκήσεις στο τετράδιο, είναι το μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε προβλήματα της καθημερινότητας: από τον υπολογισμό του κόστους δύο προϊόντων σε μια αγορά, μέχρι την εύρεση της ταχύτητας δύο οχημάτων που πλησιάζουν το ένα το άλλο.

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζουμε ένα σύνολο δύο εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$.
Συμβολικά, το γράφουμε χρησιμοποιώντας ένα άγκιστρο στην αρχή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ και είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί (συντελεστές και σταθεροί όροι).

Λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y, ονομάζουμε κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) το οποίο επαληθεύει ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζεται η διαδικασία μέσω της οποίας αναζητούμε όλες τις δυνατές λύσεις του συστήματος (x, y) (δηλαδή όλα τα ζεύγη που το επαληθεύουν).

Μέθοδοι επίλυσης γραμμικού συστήματος:

Γραφική επίλυση

Η κάθε εξίσωση ενός γραμμικού συστήματος παριστάνουν μια ευθεία. Θα σχεδιάζουμε τις ευθείες αυτές στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Αν οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο, τότε το σύστημα **(1)** έχει μοναδική λύση, τις συντεταγμένες του σημείου τομής. Οι ευθείες τέμνονται όταν: $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$.

Περίπτωση 2η: Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα **(1)** είναι αδύνατο. Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$.

Περίπτωση 3η: Αν οι ευθείες ταυτίζονται, τότε το σύστημα **(1)** είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις. Αυτό συμβαίνει όταν: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$.

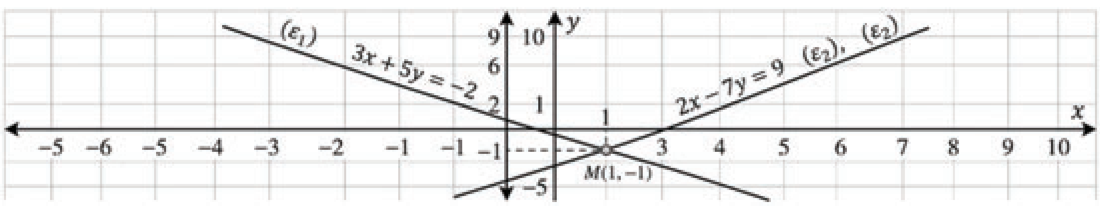
Μπορείς να γράψεις ένα σύστημα για καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Ας δούμε μαζί ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 1

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x+5y=-2 \\ 2x-7y=9 \end{cases}$ με τη μέθοδο γραφικής επίλυσης.

Αρχικά θα σχεδιάσουμε τις δύο ευθείες στο καρτεσιανό επίπεδο. Για κάθε μία από αυτές χρειαζόμαστε 2 σημεία της. Για την πρώτη ευθεία με εξίσωση $3x+5y=-2$ βρίσκουμε τα σημεία $(1,-1)$ και $(-4,2)$ ενώ για τη δεύτερη ευθεία με εξίσωση $2x-7y=9$ βρίσκουμε τα σημεία $(8,1)$ και $(1,-1)$. Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο σημείο $(1,-1)$ που βρήκαμε τυχαία



Το κοινό σημείο $M(1,-1)$ των δύο ευθειών αποτελεί τη λύση του συστήματος. Δηλαδή $x=1$ και $y=-1$.

Θα μπορούμε πάντα να προσδιορίζουμε, με ακρίβεια, τις συντεταγμένες του σημείου τομής 2 τεμνόμενων ευθειών μέσω του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων; Η απάντηση είναι όχι. Συνεπώς πρέπει να βρούμε και έναν ακόμη τρόπο επίλυσης γραμμικού συστήματος.

Μέθοδος αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Για να δούμε ένα παράδειγμα:

$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=5-x \\ 2x-y=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=5-x \\ 2x-(5-x)=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=5-x \\ 2x-5+x=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=5-x \\ 3x=9 \end{cases}$

ή $\begin{cases} y=5-x \\ x=3 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=5-3 \\ x=3 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$

Βρήκαμε λοιπόν τη λύση του συστήματος που είναι το ζεύγος $(x,y)=(3,2)$

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Επιλέγουμε να εμφανίσουμε (όταν δεν υπάρχουν) αντίθετους συντελεστές στον ίδιο άγνωστο και στις δύο εξισώσεις και στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

$\begin{cases} -5x-4y=16 \\ 3x+5y=6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3(-5x)-3\cdot 4y=3\cdot 16 \\ 5\cdot 3x+5\cdot 5y=5\cdot 6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -15x-12y=48 \\ 15x+25y=30 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} -15x-12y=48 \\ 15x+(-15x)+25y+(-12y)=30+48 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -15x-12y=48 \\ 13y=78 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -15x-12y=48 \\ y=6 \end{cases}$

ή $\begin{cases} -15x-12\cdot 6=48 \\ y=6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -15x-72=48 \\ y=6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -15x=120 \\ y=6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=-8 \\ y=6 \end{cases}$

Βρήκαμε λοιπόν τη λύση του συστήματος που είναι το ζεύγος $(x,y)=(-8,6)$

Πρόβλημα 1 – **Σχολική εκδρομή στο Μουσείο της Ακρόπολης**

Σε μια σχολική εκδρομή στο Μουσείο της Ακρόπολης συμμετείχαν συνολικά 40 άτομα (μαθητές και καθηγητές). Το εισιτήριο για κάθε μαθητή κόστιζε 5 ευρώ, ενώ το εισιτήριο για κάθε καθηγητή κόστιζε 8 ευρώ. Αν το συνολικό ποσό που πληρώθηκε για τα εισιτήρια ήταν

212 ευρώ, να βρείτε πόσοι ήταν οι μαθητές και πόσοι οι καθηγητές.

Λύση

Βήμα 1: Ορίζουμε τους αγνώστους. Έστω x ο αριθμός των μαθητών και y ο αριθμός των καθηγητών.

Βήμα 2: Σχηματίζουμε το σύστημα:

1. Από το συνολικό πλήθος των ατόμων έχουμε: $x + y = 40$ (1)
2. Από το συνολικό κόστος των εισιτηρίων έχουμε: $5x + 8y = 212$ (2)

Άρα το σύστημα είναι: $\begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 8y = 212 \end{cases}$

Βήμα 3: Επίλυση (με τη μέθοδο της αντικατάστασης)

$\begin{cases} x = 40 - y \\ 5x + 8y = 212 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = 40 - y \\ 5 \cdot (40 - y) + 8y = 212 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = 40 - y \\ 200 - 5y + 8y = 212 \end{cases}$

ή $\begin{cases} x = 40 - y \\ 3y = 212 - 200 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = 40 - y \\ 3y = 12 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = 40 - y \\ y = 4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = 40 - 4 \\ y = 4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = 36 \\ y = 4 \end{cases}$

ή $(x, y) = (36, 4)$

***Απάντηση*:** Στην εκδρομή συμμετείχαν 36 μαθητές και 4 καθηγητές.

Πρόβλημα 2- Ποδήλατα και πατίνια

Σε ένα κατάστημα πώλησης ηλεκτρικών ποδηλάτων και πατινιών, υπάρχουν συνολικά 24 οχήματα. Αν τριπλασιάσουμε τον αριθμό των ποδηλάτων και μειώσουμε τον αριθμό των πατινιών κατά 4, τότε ο αριθμός των ποδηλάτων θα είναι διπλάσιος από τον αριθμό των πατινιών που θα έχουν απομείνει. Να βρεθεί πόσα ποδήλατα και πόσα πατίνια έχει το κατάστημα.

Λύση

Έστω x ο αριθμός των ποδηλάτων και y ο αριθμός των πατινιών.

Από την πρώτη πληροφορία (συνολικά 24 οχήματα) θα έχουμε την εξίσωση: $x + y = 24$ (1)

Από τη δεύτερη πληροφορία θα έχουμε την εξίσωση: $3x = 2(y - 4)$ (2)Το σύστημα είναι:

$\begin{cases} x + y = 24 \\ 3x = 2 \cdot (y - 4) \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 24 - x \\ 3x = 2 \cdot (y - 4) \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 24 - x \\ 3x = 2 \cdot (24 - x - 4) \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 24 - x \\ 3x = 2 \cdot (20 - x) \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 24 - x \\ 3x = 40 - 2x \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 24 - x \\ 5x = 40 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 24 - x \\ x = 8 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 24 - 8 \\ x = 8 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 16 \\ x = 8 \end{cases}$ ή $(x, y) =$ $(8,16)$.

Απάντηση: Το κατάστημα έχει 8 ποδήλατα και 16 πατίνια.

Πρόβλημα 3- Μεταβολές στις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 μέτρα και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 3 μέτρα, το εμβαδόν του μειώνεται κατά 16 τετραγωνικά μέτρα. Αν όμως ελαττώσουμε το μήκος του κατά 1 μέτρο και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 4 μέτρα, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 15 τετραγωνικά μέτρα. Να βρείτε τις αρχικές διαστάσεις (μήκος x και πλάτος y) του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Λύση

Το αρχικό εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $E = x \cdot y$.

Μετά την 1η μεταβολή των πλευρών του οι νέες διαστάσεις θα είναι $(x + 2)$ και $(y - 3)$ το μήκος και το πλάτος αντίστοιχα. Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου θα είναι ίσο με: $(x + 2)(y - 3)$ και θα ισχύει η σχέση:

$$(x+2)(y-3) = xy - 16 \text{ ή } xy-3x+2y-6 = xy-16 \text{ ή } -3x+2y = -10 \quad \textbf{(1).}$$

Μετά τη 2η μεταβολή των πλευρών του, οι νέες διαστάσεις θα είναι $(x-1)$ και $(y+4)$ το μήκος και το πλάτος αντίστοιχα. Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου θα είναι ίσο με: $(x-1)(y+4)$ και θα ισχύει η σχέση:

$$(x-1)(y+4) = xy+15 \text{ ή } xy+4x-y-4 = xy+15 \text{ ή } 4x-y = 19 \quad \textbf{(2)}$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) δίνουν το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases}-3x+2y = -10\\ 4x-y = 19\end{cases}$.

Θα λύσουμε με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών.

$$\begin{cases}-3x+2y = -10\\ 4x-y = 19\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-3x+2y = -10\\ 2\cdot 4x-2\cdot y = 2\cdot 19\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-3x+2y = -10\\ 8x-2y = 38\end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases}-3x+2y = -10\\ 8x-3x-2y+2y = 38-10\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-3x+2y = -10\\ 5x = 28\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-3x+2y = -10\\ x = 5{,}6\end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases}-3\cdot 5{,}6+2y = -10\\ x = 5{,}6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-16{,}8+2y = -10\\ x = 5{,}6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2y = -10+16{,}8\\ x = 5{,}6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2y = 6{,}8\\ x = 5{,}6\end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases}y = 3{,}4\\ x = 5{,}6\end{cases}.$$

Οι αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου θα είναι 5,6 μέτρα το μήκος του και 3,4 μέτρα το πλάτος του.

Για εξάσκηση- Η τοξωτή γέφυρα

1. Να λύσετε τα συστήματα:

(Σ1): $\begin{cases}2x+y=3\\ 4x+2y=1\end{cases}$ (Σ2): $\begin{cases}x-3y=2\\ 2x-6y=4\end{cases}$ (Σ3): $\begin{cases}x-3y=2\\ 4x+2y=1\end{cases}$ (Σ4): $\begin{cases}2x=5y+1\\ 24-7x=3y\end{cases}$

Απ.: *(Σ1): αδύνατο, (Σ2): αόριστο, (Σ3):* $(x,y) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, *(Σ4):* $(x,y) = (3,1)$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

(Σ1): $\begin{cases}\frac{x-1}{2}+\frac{y-2}{4}=1\\ \frac{x-3}{3}-\frac{y+2}{2}=-2\end{cases}$ και (Σ2): $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y+1}{3}=\frac{3}{2}\\ \frac{x-1}{3}-\frac{y}{2}=\frac{9}{2}\end{cases}$

Απ.: *(Σ1):* $(x,y) = (3,2)$, *(Σ2):* $(x,y) = (-5,-13)$

3. Η Ελένη και η Σωτηρία έχουν μαζί 195 ευρώ. Η Σωτηρία έχει τα διπλάσια χρήματα από αυτά που έχει η Ελένη. Πόσα χρήματα έχει η καθεμία;

Απ.: *Ελένη 65 ευρώ, Σωτηρία 130 ευρώ*

4. Σε μια μελέτη για την κατασκευή μιας τοξωτής γέφυρας, οι μηχανικοί χρησιμοποιούν δύο ευθύγραμμες δοκούς υποστήριξης οι οποίες τέμνονται σε ένα σημείο K. Η πρώτη δοκός βρίσκεται πάνω στην ευθεία $2x-y=4$. Η δεύτερη δοκός διέρχεται από τα σημεία $A(0,10)$ και $B(5,0)$.

Α. Να βρεθεί εξίσωση της δεύτερης δοκού.

Β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου K.

Γ. Αν $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OBK.

