ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

140

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

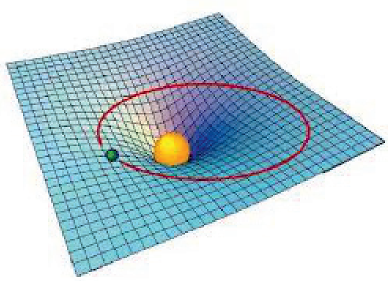
Β' ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2026 ευρώ 3,5

EGMO

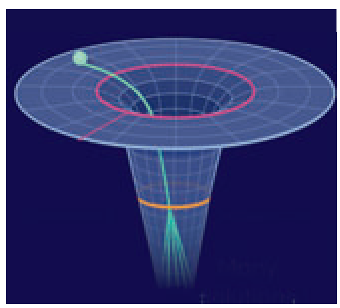
EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD 2026 FRANCE

Η θεωρία της σχετικότητας



βραβείο Turing 2026

βραβείο AMS 2026



Βραβείο Abel 2026

Θέματα "Αρχιμήδης" 2026

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 140 - Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2026 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

...πολλές ευχές
για επιτυχία
στις εξετάσεις

με πείσμα,
και
με ελπίδα,

... καλή δύναμη
στην τελική προσπάθεια

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Καλό
Καλοκαίρι

Υ.Γ.: Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	07 Νοεμβρίου	2025
Ευκλείδης:	17 Ιανουαρίου	2026
Αρχιμήδης:	28 Φεβρουαρίου	2026

$$2026 = [2000+20+2^2+2]=2\cdot 1013$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Φελλούρης Ανάργυρος
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- **Οι συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στενλονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη «Γιοα τον Ευκλείδη Β΄» Τα χειρόγραφα δε επιστρέφονται. ¨ολα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

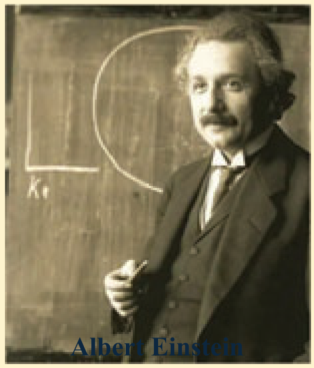
1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Εκτύπωση: printfair **Τηλ.: 2102469799 -2102401695** **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Α. Κρέτσης

Ειδική και Γενική Θεωρία Σχετικότητας

Σωτήρης Χ. Γκουντουβάς

Το 1905 ο νεαρός φυσικός **Albert Einstein** διατύπωσε την Ειδική Θεωρία Σχετικότητας **(ΕΘΣ).** Ήταν 26 χρονών και εργαζόταν στο Γραφείο Ευρεσιτεχνιών της Βέρνης, μια θέση ασήμαντη με χαμηλό μισθό, στην οποία είχε προσληφθεί δύο χρόνια πριν. Η ΕΘΣ μαζί με 3 άλλες εργασίες του δημοσιεύτηκε το 1905 στο γερμανικό περιοδικό *Annalen der Physik* με τίτλο *Zur Elektrodynamik bewegter Korper* (*Περί της ηλεκτροδυναμικής των κινουμένων σωμάτων*). Οι άλλες τρεις εργασίες ήταν για την κίνηση Brown, για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και η τελευταία για την ισοδυναμία μάζας-ενέργειας με την περίφημη εξίσωση $E = mc^2$.



*Η **ΕΘΣ** διατυπώθηκε για να εξηγήσει τα αποτελέσματα του πειράματος Michelson-Morley που είχε γίνει το 1887 και ήταν αδύνατο να εξηγηθούν με την κλασική φυσική. Οι επιστήμονες για 18 ολόκληρα χρόνια προσπαθούσαν να ερμηνεύσουν το πείραμα δεχόμενοι την ύπαρξη του «αιθέρα», ενός υλικού που γέμιζε τον χώρο του σύμπαντος γύρω από την γήινη σφαίρα. Μάλιστα το πείραμα Michelson-Morley έγινε ακριβώς για να επιβεβαιώσει **την ύπαρξη του αιθέρα που ήταν αποδεκτός** από όλο τον επιστημονικό κόσμο και αναπόσπαστο στοιχείο της πρόσφατα (1865) ενοποιημένης θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού από τον κορυφαίο φυσικό James Clerk Maxwell, η οποία έχαιρε μεγάλης εκτίμησης. Τελικά το πείραμα Michelson-Morley όχι μόνο δεν επιβεβαίωσε την ύπαρξη του αιθέρα, αλλά απέδειξε τη **μη** ύπαρξή του.*

Ο Albert Einstein λοιπόν το 1905 πηγαίνοντας ενάντια στις μέχρι τότε καθιερωμένες επιστημονικές απόψεις και επαναστατικώ δικαίω, απέρριψε την ύπαρξη του αιθέρα και εξήγησε τα αποτελέσματα του πειράματος με δύο αρχές (αξιώματα), εκ των οποίων η δεύτερη κατέρριπτε και την κλασική μηχανική του Νεύτωνα.

Οι δύο αρχές ήταν:

1. **Αξίωμα της σχετικότητας**: Οι νόμοι της φυσικής που προκύπτουν από μετρήσεις ενός φαινομένου από δύο παρατηρητές είναι ίδιοι αν οι παρατηρητές βρίσκονται σε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
2. **Αξίωμα των Einstein-Poincare**: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι σταθερή $(c = 3 \cdot 10^8 m / sec)$ και ίδια για όλους τους παρατηρητές που βρίσκονται πάνω σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ισοδυνάμως, η ταχύτητα του φωτός είναι η μεγαλύτερη δυνατή που μπορεί να υπάρξει στη φύση.

Δύο συστήματα λέγονται **αδρανειακά** όταν το ένα κινείται σε σχέση με το άλλο με σταθερή ταχύτητα. Το πρώτο αξίωμα που εξασφαλίζει την ισοδυναμία των δύο συστημάτων αναφοράς είναι βασικό και στην κλασική μηχανική.

Όμως, το δεύτερο αξίωμα για την σταθερή ταχύτητα του φωτός καταρρίπτει την προσθετικότητα των ταχυτήτων της κλασικής μηχανικής.

Η **ΕΘΣ** συμπληρώνει τους νόμους της κίνησης της κλασικής μηχανικής, ώστε να ισχύουν και σε σχετικιστικές ταχύτητες, δηλαδή κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Οι εξισώσεις της κίνησης της κλασικής μηχανικής, οι λεγόμενοι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου, αντικαταστάθηκαν από τους μετασχηματισμούς Lorentz για να συμπεριλάβουν και σχετικιστικές ταχύτητες.

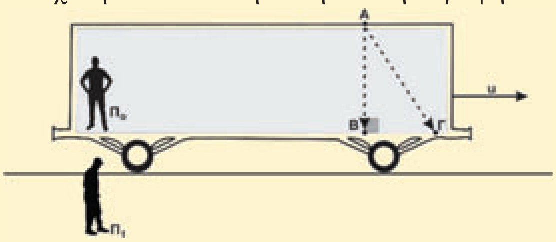
Στα ίδια αποτελέσματα έφτασε και ο **Henri Poincare** που διαπραγματεύθηκε το όλο θέμα με μαθηματικά επιχειρήματα και το αντιμετώπισε ως μαθηματικό πρόβλημα, ενώ ο Einstein ως φυσικό πρόβλημα. Πάντως η ονοματοδοσία της θεωρίας αυτής ως ΕΘΣ ανήκει στον Poincare, ενώ ο Einstein την ονόμαζε Ηλεκτροδυναμική Θεωρία Κίνησης.

Η **ΕΘΣ** έφερε μια επανάσταση στη φυσική και στον τρόπο με τον οποίο βλέπουμε τον κόσμο. Ανέτρεψε μέχρι τότε καθιερωμένες απόψεις π.χ ο χρόνος δεν είναι απόλυτος αλλά σχετικός, η μάζα και η ενέργεια δεν είναι ανεξάρτητες οντότητες, αλλά συμπλέκονται σε μια ισοδύναμη κατάσταση αυτή της υλοενέργειας μέσω της εξίσωσης $E = mc^2$. Φαινόμενα που απορρέουν από την ΕΘΣ όπως η **διαστολή του χρόνου** και η **συστολή του μήκους** είναι ακατάληπτα για την ανθρώπινη εμπειρία και το πλέον χαρακτηριστικό παράδοξο που προκύπτει είναι το **παράδοξο των διδύμων**, όπου δύο δίδυμα άτομα θα έχουν διαφορετικές ηλικίες αν το ένα από αυτά κινείται με σχετικιστικές ταχύτητες!!!

Θα ασχοληθούμε τώρα με τη **διαστολή του χρόνου**. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο παρατηρητές. Ο ένας είναι ακίνητος και χρονομετρώντας ένα φαινόμενο βρίσκει ότι αυτό λαμβάνει χώρα σε χρόνο t_1. Ο άλλος κινείται με ταχύτητα u ως προς τον πρώτο και χρονομετρώντας το ίδιο φαινόμενο βρίσκει ότι αυτό λαμβάνει χώρα σε χρόνο t_o. Τότε για τους δύο χρόνους t_1 και t_o των δύο παρατηρητών ισχύει η περίφημη εξίσωση της διαστολής του χρόνου : $t_1 = \dfrac{t_o}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}$, c η ταχύτητα του φωτός $(c = 3\cdot 10^8\, m/s)$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι ένα βαγόνι κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα u. Από τη θέση Α στην οροφή του βαγονιού ξεκινά ένα φωτόνιο κινούμενο κάθετα προς το πάτωμα με ταχύτητα c, όπου c η ταχύτητα του φωτός. Αν και το φωτόνιο κινείται μέσα στο βαγόνι η ταχύτητα u **δεν μπορεί να προστεθεί** στην ταχύτητά του c (αξίωμα 2).



Ένας παρατηρητής $Π_o$ που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι θα αντιληφθεί ότι το φωτόνιο προσπίπτει στο σημείο Β. Αν ο χρόνος της κίνησης του φωτονίου για τον παρατηρητή $Π_o$ είναι t_o, τότε για το διάστημα ΑΒ έχουμε ότι $AB = c\cdot t_o$.

Ένας ακίνητος παρατηρητής $Π_1$ που βρίσκεται έξω από το βαγόνι θα αντιληφθεί ότι το φωτόνιο διαγράφει την τροχιά ΑΓ και χρειάζεται χρόνο t_1. Το διάστημα $ΑΓ = c\cdot t_1$.

Για το διάστημα ΒΓ έχουμε ότι $ΒΓ = u\cdot t_1$, γιατί το βαγόνι κινείται με ταχύτητα u ως προς τον ακίνητο παρατηρητή.

Το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα μας δώσει :

$$AB^2 + ΒΓ^2 = ΑΓ^2 \Leftrightarrow (c\cdot t_o)^2 + (u\cdot t_1)^2 = (c\cdot t_1)^2$$

Αν λύσουμε την εξίσωση ως προς t_1 θα καταλήξουμε στη σχέση: $t_1 = \dfrac{t_o}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}$.

Έχουμε λοιπόν $t_1 > t_o$, δηλαδή ο χρόνος για τον ακίνητο παρατηρητή “διαστέλλεται”, ενώ για τον κινούμενο ρέει πιο αργά. Αν έχουμε $u = 0,9c$, τότε $t_1 = 2,29t_o$.

Μια δεύτερη άμεση συνέπεια της **ΕΘΣ** είναι η **συστολή του μήκους**. Δηλαδή αν στο προηγούμενο παράδειγμα οι δύο παρατηρητές μετρήσουν ένα μήκος δεν θα βρουν το ίδιο αποτέλεσμα. Για τις δύο μετρήσεις L_1 και L_0 ισχύει η εξίσωση της συστολής του μήκους ή συστολή Lorentz: $L_1 = L_0\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}$, όπου c η ταχύτητα του φωτός.

Απόδειξη

Θα προσπαθήσουμε τώρα να μετρήσουμε το μήκος του βαγονιού. Από το πίσω μέρος του βαγονιού ξεκινά ένα φωτόνιο κινούμενο παράλληλα προς το πάτωμα με ταχύτητα c και προσπίπτει στο μπροστινό τοίχωμα. Οι δύο παρατηρητές μετρούν τον χρόνο κίνησης του φωτονίου.

Ο παρατηρητής Πο που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι βρίσκει ότι ο χρόνος κίνησης του φωτονίου είναι t_0, οπότε το μήκος του βαγονιού είναι $L_0 = c\cdot t_0$.

Ο ακίνητος παρατηρητής $Π_1$ που βρίσκεται έξω από το βαγόνι βρίσκει ότι ο χρόνος κίνησης του φωτονίου είναι t_1 και σύμφωνα με τη διαστολή του χρόνου έχουμε ότι $t_1 = \dfrac{t_o}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}$.

Οπότε το μήκος του βαγονιού είναι $L_1 = c \cdot t_1$ άρα $L_1 = c \cdot t_1 = c\dfrac{t_o}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$.

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις θα πάρουμε $\dfrac{L_o}{L_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$, Άρα $L_1 = L_0\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$.

Έχουμε λοιπόν ότι $L_1 < L_o$, δηλαδή το μήκος για τον ακίνητο παρατηρητή “συστέλλεται”. Ο τύπος της συστολής του μήκους καλείται και **συστολή Lorentz** γιατί είχε ανακαλυφθεί από τον Ολλανδό φυσικό Hendrik Lorentz το 1895, 10 χρόνια πριν τη διατύπωση της **ΕΘΣ**!

Συνεπώς τα μήκη που μετρούν οι δύο παρατηρητές κατά τη διεύθυνση της κίνησης δεν είναι ίδια, αλλά εξαρτώνται από την ταχύτητα κίνησης των παρατηρητών. Ο παρατηρητής έξω από το βαγόνι βρίσκει ότι το μήκος του βαγονιού είναι μικρότερο σε σχέση με αυτό που μετράει ο παρατηρητής μέσα στο βαγόνι!

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι συμβατή με την **ΕΘΣ** και μπορούν όλα τα φαινόμενα της να ερμηνευτούν με τη βοήθεια αυτής, έστω και με αυξημένο δείκτη δυσκολίας.

Το 1908 ο **Hermann Minkowski** κατάλαβε ότι η **ΕΘΣ** θα μπορούσε να κατανοηθεί καλύτερα σε ένα τετραδιάστατο χώρο, αυτόν που αποκαλούμε σήμερα **χωροχρόνο Minkowski**, στον οποίο ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι ανεξάρτητες οντότητες, αλλά συμπλέκονται σε ένα τετραδιάστατο χώρο, ο οποίος έχει τρεις χωρικές συντεταγμένες x,y,z και μια χρονική t. Έτσι λοιπόν η **ΕΘΣ** απέκτησε τη Γεωμετρία της και έγινε μια πλήρης θεωρία, η οποία επαληθεύεται από το πείραμα.

Το 1906 ο **Henri Poincare** έκανε μια πρώτη απόπειρα να θεμελιώσει τον χωροχρόνο. Εισηγήθηκε ότι ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι ανεξάρτητες οντότητες, αλλά συμπλέκονται σε ένα τετραδιάστατο χώρο, ο οποίος έχει τρεις χωρικές συντεταγμένες x, y, z και μία φανταστική χρονική συντεταγμένη $\sqrt{-1}\,c \cdot t$, στον οποίο προσαρτάται η μετρική $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$ και σχηματίζουν μια τετραδιάστατη τοπολογική πολλαπλότητα.

Έτσι λοιπόν ένας μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να θεωρηθεί ως μια στροφή των συντεταγμένων στον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο με τρεις πραγματικές συντεταγμένες, που αναπαριστούν τον χώρο και μια φανταστική συντεταγμένη, που παριστά τον χρόνο ως την τέταρτη συντεταγμένη. Επειδή έτσι ο χώρος είναι ψευδο-Ευκλείδειος χώρος, η στροφή παριστά μια υπερβολική στροφή.