Απ.: *Α.* $y = -2x+10$ *ή* $2x+y=10$, *Β.* $K(3{,}5\,,3)$, *Γ.* $E=7{,}5$

Γ΄ Τάξη Μοτίβα ριζών σε οικογένειες πολυωνυμικών εξισώσεων

Επιμέλεια: Ειρήνη Κοτσακιλάφη

Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις αποτελούν θεμέλιο λίθο της άλγεβρας. Η συνήθης προσέγγιση για την επίλυσή τους είναι η χρήση του τύπου της διακρίνουσας. Ωστόσο, όταν οι εξισώσεις εμφανίζονται σε ακολουθίες, κρύβουν μέσα τους μοτίβα που μας επιτρέπουν να βρίσκουμε τις ρίζες τους με απλή παρατήρηση και λογική σκέψη. Η σύνδεση αυτή μεταξύ ακολουθιών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων δεν είναι μόνο ένα διασκεδαστικό παιχνίδι, αλλά και ένα ισχυρό εργαλείο για την κατανόηση της δομής των μαθηματικών. Σε αυτήν την περίπτωση οι ρίζες κάθε εξίσωσης αποκαλύπτουν μια σχέση: η μία παραμένει σταθερή, ενώ η άλλη μεταβάλλεται γραμμικά. Έτσι, μπορούμε να προβλέψουμε τις ρίζες οποιασδήποτε εξίσωσης της ακολουθίας χωρίς κανέναν υπολογισμό! Αντίστοιχα, αν οι ρίζες είναι διαδοχικοί ακέραιοι, τότε οι συντελεστές ακολουθούν μια απλή αριθμητική πρόοδο.
Η διερεύνηση τέτοιων μοτίβων καλλιεργεί τη μαθηματική διαίσθηση και σας προετοιμάζει για πιο προχωρημένες έννοιες, όπως οι αριθμητικές και γεωμετρικές πρόοδοι, αλλά και η έννοια της συνάρτησης. Επιπλέον, η ικανότητα αναγνώρισης μοτίβων είναι χρήσιμη σε πολλά πεδία, από τη φυσική μέχρι την πληροφορική.
Στις παρακάτω ασκήσεις, σας προσκαλούμε να εξερευνήσετε μερικές τέτοιες ακολουθίες.

Άσκηση 1

Δίνεται η ακολουθία εξισώσεων:

$$\boldsymbol{x^2 - 5x + 4 = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 - 6x + 8 = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 - 7x + 12 = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 - 8x + 16 = 0}$$
$$\dots$$

Ερωτήσεις
α) Να λύσετε τις τρεις πρώτες εξισώσεις.
β) Να παρατηρήσετε τι σχέση έχουν οι ρίζες μεταξύ τους .
γ) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $\boldsymbol{x^2 - 15x + 44 = 0}$, χωρίς να χρησιμοποιήσετε διακρίνουσα.
δ) Να γράψετε τον γενικό τύπο της εξίσωσης της ακολουθίας.

Λύση :

α) Για την πρώτη εξίσωση έχουμε : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$,άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες τις $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 3}{2}$.Άρα $\chi_1 = 4$ και $\chi_2 = 1$.

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$,άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες τις $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6 \pm 2}{2}$.Άρα $\chi_1 = 4$ και $\chi_2 = 2$.

Για την τρίτη εξίσωση έχουμε : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0$,άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες τις $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm 1}{2}$.Άρα $\chi_1 = 4$ και $\chi_2 = 3$.

β) Παρατηρούμε ότι η μια ρίζα είναι πάντα το 4 και η δεύτερη ρίζα της εξίσωσης αυξάνεται κατά 1 μονάδα κάθε φορά. Επίσης ,βλέπουμε ότι στην πρώτη εξίσωση οι ρίζες είναι 4 +1=5 και 4·1=4. Αντίστοιχα στην δεύτερη έχουμε 4+2=6 και 4· 2=8 και στην τρίτη 4+3=7 και 4·3=12.

γ) Ακολουθώντας την παρατήρηση που κάναμε πάνω και επειδή η $\chi_1 = 4$ η άλλη λύση της εξίσωσης θα είναι 4+χ_2=15,άρα $\chi_2 = 11$.Το επαληθεύουμε γιατί 4·11=44.

δ) Ο γενικός τύπος της ακολουθίας λοιπόν είναι $x^2 - (4+\alpha)x + 4\alpha = 0$ για α≥1.

Άσκηση 2

Δίνεται η οικογένεια εξισώσεων:

$$\boldsymbol{2x^2 - (n+2)x + n = 0, n \in \mathbb{N}}$$

α) Να λύσετε τις εξισώσεις για $n = 1, 2, 3$.
β) Να διατυπώσετε μια εικασία για τις ρίζες.
γ) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες είναι: $x_1 = 1, x_2 = \frac{n}{2}$,με τη χρήση της παραγοντοποίησης.
δ) Μπορείτε να προβλέψετε τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 102x + 100 = 0$

Λύση :

α) Για n=1 έχουμε $2x^2 - 3x + 1 = 0$,η οποία έχει $\Delta=\beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$,άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες τις $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{4}$.Άρα $\chi_1 = 1$και $\chi_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Για n=2 έχουμε $2x^2 - 4x + 2 = 0$,η οποία βρίσκουμε ότι έχει ρίζες $\chi_{1,2} = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{4}{4}$=1 (διπλή ρίζα).
Για n=3 αντίστοιχα έχουμε $2x^2 - 5x + 3 = 0$,οι ρίζες είναι $\chi_1 = 1$και $\chi_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

β) Παρατηρούμε ότι σε κάθε εξίσωση η μια λύση είναι ο αριθμός 1 και η άλλη λύση είναι το $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots \dots . \frac{n}{2}$.

γ) Η $2x^2 - (n+2)x + n = 0$ θα γραφεί ισοδύναμα $2x^2 - nx - 2x + n = 0$.Θα κάνω παραγοντοποίηση κατά ομάδες, επομένως:

$2x(x-1) - n(x-1) = 0$

$(x-1)(2x-n) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $2x - n = 0$

$x = 0$ ή $x = \frac{n}{2}$

δ) Η εξίσωση $2x^2 - 102x + 100 = 0$ γράφεται $2x^2 - (100+2)x + 100 = 0$,άρα το n=100 και οι λύσεις θα είναι $\chi_1 = 1$και $\chi_2 = \frac{100}{2} = 50$.

Άσκηση 3

Δίνεται η παρακάτω ακολουθία εξισώσεων:

$$\boldsymbol{x^3 - 4x^2 + 4x = 0}$$
$$\boldsymbol{x^3 - 5x^2 + 6x = 0}$$
$$\boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 8x = 0}$$
$$\boldsymbol{x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \dots}$$

α. Να λύσετε τις τρεις πρώτες εξισώσεις της ακολουθίας .
β. Να κάνετε μια εικασία για τις λύσεις που βρήκατε και να προτείνετε τις λύσεις των εξισώσεων:
i) $x^3 - 8x^2 + 12x = 0$
ii) $x^3 - 20x^2 + 38x = 0$
iii) $x^3 - 101x^2 + 198x = 0$

γ. Να κατασκευάσετε μία νέα εξίσωση της ίδιας μορφής και να τη λύσετε.
δ. Να δείξετε ότι όλες οι εξισώσεις της ακολουθίας γράφονται στη μορφή : $\boldsymbol{x^3-(k+2)x^2+2kx=0, k>1}$ **και να αποδείξετε ποιες είναι οι ρίζες της.**

Λύση:

α. Για την 1η εξίσωση: $x^3-4x^2+4x=0$. Παραγοντοποιούμε: $x(x^2-4x+4)=0$
$x=0$ *ή* $x^2-4x+4=0$
$x=0$ ή $(x-2)^2=0$
$x=0$ ή $x=2$ *(διπλή ρίζα)*
Τελικά οι λύσεις είναι 0,2,2.
Για την 2η εξίσωση : $x^3-5x^2+6x=0$. Βγάζουμε κοινό παράγοντα x: $x(x^2-5x+6)=0$
Άρα: $x=0$ ή $x^2-5x+6=0$
Οι λύσεις της εξίσωσης είναι το 2 και το 3 (επαληθεύστε λύνοντάς τη).Τελικά λοιπόν οι λύσεις είναι 0,2,3.
Για την 3η εξίσωση : $x^3-6x^2+8x=0$.Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x : $x(x^2-6x+8)=0$
Άρα : $x=0$ ή $x^2-6x+8=0$
Οι λύσεις της εξίσωσης είναι το 2 και το 4(επαληθεύστε λύνοντάς τη).Τελικά λοιπόν οι λύσεις είναι 0,2,4.

β. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση οι λύσεις είναι οι αριθμοί τα 0,2 και ακόμη ένας αριθμός που αυξάνεται κατά 1 σε κάθε εξίσωση. Επιπλέον, στην δεύτερη εξίσωση με ρίζες το 2 και το 3 βλέπουμε ότι το άθροισμα των δύο αυτών ριζών 2+3=5 και το γινόμενο τους 2·3=6 ,που είναι οι συντελεστές β και γ της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.Χρησιμοποιώντας αυτές τις διαπιστώσεις προβλέπουμε ότι η i) $x^3-8x^2+12x=0$ θα έχει ρίζες τις 0,2 και 6.Αντίστοιχα η $x^3-20x^2+38x=0$,θα έχει ρίζες τις 0,2 και το 19.Τέλος ,η iii) $x^3-101x^2+198x=0$ έχει ρίζες τις 0,2 και το 99.

γ. Κατασκευάζουμε την εξίσωση $x^3-1002x^2+2000x=0$. Βγάζουμε κοινό παράγοντα x: $x(x^2-1002x+2000)=0$.Ξέρουμε ότι μια ρίζα θα είναι το 0 και η άλλη το 2,παρατηρώντας το 1002 και το 2000,βλέπουμε ότι 2000:2=1000 και 1002=1000+2,επομένως η ρίζα είναι το 1000.
δ. Δίνεται: $x^3-(k+2)x^2+2kx=0$ Βγάζουμε κοινό παράγοντα:
$x(x^2-(k+2)x+2k)=0$.
Στη συνέχεια έχουμε:

$x(x^2-kx-2x+2k)=0$.
$x[x(x-k)-2(x-k)]=0$
$x(x-k)(x-2)=0$
$x=0$ ή $x=k$ ή $\chi=2$

Άρα οι λύσεις είναι 0,2 και κ με κ>1

ΚΑΙ ΜΕ ΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ;

Για να δούμε και άλλη μια εφαρμογή των ακολουθιών…..

Άσκηση

Δίνεται η ακολουθία παραστάσεων:
$\boldsymbol{C_1=(2+1)^2+4(2+1)+4}$
$\boldsymbol{C_2=(3+1)^2+4(3+1)+4}$
$\boldsymbol{C_3=(4+1)^2+4(4+1)+4}$
…

α.Να υπολογίσετε τις τιμές των $\boldsymbol{C_1, C_2, C_3}$.
β. Να γράψετε την επόμενη παράσταση και την $\boldsymbol{C_{100}}$.
γ. Να βρείτε έναν γενικό τύπο $\boldsymbol{C_\nu}$**, για κάθε** $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}^*}$ **και να τον αποδείξετε.**

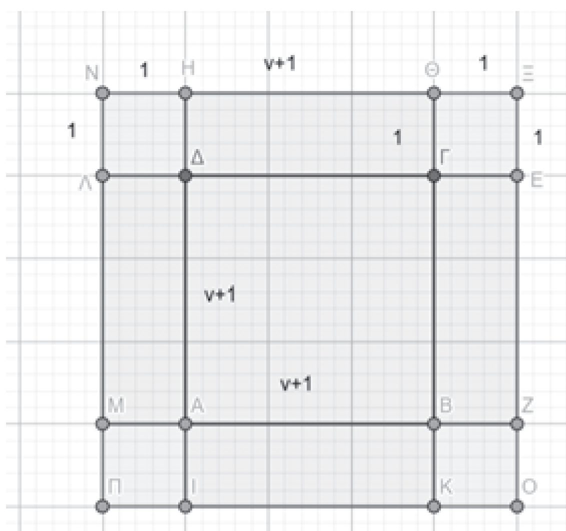
δ. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\nu+1)^2+4(\nu+1)+4$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.
ε. Χωρίς πράξεις μεγάλων αριθμών να υπολογίσετε: $C_{500}=(501)^2+4\cdot 501+4$
στ. Χρησιμοποιώντας την γεωμετρική ερμηνεία στο δ ερώτημα, να υπολογίσετε το εμβαδόν που προκύπτει όταν σε ένα τετράγωνο πλευράς 50cm προεκτείνουμε 2 cm όλες τις πλευρές του.

Λύση

α. Κάνουμε τις πράξεις , $C_1=3^2+4\cdot 3+4=9+12+4=25$ και $C_2=4^2+4\cdot 4+4=16+16+4=36$ και τέλος $C_3=5^2+4\cdot 5+4=25+20+4=49$
β. Παρατηρούμε ότι αυξάνεται κατά 1 μονάδα το πρώτο νούμερο σε κάθε παρένθεση και τα υπόλοιπα μένουν σταθερά. Η επόμενη παράσταση θα είναι $C_4=(\mathbf{5}+1)^2+4(\mathbf{5}+1)+4$ και η $C_{100}=(\mathbf{101}+1)^2+4(\mathbf{101}+1)+4$.
γ. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα ο γενικός τύπος θα είναι $C_\nu=(\nu+1)^2+4(\nu+1)+4$
δ. Η παράσταση $(\nu+1)^2+4(\nu+1)+4$ είναι μία ταυτότητα και παραγοντοποιείται ως εξής : $(\nu+1)^2+4(\nu+1)+4=(\nu+1)^2+2\cdot 2\cdot(\nu+1)+2^2=(\nu+1+2)^2=(\nu+3)^2$
Γεωμετρική ερμηνεία:

- $(\nu+1)^2$: εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\nu+1$.
- $4(\nu+1)$: τέσσερα ορθογώνια γύρω από το τετράγωνο, καθένα με πλευρές 1 και $\nu+1$.
- 4: τέσσερα μικρά τετραγωνάκια 1×1στις γωνίες.

Συνολικά, αυτά σχηματίζουν ένα μεγαλύτερο τετράγωνο πλευράς $\nu+3$. Δηλαδή, το νέο σχήμα είναι τετράγωνο με πλευρά αυξημένη κατά 2.



ε. Ο τύπος βασίζεται στον γενικό τύπο της ακολουθίας με ν=500 άρα θα γραφεί με βάση την παραγοντοποίηση στο δ ερώτημα ως εξής : $C_{500}=(501)^2+4\cdot 501+4=(500+1)^2+4(500+1)+4=(500+3)^2=503^2=253.009$
στ. Το τετράγωνο είναι πλευράς 50 cm ,άρα ν+1=50 και ν=49.Τα ορθογώνια έχουν πλευρές 2 και 50 και τα τετράγωνα έχουν πλευρά 2cm το καθένα.

Επομένως:

- 50^2=2500: εμβαδόν τετραγώνου πλευράς .
- $4\cdot 2\cdot 50=400$: τέσσερα ορθογώνια γύρω από το τετράγωνο, καθένα με πλευρές 2 και 50.
- $4\cdot 2^2=16$: τέσσερα μικρά τετραγωνάκια 2×2 στις γωνίες.

Το συνολικό εμβαδόν είναι 2500+400+16=2916=54^2 ,όπου 54 είναι η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου που σχηματίζεται.

Ασκήσεις για επανάληψη

Θανάσης Χριστόπουλος

Άσκηση 1η : Αν το –1 είναι λύση της εξίσωσης: $y^2+\kappa y+5=0$ και η εξίσωση: $x^2+\kappa x-\lambda=0$ έχει διπλή λύση, να βρείτε την τιμή του κ και του λ.

Λύση: το –1 είναι λύση της εξίσωσης $y^2+\kappa y+5=0$, επομένως αληθεύει αν θέσουμε y=–1, οπότε $(-1)^2+(-1)\kappa+5=0$ ή $1-\kappa+5=0$ τελικά κ= 6. Αφού κ=6 η δεύτερη εξίσωση γίνεται $x^2+6x-\lambda=0$ και για να έχει διπλή λύση πρέπει Δ=0 ή $6^2-4\cdot1\cdot(-\lambda)=0$ ή $36+4\lambda=0$

Και τελικά λ=–9

Άσκηση 2η :Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί:

$$A=\frac{x^2+x-6}{x(x-1)(x+1)} \text{ και } B=\frac{x^3-x}{(x-2)(x+3)}$$

είναι αντίστροφοι.

Λύση: Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, αν έχουν γινόμενο ίσο με 1. Επομένως

$$A\cdot B=\frac{x^2+x-6}{x(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x^3-x}{(x-2)(x+3)}$$

Αλλά $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ (παραγοντοποίηση τριωνύμου)

και $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$ οπότε

$$A\cdot B=\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \text{ ή } A\cdot B=1$$

Άσκηση 3η: Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $A=\left(\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right)^2$

ii) $B=\left[(x^2+1)^5\cdot5^{25}\right]^0+\left[-(-2)^3\right]^2-12^5:6^5$

iii) $\Gamma=5\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{50}+\sqrt{75}}$

Λύση: $A=\left(\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right)^2$

$$A=\left(\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right)^2+2\sqrt{11-6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}$$

$$A=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}+2\sqrt{\left(11-6\sqrt{2}\right)\cdot\left(11+6\sqrt{2}\right)}$$

$A=22+2\sqrt{(121-36\cdot2)}$ ή $A=22+2\sqrt{49}$ και τελικά A=36.

$B=\left[(x^2+1)^5\cdot5^{25}\right]^0+\left[-(-2)^3\right]^2-12^5:6^5$

$B=1+64-(12:6)^5$ ή

$B=1+64-2^5=1+64-32=33$ τελικά Β=33.

$$\Gamma=5\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{50}+\sqrt{75}}=5\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{\sqrt{25\cdot2}+\sqrt{25\cdot3}}$$

$$\Gamma=5\frac{\sqrt{18}+3\sqrt{3}}{5\sqrt{2}+5\sqrt{3}}=5\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5\sqrt{2}+5\sqrt{3}}=5\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=3.$$

Άσκηση 4η

Να υπολογίσετε πόσα μηδενικά έχει ο αριθμός που προκύπτει από την αριθμητική παράσταση: $\Pi=9\cdot4^5\cdot5^{12}+3\cdot2^{10}\cdot5^{12}$

Λύση: $\Pi=3^2\cdot(2^2)^5\cdot5^{12}+3\cdot2^{10}\cdot5^{12}$

$\Pi=3^2\cdot2^{10}\cdot5^{12}+3\cdot2^{10}\cdot5^{12}$ ή $\Pi=3\cdot2^{10}\cdot5^{12}(3+1)$

$\Pi=3\cdot2^{10}\cdot5^{12}\cdot4$ ή $\Pi=3\cdot2^{10}\cdot5^{12}\cdot2^2$

$\Pi=3\cdot2^{12}\cdot5^{12}$ ή $\Pi=3\cdot(2\cdot5)^{12}$ και τελικά

$\Pi=3\cdot10^{12}$ (ο αριθμός 3 ακολουθούμενος από 12 μηδενικά).

Άσκηση 5η

Σε ένα ορθογώνιο με εμβαδόν 20m², αυξάνουμε το μήκος κατά 5m και μειώνουμε το πλάτος κατά 2m. Αν το εμβαδόν δεν άλλαξε, να βρείτε τις αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση: Έστω x το μήκος και y το πλάτος του ορθογωνίου, θα είναι $E=x\cdot y=20m^2$.

Οι νέες διαστάσεις του ορθογωνίου θα είναι x+5 m και y–2 m.Αφού Ε(νέο)=Ε(παλιό) θα είναι $(x+5)\cdot(y-2)=x\cdot y$ οπότε $xy-2x+5y-10=xy$

επομένως $5y=2x+10$ ή $y=\frac{2x+10}{5}$

Αφού $x\cdot y=20$ θα είναι $x\cdot\frac{2x+10}{5}=20$ ή

$x(2x+10)=100$

$2x^2+10x=100$ ή $x^2+5x-50=0$

$\Delta=5^2-4\cdot1\cdot(-50)=25+200=225>0$

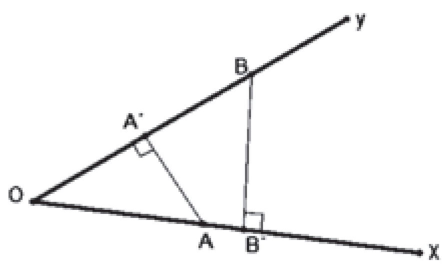
Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{225}}{2} = \dfrac{-5 \pm 15}{2}$ οπότε x=–10 (απορ.)

ή x=5 και τελικά x=5m και y=$\dfrac{20}{5}$=4m.

Άσκηση 6η : Δίνεται η μη ορθή γωνία $x\hat{O}y$.
Από σημείο Α της πλευράς Ox, με ΟΑ=8cm φέρουμε κάθετη ΑΑ΄στην Oy και από σημείο Β της πλευράς Oy, με ΟΒ=12cm φέρουμε κάθετη ΒΒ΄στην Ox.
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΑ΄ και ΟΒΒ΄ είναι όμοια
β) Ποιός είναι ο λόγος των εμβαδών τους;

Λύση: α) Τα τρίγωνα ΟΑΑ΄ και ΟΒΒ΄ είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία $x\hat{O}y$ κοινή, άρα είναι όμοια.



β) Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Ο λόγος ομοιότητας στα παραπάνω τρίγωνα, είναι ίσος με το λόγο των πλευρών ΟΑ και ΟΒ αφού είναι αντίστοιχα οι υποτείνουσες τους.

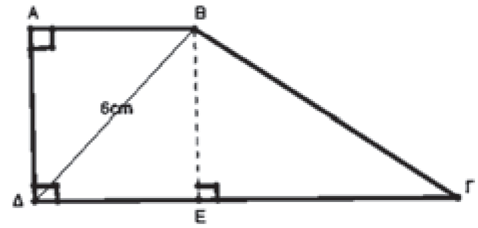
Άρα $\dfrac{(OAA')}{(OBB')} = \left(\dfrac{8}{12}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

Άσκηση 7η

Στο παρακάτω τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ) είναι: $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$, ΒΔ=6cm, ΓΔ=3·ΑΒ, $B\hat{\Delta}\Gamma = 60^0$. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του τραπεζίου.

Λύση: α) Είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Delta$ ως εντός εναλλάξ (ΑΒ//ΓΔ και τέμνονται από την ΒΔ) άρα $A\hat{B}\Delta = 60^0$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\sigma\upsilon\nu 60^0 = \dfrac{AB}{B\Delta}$ οπότε $\dfrac{1}{2} = \dfrac{AB}{6}$ άρα ΑΒ=3 και επομένως ΓΔ=3ΑΒ=3·3 ή ΓΔ=9. Επίσης, $\eta\mu 60^0 = \dfrac{A\Delta}{B\Delta}$ ή $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{A\Delta}{6}$ άρα ΑΔ=$3\sqrt{3}$.



Για να υπολογίσουμε την πλευρά ΒΓ ένας τρόπος είναι να εφαρμόσουμε Νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΓΔ

$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2 \cdot B\Delta \cdot \Delta\Gamma \sigma\upsilon\nu 60^0$

$B\Gamma^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}$ ή $B\Gamma^2 = 36+81-54$ άρα

$B\Gamma^2 = 63$ οπότε $B\Gamma = 3\sqrt{7}$

2ος τρόπος υπολογισμού της ΒΓ:

Από το Β φέρουμε ΒΕ, κάθετη στη ΓΔ, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ, έχουμε ΒΕ=ΑΔ=$3\sqrt{3}$, ΕΓ=ΔΓ–ΔΕ=9–3=6 με χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε: $B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 27+36 = 63$, οπότε $B\Gamma = 3\sqrt{7}$.

Περίμετρος $=3+9+3\sqrt{3}+3\sqrt{7}=12+3\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,cm$

Εμβαδόν τραπεζίου, $E = \dfrac{(B+\beta)\cdot \upsilon}{2}$

$E = \dfrac{(9+3)\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ οπότε $E = 18\sqrt{3}cm^2$.

Άσκηση 8η

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$
α) Να βρείτε το πολυώνυμο: $P(x-3)$
β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x+1) = P(x-1)$
γ) Υπολογίστε την τιμή $P(P(1)) + 2P(2)$

Λύση: α) $P(x-3) = (x-3)^3 - 2(x-3)^2 + 1 =$

$x^3 - 3x^2 3 + 3x 3^2 - 3^3 - 2(x^2 - 6x + 9) + 1 =$

$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - 2x^2 + 12x - 18 + 1 =$

$x^3 - 11x^2 + 39x - 44$.

β) $P(x+1) = P(x-1)$ ή

$P(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2(x^2 + 2x + 1) + 1$

$P(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - 4x - 2 + 1$

$P(x+1) = x^3 + x^2 - x$

$P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2(x^2 - 2x + 1) + 1$

$P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 4x - 2 + 1 =$

$= x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

$P(x-1) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$. Επομένως προκύπτει η εξίσωση: $x^3 + x^2 - x = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ ή $6x^2 - 8x + 2 = 0$ ή $3x^2 - 4x + 1 = 0$ με Δ=4 από την οποία παίρνουμε λύσεις, x=1 και $x=\frac{1}{3}$

γ) $P(P(1)) + 2P(2)$

$P(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 = 0$ άρα $P(P(1)) = P(0) = 1$

$P(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 + 1 = 8-8+1 = 1$.

Τελικά $P(P(1)) + 2P(2) = 1+2\cdot 1 = 3$.