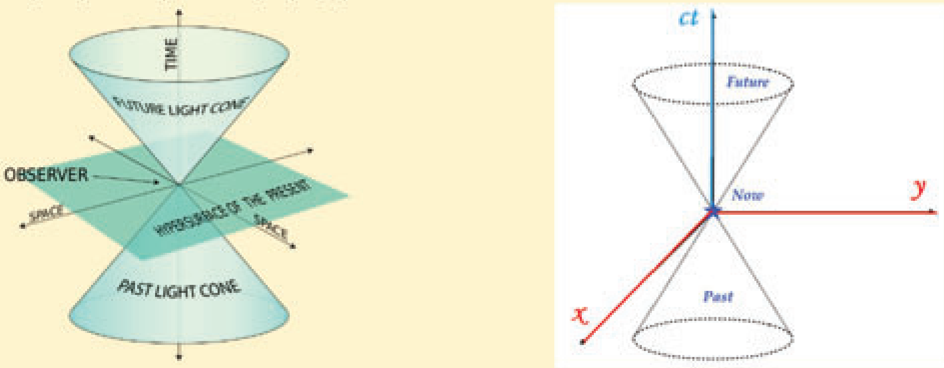
Την ιδέα του Poincare την υιοθέτησε και την βελτίωσε ο Minkowski. Σύμφωνα με τον Minkowski ο χρόνος και χώρος πρέπει να έχουν ισοδύναμη μεταχείριση και έτσι προκύπτει η έννοια των **γεγονότων** που λαμβάνουν μέρος σε ένα ενοποιημένο τετραδιάστατο χωροχρονικό συνεχές. Σε μια περαιτέρω ανάπτυξη ο Minkowski υλοποίησε αυτή την ιδέα όπου δε χρησιμοποιούσε την φανταστική συντεταγμένη $\sqrt{-1}\,c \cdot t$, αλλά αναπαριστούσε τις τέσσερις μεταβλητές (x,y,z,t) του χώρου και του χρόνου, ως σύστημα τεσσάρων συντεταγμένων στον ομοπαραλληλικό χώρο.

Τα σημεία σε αυτόν το χώρο παριστούν γεγονότα στον χωροχρόνο. Στον χωροχρόνο Minkowski ορίζεται ένας κώνος φωτός που σχετίζεται με κάθε σημείο και τα γεγονότα που βρίσκονται εκτός του κώνου φωτός χαρακτηρίζονται σχετικά με την κορυφή ως *χωρικά* ή *χρονικά* (σχήμα 3).

Ο κώνος φωτός που αναπαριστά τους μετασχηματισμούς Lorentz, για τον παρατηρητή (παρόν) και για γεγονότα τα οποία μπορούν να βρίσκονται μέσα στον κώνο και είναι δυνατόν να επηρεασθούν από τον παρατηρητή ή εκτός αυτού που είναι αδύνατο να επηρεασθούν από αυτόν. Επιπροσθέτως όσα γεγονότα βρίσκονται "πάνω" από το επίπεδο του παρόντος γίνονται στο μέλλον, ενώ αυτά που βρίσκονται "κάτω" στο παρελθόν.

Η εργασία του Minkowski για τον χώρο και τον χρόνο παρουσιάστηκε στις 21 Σεπτεμβρίου 1908 στο 80^o συνέδριο των Γερμανών φυσικών επιστημόνων. Η ομιλία του ξεκινά ως εξής:

Οι απόψεις του χώρου και του χρόνου τις οποίες σας παρουσιάζω, ξεπρόβαλλαν από το έδαφος της πειραματικής φυσικής και εκεί βρίσκεται η δύναμή τους. Είναι ριζοσπαστικές. Εφεξής ο χώρος και ο χρόνος *από μόνοι τους, είναι καταδικασμένοι να εξασθενήσουν σε απλές σκιές και μόνο κάποιου είδους ενοποίηση των δύο θα επικρατήσει στην ανεξάρτητη πραγματικότητα.*



Σχήμα 3. Κώνος φωτός

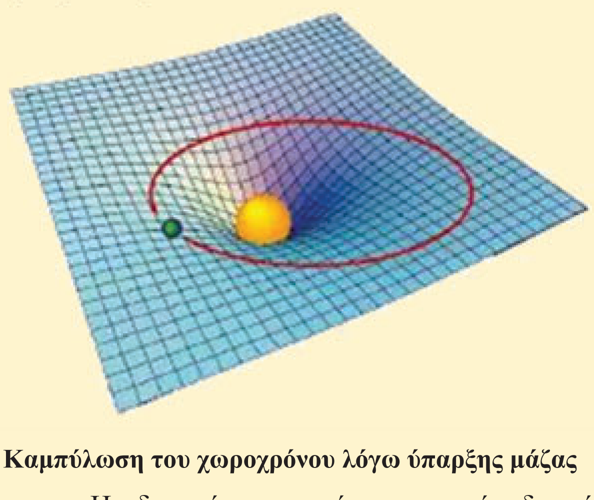
Η **ΕΘΣ** ταιριάζει σ' ένα κόσμο χωρίς ύλη, στον οποίο ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Θα έπρεπε λοιπόν αυτή να επεκταθεί και σε χώρους στους οποίους υπάρχει ύλη. Για δέκα χρόνια πολλοί μαθηματικοί και φυσικοί, όπως οι Poincare και Hilbert εστίασαν τις έρευνές τους προς αυτή την κατεύθυνση. Όμως, ο Einstein και πάλι, τον Νοέμβριο του 1915, πασίγνωστος πλέον στον επιστημονικό κόσμο, σε μια σειρά διαλέξεων στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου παρουσίασε τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ).

Η **ΓΘΣ** είναι μια θεωρία βαρύτητας η οποία περιγράφει τη βαρυτική δύναμη μέσω των καμπυλώσεων του χωροχρόνου παρουσία μάζας. Η θεωρία αυτή αντικαθιστούσε την ερμηνεία του Νεύτωνα για τη βαρύτητα, η οποία δεν θεωρείται ως το αποτέλεσμα μιας δύναμης, αλλά οφείλεται στην καμπύλωση του χωροχρόνου που προκαλείται από την περιεχόμενη στον χωρόχρονο μάζα και ενέργεια.

Στα τυποποιημένα συστήματα αναφοράς της κλασσικής μηχανικής, η ελεύθερη κίνηση των αντικειμένων γίνεται με σταθερή ταχύτητα σε ευθείες γραμμές. Στα πλαίσια της ΓΘΣ, οι τροχιές κίνησης των ελεύθερων σωμάτων είναι γεωδαισιακές γραμμές, δηλαδή γραμμές ελάχιστης απόστασης στον καμπυλωμένο χωροχρόνο.

Βασική αρχή της **ΓΘΣ** είναι η **ισοδυναμία των επιταχυνόμενων συστημάτων αναφοράς** με συστήματα που βρίσκονται εντός βαρυτικού πεδίου. Αυτή η αρχή οδηγεί σε ταυτοτική σχέση αδράνειας και βαρύτητας, με αποτέλεσμα την παρατηρούμενη συστολή των μηκών και τη διαστολή του χρόνου σε πεδία βαρύτητας, με συνέπεια την αλλαγή της Γεωμετρίας του χώρου και την επιβεβαίωση, με παρατηρήσιμα φαινόμενα, της Αστρονομίας και της Αστροφυσικής. Για παράδειγμα η εξέταση της εξέλιξης των άστρων, οδηγεί στις μαύρες τρύπες που προέβλεπε η ΓΘΣ.

Σχεδόν ταυτόχρονα με τον Einstein, ο **David Hilbert** δημοσίευσε την εργασία του "Τα Θεμέλια της Φυσικής", μια αξιωματική θεωρία που περιείχε και τις εξισώσεις πεδίου της **ΓΘΣ**. Και οι δύο επιστήμονες, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, διατύπωσαν τις εξισώσεις πεδίου της **ΓΘΣ**, ο Hilbert πάντως δεν αμφισβήτησε τον Einstein ως δημιουργό της θεωρίας, και ποτέ δεν προέκυψε δημόσια διαφωνία που να αφορά τις εξισώσεις πεδίου μεταξύ των δύο ανδρών κατά τη διάρκεια της ζωής τους.



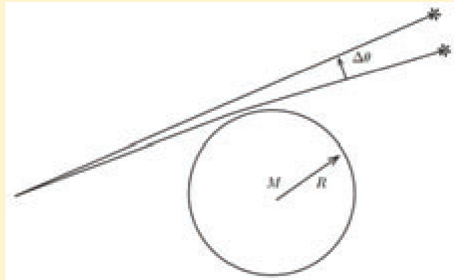
Καμπύλωση του χωροχρόνου λόγω ύπαρξης μάζας

Η διαφορά της προσέγγισης Hilbert είναι η εξαγωγή των εξισώσεων πεδίου μέσω μιας μαθηματικής αρχής λογισμού μεταβολών που ειρωνικά ο Einstein χαρακτήριζε ως «μέθοδο σούπερμαν». Η αδυναμία της συνίστατο στο ότι δεν είχε καμία σχέση με το φυσικό περιεχόμενο της **ΕΘΣ** και **ΓΘΣ**, οπότε δεν απαντούσε στα φυσικά ερωτήματα περί συναλλοίωτου των συστημάτων αναφοράς και δεν προέβλεπε πειράματα για την επαλήθευσή της.

Η **ΓΘΣ** παρουσιάστηκε στη Γερμανία το 1915 κατά τη διάρκεια του Πρώτου Παγκοσμίου Πολέμου (1914-1818) με τον κόσμο, μη εξαιρουμένου και του επιστημονικού, διχασμένο σε δύο στρατόπεδα. Από τη μια πλευρά οι κεντρικές αυτοκρατορίες (Γερμανία, Αυστρουγγαρία κλπ) και από την άλλη η συμμαχία της Αντάντ (Αγγλία, Γαλλία, Ρωσία κλπ). Συνέπεια αυτού ήταν η καθυστερημένη γνώση και διάδοση της **ΓΘΣ** στην επιστημονική κοινότητα με αποτέλεσμα να καθυστερήσει η συστηματική εξέταση και κριτική με σκοπό την αποδοχή ή απόρριψή της.

Μια πρώτη επιβεβαίωση της **ΓΘΣ** ήταν η εξήγηση με τη βοήθεια αυτής από τον Einstein της κίνησης του Ερμή, η οποία με την μέχρι τότε κλασική μηχανική ήταν αδύνατο να εξηγηθεί.

Επίσης, προέβλεπε την καμπύλωση του φωτός από τη βαρύτητα. Λίγο μετά τη λήξη του Α΄ΠΠ, μια αποστολή επιστημόνων με επικεφαλής τον Άγγλο αστρονόμο **Sir Arthur Stanley Eddington** μετέβη τον Μάιο του 1919 στο νότιο ημισφαίριο στο νησί Principe του Ατλαντικού ωκεανού στα δυτικά παράλια της Αφρικής και μια άλλη αποστολή με επικεφαλής τον Άγγλο αστρονόμο **Charles Rundle Davinson** στο Sobral της Βραζιλίας για να παρατηρήσουν την ολική έκλειψη ηλίου που θα γινόταν στις 29 Μαΐου. Με βάση φωτογραφίες της θέσης αστέρων πολύ κοντά στον ηλιακό δίσκο κατά τη διάρκεια της ολικής έκλειψης επιβεβαιώθηκε η καμπύλωση του φωτός που προέβλεπε η ΓΘΣ. Αυτό το γεγονός βοήθησε καταλυτικά στην αποδοχή της ΓΘΣ και στην εκτόξευση του Einstein στην κορυφή της επιστημονικής πυραμίδας.



Καμπύλωση του φωτός λόγω βαρύτητας

Η **ΓΘΣ** είναι μια θεωρία, την οποία κανένα φαινόμενο μέχρι τώρα δεν την έχει διαψεύσει. Με τη βοήθεια της έχουν εξηγηθεί πολλά αστρονομικά φαινόμενα. Επίσης η θεωρία αυτή προβλέπει χωροχρονικές ανωμαλίες και την ύπαρξη μαύρων τρυπών, οι οποίες παρατηρήθηκαν τα τελευταία χρόνια και είναι υπό συνεχή μελέτη. Ωστόσο ως φυσική θεωρία είναι μια ανοιχτή θεωρία υπό διαρκή έλεγχο. Όπως είπε χαρακτηριστικά και ο Einstein «Μπορεί να υπάρχει μεγάλος αριθμός πειραμάτων που να επιβεβαιώνουν μια θεωρία. Αρκεί όμως μόνο ένα για να την καταρρίψει!»

Η **ΓΘΣ** αφορά κατά κύριο λόγο τον μακρόκοσμο. Η ισχύς της στο μικρόκοσμο και μέχρι ποιο σημείο, δημιουργεί εύλογα ερωτηματικά. Σήμερα πολλές προσπάθειες γίνονται για την ανάπτυξη μιας **Κβαντικής Θεωρίας της Βαρύτητας**, η οποία θα ενοποιήσει τη σχετικότητα με την κβαντομηχανική ολοκληρώνοντας το οικοδόμημα της Φυσικής. Όμως μέχρι και σήμερα τα αποτελέσματα είναι αρνητικά.

Κλείνουμε τη σύντομη αυτή παρουσίαση με την παρακάτω ρήση:

"*Ο Χωροχρόνος λέει στην Ύλη πως να κινείται και η Ύλη λέει στον Χωροχρόνο πως να στρεβλώνεται...*"

John Archibald Wheeler

Αμερικανός φυσικός (1911-2008)

Σχηματική περιγραφή των μετρήσεων «καμπύλωσης του φωτός», από την αποστολή του Eddington, κατά τη διάρκεια της ηλιακής έκλειψης στις 29 Μαΐου του 1919. Η εικόνα αυτή δημοσιεύθηκε στις 22 Νοεμβρίου 1919 στην εφημερίδα Illustrated London News.

Πηγή: Γεωμετρικές Διαδρομές, Σ.Χ. Γκουντουβάς (Αθήνα 2023).

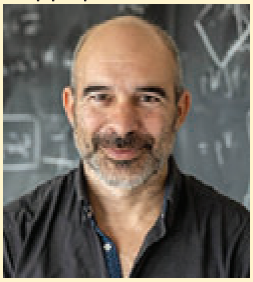
Έλληνες που διαπρέπουν ...

στην κορυφή της επιστήμης των Μαθηματικών

Παναγιώτης Χριστόπουλος

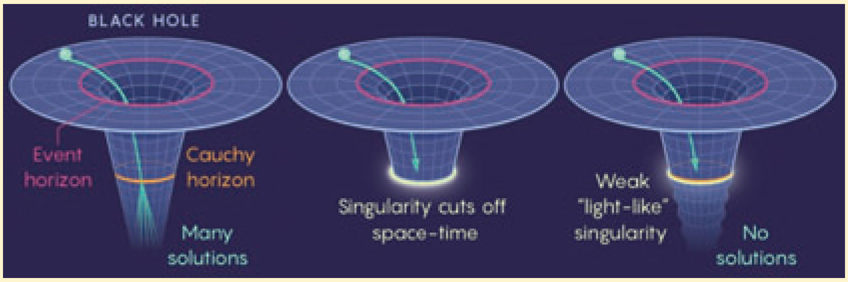
Dimitris Christodoulou

Ο Νομπελίστας, με βραβείο **Shaw Prize** και πολυβραβευμένος καθηγητής Δημήτρης Χριστοδούλου, στην επικοινωνία που είχαμε πρόσφατα, μας αποκάλυψε ότι, τις πρώτες μέρες του Ιανουαρίου βραβεύτηκε στην Ουάσιγκτον, ο μαθητής του **Μιχάλης Δαφέρμος** με το βραβείο **Bôcher** στο ετήσιο συνέδριο της **AMS** (Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία) [**AMS: Bôcher Memorial Prize** στην Ανάλυση, που θεσπίστηκε το 1923 στη μνήμη Maxime Bôcher και απονέμεται κάθε **τρία** χρόνια, για σπουδαία εργασία στην Ανάλυση]**.** Όπως μας ενημέρωσε ο ίδιος, πριν **27** χρόνια είχε απονεμηθεί και στον ίδιο το σημαντικότατο αυτό βραβείο.

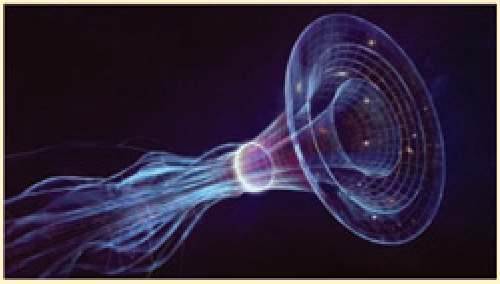


Mihalis Dafermos

Ο Μιχάλης Δαφέρμος γεννήθηκε το 1976. Απέκτησε το πτυχίο Bachelor of Arts (B.A.) από το Πανεπιστήμιο Χάρβαρντ το 1997 και το διδακτορικό του από το Πρίνστον το 2001, υπό την επίβλεψη του Δημητρίου Χριστοδούλου. Αφού πέρασε τρία χρόνια στο MIT ως καθηγητής C.L.E. Moore, μετακόμισε στο Πανεπιστήμιο του Cambridge το 2004, αρχικά ως λέκτορας Πανεπιστημίου, στη συνέχεια από το 2006 ως αναπληρωτής καθηγητής και από το 2011 ως καθηγητής Μαθηματικής Φυσικής. Από το 2013, είναι καθηγητής Μαθηματικών στο Πρίνστον και το 2015 εξελέγη στην Έδρα Αστρονομίας και Γεωμετρίας Lowndean στο Cambridge. Είναι επίσης διακεκριμένο μέλος του Ινστιτούτου Εφαρμοσμένων και Υπολογιστικών Μαθηματικών, **ΙΤΕ**, στο Ηράκλειο της Κρήτης.