Άσκηση 9η: Αν στο ΑΒΓ αμβλυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ=ΑΓ), η πλευρά ΑΒ και το συνημίτονο της γωνίας Α, είναι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 15x - 8 = 0$

α) Να υπολογίσετε η γωνία Α

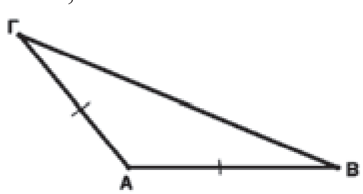
β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ

Λύση: α) Η εξίσωση $2x^2 - 15x - 8 = 0$, α=2, β=–15, γ=–8, έχει $\Delta=(-15)^2-4\cdot 2\cdot(-8)=225+64=289>0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$x = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{15 \pm 17}{4}$ οπότε $x=\frac{15+17}{4}=8$

ή $x=\frac{15-17}{4} = -\frac{1}{2}$, οπότε συνΑ$=-\frac{1}{2}$ και επομένως $A=120^0$, ενώ ΑΒ=8.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι ΑΒ=ΑΓ=8 και το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας, συνΑ$=-\frac{1}{2}$ επομένως θα εφαρμόσουμε Νόμο συνημιτόνων για να υπολογίσουμε την Τρίτη πλευρά. $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ$συνΑ

$ΒΓ^2=8^2+8^2-2\cdot 8\cdot 8\left(-\frac{1}{2}\right)$

$ΒΓ^2=128+64=192$ άρα $ΒΓ = \sqrt{192} = \sqrt{64\cdot 3} = 8\sqrt{3}$

Άσκηση 10η

Αν $-3<α<5$ και $2<β<4$

i) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο αριθμός $2\cdot α-3β-5$

ii) Να δείξετε ότι $αβ^2-4αβ<12β-3β^2$

Λύση: i) $-3<α<5 (2>0)$ οπότε $-6<2α<10$, επίσης $2<β<4 (-3<0)$ οπότε $-6>-3β>-12$ ή $-12<-3β<-6$. Προσθέτουμε κατά μέλη

$-6<2α<10$

$-12<-3β<-6$

$-18<2α-3β<4$ +(–5) άρα $-23<2α-3β-5<-1$

ii) $αβ^2-4αβ<12β-3β^2$ ή $αβ^2-4αβ+3β^2-12β<0$ χωρίζουμε σε δύο ομάδες και παραγοντοποιούμε $αβ(β-4)+3β(β-4)=(αβ+3β(β-4)=$
$=β(α+3)(β-4)$ αλλά $β>2$ άρα $β>0$, επίσης $α>-3$ άρα $α+3>0$ και $β<4$ άρα $β-4<0$ Επομένως $β(α+3)(β-4)<0$

Άσκηση 11η

Δίνονται οι ευθείες με τύπο y=2x–1 και y= −x+2.

α) Να βρείτε το σημείο που τέμνονται.

α) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών που παριστάνουν.

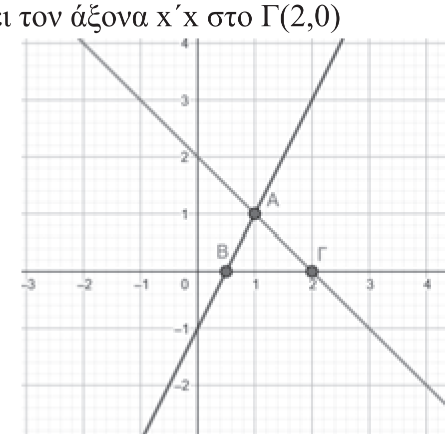
β) Αν Α το σημείο που τέμνονται και Β, Γ τα σημεία που τέμνουν τον άξονα χ΄χ

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Λύση: α) τα πρώτα μέλη είναι ίσα, άρα και τα δεύτερα δηλαδή 2x–1 = −x+2 ή 2x+x = 1+2 ή 3x=3 οπότε x=1, Με αντικατάσταση στην πρώτη έχουμε y=1, άρα Α(1,1)

β) Οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες, οπότε θα χρειαστούμε 2 σημεία για κάθε ευθεία. Αφού το Α είναι κοινό σημείο απομένει ένα μόνο σημείο για κάθε μία. Θα βρούμε που τέμνουν τον άξονα x΄x, αυτό το βρίσκουμε αν θέσουμε όπου y=0.

Για την πρώτη, για y=0 έχουμε 0=2x−1, άρα $x=\frac{1}{2}$ οπότε τέμνει τον άξονα x΄x στο $Β(\frac{1}{2}, 0)$ και για τη δεύτερη, για y=0 έχουμε x=2, άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο Γ(2,0)



γ) Για το εμβαδόν του τριγώνου έχουμε: ΒΓ= $\text{ΒΓ} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ενώ το ύψος είναι όσο η τεταγμένη(y) του σημείου Α, δηλαδή 1. Άρα $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$

Άσκηση 12η: Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{2x+1} - \frac{x+1}{x-3} = \frac{2(1-5x)}{2x^2-5x-3}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι :

$(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$

Οπότε $\frac{x}{2x+1} - \frac{x+1}{x-3} = \frac{2(1-5x)}{(2x+1)(x-3)}$ και

ΕΚΠ= $(2x+1)(x-3) \neq 0$ (άρα $x \neq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 3$)

Με απαλοιφή των παρονομαστών έχουμε

$(x-3)x - (2x+1)(x+1) = 2(1-5x)$ ή

$x^2 - 3x - (2x^2 + 2x + x + 1) = 2 - 10x$ ή

$x^2 - 3x - 2x^2 - 2x - x - 1 - 2 + 10x = 0$ τελικά

$-x^2 + 4x - 3 = 0$, α=−1, β=4, γ=−3

έχει $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 16 - 12 = 4 > 0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

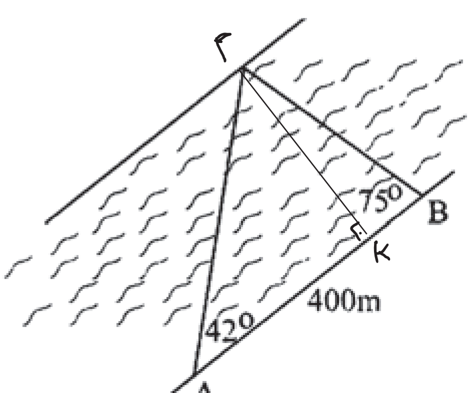
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$ ή $x = \frac{-4+2}{-2} = 1$ (δεκτή)

ή $x = \frac{-4-2}{-1} = 6$ (δεκτή)

Άσκηση 13η

Στο παρακάτω σχήμα, ποιο είναι το πλάτος του ποταμού

Λύση: Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $42^0 + 75^0 + \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = 180^0$. Οπότε $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = 63^0$ και από νόμο ημιτόνων βρίσκουμε την πλευρά ΑΓ.



$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ημΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ημΒ}}$ ή $\frac{400}{\text{ημ}63^0} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ημ}75^0}$ ή

$\text{ΑΓ} = \frac{400 \cdot \text{ημ}75^0}{\text{ημ}63^0} = \frac{400 \cdot 0,966}{0,891} = 433,67$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ, είναι

$\text{ημ}42^0 = \frac{\text{ΓΚ}}{\text{ΑΓ}}$ ή $0,669 = \frac{\text{ΓΚ}}{433,67}$ άρα

$\text{ΓΚ} = 0,669 \cdot 433,67 = 290,13$ τελικά το πλάτος του ποταμού είναι 290,13 m.

> Ο νόμος των ημιτόνων είναι μια θεμελιώδης τριγωνομετρική σχέση που συνδέει τα μήκη των πλευρών οποιουδήποτε τριγώνου με τα ημίτονα των αντίστοιχων απέναντι γωνιών του: α/ημΑ=β/ημΒ=γ/ημΓ=2R. Όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Άσκηση 14η: Αν συνω=2ημω−1 και $0^0 < ω < 90^0$.
α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω και
β) να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5ημω + 10συνω}{3εφω - 2}$$

Λύση: α) Στο θεμελιώδη τύπο $ημ^2x + συν^2x = 1$ αντικαθιστούμε το συνω με το 2ημω–1 και προκύπτει: $ημ^2ω + (2ημω - 1)^2 = 1$

ή $ημ^2ω + (4ημ^2ω - 4ημω + 1) = 1$

ή $5ημ^2ω - 4ημω = 0$

οπότε $ημω \cdot (5ημω - 4) = 0$

άρα ημω=0(απορρίπτεται αφού $0^0 < ω < 90^0$)

ή $ημω = \frac{4}{5}$ (δεκτή)

Επομένως $συνω = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$ και

$εφω = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

β) $A = \frac{5ημω + 10συνω}{3εφω - 2}$

$A = \frac{5 \cdot \frac{4}{5} + 10 \cdot \frac{3}{5}}{3 \cdot \frac{4}{3} - 2} = \frac{4+6}{2} = 5$

Υποδειγματικά Διαγωνίσματα

Γιώργος Λυμπερόπουλος

Για τις μαθήτριες και τους μαθητές του Γυμνασίου, δίνουμε υποδειγματικά από ένα διαγώνισμα για κάθε τάξη, που είναι σύμφωνο με τις εγκύκλιες διατάξεις του Υπουργείου παιδείας. Στο διαγώνισμα των προαγωγικών και απολυτηρίων εξετάσεων του Ιουνίου, στο μάθημα των μαθηματικών, θα δοθούν 2 θέματα θεωρίας και 3 ασκήσεις. Πρέπει να απαντήσετε στο 1 της θεωρίας και στις 2 ασκήσεις. Κάθε πλήρες θέμα είτε Θεωρίας είτε άσκησης βαθμολογείται με άριστα το 20. Τα υποερωτήματα που υπάρχουν ενδεχόμενα σε κάθε θέμα, μπορεί να βαθμολογούνται διαφορετικά σύμφωνα με την αξιολόγηση του Καθηγητή σας. Σε κάθε περίπτωση όμως αθροιστικά οι βαθμοί όλων των υποερωτημάτων ενός θέματος δίνουν το βαθμό 20. Ο τελικός βαθμός που θα πάρετε είναι το πηλίκο που θα προκύψει, όταν αθροίσουμε και τους 3 βαθμούς των τριών θεμάτων που απαντήσατε και το άθροισμα το διαιρέσουμε δια του 3. Αν το πηλίκο είναι δεκαδικός βαθμός, ο τελικός βαθμός, είναι ο πλησιέστερος ακέραιος προς τον δεκαδικό που βρήκαμε. Π.χ αν από τα θέματα που απαντήσατε βαθμολογηθήκατε από τον καθηγητή μας με 20, 17 και 16 η βαθμολογία σας είναι: (20+17+16):3=53:3≅17,6=**18.** Αντίθετα αν είχαμε βαθμολογηθεί με 20, 16,16 τότε η τελική βαθμολογία σας είναι:

(20+16+16):3 = 52:3 ≅17,3 =**17**

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑΞΗ Α΄

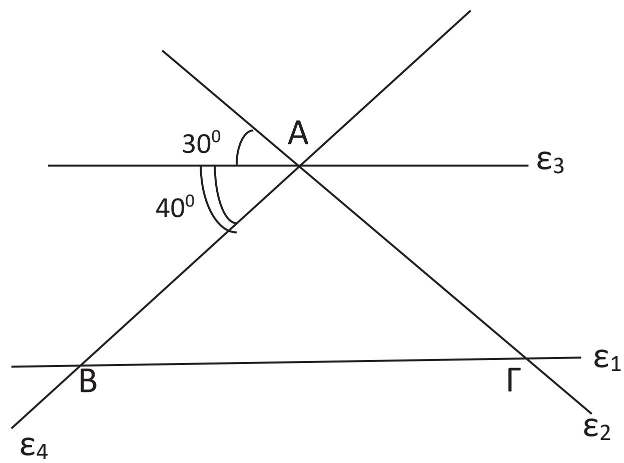
Α: ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. **α)** Πότε ένας ακέραιος αριθμός, λέγεται πρώτος αριθμός;
   β) Πότε ένας ακέραιος αριθμός, διαιρείται με το 3, με το 4, με το 5, με το 9 και με το 25;
   γ) Πότε 2 κλάσματα λέγονται ομώνυμα και πότε ετερώνυμα; Πως προσθέτω 2 ομώνυμα και πως 2 ετερώνυμα κλάσματα;
2. **α)** Να σχεδιάσετε 2 γωνίες κατά κορυφή, 2 γωνίες συμπληρωματικές με κοινή κορυφή και τη μία πλευρά και 2 γωνίες παραπληρωματικές με κοινή κορυφή και τη μια πλευρά (Δηλαδή δύο εφεξής συμπληρωματικές και 2 εφεξής παραπληρωματικές). Τι παρατηρείτε για τις μη κοινές πλευρές των παραπάνω συμπληρωματικών και παραπληρωματικών γωνιών; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να σχεδιάσετε ένα σκαληνό τρίγωνο και να δικαιολογήσετε ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 180^0.

Β : ΘΕΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ένας Υαλέμπορος αγόρασε μια παρτίδα ποτήρια 50.000 τεμαχίων, προς 1,96 Ευρώ το κάθε ένα. Κατά τη μεταφορά του έσπασαν το 2%. Ο Υαλέμπορος θέλει να κερδίσει 60% επί των χρημάτων που έχει δώσει. Πόσο πρέπει να πουλάει το κάθε ποτήρι;
2. Στο παρακάτω σχήμα, ο ευθείες ε1 και ε2 είναι παράλληλες, ε1//ε2 και τέμνονται από δύο άλλες ε3 και ε4 στα σημεία Α της ε1 και στα σημεία Β και Γ της ε2 αντίστοιχα όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ



3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:
   α) $A=(7^2-6^2)^2-(6^2-5^2)-2$
   β) $B=\{(3^3-2^3-1)-[(3^2-2^2+5)-10]\}$

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑΞΗ Β

Α: ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Στις παρακάτω προτάσεις, σημειώστε (Σ) αν τις θεωρείτε σωστές και (Λ) αν τις θεωρείτε λανθασμένες.