Έχει λάβει πολλά προηγούμενα βραβεία, όπως το Βραβείο **Adams**, το Βραβείο **Whitehead**, το Βραβείο Πρώιμης Καριέρας **IAMP** (The International Association of Mathematical Physics) και το Βραβείο Μποδοσάκη για νέους **Έλληνες** επιστήμονες. Είναι μέλος του AMS και του ISGRG. Η έρευνά του επικεντρώνεται στη θεωρία της **Γενικής Σχετικότητας του Αϊνσταιν.** Κατά την απονομή του βραβείου **ο Μιχάλης Δαφέρμος** ευχαρίστησε λέγοντας: Είναι μεγάλη τιμή να λαμβάνω αυτό το βραβείο, αλλά κυρίως να το μοιράζομαι με τον **Jonathan Luk**, του οποίου τη φιλία εκτιμώ απεριόριστα. Η ευκαιρία να συνεργαστώ μαζί του ήταν μια από τις πιο ευχάριστες της επιστημονικής μου ζωής. Δεν υπάρχει κανένας άλλος πιο ειδικός νομίζω, που θα μπορούσα έτσι να έχω, αυτή την διεισδυτική ματιά στο εσωτερικό των μαύρων τρυπών. Είναι επίσης χαρά μου να μοιράζομαι το βραβείο και με τον **Semyon Dyatlov**, του οποίου το έργο θαυμάζω πολύ. Οι μαθηματικές εξελίξεις που σχετίζονται με αυτό το βραβείο δεν θα είχαν συμβεί **ποτέ** χωρίς την οραματική καθοδήγηση του **Δημητρίου Χριστοδούλου**. Η καθοδήγησή του, ήταν μια εμπειρία που μου άλλαξε τη ζωή και ξεπερνά σε μεγάλο βαθμό τη σύντομη περίοδο που η καταγωγή μου, συνάντησε τη δική του και είχα την τιμή να είμαι μαθητής του. Είμαι επίσης πολύ ευγνώμων στον φίλο μου **Igor Rodnianski**, από τον οποίο έχω μάθει τόσα πολλά στα Μαθηματικά και στη ζωή. Ελπίζω ότι τόσο η επιστημονική όσο και η προσωπική του επιρροή είναι εμφανής, σε μεγάλο μέρος του έργου που τιμήθηκε με αυτό το βραβείο. Το έργο μου δεν θα ήταν δυνατό, και σίγουρα δεν θα ήταν τόσο ικανοποιητικό για μένα προσωπικά, αν δεν είχε γίνει μέσα σε μια κοινότητα συναδέλφων, δασκάλων και μαθητών. Υπάρχουν πάρα πολλοί για να τους αναφέρω εδώ, αλλά εκτός από αυτούς που αναφέρθηκαν παραπάνω, θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον **Gustav Holzegel** και τον **Martin Taylor**.



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες
Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

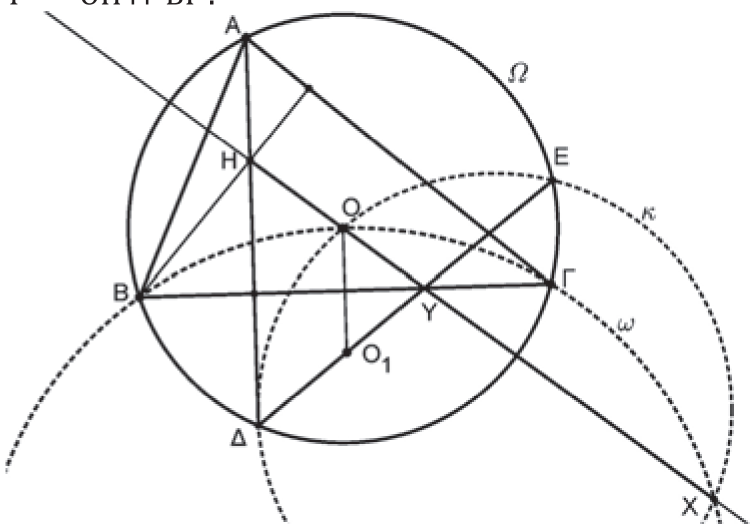
3η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
28 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2026

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Έστω Ο το περίκεντρο και Η το ορθόκεντρο ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Έστω O_1 το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ΒΓ. Η ευθεία ΑΗ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Δ (Δ≠Α). Η ευθεία $O_1\Delta$ τέμνει το τόξο ΒΑΓ του κύκλου (ΑΒΓ) στο σημείο Ε (Ε ≠ Δ). Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (ΟΔΕ), ο κύκλος (ΟΒΓ) και η ευθεία ΟΗ συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο, διαφορετικό του Ο).

Λύση. (1^{ος} **τρόπος**) Θέτουμε $\Omega = (A\,B\,\Gamma)$, $\omega = (\mathrm{O\,B\,\Gamma})$ και $\kappa = (\mathrm{O}\,\Delta\,\mathrm{E})$.
Θέτουμε επίσης $\mathrm{Y} = \mathrm{OH} \cap \mathrm{B\Gamma}$.



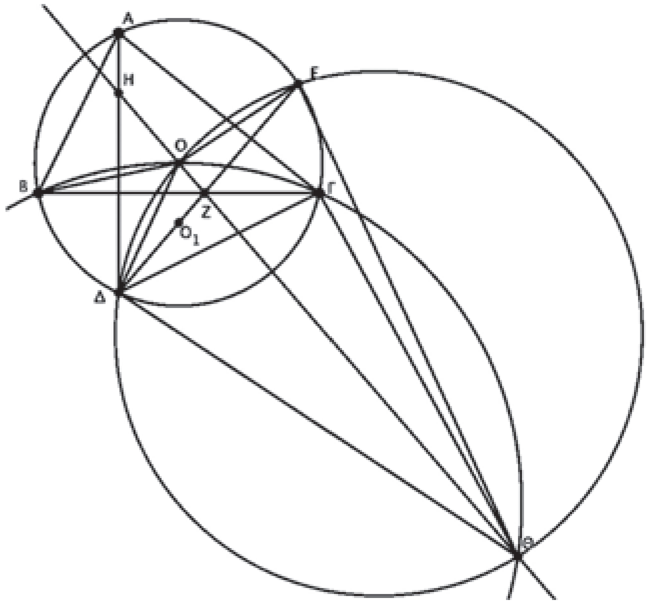
Θεωρούμε τη συμμετρία ως προς την ευθεία ΒΓ. Είναι γνωστό από προηγούμενο

- το Ο απεικονίζεται στο O_1,
- το Η απεικονίζεται στο Δ.

Άρα η ευθεία ΟΗ απεικονίζεται στην ευθεία $O_1\Delta$.
Επειδή το Υ ανήκει στην ΒΓ, μένει σταθερό από τη συμμετρία, οπότε το Υ (που είναι σημείο της ΟΗ) πρέπει να ανήκει και στην εικόνα της ΟΗ, δηλαδή στην $O_1\Delta$.
Άρα $\mathrm{Y} \in O_1\Delta$. Επειδή Δ, E, O_1 είναι συνευθειακά, έχουμε $O_1\Delta \equiv \Delta\mathrm{E}$, οπότε: $\mathrm{Y} \in \Delta\mathrm{E}$. Συνεπώς $\mathrm{Y} = \mathrm{B\Gamma} \cap \Delta\mathrm{E}$.
Ο κύκλος $\kappa = (\mathrm{O}\,\Delta\,\mathrm{E})$ τέμνει τον Ω στα σημεία Δ, E, άρα ο ριζικός άξονας των κ και Ω είναι η ευθεία ΔΕ.
Ο κύκλος $\omega = (\mathrm{O\,B\,\Gamma})$ τέμνει τον Ω στα σημεία B, Γ, άρα ο ριζικός άξονας των ω και Ω είναι η ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$.
Οι δύο αυτοί ριζικοί άξονες τέμνονται στο σημείο $\Delta\mathrm{E} \cap \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{Y}$. Άρα το Υ είναι το ριζικό κέντρο των τριών κύκλων κ, ω, Ω.

Από την ιδιότητα του ριζικού κέντρου, το Υ ανήκει και στον ριζικό άξονα των κ και ω. Έστω $X \neq O$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων κ και ω (το πρώτο είναι το Ο). Ο ριζικός άξονας δύο τεμνόμενων κύκλων είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία τομής τους, άρα είναι η ΟΧ. Επομένως, τα σημεία Ο, Χ, Υ είναι συνευθειακά.
Όμως από τον ορισμό $Y = OH \cap B\Gamma$ έχουμε ότι τα Ο, Η, Υ είναι συνευθειακά, δηλαδή η ευθεία ΟΥ ταυτίζεται με την ευθεία ΟΗ. Επομένως το Χ (που ανήκει στην ΟΥ) ανήκει στην ΟΗ.

2ος τρόπος



Είναι γνωστό ότι το Δ είναι το συμμετρικό του Η ως προς την ΒΓ. Αφού το O_1 είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ΒΓ, οι ευθείες ΗΟ και ΔO_1 τέμνονται πάνω στην ΒΓ, έστω στο Ζ. Έστω Θ το σημείο τομής της ΗΟ με τον κύκλο (ΔΟΕ). Τότε είναι

$$OZ \cdot Z\Theta = \Delta Z \cdot ZE.$$

Αφού Β, Δ, Γ, Ε ομοκυκλικά, είναι: $\Delta Z \cdot ZE = BZ \cdot Z\Gamma.$

Συνεπώς, $OZ \cdot Z\Theta = BZ \cdot Z\Gamma,$

δηλαδή τα σημεία Β, Ο, Γ, Θ είναι ομοκυκλικά, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους $\boldsymbol{n}$ ώστε η τιμή της παράστασης

$$\mathbf{A = 15^n + 5^n + 3^n + 1}$$

να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Για $n = 0$, η τιμή της παράστασης είναι $4 = 2^2$. Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει λύση με $n > 0$.
Έστω ότι η τιμή της παράστασης είναι τέλειο τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι είναι

$$A \equiv 5^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \ (mod\ 3).$$

Αφού τα τέλεια τετράγωνο modulo 3 είναι μόνο το 0 και το 1, ο n θα πρέπει να είναι περιττός.
Έστω $n = 2k + 1$ για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο k.

(1**ος τρόπος**) Έστω $v_2(m)$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον ακέραιο m.
Είναι $3^{n-1} = 9^k \equiv 1 (mod\ 8)$, οπότε $3^n + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 4 (mod\ 8)$. Άρα ο αριθμός $3^n + 1$ είναι άρτιος που διαιρείται από το 4, αλλά όχι από το 8. Συνεπώς, $v_2(3^n + 1) = 2$.

Αφού $5 \equiv 1(mod\ 4)$ είναι $5^n + 1 \equiv 2(mod\ 4)$. Άρα ο αριθμός $5^n + 1$ είναι άρτιος που διαιρείται από το 2, αλλά όχι από το 4. Άρα, $v_2(5^n + 1) = 1$.
Τότε είναι

$$v_2(15^n + 5^n + 3^n + 1) = v_2\big((5^n + 1)(3^n + 1)\big) = v_2(5^n + 1) + v_2(3^n + 1) = 1 + 2 = 3$$

δηλαδή περιττός, άτοπο.

(**2ος τρόπος**) Παρατηρούμε ότι

$$15^n + 1 = (15 + 1)(15^{n-1} - 15^{n-2} + \cdots - 15 + 1),$$

οπότε

$$15^n + 1 \equiv 0 \pmod{16}.$$

Επίσης,

$$5^n + 3^n = (5 + 3)(5^{n-1} - 5^{n-2} \cdot 3 + \cdots - 5 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}).$$

Η παράσταση στην παρένθεση είναι αλγεβρικό άθροισμα n όρων, δηλαδή περιττού πλήθους περιττών αριθμών, οπότε είναι περιττός αριθμός. Επομένως,

$$5^n + 3^n \equiv 8 \pmod{16}.$$

Συνεπώς,

$$15^n + 5^n + 3^n + 1 \equiv 8 \pmod{16},$$

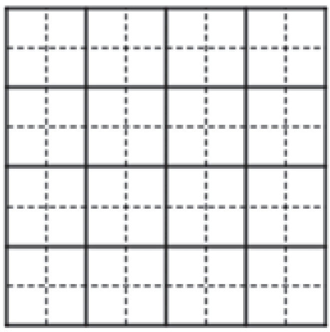
δηλαδή το 8 διαιρεί τον αριθμό $15^n + 5^n + 3^n + 1$, αλλά το 16 όχι, άτοπο.

Πρόβλημα 3

Σε καθένα από τα 64 τετράγωνα ενός 8×8 πίνακα γράφουμε έναν αριθμό από το σύνολο Α={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Η συμπλήρωση του πίνακα λέγεται έγκυρη, αν για κάθε δύο τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά ή κοινή κορυφή, οι αριθμοί που περιέχουν είναι πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1). Να βρεθεί ο μέγιστος ακέραιος *k* με την ιδιότητα ότι σε κάθε έγκυρη συμπλήρωση του πίνακα, υπάρχει αριθμός από το Α που εμφανίζεται τουλάχιστον *k* φορές.

Λύση

Εξετάζουμε ποιοι αριθμοί από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο. Έτσι διακρίνουμε τα υποσύνολα:
$B = \{2, 4, 6, 8\}$ που όλα τα στοιχεία του έχουν κοινό διαιρέτη το 2
$\Gamma = \{3, 6, 9\}$ που όλα τα στοιχεία του έχουν κοινό διαιρέτη το 3
$\Delta = \{1, 5, 7\}$ που τα στοιχεία του είναι αριθμοί σχετικά πρώτοι με κάθε άλλον αριθμό από το σύνολο Α.



Στη συνέχεια χωρίζουμε το 8×8 τετράγωνο σε 16 τετράγωνα 2×2. Σε κάθε τέτοιο τετράγωνο όλα τα μικρά τετράγωνα είναι γειτονικά με βάση την υπόθεση. Επομένως σε αυτό μπορεί να γραφεί μόνο ένα στοιχείο του συνόλου Β και ένα μόνο στοιχείο του συνόλου Γ. Όταν το στοιχείο αυτό είναι το 6, τότε δεν μπορεί να γραφεί κανένα άλλο στοιχείο από τα σύνολα Β και Γ. Επομένως με στοιχεία από τα σύνολα Β και Γ μπορούμε να καλύψουμε το πολύ 32 μικρά τετράγωνα.

Απομένουν για συμπλήρωση άλλα 32 μικρά τετράγωνα στα οποία θα πρέπει να γραφούν αριθμοί από το σύνολο Δ. Σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, αν γράψουμε στις 32 θέσεις 3 αριθμούς, τότε ένα τουλάχιστον από αυτούς θα γραφεί

$$\left\lceil \frac{32}{3} \right\rceil = 11 \text{ φορές.}$$

Στο διπλανό τετράγωνο του σχήματος έχουμε γράψει τους αριθμούς των συνόλων Β και Γ , χωρίς το κοινό στοιχείο τους το 6, με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιηθεί κάθε στοιχείο όσο γίνεται λιγότερες φορές. Έχουν όλα αυτά τα στοιχεία γραφεί στην πρώτη, την τρίτη, την πέμπτη και στην έβδομη στήλη του πίνακα, έτσι ώστε να μην είναι ο ίδιος αριθμός σε γειτονικά μικρά τετράγωνα. Έτσι στις 32 δυνατές θέσεις έχουν γραφεί οι αριθμοί 2, 3 και 9 από 8 φορές και οι αριθμοί 4 και 8 από 4 φορές, δηλαδή όλοι αυτοί οι αριθμοί έχουν γραφεί λιγότερες από 11 φορές στον πίνακα.

2	1	2	5	2	7	2	1
3	5	3	7	3	1	3	5
4	7	4	1	4	5	4	7
9	1	9	5	9	7	9	1
8	5	8	7	8	1	8	5
3	7	3	1	3	5	3	7
2	1	2	5	2	7	2	1
9	5	9	7	9	1	9	5

Στη δεύτερη, στη τέταρτη, στην έκτη και στην όγδοη στήλη έχουμε τοποθετήσει τους αριθμούς του συνόλου Δ προσπαθώντας να χρησιμοποιηθεί έκαστος όσο λιγότερες φορές είναι δυνατόν. Έτσι βλέπουμε ότι οι αριθμοί 1 και 5 έχουν χρησιμοποιηθεί 11 φορές και ο αριθμός 7 έχει χρησιμοποιηθεί 10 φορές.