α) Αν α<β τότε –α<–β, α,β τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

β) Αν α<β τότε α+γ<β+γ, α,β,γ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

γ) Οι αριθμοί: $\frac{2}{5}$, 3,725725… Είναι ρητοί αριθμοί.

δ) οι ευθείες με εξισώσεις y=2x+3 και y=4x–1 είναι παράλληλες.

ε) Ο χρόνος εκτέλεσης ενός έργου και ο αριθμός των εργατών που εκτελούν το έργο αυτό είναι ανάλογα ποσά.

στ) $\sqrt{7}+1<\sqrt{5}+2$

2. **α)** Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R.

β) Σε έναν ορθό κώνο, η ακτίνα της βάσης του είναι R και η ακμή του λ. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν: Τον Όγκο του V και την Ολική του Επιφάνεια $E_{ολ}$.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** Να βρείτε αν οι συναρτήσεις y= $\frac{2}{x}$ +3, x>0 και y= $\frac{3}{x}$ +1, x>0, έχουν κοινά σημεία και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες τους.

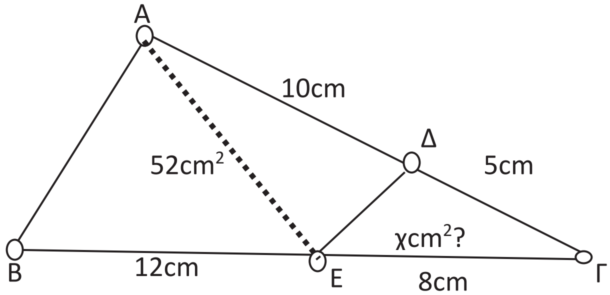
β) Συμπληρώστε πίνακα τιμών για τις δύο συναρτήσεις και για τις τιμές του x: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$,1,2,3,4 και κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων σε κοινό σύστημα αξόνων.

2. Εννέα εργάτες έχουν αναλάβει, από μια Εταιρεία κατασκευών να τελειώσουν ένα έργο σε 30 ημέρες εργαζόμενοι 8, ώρες την ημέρα. Μετά την $6^η$ ημέρα προστέθηκαν άλλοι 3 εργάτες με τη προϋπόθεση να κάνουν όλοι οι εργαζόμενοι στο εξής και 1 ώρα υπερωρία καθημερινά, γιατί ο εργοδότης πριμοδοτούσε την Εταιρεία που είχε αναλάβει το έργο με 5.000 Ευρώ αν τελείωνε το έργο σε λιγότερο από 23 ημέρες. α) Μετά από πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο;

β) Αν το ημερομίσθιο των εργατών είναι 50 Ευρώ, η υπερωρία τιμάται 10 Ευρώ ανά εργαζόμενο, η ασφάλεια κάθε εργαζόμενου είναι 30 Ευρώ για το Οκτάωρο και 35 Ευρώ για το εννιάωρο, η Εταιρεία με την αλλαγή που έκανε σε εργάτες και ωράριο πόσα χρήματα κέρδισε τελικά;

3. **α)** Να αποδείξετε ότι ο λόγος των Εμβαδών δύο Τριγώνων που έχουν το ίδιο ύψος είναι ίσος με το λόγο των βάσεών τους.

β) Στο παρακάτω σχήμα, να υπολογίσετε το Εμβαδό του Τριγώνου ΔΕΓ. (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε τη βοηθητική γραμμή ΑΕ και συγκρίνεται τρίγωνα με το ίδιο ύψος.)



ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑΞΗ Γ

Α: ΘΕΩΡΙΑ

1. Συμπληρώστε το $2^ο$ μέλος των παρακάτω ισοτήτων (α,β τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί):

α) $(α+β)^3$=....
β) $(α–β)^3$=.....
γ) $α^3+β^3$=….
δ) $α^3–β^3$ =….
ε) Αποδείξτε ότι αν α+β+γ=0 τότε,

$$α^3+β^3+γ^3=3αβγ$$

2. **α)** Πότε δύο Τρίγωνα λέγονται όμοια;
β) Πότε δυο πολύγωνα λέγονται όμοια;
γ) Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας δύο τριγώνων;
δ) Δύο Ορθογώνια τρίγωνα, που μία οξεία γωνία του ενός, είναι ίση με την αντίστοιχη οξεία γωνία του άλλου, είναι μεταξύ τους όμοια; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

ε) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, που η μια γωνία του ενός είναι ίση με την αντίστοιχη γωνία του άλλου είναι μεταξύ τους όμοια; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Β: ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$(x+2y)^2+(2x–y)^2 –5(x+y)(x–y)–10y^2+2x–3y=1$
3x+2y=7.

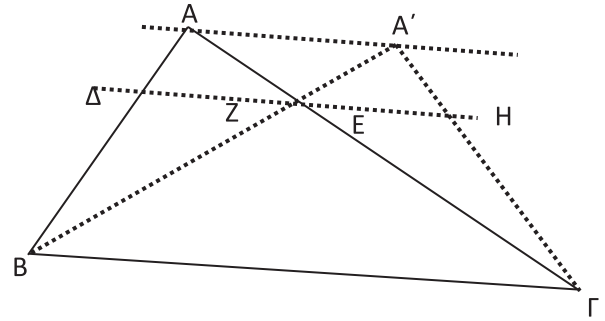
Υπόδειξη: Εκτελέστε τις πράξεις στη πρώτη εξίσωση.

β) Αν ξέρουμε ότι $90^0<ω<180^0$ και εφω=–2, να υπολογιστούν: το ημω και το συνω.

2. **Α.** Για ποιες πραγματικές τιμές του x έχουμε:
α) $4x^2–4x+1>0$
β) $x^2–2x+7>0$
Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x-3}{x+2}-\frac{x-2}{2x+3}+\frac{2}{15}=0$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τη κορυφή Α φέρνουμε ευθεία ε//ΒΓ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Α πάνω σε αυτή. Από ένα τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ φέρω ευθεία ΑΕ//ΒΓ που τέμνει ΑΓ στο Ε, την Α΄Β στο Ζ και την Α΄Γ στο Η.



α) Να συγκρίνετε τους λόγους:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}, \frac{ΑΕ}{ΕΓ}, \frac{Α΄Ζ}{ΖΒ}, \frac{Α΄Η}{ΗΓ}$$

β) Να αποδείξετε ότι: ΔΕ=ΖΗ

3η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

28 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2026

Ενδεικτικές λύσεις

ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η εξίσωση $\boldsymbol{x^2+(2-a)x-2a^2+5a-3=0}$,
όπου x είναι ο άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος.
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του a για τις οποίες:
(α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$.
(β) Η μία ρίζα της εξίσωσης είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση:

(α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta=(2-a)^2-4(-2a^2+5a-3)=9a^2-24a+16=(3a-4)^2$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$, αν είναι

$$\Delta=(3a-4)^2>0 \Leftrightarrow a\neq\frac{4}{3} \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}-\left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

(β) Για $a\neq\frac{4}{3}$ οι δύο ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{a-2\pm(3a-4)}{2}, \text{ δηλαδή } x_1=2a-3 \text{ και } x_2=-a+1.$$

Έχουμε τις περιπτώσεις:

- $x_1=2x_2 \Leftrightarrow 2a-3=2(-a+1) \Leftrightarrow 4a=5 \Leftrightarrow a=\frac{5}{4}$.
- $x_2=2x_1 \Leftrightarrow -a+1=2(2a-3) \Leftrightarrow 5a=7 \Leftrightarrow a=\frac{7}{5}$.

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $a=\frac{5}{4}$ και $a=\frac{7}{5}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του με κέντρο Ο. Η ευθεία ΑΟ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Ε, $\mathrm{E}\neq\Delta$, ώστε $\mathrm{OE}=\mathrm{O\Delta}$. Η κάθετη ευθεία προς την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ και η παράλληλη από το Α προς την πλευρά ΒΓ τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Ν, $\mathrm{N}\neq\mathrm{A}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Ζ, Ε, Γ είναι ομοκυκλικά.

Πρώτη λύση

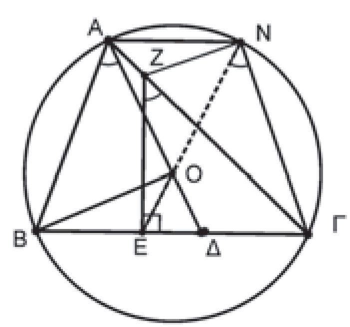
Φέρουμε την ΝΕ (δεν ξέρουμε ότι περνάει από το Ο). Τα τμήματα ΕΔ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο, επομένως, $\mathrm{B\Delta}=\Gamma\mathrm{E}$. (1)

Επιπλέον, από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΝΓΒ έπεται ότι $\mathrm{N\Gamma}=\mathrm{AB}$ και

$$\widehat{\mathrm{AB\Delta}}=\widehat{\mathrm{N\Gamma E}}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΝΕΓ είναι ίσα, οπότε

$$\widehat{\mathrm{EN\Gamma}}=\widehat{\mathrm{BA\Delta}}. \quad (3)$$



Σχήμα 1

Όμως $\widehat{B A \Delta} = \widehat{BAO} = 90^\circ - \widehat{A\Gamma B} = \widehat{EZ\Gamma}$ (4).

Από τις (3) και (4) έπεται ότι $\widehat{EN\Gamma} = \widehat{EZ\Gamma}$, επομένως τα σημεία N, Z, E, Γ είναι ομοκυκλικά.

Δεύτερη λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι το ΑΒΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Τότε η ευθεία ΜΝ είναι η μεσοκάθετος των βάσεων ΒΓ, ΑΝ, και αποτελεί άξονα συμμετρίας τους. Αφού τα σημεία Α, Ο, Δ είναι συνευθειακά, και τα σημεία Ν, Ε, είναι συμμετρικά των Α, Δ, αντίστοιχα, ως προς την ευθεία ΜΝ, έπεται ότι και τα σημεία τα σημεία Ε, Ο, Ν είναι επίσης συνευθειακά. Επιπλέον, οι ευθείες ΜΟ, ΖΕ είναι κάθετες στην ΒΓ, και άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΜ, ΟΝΜ (ΑΜ = ΜΝ, ΑΟ = ΝΟ, ΜΟ = ΜΟ) παίρνουμε την ισότητα των γωνιών

$$O\hat{A}M = O\hat{N}M.$$

Από εδώ μπορούμε να συνεχίσουμε με διάφορους τρόπους:

(1ος τρόπος) Με τέμνουσα των ΜΟ, ΖΕ, την ευθεία ΕΟΝ σχηματίζονται οι εντός-εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες:

$$M\hat{O}N = Z\hat{E}N.$$

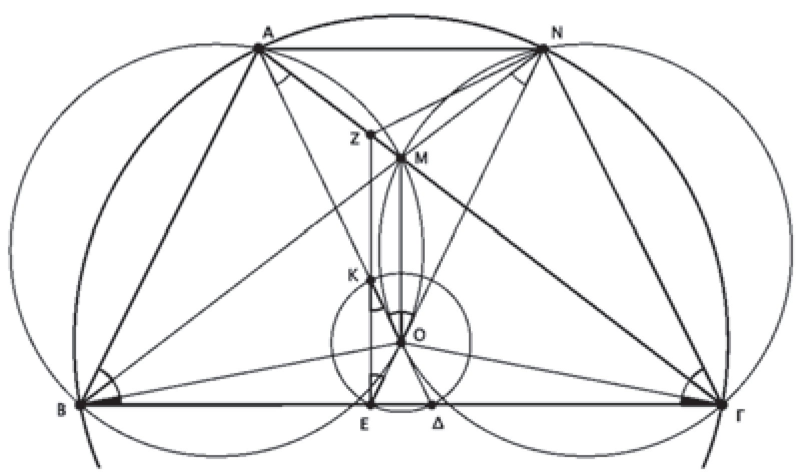
Λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΓ, παίρνουμε

$$O\hat{\Gamma}M = O\hat{A}M = O\hat{N}M,$$

οπότε το τετράπλευρο ΟΓΝΜ είναι εγγράψιμο. Επομένως,

$$Z\hat{\Gamma}N = M\hat{\Gamma}N = M\hat{O}N = Z\hat{E}N.$$

Συνεπώς, τα σημεία Ν, Ζ, Ε, Γ είναι ομοκυκλικά.