Επομένως, έχουμε βρει μία έγκυρη τοποθέτηση αριθμών στον πίνακα στην οποία εμφανίζονται δύο αριθμοί από το σύνολο Α 11 φορές. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια έγκυρη συμπλήρωση του πίνακα στην οποία όλοι οι αριθμοί του συνόλου Α εμφανίζονται λιγότερες από 11 φορές, τότε εξετάζοντας τα 2×2 τετράγωνα, όπως παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι με οι αριθμοί 2, 3, 4, 6, 8 και 9 μπορούν να γραφούν το πολύ σε 32 μικρά τετράγωνα, οπότε μένουν για συμπλήρωση από τους αριθμούς 1, 5, 7 τουλάχιστον 32 τετράγωνα με χρησιμοποίηση εκάστου εξ αυτών το πολύ 10 φορές, που είναι άτοπο.

Άρα ο ζητούμενος μέγιστος αριθμός είναι ο $k = 11$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοιες ώστε:

$$\boldsymbol{f(xy+1) - f(x)f(y) = 2xy + 1}, \qquad \textbf{(1)}$$

για κάθε $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε $y = 0$ στη δεδομένη σχέση, έστω (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(1) - f(x)f(0) = 1, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Αν είναι $f(0) \neq 0$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{f(1) - 1}{f(0)} = c \in \mathbb{R}, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

η οποία δεν επαληθεύει τη δεδομένη εξίσωση, αφού

$$c - c^2 = 2xy + 1 \Leftrightarrow 2xy = c - c^2 - 1, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{άτοπο.}$$

Άρα είναι $f(0) = 0$ και τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $f(1) = 1$.
Επίσης με $x = 1, y = -1$ στη σχέση (1) προκύπτει:

$$f(0) - f(1)f(-1) = -1 \Rightarrow f(-1) = 1.$$

Εκτελούμε στη σχέση (1) την αλλαγή μεταβλητών: $x \to xy,\ \ y \to 1$, οπότε

$$f(xy+1) - f(xy)f(1) = 2xy + 1, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$$

$$f(xy+1) - f(xy) = 2xy + 1, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$f(x)f(y)=f(xy),\qquad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}. \qquad (3)$$

Θέτουμε $y=1$ στη σχέση (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(x+1)-f(x)f(1)=2x+1,\ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$f(x+1)=f(x)+2x+1,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}, \qquad (4)$$

Θέτουμε $x\to -x+1, y=-1$ στη σχέση (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(x-1+1)=f(-x+1)f(-1)+2(x-1)+1,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$f(1-x)=f(x)-2x+1,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}, \qquad (5)$$

από την οποία με $x\to -x$ προκύπτει

$$f(1+x)=f(-x)+2x+1,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (4) και (6) λαμβάνουμε:

$$f(x)=f(-x),\qquad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (7)$$

Τελικά, από τη σχέση (1) για $x\to x, y\to -x$, λόγω και των (3) – (7) λαμβάνουμε:

$$f(1-x^2)-f(x)f(-x)=1-2x^2, \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (f(x)-2x+1)(f(x)+2x+1)-\big(f(x)\big)^2=1-2x^2, \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \big(f(x)\big)^2+2f(x)+1-4x^2-\big(f(x)\big)^2=1-2x^2, \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2, \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

για την οποία βλέπουμε εύκολα ότι επαληθεύει τη δεδομένη σχέση.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 139

N61. **Να προσδιορίσετε όλους του θετικούς ακέραιους $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma}$ που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\boldsymbol{p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$ είναι πρώτος που διαιρεί τον αριθμό $\boldsymbol{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}$.**

(ΜΟ Ρουμανίας 2025)

Λύση

Από την υπόθεση ο αριθμός $p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geq 3$ είναι πρώτος και διαιρεί τον αριθμό $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$. Από την ταυτότητα

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

προκύπτει ότι $p|2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Longrightarrow p|\alpha$ ή $p|\beta$ ή $p|\gamma$ ή $p|\alpha+\beta+\gamma$.

Επειδή $p>\alpha, p>\beta, p>\gamma$, οι τρεις πρώτες περιπτώσεις αποκλείονται, όποτε συμπεραίνουμε ότι:

$$p|\alpha+\beta+\gamma\Rightarrow p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leq\alpha+\beta+\gamma\Rightarrow\alpha(\beta-1)+\beta(\gamma-1)+\gamma(\alpha-1)\leq 0.$$

Επειδή $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\alpha-1\geq 0, \beta-1\geq 0, \gamma-1\geq 0$, η τελευταία σχέση αληθεύει μόνον όταν $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Γ73. Δίνεται κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ στο οποίο τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισόπλευρα και οι διαγώνιοι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ συντρέχουν. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{A\Gamma \parallel \Delta Z} \text{ ή } \mathbf{BE = A\Delta + \Gamma Z}.$$

(ΜΟ Ρουμανίας, 2026)

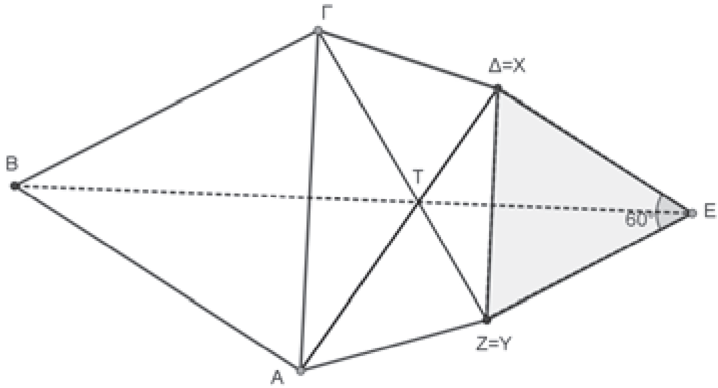
Λύση

Από το σημείο Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ η οποία την τέμνει στο σημείο Χ. Επίσης, από το σημείο Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ΒΓ η οποία την τέμνει στο σημείο Υ. Έστω Τ το κοινό σημείο των ευθειών ΑΔ, ΓΖ και ΒΕ.

Παρατηρούμε ότι $X\hat{E}Y=A\hat{B}\Gamma=60^o$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Έστω $X\equiv\Delta$, σχήμα 1. Τότε, αφού $X\hat{E}Y=60^o$, έπεται ότι $Z\equiv Y$ και

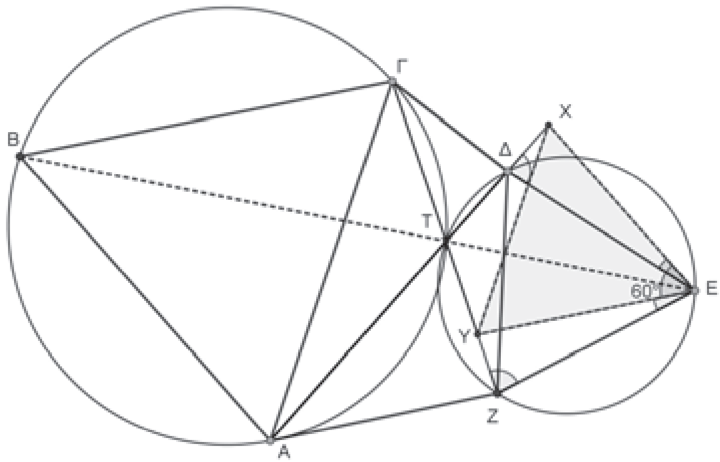
$$\frac{ΓΤ}{ΤΖ} = \frac{ΒΤ}{ΤΕ} = \frac{ΑΤ}{ΤΔ} \Longrightarrow ΑΓ \parallel ΔΖ.$$



Σχήμα 1

2. Αν $Χ \neq Δ$, σχήμα 2, τότε θα είναι και $Υ \neq Ζ$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{ΧΕ}{ΑΒ} = \frac{ΕΤ}{ΤΒ} = \frac{ΥΕ}{ΒΓ} \Longrightarrow ΧΕ = ΥΕ \Rightarrow ΧΕΥ \text{ ισοσκελές τρίγωνο.}$$



Σχήμα 2

Από την ισότητα των γωνιών $Χ\hat{Ε}Υ = Δ\hat{Ε}Ζ = 60^o$, έπεται ότι $Χ\hat{Ε}Δ = Υ\hat{Ε}Ζ$, οπότε

$$Τ\hat{Δ}Ε = Χ\hat{Δ}Ε = 180^o - Τ\hat{Δ}Ε,$$

οπότε το τετράπλευρο ΔΕΖΤ είναι εγγράψιμο. Επειδή $Α\hat{Τ}Γ = Ζ\hat{Τ}Δ = 120^o$, συμπεραίνουμε ότι και το τετράπλευρο ΑΒΓΤ είναι εγγράψιμο.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου στα εγγράψιμα τετράπλευρα ΔΕΖΤ και ΑΒΓΤ παίρνουμε τις ισότητες $ΤΕ = ΤΔ + ΤΖ$ και $ΤΒ = ΤΑ + ΤΓ$, από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε την ισότητα $ΒΕ = ΑΔ + ΓΖ$.

Ασκήσεις για λύση

Α91. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί m, n, a, b, c είναι τέτοιοι ώστε $m > n$ *και*

$$|ma - nb| \leq c(m-n),\ \ |mb - nc| \leq a(m-n)\,, |mc - na| \leq b(m-n).$$

Να αποδείξετε ότι: $a = b = c$.

Α92. Να προσδιορίσετε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ που είναι τέτοιοι ώστε

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 80 \quad \text{και} \quad \alpha + \frac{\beta}{1+\alpha} + \frac{\gamma}{1+\alpha+\beta} + \frac{\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma} = 8.$$

Γ74. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 2 \cdot \hat{Γ}$. Έστω Χ και Υ τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΒΓ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχουν τα σημεία Γ και Α, αντίστοιχα. Έστω ΒΛ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, όπου Λ σημείο της πλευράς ΑΓ. Αν δίνεται ότι $Χ\hat{Λ}Υ = 90^0$, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

Η 15η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια

Μπορντό, Γαλλία, 9–15 Απριλίου 2026

Η **15η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια** πραγματοποιήθηκε από 9 έως 15 Απριλίου 2026 στην πόλη Μπορντό της Γαλλίας. Συνολικά συμμετείχαν 67 χώρες από όλο τον κόσμο με 260 μαθήτριες, από τις οποίες 41 χώρες της Ευρώπης με 161 μαθήτριες.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, μέσω των διαγωνισμών «ΘΑΛΗΣ», «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» και «ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ», επέλεξε τις παρακάτω τέσσερις μαθήτριες ως μέλη της ελληνικής αποστολής:

Μαθήτρια	Τάξη	Σχολείο	Διάκριση
Βασιλάτου Μαρία Καρολίνα	Α΄ Λυκείου	Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης	Συμμετοχή
Ζάχου Ιωάννα	Γ΄ Λυκείου	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Εύφημη Μνεία
Κολέττα Μαρία Στεφανία	Β΄ Λυκείου	Αμερικάνικο Κολλέγιο Ανατόλια	Συμμετοχή
Κράτσα Λυδία	Γ΄ Λυκείου	Σχολή Μωραΐτη	Συμμετοχή

Τις μαθήτριες συνόδευσαν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος** ως αρχηγός και ο μαθηματικός **Ευάγγελος Ζώτος** ως υπαρχηγός. Η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν οφείλεται στον Α. Συνεφακόπουλο και βασίστηκε σε λύσεις των επίσημων αρχείων της διοργάνωσης.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Ουκρανία)

Ένας 2026×2026 πίνακας ονομάζεται *μπορντώ*, αν τουλάχιστον ένα από τα 2026^2 μοναδιαία κελιά του είναι χρωματισμένο κόκκινο. Μια ορθογώνια περιοχή κελιών λέγεται *περιττο-ορθογώνια*, αν περιέχει περιττό αριθμό κόκκινων κελιών. Να προσδιορίσετε τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο M τέτοιον, ώστε σε κάθε 2026×2026 μπορντώ πίνακα να υπάρχει τουλάχιστον μία περιττο-ορθογώνια περιοχή με τουλάχιστον M κελιά.

Σημείωση. Μια ορθογώνια περιοχή έχει πλευρές παράλληλες στις πλευρές του πίνακα και περιέχει ολόκληρο το εσωτερικό της.

Λύση. Η απάντηση είναι

$$M = 1013^2.$$

Παράδειγμα. Χρωματίζουμε κόκκινα τα τέσσερα κεντρικά κελιά του πίνακα. Κάθε ορθογώνιο που περιέχει τουλάχιστον δύο από αυτά περιέχει είτε 2 είτε 4 κόκκινα κελιά. Για να περιέχει ακριβώς ένα κόκκινο κελί, το ορθογώνιο πρέπει να έχει μία κορυφή στο κέντρο του μεγάλου τετραγώνου. Άρα το εμβαδόν του, δηλαδή ο αριθμός των κελιών του, είναι το πολύ 1013^2. Συνεπώς δεν μπορούμε γενικά να εγγυηθούμε περιττο-ορθογώνια περιοχή με περισσότερα από 1013^2 κελιά.

Απομένει να αποδείξουμε ότι πάντα υπάρχει περιττο-ορθογώνια περιοχή με τουλάχιστον 1013^2 κελιά. Έστω, προς άτοπο, ότι κάθε ορθογώνιο εμβαδού τουλάχιστον 1013^2 περιέχει άρτιο αριθμό κόκκινων κελιών. Θεωρούμε ένα αυθαίρετο κελί (x, y). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι βρίσκεται στο κάτω δεξί τμήμα του πίνακα, δηλαδή ότι $x, y \geq 1014$.

Εξετάζουμε τα τέσσερα ορθογώνια

$$[1, x] \times [1, y], \quad [1, x-1] \times [1, y], \quad [1, x] \times [1, y-1], \quad [1, x-1] \times [1, y-1].$$

Καθένα από αυτά έχει εμβαδόν τουλάχιστον 1013^2, άρα περιέχει άρτιο αριθμό κόκκινων κελιών. Κάθε κελί εκτός από το (x, y) ανήκει σε άρτιο αριθμό από αυτά τα τέσσερα ορθογώνια, ενώ το κελί (x, y) ανήκει ακριβώς σε ένα από αυτά. Επομένως, μετρώντας διπλά τις εμφανίσεις των κόκκινων κελιών στα τέσσερα ορθογώνια, συμπεραίνουμε ότι το (x, y) δεν μπορεί να είναι κόκκινο.

Επειδή το (x, y) ήταν αυθαίρετο, καταλήγουμε ότι κανένα κελί δεν είναι κόκκινο, αντίφαση προς το ότι ο πίνακας είναι μπορντώ. Άρα πράγματι υπάρχει περιττο-ορθογώνια περιοχή με τουλάχιστον 1013^2 κελιά.

Πρόβλημα 2 (Ινδία)

Για δοθέντα θετικό ακέραιο n, η Μαρία παίζει ένα παιχνίδι στο οποίο ξεκινά με τον αριθμό 1 σε έναν μαυροπίνακα. Όσες φορές επιθυμεί, μπορεί να επιλέξει έναν ακέραιο j με $1 \leq j \leq n$ και να αντικαταστήσει τον αριθμό V στον μαυροπίνακα με τον αριθμό

$$j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right).$$

Εδώ, ο $R(x)$ συμβολίζει τον πλησιέστερο ακέραιο στον x. Αν ο x βρίσκεται ακριβώς στη μέση από δύο διαδοχικούς ακέραιους, στρογγυλοποιείται προς τα πάνω. Για παράδειγμα, $R(1,3) = 1$ και $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε δοθέν n, υπάρχει θετικός ακέραιος B τέτοιος, ώστε η Μαρία να μην μπορεί ποτέ να καταλήξει με αριθμό μεγαλύτερο του B στον μαυροπίνακα.

β) Για κάθε δοθέν n, έστω $f(n)$ ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να γραφτεί στον μαυροπίνακα μετά από πεπερασμένες το πλήθος αντικαταστάσεις. Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος, ώστε για κάθε $n \geq N$, ο 2026 να διαιρεί τον $f(n)$.

Λύση. Ισχυρισμός 1. Η Μαρία δεν μπορεί ποτέ να φτάσει σε αριθμό μεγαλύτερο από $n!$.

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς το πλήθος των βημάτων. Πριν από το πρώτο βήμα, ο αριθμός της Μαρίας είναι 1, ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του $n!$.

Αν κάποια στιγμή ο αριθμός V της Μαρίας είναι το πολύ $n!$ και επιλέξει $j \in \{1, \dots, n\}$, τότε, επειδή

$$\frac{V}{j} \leq \frac{n!}{j}$$

και η συνάρτηση R είναι μη φθίνουσα, ο νέος αριθμός της θα είναι το πολύ

$$j \cdot R\left(\frac{n!}{j}\right) = n!,$$

αφού $j \leq n$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή.

Έτσι αποδεικνύεται το α), διότι η Μαρία δεν μπορεί ποτέ να καταλήξει σε αριθμό μεγαλύτερο από

$$B = n!.$$

Ισχυρισμός 2. Για κάθε θετικό ακέραιο k και κάθε $n \geq 2^k$, ο $f(n)$ είναι πολλαπλάσιο του 2^k.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε έναν θετικό ακέραιο k και έστω $n \geq 2^k$. Υποθέτουμε ότι ο 2^k δεν διαιρεί τον $f(n)$, και θέτουμε

$$\ell = v_2(f(n)).$$

Τότε $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$. Επομένως ο 2^ℓ διαιρεί τον $f(n)$, ενώ ο $2^{\ell+1}$ δεν τον διαιρεί, οπότε

$$f(n) \equiv 2^\ell \pmod{2^{\ell+1}}.$$

Επειδή $\ell \leq k-1$, έχουμε $2^{\ell+1} \leq 2^k \leq n$. Επιλέγοντας $j = 2^{\ell+1}$, βλέπουμε ότι το $\frac{f(n)}{2^{\ell+1}}$ ισούται με το μισό ενός περιττού ακέραιου. Άρα η στρογγυλοποίηση προς τον πλησιέστερο ακέραιο, με στρογγυλοποίηση προς τα πάνω σε περίπτωση ισοπαλίας, αυξάνει τον αριθμό στον πίνακα. Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό του $f(n)$ ως μέγιστου δυνατού αριθμού. Άρα $2^k \mid f(n)$.

Ισχυρισμός 3. Για κάθε περιττό θετικό ακέραιο A και για κάθε ακέραιο k τέτοιον ώστε $A \leq 2^k$, αν

$$n \geq 2^{2k},$$

τότε ο $f(n)$ είναι πολλαπλάσιο του A.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε έναν περιττό θετικό ακέραιο A, έναν ακέραιο k με $A \leq 2^k$, και $n \geq 2^{2k}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $j \in \{0, \dots, k\}$, το υπόλοιπο του $f(n)$ modulo 2^jA βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο $2^{j-1}A$, χωρίς να παίρνει την τιμή $2^{j-1}A$. Πράγματι, αν το υπόλοιπο ήταν τουλάχιστον $2^{j-1}A$, τότε η Μαρία θα μπορούσε να επιλέξει 2^jA και να αυξήσει τον αριθμό, αφού

$$2^jA \leq 2^{2k} \leq n.$$

Έστω r_j το υπόλοιπο του $f(n)$ modulo 2^jA, για $j = 0, \dots, k$. Έχουμε λοιπόν

$$0 \leq r_j < 2^{j-1}A.$$

Για κάθε $j \in \{0, \dots, k-1\}$, ισχύει

$$r_j \equiv f(n) \equiv r_{j+1} \pmod{2^jA}.$$

Επιπλέον,

$$-2^jA < r_{j+1} - r_j < 2^jA,$$

άρα $r_j = r_{j+1}$. Συνεπώς $r_0 = r_k$.

Από τον Ισχυρισμό 2, ο 2^k διαιρεί τον $f(n)$. Άρα ο 2^k διαιρεί και το $r_k = r_0$. Όμως

$$0 \leq r_0 < A \leq 2^k,$$

οπότε $r_0 = 0$. Συνεπώς $A \mid f(n)$.

Τέλος, επιλέγουμε $A = 1013$ και $k = 10$, αφού $1013 < 2^{10} = 1024$. Από τον Ισχυρισμό 3, για κάθε

$$n \geq 2^{20} = 1024^2$$

ισχύει $1013 \mid f(n)$. Από τον Ισχυρισμό 2, για τα ίδια n, ισχύει επίσης $2 \mid f(n)$. Επειδή $\gcd(2{,}1013) = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$2026 = 2 \cdot 1013 \mid f(n).$$

Πρόβλημα 3 (Βουλγαρία)

Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y να ισχύει

$$\boldsymbol{f\left(\left(f(x)+f(y)\right)^2\right) = (x+y)f(x+y).}$$

Λύση. Η απάντηση είναι

$$f(x) = x, \qquad f(x) = -x, \qquad f(x) = 0.$$

Ελέγχεται άμεσα ότι και οι τρεις παραπάνω συναρτήσεις ικανοποιούν την εξίσωση. Συμβολίζουμε τη δοθείσα εξίσωση με (*).

Βήμα Α.1: $f(0) = 0$.

Έστω $T = f^{-1}(0)$ το σύνολο των μηδενικών της f. Θέτοντας $x = y = 0$ στην (*), παίρνουμε $f(4f(0)^2) = 0$, ενώ με $x = 0$ και $y = 4f(0)^2$, παίρνουμε $f(f(0)^2) = 0$. Άρα $4f(0)^2 \in T$ και $f(0)^2 \in T$.

Αν $t_1, t_2 \in T$, τότε, θέτοντας διαδοχικά $y = t_1$ και $y = t_2$, έχουμε

$$(x+t_1)f(x+t_1) = f(f(x)^2) = (x+t_2)f(x+t_2) \tag{1}$$

Θέτοντας $x = -t_1$ στην (1), παίρνουμε ότι $t_2 - t_1 \in T$. Επομένως $4f(0)^2 - f(0)^2 = 3f(0)^2 \in T$, και άρα

$$3f(0)^2 - f(0)^2 = 2f(0)^2 \in T.$$

Τέλος, θέτοντας $x = y = f(0)^2$ στην (*), παίρνουμε $f(0) = 2f(0)^2 f(2f(0)^2) = 0$.

Βήμα Α.2: *Η f είναι 1-1 ή είναι ταυτοτικά μηδέν.*

Θέτοντας $y = 0$ στην (*), έχουμε

$$f(f(x)^2) = xf(x) \tag{2}$$

Στην (2), αντικαθιστούμε το x με $f(x)^2$. Τότε $f(x^2f(x)^2) = f(x)^2 f(f(x)^2) = xf(x)^3$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (*) με $\left(f(x)+f(y)\right)^2$, παίρνουμε

$$(x+y)f(x+y)\left(f(x)+f(y)\right)^2 = \left(f(x)+f(y)\right)^2 f\left(\left(f(x)+f(y)\right)^2\right).$$

Επειδή ισχύει η (2), το δεξί μέλος είναι διαδοχικά ίσο με

$$f\left(f\left(\left(f(x)+f(y)\right)^2\right)^2\right) = f((x+y)^2 f(x+y)^2) = (x+y)f(x+y)^3 \tag{3}$$

Άρα, για όλα τα $x \neq -y$,

$$f(x+y)\left(f(x+y)-f(x)-f(y)\right)\left(f(x+y)+f(x)+f(y)\right) = 0.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι είτε $T = \{0\}$, είτε $T = \mathbb{R}$. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, και έστω μη μηδενικό $t \in T$.

Από την (1) έχουμε ότι

$$(0 - t) - t = -2t \in T.$$

Θέτουμε στην (3) ένα $x \notin T$ και $y = -2t$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $f(x + y) = 0$, τότε $x + y \in T$, οπότε $x = (x + y) - y \in T$, άτοπο.
2. Αν $f(x + y) = f(x) + f(y) = f(x)$, τότε από την (1) έχουμε $(x + y)f(x + y) = xf(x)$.

- Άρα $$xf(x) = (x + y)f(x),$$

  οπότε $f(x) = 0$, που αντιβαίνει στο ότι $x \notin T$.

3. Αν $-f(x + y) = f(x) + f(y) = f(x)$, τότε πάλι από την (1) έχουμε

$$(x + y)f(x + y) = xf(x),$$

- Άρα $$xf(x) = -(x + y)f(x).$$
- Επομένως είτε $2x = -y = 2t$, είτε $f(x) = 0$. Και στις δύο περιπτώσεις παίρνουμε αντίφαση με $t \in T$ και $x \notin T$.

Άρα ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. Για να ολοκληρώσουμε το βήμα, υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε $T = \{0\}$. Έστω $f(a) = f(b)$. Αν ένας από τους a, b είναι μηδέν, τότε, επειδή $T = \{0\}$, και ο άλλος είναι μηδέν, άρα $a = b = 0$. Αν κανείς δεν είναι μηδέν, τότε

$$af(a) = f(f(a)^2) = f(f(b)^2) = bf(b),$$

Οπότε

$$(a - b)f(a) = 0.$$

Επειδή $f(a) \neq 0$, έχουμε $a = b$. Άρα η f είναι 1-1.

Βήμα Β: *Η f είναι προσθετική.*

Εφαρμόζοντας την (*) στα ζεύγη (x, y) και $(x + y, 0)$, παίρνουμε

$$f\left(\left(f(x) + f(y)\right)^2\right) = (x + y)f(x + y) = f(f(x + y)^2),$$

αφού $f(0) = 0$. Από την 1-1 ιδιότητα προκύπτει ότι, για όλα τα πραγματικά x, y,

$$f(x + y)^2 = \left(f(x) + f(y)\right)^2.$$

Δηλαδή

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad ή \quad -f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{4}$$

Θέτοντας $y = -x$, παίρνουμε $f(-x) = -f(x)$ για κάθε πραγματικό x. Υποθέτουμε ότι για κάποια πραγματικά x, y ισχύει

$$f(x + y) \neq f(x) + f(y) \tag{5}$$

Τότε, από την (4), πρέπει να ισχύει

$$-f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Εφαρμόζουμε την (4) στο ζεύγος $(x+y,-y)$. Αν $\quad f(x+y-y)=f(x+y)-f(y)$,

τότε $\quad f(x)+f(y)=f(x+y)$, που αντιβαίνει στην (5).

Αν $-f(x+y-y)=f(x+y)-f(y)$,

τότε, σε συνδυασμό με $-f(x+y)=f(x)+f(y)$, παίρνουμε $f(y)=0$, άρα $y=0$. Επομένως

$$f(x)+f(y)=f(x+y),$$

που πάλι αντιβαίνει στην (5). Άρα η f είναι προσθετική.

Βήμα Γ: Οι μόνες υπόλοιπες λύσεις είναι $f(x)=x$ και $f(x)=-x$

Γνωρίζουμε ότι η f είναι προσθετική, 1-1, και ικανοποιεί την (2). Θέτοντας $x=1$ στην (2), παίρνουμε

$$f(f(1)^2)=f(1).$$

Από την 1-1 ιδιότητα έπεται ότι $\quad f(1)^2=1.$

Αν η f είναι λύση της εξίσωσης, τότε και η $-f$ είναι λύση. Συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\quad f(1)=1.$

Στην (2), αντικαθιστούμε το x με $x+1$. Τότε $\quad f(f(x)^2+2f(x)+1)=xf(x)+f(x)+x+1.$

Αφαιρώντας την εξίσωση $\quad f(f(x)^2)=xf(x),$

παίρνουμε

$$2f\big(f(x)\big)=f(x)+x \tag{6}$$

Στην (2), αντικαθιστούμε το x με $f(2x)$. Έχουμε $\quad f\left(f\big(f(2x)\big)^2\right)=f(2x)f\big(f(2x)\big).$

Με χρήση της (6), αυτό δίνει $\quad f\left(\Big(2f\big(f(x)\big)\Big)^2\right)=4f(x)f\big(f(x)\big),$

και στη συνέχεια $\quad f(f(x)^2+2xf(x)+x^2)=2f(x)^2+2xf(x).$

Επειδή η f είναι προσθετική, ισοδύναμα $\quad f(f(x)^2)+2f\big(xf(x)\big)+f(x^2)=2f(x)^2+2xf(x).$

Στη μετάβαση από τη δεύτερη στην τρίτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε την (6). Επίσης, από τις (2) και (6),

$$2f\big(xf(x)\big)=2f\big(f(f(x)^2)\big)=f(x)^2+f(f(x)^2)=f(x)^2+xf(x).$$

Άρα η προηγούμενη εξίσωση γίνεται $\quad xf(x)+\big(f(x)^2+xf(x)\big)+f(x^2)=2f(x)^2+2xf(x),$

και επομένως $\quad f(x^2)=f(x)^2\geq 0.$

Συνεπώς η f είναι μη αρνητική για κάθε μη αρνητικό πραγματικό. Μια προσθετική συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα είναι γραμμική. Μαζί με το $f(1)=1$, αυτό δίνει $f(x)=x$. Λαμβάνοντας υπόψη και την περίπτωση της $-f$, παίρνουμε επίσης $f(x)=-x$. Μαζί με τη μηδενική συνάρτηση, αυτές είναι όλες οι λύσεις.

Πρόβλημα 4 (Ολλανδία)

Έστω $1=a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots$ μια άπειρη ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε

$$a_n=a_{2n}+a_{2n+1}$$

για όλους τους θετικούς ακέραιους n. Για $r = 2026^{2026}$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}$.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} = 1.$$

Απόδειξη του λήμματος. Θεωρούμε τις ισότητες $a_k = a_{2k} + a_{2k+1}$

για $k = 1, \ldots, n-1$. Προσθέτοντάς τες, παίρνουμε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n-1}.$$

Επειδή $a_1 = 1$, έχουμε $a_n + \cdots + a_{2n-1} = (a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n-1}) - (a_2 + \cdots + a_{n-1}) = 1$.

Το λήμμα αποδείχθηκε.

Κάτω φράγμα. Εφαρμόζοντας το λήμμα για $n = r$, παίρνουμε $a_r + \cdots + a_{2r-1} = 1$.

Επειδή η ακολουθία είναι φθίνουσα, καθένας από τους όρους $a_{r+1}, \ldots, a_{2r-1}$

είναι μικρότερος ή ίσος του a_r. Άρα $ra_r \geq a_r + \cdots + a_{2r-1} = 1$, οπότε $a_r \geq \frac{1}{r}$.

Άνω φράγμα. Εφαρμόζοντας το λήμμα για $n = \frac{r}{2} + 1$, παίρνουμε $a_{r/2+1} + \cdots + a_{r+1} = 1$.

Παρατηρούμε ότι καθένας από τους όρους $a_{r/2+1}, \ldots, a_{r-1}$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του a_r. Επομένως

$$\frac{r}{2} a_r + a_{r+1} = \left(\frac{r}{2} - 1\right) a_r + a_r + a_{r+1} \leq a_{r/2+1} + \cdots + a_{r+1} = 1.$$

Επιπλέον,

$$a_{r+1} \geq \frac{1}{r+1},$$

κάτι που αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως το κάτω φράγμα, εφαρμόζοντας το λήμμα για

$n = r + 1$.

Άρα $\frac{r}{2} a_r \leq 1 - \frac{1}{r+1} = \frac{r}{r+1}$, και τελικά $a_r \leq \frac{2}{r+1}$.

Πρόβλημα 5 (Ηνωμένο Βασίλειο)

Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AC > AB$. Συμβολίζουμε με ω τον περιγεγραμμένο κύκλο του και με O το περίκεντρό του. Έστω K το σημείο τομής των εφαπτομένων στον ω στα σημεία B και C. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABK τέμνει την ευθεία BC ξανά στο $Z \neq B$. Έστω L το μέσο του KZ. Έστω X το σημείο τομής των ευθειών KZ και AB. Έστω V το σημείο στον περιγεγραμμένο κύκλο του ABL, στην ίδια πλευρά της ευθείας BC με το A, τέτοιο ώστε η ευθεία OV να είναι κάθετη στην ευθεία KZ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία LV είναι κάθετη στην ευθεία CX.

Λύση. Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε τρεις ισχυρισμούς:

1. Το σημείο L ανήκει στην ευθεία AC.
2. Το ίχνος N της καθέτου από το O στην KZ ανήκει στον κύκλο (ABL).
3. Οι ευθείες VL και CX είναι κάθετες.

Κάθε ισχυρισμός χρησιμοποιεί τους προηγούμενους. Συμβολίζουμε με M το μέσο του BC, με N το ίχνος της καθέτου από το O στην KZ, με Y το σημείο τομής της ευθείας AC με τον κύκλο (ABK), και με U το σημείο τομής της ευθείας AK με τον κύκλο (ABC).

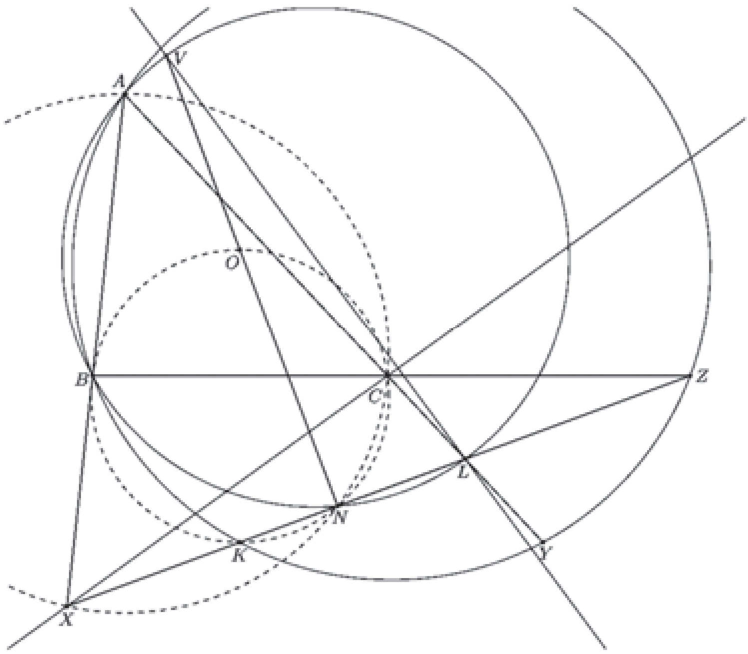
Ισχυρισμός 1. Το σημείο L ανήκει στην ευθεία AC.