(2ος τρόπος) Αν Κ είναι το σημείο τομής του κύκλου (Ο, ΟΔ) με την ΑΓ, τότε ΚΕ ⊥ ΒΓ, αφού το τρίγωνο ΚΕΔ είναι ορθογώνιο με διάμεσο την ΕΟ. Άρα το Κ βρίσκεται πάνω στην ΖΕ, και από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΟΚ, έχουμε

$$E\hat{K}O = K\hat{E}O = Z\hat{E}N.$$

Με τέμνουσα των ΜΟ, ΖΕ, την ευθεία ΑΚΟ σχηματίζονται οι εντός εναλλάξ γωνίες ίσες:

$$E\hat{K}O = K\hat{O}M = A\hat{O}M.$$

Λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΒΟΝ, παίρνουμε

$$O\hat{A}M = O\hat{N}M = O\hat{B}M,$$

οπότε το τετράπλευρο ΟΒΑΜ είναι εγγράψιμο. Επομένως,

$$Z\hat{\Gamma}N = A\hat{\Gamma}N = A\hat{B}N = A\hat{B}M = A\hat{O}M = Z\hat{E}N.$$

Συνεπώς, τα σημεία Ν, Ζ, Ε, Γ είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου ν, για τις οποίες ο καθένας από τους αριθμούς $\nu - 210$ και $\nu + 210$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Έστω ότι $\nu - 210 = \alpha^2 \quad \text{και} \quad \nu + 210 = \beta^2, \qquad (1)$

όπου α, β θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι $0 < \alpha < \beta$ και

$$\beta^2 - \alpha^2 = (\nu + 210) - (\nu - 210) = 420 \iff$$
$$(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 420 \qquad (2)$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\beta + \alpha) - (\beta - \alpha) = 2\alpha, \text{άρτιος}, \qquad (3)$$

οπότε προκύπτει ότι οι αριθμοί $(\beta + \alpha), (\beta - \alpha)$ είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί. Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $(\beta + \alpha)$, $(\beta - \alpha)$ είναι και οι δύο άρτιοι.

Η σχέση (2) γίνεται

$$(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 420 \iff (\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

από την οποία, λόγω του ότι οι αριθμοί $(\beta + \alpha)$, $(\beta - \alpha)$ είναι και οι δύο άρτιοι, προκύπτουν τα ζεύγη

$$(\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 5 \cdot 7) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7)$$
$$\text{ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$$
$$\iff (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (6, 70) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (10, 42)$$
$$\text{ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (14, 30) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2, 210) \qquad (4)$$
$$\iff (\alpha, \beta) = (32, 38) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (16, 26) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (8, 27) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (104, 106) \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) λαμβάνουμε:

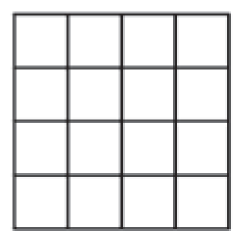
$$\nu = \alpha^2 + 210 \quad \text{και} \quad \nu = \beta^2 - 210,$$

και λόγω των σχέσεων (4) έχουμε:

$$\nu = 32^2 + 210 = 1234 \text{ ή } \nu = 16^2 + 210 = 466$$
$$\text{ή } \nu = 8^2 + 210 = 274 \text{ ή } \nu = 104^2 + 210 = 11026.$$

Πρόβλημα 4

Σε ένα πίνακα 4×4 χωρισμένο σε 16 μικρά τετράγωνα 1×1 τοποθετούμε 4 λευκά και 4 μαύρα πιόνια, έτσι ώστε να ισχύουν:



(α) Κάθε μικρό τετράγωνο 1×1 περιέχει το πολύ ένα πιόνι.

(β) Κάθε (οριζόντια)γραμμή περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

(γ) Κάθε (κατακόρυφη)στήλη περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

Να βρείτε πόσες διαφορετικές τοποθετήσεις υπάρχουν.

Λύση

Καταρχήν παρατηρούμε ότι από τους όρους (β) και (γ) για τοποθέτηση ενός λευκού και ενός μαύρου πιονιού σε κάθε γραμμή και στήλη προκύπτει ότι δεν μπορούν να υπάρχουν δύο γραμμές της ιδίας μορφής ή δύο στήλες της ιδίας μορφής.

Οι δυνατοί συνδυασμοί για να τοποθετήσουμε 2 πιόνια σε μια γραμμή με τέσσερα τετράγωνα είναι $\binom{4}{2} = 6$. Οι τοποθετήσεις αυτές είναι οι εξής:

T1: (Π, Π, 0, 0), **T2:** (0, 0, Π, Π),
T3: (Π, 0, Π, 0), **T4:** (0, Π, 0, Π),
T5: (Π, 0, 0, Π), **T6:** (0, Π, Π, 0).

Επειδή για κάθε τοποθέτηση δύο πιονιών σε μία γραμμή μένουν δύο θέσεις κενές, παρατηρούμε ότι τα ζεύγη ανά δύο είναι **συμπληρωματικά**: Το T1 με το T2, το T3 με το T4 και το T5 με το T6.

Επειδή πρέπει να έχουμε 4 γραμμές που καμία δεν πρέπει να είναι ίδια με την άλλη, πρέπει να επιλέξουμε 4 διαφορετικές τοποθετήσεις από τις 6 βρήκαμε παραπάνω.

Επιπλέον, για να έχει και κάθε στήλη δύο πιόνια πρέπει οι γραμμές που θα επιλέξουμε να εμφανίζουν όλες τις στήλες του πίνακα με δύο πιόνια. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει μόνο αν επιλέξουμε δύο ζεύγη συμπληρωματικών γραμμών. Οι δυνατές επιλογές δύο συμπληρωματικών ζευγών από τα τρία ζεύγη που έχουμε είναι $\binom{3}{2} = 3$. Έτσι προκύπτουν τα τετράγωνα

Π	Π		
		Π	Π
Π		Π	
	Π		Π

Π	Π		
		Π	Π
Π			Π
	Π	Π	

Π		Π	
	Π		Π
Π			Π
	Π	Π	

Για κάθε ένα από τα 3 παραπάνω τρία τετράγωνα υπάρχουν 4!=24 διαφορετικές μεταθέσεις των γραμμών οι οποίες δεν επηρεάζουν το πλήθος των πιονιών των στηλών. Επειδή σε κάθε τετράγωνο έχουμε τοποθετήσει δύο ζεύγη συμπληρωματικών γραμμών οι στήλες που προκύπτουν είναι διαφορετικές ανά δύο.
Επομένως, για κάθε ένα από τα τρία τετράγωνα έχουμε 24 σωστές τοποθετήσεις, οπότε ο συνολικός αριθμός των τοποθετήσεων, ανεξάρτητα από το χρώμα των πιονιών, είναι:

$$3 \cdot 24 = 72.$$

Επειδή σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ζητάμε να υπάρχει ένα λευκό και ένα μαύρο πιόνι, πρέπει να ορίσουμε το χρώμα των πιονιών. Παρατηρούμε ότι, αν ορίσουμε το χρώμα ενός οποιουδήποτε πιονιού (π.χ. το πρώτο πάνω αριστερά είναι Λ), τότε τα χρώματα των υπόλοιπων πιονιών στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη καθορίζονται αυτόματα (πρέπει να είναι Μ). Τότε το δεύτερο πιόνι της τρίτης γραμμής και της δεύτερης στήλης πρέπει να είναι λευκά, οπότε στη συνέχεια το δεύτερο πιόνι της τρίτης στήλης και το δεύτερο πιόνι της τέταρτης γραμμής πρέπει να είναι μαύρα. Τελικά το δεύτερο πιόνι της δεύτερης γραμμής και της τέταρτης στήλης πρέπει να είναι λευκό.

Λ	Μ		
		Μ	Λ
Μ		Λ	
	Λ		Μ

Γενικά για κάθε μία από τις 72 τοποθετήσεις υπάρχουν **2 τρόποι** να οριστούν τα χρώματα, είτε ξεκινώντας με λευκό το πρώτο διαθέσιμο πιόνι, είτε με μαύρο. Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών τοποθετήσεων είναι :

$$72 \cdot 2 = 144.$$

Υπάρχουν ακόμη οι τρεις περιπτώσεις χρησιμοποίησης από δύο φορές των συμπληρωματικών ζευγών, στις οποίες υπάρχουν ίδιες γραμμές και ίδιες στήλες, όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

Π	Π		
		Π	Π
Π	Π		
		Π	Π

Π		Π	
	Π		Π
Π		Π	
	Π		Π

Π			Π
	Π	Π	
Π			Π
	Π	Π	

Ο περιορισμός για την ύπαρξη ενός λευκού και ενός μαύρου πιονιού σε κάθε γραμμή και στήλη δίνει τη δυνατότητα διαφοροποίησης των γραμμών που είναι ίδιες.

Στη περίπτωση αυτή σε κάθε πίνακα έχουμε δύο διαφορετικές γραμμές, οπότε οι διαφορετικές μεταθέσεις τους είναι όσο το πλήθος των συνδυασμών των 4 γραμμών ανά 2, δηλαδή $\binom{4}{2} = 6$.

Επιπλέον η χρησιμοποίηση λευκών και μαύρων πιονιών δίνει από δύο διαφορετικές περιπτώσεις στα ζεύγη των ίδιων γραμμών, οπότε σε καθέναν από τους παραπάνω πίνακες προκύπτουν 4 διαφορετικές τοποθετήσεις, όπως φαίνεται παρακάτω για τον πρώτο πίνακα:

Λ	Μ		
		Λ	Μ
Μ	Λ		
		Μ	Λ

Λ	Μ		
		Μ	Λ
Μ	Λ		
		Λ	Μ

Μ	Λ		
		Μ	Λ
Λ	Μ		
		Λ	Μ

Μ	Λ		
		Λ	Μ
Λ	Μ		
		Μ	Λ

Επομένως συνολικά στις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν: $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

Έτσι συνολικά προκύπτουν $144 + 72 = 216$ διαφορετικές τοποθετήσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος.

Δεύτερη λύση

Έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ μια αναδιάταξη του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ η οποία περιγράφει την τοποθέτηση πιονιών στον πίνακα ως εξής:

στην $i - o\sigma\tau$ή γραμμή του πίνακα, τοποθετούμε πιόνι στη στήλη α_i, για $i = 1, 2, 3, 4$.

Για παράδειγμα, η αναδιάταξη $(1, 3, 2, 4)$ δηλώνει τον παρακάτω πίνακα τοποθέτησης των τεσσάρων λευκών πιονιών:

Λ			
		Λ	
	Λ		
			Λ

Υπάρχουν $4! = 24$ αναδιατάξεις του $\{1, 2, 3, 4\}$, άρα τόσοι είναι οι τρόποι τοποθέτησης των λευκών πιονιών ώστε να μην υπάρχουν δύο λευκά πιόνια στην ίδια στήλη ή στην ίδια γραμμή.

Ας μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα μαύρα πιόνια (Μ), ώστε να μην υπάρχουν δύο μαύρα πιόνια στην ίδια στήλη ή στην ίδια γραμμή, και να μην υπάρχουν δύο πιόνια στο ίδιο κελί. Ένα παράδειγμα που συμπληρώνει τον παραπάνω πίνακα είναι το παρακάτω

Λ	Μ		
Μ		Λ	
	Λ		Μ
		Μ	Λ

Η τοποθέτηση των μαύρων πιονιών παραπάνω αντιστοιχεί στην αναδιάταξη $(2, 1, 4, 3)$ και είναι μια αναδιάταξη της $(1, 3, 2, 4)$ χωρίς σταθερό σημείο.

Το πλήθος των αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ χωρίς σταθερό σημείο είναι 9:

$$(2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2), (4,3,2,1).$$

Για κάθε μια από τις 24 δυνατές τοποθετήσεις των λευκών πιονιών στον πίνακα, υπάρχουν λοιπόν 9 δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των μαύρων πιονιών. Συνεπώς, συνολικά υπάρχουν $24 \cdot 9 = 216$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

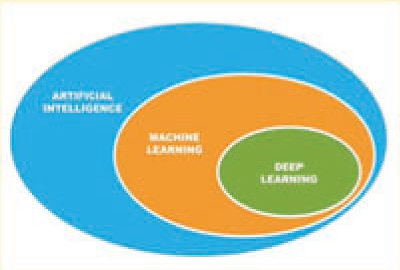
Τεχνητή Νοημοσύνη και Μαθηματική Λογική

Νικολόπουλος Γιάννης

Στην εποχή μας, μεγάλος σάλος γίνεται για την Τεχνητή Νοημοσύνη, ειδικά στους μαθητές επικρατεί η άποψη πως αν χρησιμοποιείς την Τ.Ν. και πιο συγκεκριμένα το Machine Learning μπορείς να καταφέρεις τα πάντα, ακόμη και τα δύσκολα μαθηματικά θέματα. Είναι όμως η Τ.Ν. μια ευκαιρία να λύσουμε τα μαθηματικά μας προβλήματα ενώ συγχρόνως θα αναπτύσσουμε δεξιότητες και θα βελτιώνουμε ικανότητες; Μήπως πρέπει με αυτό τον τρόπο να αξιοποιήσουμε την επιστήμη και την τεχνολογία προς όφελος της εκπαίδευσης; Σαφώς προσφέρει πολλά η Τ.Ν. στην εκπαίδευση, όπως προσφέρει στην υγεία, στην οικονομία και γενικότερα στην ανάπτυξη της χώρας. Αλλά δεν προσφέρει τίποτα στην ανάπτυξη και στη βελτίωση εγκεφάλου και μάθησης, για να μην πούμε ότι καταστρέφει και πλευρές πνευματικής ανάπτυξης εφόσον δεν αξιοποιεί τη μαθηματική λογική, την αναλυτική, τη συνθετική σκέψη, την κριτική και την υπολογιστική σκέψη.