Απόδειξη. Προεκτείνουμε την ευθεία AC ώστε να τέμνει ξανά τον κύκλο (ABK) στο Y. Από το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης έχουμε

$$\angle ZYA = \angle ZBA = \angle KCY \qquad \text{και} \qquad \angle AYK = 180° - \angle KBA = \angle ACB.$$

Άρα
$$ZY \parallel KC \quad \text{και} \quad KY \parallel CZ,$$

αντίστοιχα. Επομένως το $KCZY$ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή το L είναι το μέσο του KZ, είναι επίσης το μέσο του CY. Άρα το L ανήκει στην ευθεία AC.



Ισχυρισμός 2. Το ίχνος N της καθέτου από το O στην KZ ανήκει στον κύκλο (ABL).

Απόδειξη. Επειδή $\angle OCK = \angle ONK = \angle KBO = 90°$, τα σημεία O, C, N, K, B είναι ομοκυκλικά. Από αυτό παίρνουμε $\angle BNK = \angle BCK = \angle BAC = \angle BAL$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι $L \in AC$, σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 1. Άρα τα σημεία A, B, N, L είναι ομοκυκλικά, δηλαδή το N ανήκει στον κύκλο (ABL).

Ισχυρισμός 3. Οι ευθείες VL και CX είναι κάθετες.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι το τετράπλευρο $ACNX$ είναι εγγράψιμο.

Πράγματι, επειδή

$$\angle KBO = \angle KCO = \angle KNO = 90°,$$

το $OCNKB$ είναι εγγράψιμο. Άρα $\angle LNC = 180° - \angle CNK = \angle KBC = \angle BAC = \angle XAC$.

Επομένως το τετράπλευρο $ACNX$ είναι εγγράψιμο.

Τώρα, από τους προηγούμενους ισχυρισμούς και από το $VN \perp KZ$, έχουμε

$$\angle LXC = \angle NXC = \angle NAC = \angle NAL = \angle NVL = 90^\circ - \angle VLN = 90^\circ - \angle VLX.$$

Συνεπώς $CX \perp LV$.

Πρόβλημα 6 (Ολλανδία)

Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω n ένας θετικός ακέραιος τέτοιος, ώστε ο p να μην διαιρεί τον n. Έστω k ο αριθμός των θετικών διαιρετών του n, και

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

οι θετικοί διαιρέτες του n. Για $i = 1, 2, \dots, k$, έστω c_i ο αριθμός των θετικών διαιρετών ℓ του d_i^2 τέτοιων, ώστε το $d_i - \ell$ να διαιρείται με τον p. Να αποδείξετε ότι

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Λύση. Ισχυρισμός. Το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών διαιρετών (d, d') του n, με $d \equiv d' \pmod{p}$, όπου επιτρέπεται να είναι $d = d'$, είναι τουλάχιστον

$$\frac{k^2}{p-1}.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Για κάθε $t \in \{1,2, \dots, p-1\}$, έστω N_t το πλήθος των διαιρετών d του n που είναι ισοϋπόλοιποι με t modulo p. Επειδή $p \nmid n$, κανένας διαιρέτης του n δεν είναι πολλαπλάσιο του p, άρα

$$k = N_1 + N_2 + \cdots + N_{p-1}.$$

Το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (d, d') με $d \equiv d' \pmod{p}$ είναι

$$N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{p-1}^2.$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz, $N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{p-1}^2 \geq \frac{(N_1+N_2+\cdots+N_{p-1})^2}{p-1} = \frac{k^2}{p-1}$.

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το πλήθος των ζευγών (d_i, ℓ), όπου $d_i \mid n$, $\ell \mid d_i^2$ και

$$p \mid d_i - \ell,$$

είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών διαιρετών (d, d') του n με

$$d \equiv d' \pmod{p}.$$

Θα κατασκευάσουμε, για κάθε τέτοιο ζεύγος (d_i, d_j), ένα ζεύγος (a, b) με

$$a \mid n, \qquad b \mid a^2, \qquad p \mid a - b,$$

και θα δείξουμε ότι όλα τα ζεύγη (a, b) που προκύπτουν είναι διαφορετικά.

Για ζεύγος (d_i, d_j) με $d_i \equiv d_j \pmod{p}$, ορίζουμε

$$a = \operatorname{lcm}(d_i, d_j), \qquad b = \frac{d_j^2}{\gcd(d_i, d_j)}.$$

Επειδή $d_i, d_j \mid n$, έχουμε

$$a = \operatorname{lcm}(d_i, d_j) \mid n.$$

Επίσης,

$$b \mid d_j^2 \mid \operatorname{lcm}(d_i, d_j)^2 = a^2.$$

Ακόμη,

$$\operatorname{lcm}(d_i, d_j) = \frac{d_i d_j}{\gcd(d_i, d_j)},$$

οπότε

$$(a, b) = \left(d_i \cdot \frac{d_j}{\gcd(d_i, d_j)}, d_j \cdot \frac{d_j}{\gcd(d_i, d_j)}\right).$$

Επειδή $\frac{d_j}{\gcd(d_i, d_j)}$ είναι ακέραιος και $p \mid d_i - d_j$, συμπεραίνουμε ότι

$$p \mid a - b.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι τα ζεύγη (a, b) που δημιουργούνται με αυτόν τον τρόπο είναι όλα διαφορετικά. Υποθέτουμε ότι το ίδιο ζεύγος (a, b) προκύπτει τόσο από το (d_i, d_j) όσο και από το (d'_i, d'_j). Τότε

$$\gcd(a, b) = \gcd\left(d_i \cdot \frac{d_j}{\gcd(d_i, d_j)}, d_j \cdot \frac{d_j}{\gcd(d_i, d_j)}\right).$$

Άρα

$$\gcd(a, b) = \gcd(d_i, d_j) \cdot \frac{d_j}{\gcd(d_i, d_j)} = d_j.$$

Ομοίως, $\gcd(a, b) = d'_j$, άρα $d_j = d'_j$.

Επιπλέον,

$$\frac{d_i}{d_j} = \frac{a}{b} = \frac{d'_i}{d'_j}.$$

Επομένως

$$d_i = \frac{a}{b} d_j = \frac{a}{b} d'_j = d'_i.$$

Άρα

$$(d_i, d_j) = (d'_i, d'_j).$$

Συνεπώς το πλήθος των ζευγών (d_i, ℓ) που μετρώνται στο

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k$$

είναι τουλάχιστον το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών διαιρετών (d, d') του n με $d \equiv d' \pmod{p}$. Από τον Ισχυρισμό παίρνουμε

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k \geq \frac{k^2}{p-1}.$$

Άρα

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2,$$

όπως θέλαμε.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

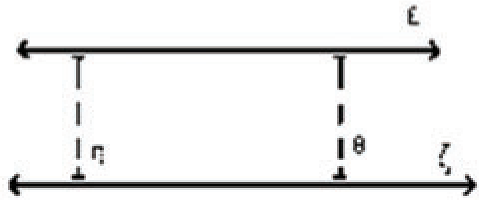
Θέμα 1ο. Το επαγωγικό σύστημα

Η δημιουργία του επαγωγικού συστήματος

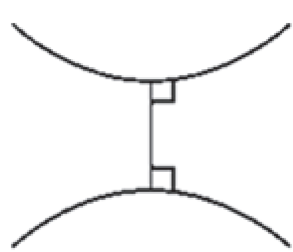
Πριν απ΄ όλα ένα πράγμα είναι ξεκάθαρο: δεν είναι δυνατό να αποδειχθούν όλες οι σωστές προτάσεις. Και πραγματικά ας σκεφτούμε, πως αποδείχνονται οι γεωμετρικές προτάσεις. Συνήθως βασίζονται σε άλλες προτάσεις, που έχον αποδειχθεί νωρίτερα. Οι προτάσεις αυτές με τη σειρά τους αποδείχνονται με παραπομπές σε κάποια άλλα θεωρήματα κ.ο.κ. Τις παραπομπές θα μπορούμε να τις συνεχίσουμε χωρίς τελειωμό κι έτσι η διαδικασία απόδειξης θα ήταν ατέλειωτη. Τί θα έπρεπε λοιπόν να γίνει; Το γεγονός αυτό το παρατήρησαν από την αρχαιότητα ακόμη, το σημείωσε μάλιστα και ο Αριστοτέλης (4ος αιώνας π.Χ.). Και να που οι γεωμέτρες έφτασαν ως την εξαιρετικά τολμηρή σκέψη, ότι όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες των σωμάτων μπορούν να εξαχθούν από λίγες βασικές προτάσεις που λέγονται ***αξιώματα***. Οι προτάσεις αυτές γίνονται δεκτές χωρίς αποδείξεις. Την ορθότητά τους την επικύρωνε η πολύχρονη πείρα. Πολλοί γεωμέτρες επεδίωκαν να ανακαλύψουν όλα τα αξιώματα τα απαραίτητα για τη δημιουργία της γεωμετρίας. Το σύστημα σύμφωνα με το οποίο κάθε πρόταση βγαίνει με βάσει λογικούς κανόνες από πεπερασμένο αριθμό προτάσεων, που γίνονται δεκτές χωρίς αποδείξεις, ονομάστηκε ***αξιωματικό σύστημα***.

Το πρώτο τέτοιο σύστημα γεωμετρίας, τα ***«Στοιχεία»***, προσπάθησε να διατυπώσει τον πέμπτο π.Χ. αιώνα ο Ιπποκράτης ο Χίος. Έγιναν μερικές ακόμη προσπάθειες στον τομέα αυτόν, με τελειότερη τα περίφημα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που γράφτηκαν γύρω στο 300 π.Χ. και έμειναν πάνω από 2 χιλιάδες χρόνια σαν πρότυπο μαθηματικής ακρίβειας.

Ο Ευκλείδης χώρισε τις προτάσεις, που έγιναν δεκτές χωρίς αποδείξεις, σε ***αξιώματα*** και ***αιτήματα***. Αιτήματα θεωρούσε τις προτάσεις εκείνες, όπου υποστηρίζεται, ότι είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν μερικές από τις πιο απλές γεωμετρικές κατασκευές π.χ, : 1) από δύο σημεία περνά μόνο μία ευθεία γραμμή, 2) Με δοσμένο σημείο και δοσμένη ακτίνα γράφεται μια μόνο περιφέρεια κύκλου.



Εύκολα φαίνεται, πως οι παραπάνω κατασκευές είναι ακριβώς εκείνες που γίνονται με τον διαβήτη και τον κανόνα. Κάθε κατασκευή στη γεωμετρία του Ευκλείδη πραγματοποιείται με τη διαδοχική εκτέλεση απλών κατασκευών, δηλ. χαράζοντας ευθείες, περιφέρειες και βρίσκοντας τα σημεία τομής τους.



Γι΄ αυτό λέμε ότι η γεωμετρία του Ευκλείδη είναι γεωμετρία του κανόνα και του διαβήτη. Κάθε κατασκευή στη γεωμετρία του Ευκλείδη πραγματοποιείται με τη διαδοχική εκτέλεση απλών κατασκευών, δηλ. χαράζοντας ευθείες, περιφέρειες και βρίσκοντας τα σημεία τομής τους. Γι΄ αυτό λέει ότι η γεωμετρία του Ευκλείδη είναι γεωμετρία του κανόνα και του διαβήτη.

Ανάμεσα στα αιτήματα του Ευκλείδη ιδιαίτερη θέση κατέχει το λεγόμενο πέμπτο (V) αίτημα για τις παράλληλες γραμμές. Στα «Στοιχεία» διατυπώνεται ως εξής: αν δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο τέμνονται από μια τρίτη ευθεία κι αν το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά γωνιών α και β είναι μικρότερο των 2 ορθών γωνιών, τότε αυτές οι δυο ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας προς το οποίο βρίσκονται αυτές οι γωνίες. Το αίτημα αυτό έπαιξε τεράστιο ρόλο στην εξέλιξη της γεωμετρίας.

Εκτός από τα αιτήματα, ο Ευκλείδης καθιέρωσε και μερικές γενικές προτάσεις, που ισχύουν όχι μόνο για τα γεωμετρικά μεγέθη, αλλά και για τους αριθμούς. Οι προτάσεις αυτές είναι τα αξιώματα:

1. Δύο μεγέθη, ίσο το καθένα τους με ένα τρίτο μέγεθος, είναι μεταξύ τους ίσα,

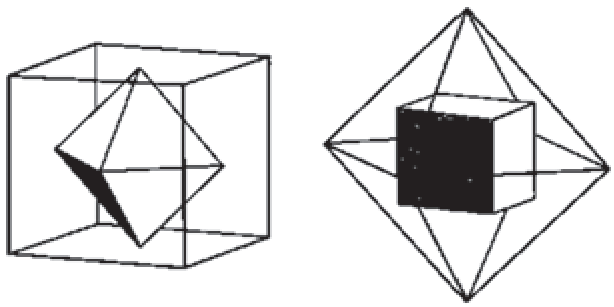
2. Αν σε ίσα μεγέθη προστεθούν άλλα ίσα, τότε και τα αθροίσματα θα είναι ίσα,

3. το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος του, κλπ.

Με βάση τα αιτήματα και τα αξιώματά του ο Ευκλείδης ανάπτυξε ολόκληρη την επιπεδομετρία και με τη βοήθειά της διατύπωσε τα στοιχεία της Άλγεβρας και τη θεωρία για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Στο έργο του περιέχεται ακόμα και η γενική θεωρία των σχέσεων, που χρησιμοποιείται στη θεωρία της ομοιότητας η θεωρία των αριθμών, η μέθοδος της μέτρησης του εμβαδού και του όγκου και οι βάσεις της στερεομετρίας.

Το στεφάνη της δάφνης των «Στοιχείων» του Ευκλείδη είναι η θεωρία για τα κανονικά κυρτά πολύεδρα, δηλ. για τα πολύεδρα που όλες οι έδρες τους είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι στερεές γωνίες στις κορυφές είναι κι αυτές κανονικές και ίσες. Ο Ευκλείδης απόδειξε, ότι υπάρχουν **πέντε τύποι κανονικών πολυέδρων**: το τετράεδρο, το εξάεδρο ή κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο, το εικοσάεδρο κι ότι δεν υπάρχουν άλλα. Μπορούμε να πούμε ότι με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη τέθηκαν οι βάσεις όχι μόνο της γεωμετρίας, αλλά και του συνόλου των Μαθηματικών της αρχαιότητας.

Σε νέα πιο ψηλή βαθμίδα μελέτης των βάσεων της Γεωμετρίας έφτασαν οι μαθηματικοί πολύ αργότερα, τον 19ο αιώνα. Τότε ακριβώς διευκρινίστηκε ότι ο Ευκλείδης δεν είχε απαριθμήσει όλα τα αξιώματα, που ήταν οπωσδήποτε απαραίτητα για τη δημιουργία της Γεωμετρίας. Ωστόσο ο Ευκλείδης, μολονότι δεν τα είχε διατυπώσει, τα χρησιμοποιούσε στις αποδείξεις του. Αυτό όμως δεν μειώνει τον ρόλο του Ευκλείδη, που πρώτος απόδειξε πώς είναι δυνατό και πώς πρέπει να διατυπωθεί η μαθηματική θεωρία. Η επαγωγική μέθοδος, που επινόησε ο Ευκλείδης, εδραιώθηκε σταθερά στα Μαθηματικά. Με την έννοια αυτή, όλοι οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί, ακόμα κι οι σύγχρονοί μας, είναι μαθητές του Ευκλείδη.



Κατά τη διατύπωση της επαγωγικής μεθόδου της Γεωμετρίας διαπιστώθηκε ότι οι αποδείξεις δεν χρησιμεύουν μόνο για να διαπιστωθεί η αλήθεια μιας πρότασης, αλλά και να καθοριστούν οι αμοιβαίες σχέσεις ανάμεσα στις προτάσεις.

Έτσι οι αποδείξεις βοηθούν να κατανοηθεί η ουσία, η έννοια των μαθηματικών προτάσεων. Ειδικότερα στην ευκλείδεια Γεωμετρία μπορούμε να ξεχωρίσουμε όλες εκείνες τις προτάσεις που αποδείχνονται χωρίς το αίτημα της παραλληλίας και αποτελούν τη λεγόμενη ***απόλυτη Γεωμετρία***.