Τεχνητή Νοημοσύνη, Μηχανική Μάθηση και Βαθιά Μάθηση

Τι είναι όμως η Τ.Ν. και πού διαφέρει από τη Μηχανική Μάθηση και τη Βαθιά Μάθηση; Η Τεχνητή Νοημοσύνη είναι ένα ισχυρό ευέλικτο εργαλείο της Πληροφορικής που χρησιμοποιεί αλγόριθμους για την ανάλυση δεδομένων και την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα. Ο αλγόριθμος αποτελεί μια πεπερασμένη ακολουθία σαφών, εκτελέσιμων οδηγιών βήμα-βήμα, που είναι σχεδιασμένη από τον άνθρωπο για την επίλυση συγκεκριμένου προβλήματος ή την εκτέλεση μιας εργασίας. Η Μηχανική Μάθηση είναι κλάδος της Τεχνητής Νοημοσύνης που χρησιμοποιεί στατιστικές και πιθανολογικές μεθόδους αλλά και αλγορίθμους ώστε τα μηχανικά συστήματα να μαθαίνουν πρότυπα από δεδομένα και να βελτιώνουν την απόδοσή τους χωρίς να προγραμματίζονται ρητά για κάθε εργασία. Πού ανακαλύπτει αυτά τα δεδομένα η Μ.Μ.; Στις τεράστιες βάσεις δεδομένων που έχουν δημιουργηθεί και συνεχίζουν να δημιουργούνται κάθε λεπτό σε τεράστια κλίμακα. Άρα η Τ.Ν. είναι ένα σύνολο, ένας τομέας και η Μ.Μ. είναι ένα υποσύνολο ένας υποτομέας. Η Μηχανική Μάθηση επιτελεί σημαντικές υποστηρικτικές λειτουργίες για τον άνθρωπο, καθώς μειώνει σημαντικά τον χρόνο που απαιτείται για την αναζήτηση, την επεξεργασία, και την αξιοποίηση πληροφοριών από διάφορες πηγές. Για παράδειγμα, έρευνες που παλαιότερα απαιτούσαν έως και μήνες επεξεργασίας, μπορούν σήμερα να ολοκληρωθούν μέσα σε λίγες ώρες. Ωστόσο υπάρχει και η Βαθιά Μάθηση. Αλλά τι είναι η Βαθιά Μάθηση; Το λεγόμενο Deep Learning (Β.Μ.) αποτελεί υποσύνολο της Μηχανικής Μάθησης. Χρησιμοποιεί πολυεπίπεδα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα έτσι ώστε να προσομοιώνει σε κάποιο βαθμό τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Εκπαιδεύεται σε μεγάλες ποσότητες δεδομένων, εντοπίζοντας σύνθετα μοτίβα ώστε να επιλύει προβλήματα όπως η αναγνώριση εικόνας και ομιλίας ή η πρόβλεψη. Σε αντίθεση με την παραδοσιακή Μ.Μ., οι αλγόριθμοι της Β.Μ. μπορούν να εντοπίζουν αυτόματα τα σημαντικά χαρακτηριστικά των δεδομένων, χωρίς εκτενή ανθρώπινη παρέμβαση. Η βαθιά μάθηση αξιοποιεί διάφορες αρχιτεκτονικές νευρωνικών δικτύων για την ανάλυση εικόνων και βίντεο, καθώς και για δεδομένα ακολουθιών όπως κείμενο και ήχος, ενώ αρχιτεκτονικές όπως οι transformers (μετασχηματιστές) αποτελούν τη βάση των σύγχρονων μοντέλων γλώσσας. Αυτές είναι οι βασικές λειτουργίες ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην Τ.Ν., την Μ.Μ. και την Β.Μ. και όπως γίνεται κατανοητό είναι μια πολύ γενική δραστηριότητα με πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις και σκέψεις. Ωστόσο οφείλουμε να μιλήσουμε για τον ρόλο της Τ.Ν. εφόσον προσπαθούμε να την συνδέσουμε και να την αντιπαραβάλουμε με τη Μαθηματική Λογική.



Ακρίβεια ή ανακρίβεια της Τ.Ν.

Εδώ θα ακολουθήσουμε την πρακτική να «ρωτήσουμε» το Chat Gpt και από τις απαντήσεις του να κρίνουμε τη σχέση του με την μαθηματική λογική και ευρύτερα με τη σκέψη. Ρωτάμε: Αν τρία σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία και ξέρουμε ότι το Β είναι ανάμεσα στο Α και στο Γ, τότε η διάταξή τους είναι μοναδική πάνω στην ευθεία; Και γινόμαστε λίγο κουραστικοί αν ένα σημείο Β κείται «μεταξύ» ή «ανάμεσα» δύο σημείων Α και Γ (συμβολικά Α– Β– Γ) αυτό είναι μοναδικό;

Απάντηση: «Ναι, αν μιλάμε για συγκεκριμένα σημεία Α και Γ σε μια ευθεία, τότε: Αν ένα σημείο Β κείται μεταξύ των Α και Γ (συμβολικά Α–Β–Γ), αυτό είναι μοναδικό ως προς τη θέση του. Η μοναδικότητα μάλιστα της σχέσης «ανάμεσα» ή «μεταξύ» θεμελιώνεται, αξιωματικά στην Ευκλείδεια γεωμετρία από τον Hilbert. Πιο αναλυτικά: Αν δοθούν τρία σημεία Α, Β, Γ με διάταξη Α–Β–Γ, τότε δεν μπορεί να υπάρχει δεύτερο διαφορετικό σημείο Β’ που να έχει ακριβώς την ίδια θέση».

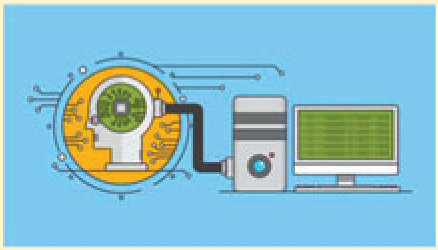
Εμείς συνεχίζουμε: Γιατί να μην είναι το Β επίσης μεταξύ των Γ και Α (συμβολικά Γ– Β– Α); Απάντηση: Πολύ καλή ερώτηση. Αυτό είναι ιδιότητα της σχέσης «μεταξύ»: **Είναι συμμετρική ως προς τα άκρα, όχι όμως ως προς το μεσαίο σημείο**.

Εμείς επιμένουμε: Η φράση «είναι συμμετρική ως προς τα άκρα» δεν είναι από μόνη της μαθηματικά σαφής.

Απάντηση: «Αν έχεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε συμμετρία συνήθως εξετάζουμε: ως προς το μέσο του (κεντρική συμμετρία), ή ως προς την μεσοκάθετο. Δεν λέμε συνήθως «ως προς τα άκρα», αλλά ως προς το μέσο των άκρων». Από αυτή τη μικρή έρευνα είναι σαφές ότι η Τ.Ν. έχει τεράστιες πληροφορίες π.χ. αν θέλεις να πας στη Βιέννη θα σου βρει τα πάντα όπως καλό και φτηνό δωμάτιο στο ξενοδοχείο αλλά δεν έχει μαθηματική λογική και εφόσον δεν έχει τότε δεν μπορεί και να τη διδάξει. Όλοι υποστηρίζουν ότι μαθαίνει και εμείς το αποδεχόμαστε αλλά δεν έχει σκέψη και ενσυναίσθηση.

Η Ακρίβεια-Σαφήνεια της Ερώτησης καθοριστική στην απάντηση

Τόσο στην λύση των προβλημάτων όσο και στην έκφραση απποριών στα Μαθηματικά είτε στην κλασσική τάξη είτε στην Μ.Μ. καθοριστικό ρόλο παίζει η σαφήνεια-ακρίβεια της ερώτησης. Μάλιστα στη μαθηματική λογική θεωρείται καθοριστική η ορθά διατυπωμένη ερώτηση. Βέβαια για να μπορεί ένας μαθητής να κάνει ακριβείς ερωτήσεις χρειάζονται δύο τουλάχιστον παράγοντες: 1) Η καλή γνώση του θέματος και 2) Η διδασκαλία των μαθητών στο πώς να κάνουν ερωτήσεις. Τώρα θα αναρωτηθείτε, πρέπει να διδαχθούν οι μαθητές, να ρωτούν με ακρίβεια-σαφήνεια τόσο το δάσκαλο-μαθηματικό ή τα δεδομένα της Μ.Μ.; Σαφέστατα οφείλουν οι Μαθηματικοί και όχι μόνο να διδάξουν τους μαθητές την μέθοδο των ερωτήσεων και αυτό το τοποθετώ για όλους τους Μαθηματικούς, τους Φυσικούς, και τους Φιλολόγους. Απευθύνεται ειδικά στους Φιλόλογους εφόσον διδάσκουν από Πλάτωνα τον Σωκράτη και πρέπει να ασχοληθούν με την μαιευτική μέθοδο. Η συμβολή των ερωτήσεων με ακρίβεια και σαφήνεια είναι πολυδιάστατη, εφόσον καθοδηγούν τη σκέψη και μετατρέπουν τον λόγο που συντελείται η μάθηση. Οι μαθητές οι οποίοι μπορούν και παράγουν ερωτήσεις, είναι ικανοί να σκέφτονται και να μαθαίνουν. Υπάρχουν αρκετά είδη ερωτήσεων που ενεργοποιούν τη σκέψη: οι ερωτήσεις βάθους, που αναζητούν αυτό που κρύβεται κάτω από μια επιφανειακή γνώση επίσης οι ερωτήσεις σκοπού, οι οποίες οδηγούν στην επιτέλεση της δραστηριότητας, ακόμη οι ερωτήσεις πληροφορίας, οι οποίες μας κινητοποιούν για την αναζήτηση επιπλέον πηγών. Οι ερωτήσεις ερμηνείας, με τις οποίες εξετάζεται πώς γίνεται η οργάνωση των πληροφοριών, οι ερωτήσεις συνάφειας, που βοηθούν στην αναγνώριση των δεδομένων της ερώτησης, οι ερωτήσεις πιστότητας, μέσα από τις οποίες αξιολογείται η ορθότητα και η σαφήνεια της σκέψης. Ενώ οι ερωτήσεις ακρίβειας, αναζητούν την κεντρική ιδέα και τις λεπτομέρειες, επιπλέον οι ερωτήσεις συνέπειας, μέσα από τις οποίες εξετάζονται οι αντιφάσεις της σκέψης μας και οι ερωτήσεις λογικής που τακτοποιούν τις σκέψεις σε ένα αιτιολογημένο και δομημένο σύστημα. Οι μαθητές αυτά πρέπει να τα διδαχθούν, μάλιστα εντάσσονται ευρύτερα στην αναζήτηση του τρόπου «πως μαθαίνω», γιατί μόνο αν ο μαθητής, «μάθει πως να μαθαίνει», μπορεί να αξιοποιήσει τις δεξιότητες και τις ικανότητες που διαθέτει κάθε χρονική στιγμή, να τις βελτιώσει για να πάει παραπέρα τις ουσιαστικές γνώσεις του.



Μαθηματική Λογική και Λύση των Ασκήσεων

Αρκετοί μαθητές που ασχολούνται με τα μαθηματικά, που συμμετέχουν στους διαγωνισμούς της ΕΜΕ, αναρωτιούνται αν υπάρχουν μέθοδοι που πρέπει να διδαχθούν ή να μελετήσουν για να βρουν διεξόδους σε απαιτητικές ασκήσεις. Ειδικά στις διδακτικές ενότητες της Γεωμετρίας και των Διακριτών Μαθηματικών, είναι αναγκαίο οι μαθητές να αποκτήσουν μια γνώση ή δεξιότητα, που την αποκαλούμε Μαθηματική Λογική ακόμη καλύτερα μια διαδικασία που να στηρίζεται στη Μαθηματική Λογική και βέβαια να διδαχθούν αυτές τις θεματικές ενότητες. Τι είναι η Μαθηματική Λογική; Είναι κλάδος των μαθηματικών που μελετά αυστηρά το «συντακτικό» και τη δομή των αποδείξεων. Εστιάζει στην εγκυρότητα των εννοιών, των κρίσεων, των συλλογισμών και στην τυπική αναπαράσταση των μαθηματικών θεωριών. Η Προτασιακή Λογική είναι θεμελιώδες μέρος της μαθηματικής λογικής που μελετά τον τρόπο σύνδεσης προτάσεων για την εξαγωγή συμπερασμάτων, χρησιμοποιώντας λογικούς συνδέσμους, δηλαδή σύμβολα που εκφράζουν με ακρίβεια και αυστηρότητα τις μαθηματικές σκέψεις (**και** αντιστοιχεί στο σύμβολο **Λ**, το **ή** αντιστοιχεί στο σύμβολο **V**, η έκφραση **όχι** αντιστοιχεί στο σύμβολο ¬, **αν...τότε**, αντιστοιχεί στο σύμβολο **=>** και τέλος **αν, και μόνο αν** με σύμβολο **<=>**). Η τελευταία ονομάζεται ισοδυναμία είναι σημαντική και αρκετές φορές χρησιμοποιείται λαθεμένα, οφείλουμε ιδιαίτερης προσοχής και αξιοποίηση παρεμφερών προτάσεων όπως: «πρέπει και αρκεί», «τότε και μόνο τότε». Στηριγμένοι στην μαθηματική λογική θα μπορέσουν οι μαθητές να αντιμετωπίσουν θέματα Γεωμετρίας και Διακριτών Μαθηματικών.