Θέμα 2ο. Οι αριθμοί μας διασκεδάζουν

Παράδειγμα1:

Στην ακολουθία των φυσικών αριθμών διαγράψτε τον πρώτο αριθμό p και όλα τα πολλαπλάσιά του, από τους υπόλοιπους αριθμούς σχηματίστε την εξής ακολουθία:

μονάδα, άθροισμα των πρώτων δύο αριθμών, άθροισμα των τριών πρώτων αριθμών κλπ.

Στην ακολουθία που διαμορφώθηκε τώρα, διαγράψτε πάλι τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του p και ξανασχηματίστε ακολουθία αθροισμάτων με τον ίδιο τρόπο όπως την πρώτη φορά..

Αν γίνει αυτό p φορές και μάλιστα αν την τελευταία φορά δεν κάνετε καμιά διαγραφή, οι αριθμοί που θα σχηματιστούν θα είναι p –στές δυνάμεις των φυσικών αριθμών.

μια απάντηση στο παράδειγμα 1:

έστω p=3. Στην περίπτωση αυτή, από την ακολουθία των φυσικών αριθμών πρέπει να διαγραφούν οι αριθμοί: 3, 6, 9, 12, …

Από το υπόλοιπο της ακολουθίας: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, …

σχηματίζουμε τη νέα ακολουθία: 1, 3, 7, 12, 19, 27 , 37, 48, …

Διαγράφοντας τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 3, σχηματίζουμε την τρίτη ακολουθία:

1, 8, 27, 64

που είναι η ακολουθία των κύβων: $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

Δώστε ένα παράδειγμα και απάντηση για p=4.

Παράδειγμα 2:

κάθε παίκτης να έχει μπροστά του έναν πίνακα τρίτων δυνάμεων. Ορίζουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό και θέτουμε το πρόβλημα: να παρουσιαστεί ο αριθμός αυτός σαν αλγεβρικό άθροισμα πέντε τρίτων δυνάμεων.

Έστω ότι ορίσαμε τον αριθμό 1. Από τον πίνακα τρίτων δυνάμεων διαλέγουμε:

$$1=4^3-3^3-3^2-2^3-1^3 \text{ ή } 1=6^3-5^3-4^3-3^3+1^3$$

Σκοπός του παιχνιδιού: μέσα σε ορισμένο χρόνο να διαλεχτούν όσο το δυνατόν περισσότερες λύσεις του προβλήματος.

Ίσως να σας δημιουργηθεί η απορία: «Είναι δυνατό να παρουσιαστεί ο οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός με τη μορφή αλγεβρικού αθροίσματος από πέντε τρίτες δυνάμεις φυσικών αριθμών και μάλιστα με πολλούς τρόπους;»

Μάλιστα ο οποιοσδήποτε και μάλιστα με άπειρους τρόπους. Το απόδειξε αυτό ο Πολωνός μαθηματικός **Sierpinski.**

Θέμα 3ο. Carl Friederich Gauss: Ο πρίγκηπας των Μαθηματικών[*]

Ο ***Αρχιμήδης***, ο ***Νεύτων*** κι ο ***Gauss***, αυτοί οι τρεις αποτελούν μόνοι τους μια κλάση ανάμεσα στους μεγάλους μαθηματικούς, και δεν είναι δουλειά των κοινών θνητών να επιχειρήσουν να τους κατατάξουν ως προς την αξία τους. Και οι τρεις προκάλεσαν παλιρροϊκά κύματα, τόσο στα καθαρά[1] όσο και στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ο Αρχιμήδης έτρεφε μεγαλύτερη εκτίμηση για τα καθαρά Μαθηματικά του, απ΄ ότι για τις εφαρμογές τους· Για τον Νεύτωνα φαίνεται ότι οι επιστημονικές χρήσεις των Μαθηματικών επινοήσεών του αποτελούσαν τη βασική καταξίωσή τους, ενώ ο Gauss δήλωνε ότι του ήταν αδιάφορο αν δούλευε στην καθαρή ή στην εφαρμοσμένη πλευρά των Μαθηματικών. Παρ΄ όλα αυτά η δουλειά του, του έδωσε το στέμμα της βασίλισσας των Μαθηματικών στην ανώτερη Αριθμητική, που στις μέρες του ήταν η λιγότερο πρακτική κατεύθυνση των Μαθηματικών.

Η καταγωγή του Gauss, του πρίγκιπα των Μαθηματικών, ήταν κάθε άλλο παρά βασιλική. Γιος φτωχών γονέων, γεννήθηκε σε ένα άθλιο αγρόκτημα στο Btunswik (Braunschweig) της Γερμανίας, στις 30 Απρίλη του 1777. Ο παππούς του από τη μεριά του πατέρα του ήταν ένας φτωχός αγρότης. Το 1740 ο παππούς εγκαταστάθηκε στο Btunswik, όπου δουλεύοντας σκληρά ως κηπουρός ζούσε μια στερημένη ζωή. Ο δεύτερος από τους τρεις γιους του ο Gerhard Diederich, γεννημένος το 1744, έγινε πατέρας του Gauss. Πέρα απ΄ αυτή τη μοναδική τιμή, σ΄ όλη του τη ζωή που την πέρασε δουλεύοντας σκληρά ως κηπουρός, φύλακας καναλιών και κτίστης, ο Gerhard δεν γνώρισε καμιά άλλη διάκριση οποιουδήποτε είδους.

Η εικόνα που έχουμε για τον πατέρα του Gauss ενός άκρως έντιμου και ευσυνείδητου, άξεστου ανθρώπου του οποίου η τραχύτητα προς τους γιους του άγγιζε μερικές φορές τα όρια της κτηνωδίας. Τα λόγια του ήταν σκληρά και το χέρι του βαρύ. Με την εντιμότητά και την επιμονή του πέτυχε βαθμιαία μια ορισμένη βελτίωση της ζωής του, όμως τα πράγματα δεν ήταν ποτέ εύκολα. Δεν αποτελεί έκπληξη που ένας τέτοιος άνθρωπος έκανε ό,τι περνούσε από το χέρι του για να σταματήσει την εξέλιξη του μικρού γιου του και να τον εμποδίσει να μορφωθεί σύμφωνα με τις ικανότητές του. Αν είχε γίνει το δικό του, το προικισμένο αγόρι θα είχε ακολουθήσει κάποια από τα επαγγέλματα της οικογένειάς, και μόνο μια σειρά

[*] Το κείμενο είναι παρμένο από το βιβλίο του E.T. Bell (με τίτλο: ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΊ, τόμος Ι, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1995)

[1]κατά τη γνώμη μας, η διάκριση των Μαθηματικών σε *καθαρά κι εφαρμοσμένα* είναι τουλάχιστον ατυχής…

από ευτυχείς συγκυρίες έσωσαν τον Gauss από το να γίνει κηπουρός ή κτίστης. Ως παιδί ήταν υπάκουος και έδειχνε σεβασμό· και παρόλο ότι ποτέ, ούτε και σε μεγαλύτερη ηλικία, δεν κριτίκαρε τον φτωχό του πατέρα, έκανε σαφές πως ποτέ δεν είχε αισθανθεί πραγματική στοργή γι΄ αυτόν. Ο Gerhard πέθανε το 1806. Στο μεταξύ, ο γιος του, τον οποίο είχε προσπαθήσει με κάθε τρόπο να αποθαρρύνει, είχε ήδη δημιουργήσει ένα αθάνατο έργο.

Ο Gauss πραγματικά ευτύχησε από την πλευρά της μητέρας του. Ο πατέρας της Δωροθέας Benz, ήταν λατόμος και πέθανε στα τριάντα του από φυματίωση, αποτέλεσμα των ανθυγιεινών συνθηκών εργασίας, αφήνοντας πίσω του δύο παιδιά: τη Δωροθέα και τον νεώτερο αδερφό της, τον Friederich.

Εδώ γίνεται φανερή η καταγωγή της μεγαλοφυΐας του Gauss. Καταδικασμένος από την ανέχεια να ασκεί το επάγγελμα του υφαντή, ο Friederich ήταν ένας ιδιαίτερα ευφυής, καλόκαρδος άνθρωπος, του οποίου το οξύ και ανήσυχο μυαλό, βοσκούσε σε χωράφια απομακρυσμένα από τον περιορισμένο χώρο της καθημερινής του ζωής. Στο επάγγελμά του ο Friederich γρήγορα απέκτησε τη φήμη απέκτησε

Τη φήμη του υφαντή των καλύτερων δαμασκηνών, μια τέχνη που την κατέκτησε ολομόναχος. Βρίσκοντας ένα ανάλογης ιδιοσύστασης μυαλό στο παιδί της αδερφής του, ο έξυπνος θείος Friederich ακόνιζε το μυαλό του πάνω σε κείνο του μεγαλοφυούς νεαρού και έκανε ό,τι μπορούσε για να ενεργοποιήσει τη λογική του αγοριού με ειρωνικές παρατηρήσεις και με μια κάπως κοροϊδευτική φιλοσοφία για τη ζωή.

Ο Friederich ήξερε τι έκανε· ο Gauss εκείνη την εποχή ίσως όχι. Ο δεύτερος όμως είχε μια φωτογραφική μνήμη που διατηρούσε τις εντυπώσεις της βρεφικής και παιδικής του ζωής άφθαρτες ως τον θάνατό του. Μεγάλος πια, αναλογιζόμενος όσα ο Friederich είχε κάνει γι΄ αυτόν και αναπολώντας το γόνιμο εκείνο μυαλό που ένας πρόωρος θάνατος το εμπόδισε να φτάσει στην καρποφορία, ο Gauss έλεγε με οδύνη πως «χάθηκε μια γεννημένη μεγαλοφυΐα»,

Η Δωροθέα μετακινήθηκε στο Brunswick to 1769. Στα τριάντα τέσσερά της (1776) παντρεύτηκε τον πατέρα του Gauss. Ένα χρόνο μετά γεννήθηκε ο γιος της. Το πλήρες όνομά του ήταν: Johann Friederich Carl Gauss. Σε μεγαλύτερη ηλικία υπόγραφε τα αριστουργήματά του απλά ως Carl Friederich Gauss. Αν με τον Friederich Benz χάθηκε μια μεγαλοφυΐα το όνομά του επιζεί σ΄ εκείνο του ευγνώμονα ανιψιού του.

Η μητέρα του Gauss ήταν μια ντόμπρα γυναίκα με ισχυρό χαρακτήρα, οξύνους και με κεφάτο χιούμορ. Ο γιος της ήταν το καμάρι της από την ημέρα της γέννησής του ως την ημέρα του θανάτου της, στην ηλικία των 97 χρόνων. Όταν φάνηκε η εκπληκτική νοημοσύνη του «παιδιού –θαύματος» των δύο χρόνων – που εντυπωσίαζε όλους τους γύρω σαν κάτι το μη γήινο – διατηρούνταν και ξεπερνούσε τις υποσχέσεις της βρεφικής του ηλικίας καθώς ο μικρός Gauss μεγάλωνε, η Δωροθέα Gauss πήρε το μέρος του αγοριού και νίκησε τον πεισματάρη σύζυγό της που προσπαθούσε να αφήσει το παιδί αμόρφωτο όπως είχε μείνει εκείνος.

Η Δωροθέα περίμενε μεγάλα πράγματα από τον γιο της. Το ότι είχε κάποιες αμφιβολίες για το εφικτό των ονείρων της, φαίνεται από τις διστακτικές της ερωτήσεις σ΄ εκείνους που ήταν σε θέση να εκτιμήσουν τις ικανότητες του γιου της. Έτσι, όταν ο Gauss ήταν δεκαεννιά χρόνων, εκείνη ρώτησε τον φίλο του μαθηματικό Wolfgang Bolyai αν θα γινόταν ποτέ ο Gauss κάτι σημαντικό. Όταν ο Bolyai αναφώνησε «ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Ευρώπης», εκείνη αναλύθηκε σε λυγμούς.

Τα τελευταία είκοσι δύο χρόνια της ζωής της, τα πέρασε στο σπίτι του γιου της, την δε τελευταία τετραετία ήταν τελείως τυφλή. Ο ίδιος ο Gauss ελάχιστα νοιαζόταν για την φήμη·οι θρίαμβοί του ήσαν ήταν η ζωή της μητέρας του. Υπήρχε πάντα μια απόλυτη συνεννόηση ανάμεσά τους κι ο Gauss την αντάμειψε για τη θαρραλέα υποστήριξή της κατά τα παιδικά του χρόνια με το να της εξασφαλίσει ήσυχα γηρατειά. Όταν εκείνη τυφλώθηκε, την περιποιόταν μόνος του και έκανε τον νοσοκόμο στη διάρκεια της τελευταίας μακράς αρρώστειας της. Η Δωροθέα πέθανε στις 19 Απρίλη του 1839.

Ένα από τα πολλά ατυχήματα που θα μπορούσαν να είχαν αφήσει τον Αρχιμήδη και τον Νεύτωνα μόνους στη κορυφή των Μαθηματικών, αναφέρεται από τον Gauss, από τα πρώτα παιδικά του χρόνια. Μια ανοιξιάτικη μπόρα είχε κάνει το κανάλι που περνούσε δίπλα από την αγροικία της οικογένειάς του να πλημμυρίσει. Παίζοντας κοντά στα νερά, ο Gauss παρασύρθηκε απ΄ αυτά και σχεδόν πνίγηκε. Αν δεν είχε την τύχη να βρίσκεται κοντά ένας εργάτης, η ζωή του θα είχε τελειώσει τότε εκεί.

Στην ιστορία των Μαθηματικών, τίποτε δεν μπορεί να συγκριθεί με τα κατορθώματα του Gauss όταν ήταν παιδί. Δεν μας είναι γνωστό πότε έδειξε ο Αρχιμήδης για πρώτη φορά τη μεγαλοφυΐα του. Αν και φαίνεται απίστευτο, ο Gauss άφησε να φανεί το διαμέτρημά του πριν κλείσει τα τρία του χρόνια.

Κάποιο Σάββατο Gerhard Gauss έκανε λογαριασμούς για τη βδομαδιάτικη πληρωμή των εργατών που είχε υπό την ευθύνη του, χωρίς να έχει αντιληφθεί πως ο μικρός του γιος παρακολουθούσε τη διαδικασία με κριτική προσοχή. Όταν έφτασε στο τέλος των μακρών του υπολογισμών, ο Gerhard τα ΄χασε ακούγοντας το μικρό αγόρι να ψιθυρίζει, «πατέρα, ο λογαριασμός είναι λάθος, θα ΄πρεπε να είναι...». ένας έλεγχος έδειξε πως το νούμερο που πρόφερε ο Gauss ήταν το σωστό.Πριν απ΄ αυτό, το αγόρι είχε εκμαιεύσει από τους γονείς και τους φίλους τους την προφορά των γραμμάτων του αλφαβήτου, κι είχε μάθει να διαβάζει μόνος του. Κανένας δεν του είχε δείξει τίποτα στην ***Αριθμητική***, αν και θα πρέπει να είχε συλλάβει το νόημα των ψηφίων 1,2,… παράλληλα με την εκμάθηση του αλφαβήτου. Σε μεγαλύτερη ηλικία του άρεσε να αστιεύεται πως ήξερε να κάνει λογαριασμούς πριν μπορέσει να μιλήσει. Σε όλη του τη ζωή, εξ άλλου, διατήρησε μια μοναδική ικανότητα για πολύπλοκους νοητικούς υπολογισμούς.

Λίγο μετά τα έβδομα γενέθλιά του, ο Gauss πήγε για πρώτη φορά στο σχολείο – ένα άθλιο μεσαιωνικό λείψανο που το διηύθυνε ένας κτηνώδης τύπος ονόματι Büttner, που το σύστημα διδασκαλίας του συνίστατο στο να ρίξει στα εκατό περίπου αγόρια που είχε επιφορτισθεί σε μια τέτοια κατάσταση ηλιθιότητας από τον τρόμο, ώστε να ξεχνούν το ίδιο τους το όνομα. Χαρακτηριστικό κι αυτό εκείνων των παλιών καλών χρόνων που νοσταλγούν οι συναισθηματικοί αντιδραστικοί. Ήταν σ΄ αυτή την τρύπα της κόλασης που ο Gauss βρήκε την τύχη του.