Η μαθηματική λογική αναλύει προτάσεις που είναι αληθείς ή ψευδείς και βασίζεται στη λογική και την εγκυρότητα. Οι εκφράσεις που συναντάμε στις διάφορες μαθηματικές θεωρίες χαρακτηρίζονται ως προτάσεις εάν μπορούν να λάβουν την τιμή αληθής ή ψευδής. Από τη παράθεση προτάσεων συνδεόμενων με τους λογικούς συνδέσμους προκύπτει νέα πρόταση. Εκείνο που ενδιαφέρει όταν προκύπτει μια νέα πρόταση από δύο άλλες είναι η τιμή της νέας πρότασης που εξαρτάται από την τιμή των αρχικών, από τον λογικό σύνδεσμο, καθώς και από τη διάταξη των αρχικών προτάσεων. Για παράδειγμα: α>β και β>γ άρα α>β>γ, πρόταση αληθής. Ακολουθεί μια εποπτική παρουσίαση.

Προτάσεις στα Μαθηματικά είναι πλήρως ορισμένες με ακρίβεια-σαφήνεια εφόσον μπορούν να δεχθούν την τιμή αληθής ή ψευδής και από κανένα άλλο γνώρισμα. Αν ο μαθητής εμπεδώσει έννοιες της μαθηματικής λογικής, τότε θα μπορέσει να χειρισθεί ζητήματα που σχετίζονται με την αποδεικτική διαδικασία για την λύση ασκήσεων γεωμετρικών και όχι μόνο. Στηριγμένοι οι μαθητές σε ανάπτυξη διεργασιών που σχετίζονται με την σκέψη αναλυτική και συνθετική αξιοποιώντας την κριτική, στο τέλος εξάγουν το συμπέρασμα, που είναι προϊόν αλληλεπίδρασης της εμπειρίας, των γνωστικών ικανοτήτων και στηρίζεται στην κατανόηση των εννοιών. Ας μην παραγνωρίσουμε τον ρόλο της υπολογιστικής σκέψης που περιλαμβάνει ένα σύνολο δεξιοτήτων και συμπεριφορών, που προέρχονται από την επιστήμη των υπολογιστών και εφαρμόζονται σε ένα μεγάλο εύρος επιστημών, καθώς επίσης στην καθημερινή ζωή του 21ου αιώνα. Δεν μπορούμε να παραγνωρίσουμε το έργο της ρομποτικής, η ρομποτική είναι κλάδος της τεχνολογίας που ασχολείται με τη σχεδίαση, την ανάπτυξη και τη μελέτη των ρομπότ. Η επιστήμη της ρομποτικής αποτελεί τον συνδυασμό πολλών άλλων επιστημών, κυρίως της πληροφορικής, της ηλεκτρονικής και της μηχανολογίας. Τα ρομποτικά συστήματα που και αυτά έχουν βελτιωθεί από την Τ.Ν. συνεχώς εξελίσσονται και είναι ήδη μέρος της ζωής μας σε πολλούς τομείς όπως στη βιομηχανία, την ιατρική, εφόσον καθαρίζουν, χειρουργούν, σκουπίζουν, συμμετέχουν στις κατασκευές, άρα γίνεται κατανοητό ότι δεν απεμπολούμε την αξία της Τ.Ν. αλλά την τοποθετούμε εκεί που της αξίζει. Ναι στην αξιοποίηση της Τ.Ν. αλλά έμφαση στη διδασκαλία και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων για να μπορεί ο μαθητής να «μάθει πώς να μαθαίνει», ώστε να γίνει πραγματικός γνώστης.

Δυστυχώς στην ανθρωπότητα, λίγο ή πολύ κυριαρχεί η άποψη ότι ο σκοπός αγιάζει τα μέσα. επίσης υπάρχει μια έκφραση του Φλώμπερ στο βιβλίο του Αισθηματική Αγωγή: «Καπάτσος, σαν Έλληνας», αυτή η έκφραση δεν είναι άνευ σημασίας στην «αξιοποίηση» της Τ.Ν. από τους μαθητές μας. Τι σημαίνει η λέξη «καπάτσος»; ο ικανός να πετυχαίνει τα πάντα, με τρόπους, καμιά φορά όχι απόλυτα έντιμους, παρόλο που διαθέτει αξιόλογη οξυδέρκεια. Ως δάσκαλοι θα αποδεχθούμε οι μαθητές μας, να μην αναπτύξουν δεξιότητες, ικανότητες και γνώση αλλά να ψάχνουν τη λύση προβλημάτων αποκλειστικά από την Μηχανική Μάθηση;

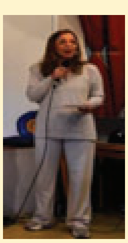
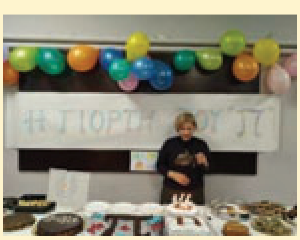
Μαθητικές δραστηριότητες

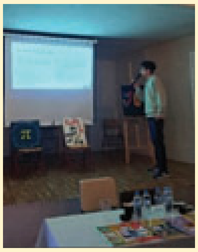
Αποδεχτήκαμε την πρόσκληση των μαθητών του Γυμνασίου της Άνοιξης Αττικής, σε γιορτή για το **π** που κάθε χρόνο οργανώνουν στο σχολείο τους. Οι μαθητές παρουσίασαν οπτικοποιημένα Μαθηματικά θέματα που με την φαντασία τους μας ταξίδεψαν σε όμορφες στιγμές της μαγείας των Μαθηματικών. Στο λόγο μας αναφερθήκαμε στην ιστορία, την εξέλιξη, την αξία των Μαθηματικών και για το σημερινό άλμα στην Τεχνητή Νοημοσύνη. Ευχαριστούμε την Διευθύντρια κα **Σοφία Στρίγκου,** την Μαθηματικό **κα Χριστίνα Πούλιου** και όλους τους καθηγητές του συλλόγου.

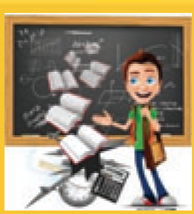
Από την κα Χριστίνα Πούλιου

Στο Γυμνάσιο της Άνοιξης όπως κάθε χρόνο έτσι και φέτος είχαμε εκδήλωση για την γιορτή του **π** και τα γενέθλια **Albert Einstein**, με την συμμετοχή των μαθητών της **Γ΄** και της **Β΄** Γυμνασίου. Φέτος είχαμε την χαρά να φιλοξενήσουμε τα μέλη της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας, κο Παναγιώτη Χριστόπουλο και Ευάγγελο Ζώτο, που με τις ομιλίες τους μάγεψαν τους μαθητές μας, δείχνοντας μας το πόση ανάγκη έχουν να ακούνε άξιους επιστήμονες, με εμπειρία και γνώση. Η Διευθύντρια του σχολείου μας και ο Σύλλογος καθηγητών τους ευχαριστούμε θερμά.







Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ο αριθμός (του Πλάτωνα) 5040

Ο Πλάτωνας έλεγε ότι η πόλις με 5040 κατοίκους είναι ιδανική. Γιατί διαιρείται με πολλούς αριθμούς άρα μπορεί να δημιουργήσει διάφορες ομάδες πολιτών.

Ο αριθμός 5040($2^4.3^2.5.7=1x2x3x4x5x6x7$) διαιρείται από 60 αριθμούς. Το κυριότερο είναι ότι διαιρείται με όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 10.

Οι αριθμοί που διαιρούν τον 5040 είναι: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180, 210, 240, 252, 280, 315, 336, 360, 420, 504, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 1680, 2520, 5040.

Επίσης ο 5040 ισούται με το άθροισμα 42 διαδοχικών πρώτων αριθμών: 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 + 97 + 101 + 103 + 107 + 109 + 113 + 127 + 131 + 137 + 139 + 149 + 151 + 157 +163 + 167 + 173 + 179 + 181 + 191 + 193 + 197 + 199 + 211 + 223 + 227 + 229 = 5040.

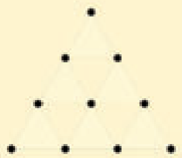
Στην αρχαία Ελλάδα είχαν κάποιους αριθμούς ως ιερούς, όπως το 3, 4, 6, το 7, 13. Οι πιο σημαντικοί το 3, το 4 και το 7, πού είχαν βαθιά συμβολική, μαθηματική και κοσμολογική σημασία. Συνδέονταν με τους θεούς, τη φύση και την Πυθαγόρεια φιλοσοφία. Συμβόλιζαν την πληρότητα, την αρμονία και την ενότητα του φωτός και της ζωής.

Αριθμός Τρία Θεωρείτο εξαιρετικά ιερός, συμβολίζοντας την πληρότητα (αρχή-μέση-τέλος) και συνδεόμενος με την τριάδα των μεγάλων θεών (Δίας, Ποσειδώνας, Άδης) και σήμερα με τον χριστιανισμό.

Αριθμός Τέσσερα Σύμβολο πληρότητας και σταθερότητας, συχνά συνδεδεμένο με το τετράγωνο και τον σταυρό, αναπαριστώντας τα τέσσερα στοιχεία της φύσης (Γη, αέρας, φωτιά, νερό).

Αριθμός Επτά Θεωρείτο ο αριθμός της ολοκλήρωσης, καθώς ήταν γνωστοί 7 πλανήτες, 7 ωκεανοί, και 7 θαύματα του κόσμου.

Αριθμός Δέκα Για τους Πυθαγόρειους, ο αριθμός ήταν οπτικό σύμβολο και όχι απλώς έννοια. Με το 10(1+2+3+4) ήταν η «**Τετρακτύς**» στην οποία έδιναν τον όρκο τους, και θεωρείτο ο τελειότερος αριθμός, καθώς περιέχει το άθροισμα των 1, 2, 3, 4 που τους έδιναν γεωμετρική μορφή τριγώνου. Τοποθετούσαν τους αριθμούς σε τέσσερις σειρές, ένας στην πρώτη σειρά, δύο στην δεύτερη, τρεις στην τρίτη και τέσσερις στην τέταρτη σειρά.



Χρησιμοποιούσαν αυτούς τους αριθμούς στην τέχνη, την αρχιτεκτονική, τις τελετές στην αναζήτηση της «θεϊκής αναλογίας».

Μυριάδες: Για μεγαλύτερους αριθμούς από τον **9.999** χρησιμοποιούσαν τον όρο μυριάς ή μυριάδες, όπως στον Ξενοφώντα («Μύριοι» = 10.000 μισθοφόροι). Οι «μυριάδες» αναφέρονται σε πολλαπλάσια των 10.000. Παράδειγμα, δύο μυριάδες ήταν 20.000. Το σύστημα αρίθμησης των αρχαίων έφτανε συνήθως μέχρι τη «μυριάδα των μυριάδων», δηλαδή (10.000 x 10.000 = 100.000.000).εμείς τα ονομάζουμε εκατομμύρια. Οι αριθμοί σχετίζονται με τα γεωμετρικά σχήματα. Έτσι η μονάδα σχετίζεται με το σημείο, η δυάδα με την γραμμή, η τριάδα με το τρίγωνο και η τετράδα ή τετρακτύς με το τετράεδρο (τριγωνική πυραμίδα), όπως και το τετράγωνο που επίσης ήταν το σύμβολο του θείου και της τελειότητας.

Απαντήσεις στους γρίφους του προηγούμενου τεύχους 139

Ποιος αριθμός

α) $64=8^2=4^3$ β) 42 γ) 63

Πως γράφεται

12345679=999999999:9x9

20= 99/9+9 55=44+44/4

Ο νερόμυλος

110+10/9 κιλά σιτάρι – 10%=100

Η ρίζα

Είναι πάντα τέλειο τετράγωνο $1+ν(ν+1)(ν+2)(ν+3)=(ν^2+3ν+1)^2$

π.χ. $1+2·3·4·5=121=11^2$, $1+6·7·8·9=3025=55^2$, …..

Ένα παράξενο παιχνίδι

Το νούμερο παπουτσιών με δύο μηδενικά είναι αριθμός μεγαλύτερος από την χρονολογία π.χ. 2012 γέννησης. Έτσι αν είναι 38 με 00 γίνεται (3800- 2012)+2026=3800+(2026-2012)=3814, όπου 38 το νούμερο και 14 η ηλικία.