Τίποτε το εξαιρετικό δεν συνέβη στη διάρκεια των πρώτων δύο χρόνων. Στη συνέχεια, όταν ήταν πια στα δέκα του, έγινε δεκτός στην τάξη της Αριθμητικής. Καθώς ήταν η πρώτη τάξη στην Αριθμητική, κανένα από τα αγόρια δεν είχε ακούσει για αριθμητικές προόδους. Ήταν εύκολο λοιπόν για τον ηρωικό Büttner να τους δώσει ένα μακρύ πρόβλημα στην πρόσθεση, του οποίου την απάντηση, μπορούσε να βρει ο ίδιος μέσα σε δευτερόλεπτα με τη βοήθεια ενός τύπου. Το πρόβλημα ήταν του είδους,

$$81297+81495+81693+...+100899,$$

όπου το βήμα από έναν αριθμό στον επόμενο είναι το ίδιο πάντοτε (εδώ το 198), και πρέπει να προστεθούν ένας δεδομένος αριθμός όρων (εδώ 100).

Ήταν συνήθεια του σχολείου, το αγόρι που πρώτο εύρισκε την απάντηση να αφήνει την πλάκα του στο τραπέζι· το δεύτερο θ΄ άφηνε την πλάκα του πάνω στην πλάκα του πρώτου και ούτω καθ΄ εξής. Ο Büttner μόλις είχε τελειώσει τη διατύπωση του προβλήματος όταν ο Gauss άφησε την πλάκα πάνω στο τραπέζι: «Εδώ είναι», είπε, «Ligget se» στη χωριάτικη διάλεκτό του. Στη συνέχεια, όση ώρα οι συμμαθητές του μοχθούσαν, περίμενε με σταυρωμένα τα χέρια του, ενώ το βλέμμα του Büttner έπεφτε σαρκαστικά πού και πού πάνω του. Ο τελευταίος φανταζόταν πως ο μικρότερος μαθητής στην τάξη ήταν και χοντροκέφαλος. Στο τέλος του προβλεπόμενου χρόνου, ο Büttner κοίταξε τις πλάκες. Στου Gauss υπήρχε μόνο ένας αριθμός. Έως το τέλος της ζωής του, ο Gauss έλεγε με μεγάλη ευχαρίστηση πως ο αριθμός που είχε δώσει ήταν ο σωστός και πως όλοι οι άλλοι είχαν κάνει λάθος. Κανένας δεν του είχε διδάξει τον τρόπο για να λύνει τέτοια προβλήματα. Όταν ο σχετικός τύπος είναι γνωστός, η λύση φαίνεται συνηθισμένη· όμως το να τον βρει ένα αγόρι δέκα χρονών αμέσως μόνο του είναι κάτι ασυνήθιστο.

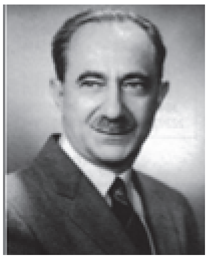
Έτσι άνοιξε η πόρτα από την οποία ο Gauss πέρασε στην αθανασία. Ο Büttner εντυπωσιάστηκε τόσο με αυτό που κατάφερε χωρίς καθοδήγηση ένα αγόρι δέκα χρόνων, ώστε θέλησε αμέσως να εξιλεωθεί και, για έναν τουλάχιστον από τους μαθητές του έγινε ανθρωπινότερος. Πλήρωσε ο ίδιος για την αγορά του καλύτερου διαθέσιμου εγχειριδίου Αριθμητικής και το δώρισε στον Gauss. Το αγόρι έκανε αστραπιαία κτήμα του το βιβλίο. «Αυτός είναι πέρα από μένα» είπε ο Büttner. «Δεν μπορώ να του διδάξω τίποτε περισσότερο».

Από εδώ έλκει την προέλευσή του ένα από τα κυρίαρχα ενδιαφέροντα όλης της σταδιοδρομίας του Gauss. Γρήγορα έγινε κάτοχος του διωνυμικού θεωρήματος όπου n δεν είναι απαραίτητα θετικός ακέραιος, αλλά οποιοσδήποτε αριθμός. Αν ο n δεν είναι θετικός ακέραιος, η σειρά στο δεξιό μέρος είναι *άπειρη* (μη τερματιζόμενη) και για να είμαστε σε θέση να πούμε πότε η σειρά αυτή είναι όντως ίση προς $(1+x)^n$, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε κάτω από ποιούς περιορισμούς για το x και το n η άπειρη σειρά θα *συγκλίνει σ΄ ένα καθορισμένο περιορισμένο όριο.* Έτσι αν $x=-2$ και $n=-1$, παίρνουμε το αλλόκοτο αποτέλεσμα ότι ο αριθμός $(1-2)^{-1}$ ή $(-1)^{-1}$ ή $1/(-1)$ ή τελικά -1, είναι ίσος προς το $1+2+2^2+2^3+\ldots$, δηλ. το -1 είναι ίσο προς τον «άπειρο αριθμό» 1+2+4+8+…., κάτι που φυσικά δεν μπορεί να ισχύει.

Θέμα 4ο. Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης[*]

… είναι ζωή, σας ρωτώ, είναι έστω φρόνηση,
να πλήττουμε μεις οι ίδιοι
και να προκαλούμε πλήξη στους μαθητές; (***Γιόχαν Βόλφγκαγκ φον Γκαίτε***)

Κατά τη διάρκεια του β΄ Παγκοσμίου Πολέμου έγινε φανερό πόσο σημαντική θέση θα είχαν τα



Μαθηματικά σε μια προηγμένη τεχνολογικά κοινωνία. Ανέκυψε λοιπόν το ερώτημα ποια Μαθηματικά πρέπει να διδαχθούν στη Γενική Εκπαίδευση. Όχι κανόνες και απομνημόνευση, αλλά να διδαχθούν οι κύριες έννοιες των Μαθηματικών και ο τρόπος που θα τις χρησιμοποιεί ο μαθητής στα προβλήματα που θα συναντά. Θεωρήθηκε ότι το παιδί μπορεί να μάθει τα Μαθηματικά, αν του διδαχθούν με την κατάλληλη ακρίβεια και αυστηρότητα γιατί τα Μαθηματικά αντανακλούν τις δομές της νόησης. Έτσι εμφανίστηκαν τα «*σύγχρονα Μαθηματικά*» που η διδασκαλία στη χώρα μας άρχισε από το 1965.

Πολύ γρήγορα όμως εμφανίστηκαν (*στις ΗΠΑ*) τα αδιέξοδα στα οποία οδηγούσε μια τέτοια διδασκαλία, αδιέξοδα που τα αντιμετωπίσαμε και στη ώρα μας (*Ελλάδα*).

Ο Morris Kline από τα πρώτα χρόνια της εμφάνισης των νέων Μαθηματικών στο σχολείο δούλεψε αυτά τα αδιέξοδα και στο βιβλίο του αυτό αναλύει με οξύτατη διεισδυτικότητα και γνώση το φαινόμενο της μεταρρύθμισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών, προσδιορίζει τα σημεία που θα αποτελούσαν με την πάροδο του χρόνου τους σκοπέλους στους οποίους θα προσέκρουε η διδασκαλία τους, τόσο σε σχέση με τις δυνατότητες και τις αντιλήψεις των μαθητών όσο και σε σχέση με τους αφηρημένους συμβολισμούς και την αυστηρότητα κατά τη διδασκαλία, περιγράφει τα χαρακτηριστικά και τις αδυναμίες των «*νέων Μαθηματικών*» και αναζητά τον σωστό προσανατολισμό για την ανανέωση της διδασκαλίας τους.

Αυτές οι απόψεις του Morris Kline αποτέλεσαν στη χώρα μας τη βάση για την ανανέωση των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών που άρχισε από το 1987.

Το βιβλίο αυτό διαβάστηκε πολύ στις χώρες όπου κυκλοφόρησε και αποτέλεσε την πρώτη πηγή πληροφόρησης για γονείς και εκπαιδευτικούς σχετικά με το περιεχόμενο, τη σημασία και τις συνέπειες της διδασκαλίας των «*νέων Μαθηματικών*»

Ένα σύντομο βιογραφικό για τον Morris Kline

Ο Morris Kline ήταν καθηγητής των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης και διηύθυνε το Τμήμα Ηλεκτρομαγνητικής έρευνας στο Currant Institute of Mathematical Sciences. Πέραν από τις πολυάριθμες επιστημονικές εργασίες και ανακοινώσεις έγραψε διάφορα εκλαϊκευτικά άρθρα και βιβλία, όπως "***Μ****αθηματικά μια πολιτισμική προσέγγιση*", "***Μ****αθηματικά και φυσικός κόσμος*", "***Η*** *μαθηματική σκέψη από τους αρχαίους χρόνους μέχρι σήμερα*", *κ.ά.*

Έκανε επίσης μια σειρά μαθημάτων από την τηλεόραση με θέμα: "*Τα Μαθηματικά στον δυτικό πολιτισμό*". Αυτά τα μαθήματα κυκλοφόρησαν στα ελληνικά σε δύο τόμους.

[*] *Οπισθόφυλλο από το βιβλίο του Morris Kline με τίτλο «Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης. Η αποτυχία των μοντέρνων Μαθηματικών» (εκδόσεις: Βανιας. Θεσσαλονίκη, 1993)*

Τάξη: Α΄

Επαναληπτικές Ασκήσεις στην Άλγεβρα

Κώστας Βακαλόπουλος – Μανώλης Βροντάκης

Λίγο πριν τις ενδοσχολικές εξετάσεις στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου ας δούμε τι μάθαμε φέτος δοκιμάζοντας τις δυνάμεις μας με τις παρακάτω ασκήσεις και προβλήματα.

Άσκηση 1: Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{x^3-1}{x^3-x}$

α) Να βρεθεί το σύνολο ορισμού D της παράστασης A

β) Να αποδείξετε ότι $A=\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}$

γ) Υπάρχει τιμή του x για την οποία $A=1$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση: α) Πρέπει και αρκεί $x^3-x\neq 0$. Όμως $x^3-x=0\Leftrightarrow x(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm 1$. Άρα το σύνολο ορισμού της παράστασης είναι $D=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

β) Για κάθε $x\in D$

$$A=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}$$

γ) Για κάθε $x\in D$, $A=1\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}=1\Leftrightarrow$ $x^2+x+1=x(x+1)\Leftrightarrow 0\cdot x=-1$, που είναι αδύνατη

Άσκηση 2: Ποιον αριθμό αν αφαιρέσουμε από τους όρους του κλάσματος $\dfrac{1}{2}$ και τον προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\dfrac{3}{4}$, τα δύο κλάσματα που προκύπτουν είναι ισοδύναμα;

Λύση: Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Για να ορίζονται τα κλάσματα που θα προκύψουν, πρέπει και αρκεί $2-x\neq 0$ και $4+x\neq 0$, δηλαδή $x\neq 2$ και $x\neq -4$. Έτσι έχουμε,

$$\frac{1-x}{2-x}=\frac{3+x}{4+x}\Leftrightarrow (1-x)(4+x)=(2-x)(3+x)\Leftrightarrow$$
$$-x^2-3x+4=-x^2-x+6\Leftrightarrow -2x-2=0\Leftrightarrow x=-1$$

(δεκτή λύση)

Άσκηση 3: A) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$$

B) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{6}$$

Λύση: A) $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha+1}=\dfrac{\alpha+1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)}=\dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}$

B) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι:

$$D=\mathbb{R}-\{-3,-2,-1,0\}$$

Σύμφωνα με το ερώτημα A) για κάθε $x\in D$ έχουμε,

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{x}-\cancel{\frac{1}{x+1}}+\cancel{\frac{1}{x+1}}-\cancel{\frac{1}{x+2}}+\cancel{\frac{1}{x+2}}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow \frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow x^2+3x-18=0\Leftrightarrow$$

$x=-6$ ή $x=3$ (δεκτές λύσεις)

Άσκηση 4: Να λυθούν σύντομα οι ανισώσεις και εξισώσεις:

α) $|x-2|\geq 0$, **β)** $|x-2|>0$, **γ)** $|x-2|\leq 0$,

δ) $|x-2|=0$, **ε)** $|x-2|\neq 0$, **στ)** $|x-3|+|2x-6|=0$

ζ) $|x-3|+|2x-1|>0$, **η)** $|x-3|+|2x-1|=0$

Λύση: α) $|x-2|\geq 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

β) $|x-2|>0\Leftrightarrow x\neq 2$,

γ) $|x-2|\leq 0\Leftrightarrow x=2$,

δ) $|x-2|=0\Leftrightarrow x=2$,

ε) $|x-2|\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$,

στ) $|x-3|+|2x-6|=0\Leftrightarrow x=3$,

ζ) $|x-3|+|2x-1|>0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

η) $|x-3|+|2x-1|=0$, είναι αδύνατη

Άσκηση 5

Δίνεται η παράσταση:

$$A=2|x-1|+|3x-3|-4|1-x|$$

A) Να αποδείξετε ότι: $A=d(x,1)$,

B) Να λυθεί η ανίσωση: $A\geq 5$,

Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $A=|3x-2|$

Λύσηq A) $A=2|x-1|+3|x-1|-4|1-x|=$ $2|x-1|+3|x-1|-4|x-1|=|x-1|=d(x,1)$

B) $d(x,1)\geq 5\Leftrightarrow |x-1|\geq 5\Leftrightarrow x-1\leq -5$ ή $x-1\geq 5$ $x\leq -4$ ή $x\geq 6$

Γ) $d(x,1)=|3x-2| \Leftrightarrow |x-1|=|3x-2| \Leftrightarrow$

$x-1=3x-2$ ή $x-1=-3x+2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{4}{3}$

Άσκηση 6: **Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-\kappa x-5=0$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.**

Α) Να αποδείξετε ότι $\Delta>0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-\kappa x-5=0$ (1)

i) Να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1x_2$ των ριζών της (1),

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου: $\rho_1=3x_1$ και $\rho_2=3x_2$

Λύση: Α) $\Delta=(-\kappa)^2+20=\kappa^2+20>0$ για κάθε $\kappa \in T$

Β) i) $S=x_1+x_2=-\frac{-\kappa}{1}=\kappa$, $P=x_1 \cdot x_2=\frac{-5}{1}=-5$

ii) Η ζητούμενη εξίσωση θα έχει άθροισμα ριζών $S'=\rho_1+\rho_2=3x_1+3x_2=3(x_1+x_2)=3\kappa$ και γινόμενο ριζών $P'=\rho_1 \cdot \rho_2=3x_1 \cdot 3x_2=9(x_1 \cdot x_2)=-45$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$x^2-S'x+P'=0$ δηλαδή $x^2-3\kappa x-45=0$

Άσκηση 7: **Δίνεται η εξίσωση:**

$x^2-2\lambda x+(2\lambda-1)=0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης, να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2$.

Λύση: Α) $\Delta=(-2\lambda)^2-4(2\lambda+1)=4(\lambda-1)^2 \geq 0$, οπότε η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in T$

Β) $S=x_1+x_2=2\lambda$, $P=x_1 \cdot x_2=2\lambda-1$. Οπότε

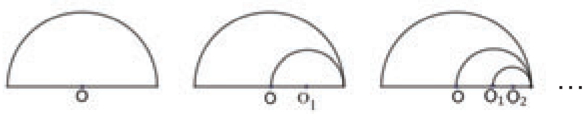
$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2 \Leftrightarrow (2\lambda)^2-2(2\lambda-1)=2 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2-4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=1$

Άσκηση 8: **Παρατηρείστε τα άπειρα ημικύκλια που δημιουργούνται στο παρακάτω σχήμα. Αν η πρώτη ακτίνα είναι 8cm να βρείτε:**

Α) Το άθροισμα των μηκών των πρώτων πέντε ημικυκλίων

Β) Το άθροισμα των εμβαδών των πέντε πρώτων ημικυκλίων



Λύση: Α) Έστω (P_ν) η ακολουθία των μηκών των ημικυκλίων του σχήματος.

Είναι: $P_1=\frac{1}{2}2\pi \cdot 8=8\pi$, $P_2=\frac{1}{2}2\pi \cdot 4=4\pi$, $P_3=\frac{1}{2}2\pi \cdot 2=2\pi$,.... Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (P_ν) είναι γ.π. με 1ο όρο $P_1=8\pi$ και λόγο $\lambda=\frac{1}{2}$. Άρα $S_5=8\pi\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5-1}{\frac{1}{2}-1}=...=\frac{31\pi}{2}$

Β) Έστω (E_ν) η ακολουθία των εμβαδών των ημικυκλίων του σχήματος.

Είναι: $E_1=\frac{1}{2}\pi \cdot 8^2=32\pi$, $E_2=\frac{1}{2}\pi \cdot 4^2=8\pi$, $E_3=\frac{1}{2}\pi \cdot 2^2=2\pi$,... Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (E_ν) είναι γ.π. με 1ο όρο $E_1=32\pi$ και λόγο $\lambda=\frac{1}{4}$. Άρα $S_5=32\pi\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5-1}{\frac{1}{4}-1}=...=\frac{341\pi}{8}$

Άσκηση 9: **Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu=\frac{3}{3\nu+2}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν. Να βρεθούν οι όροι της ακολουθίας που έχουν τιμές στο διάστημα $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{2}\right)$**

Λύση: Πρέπει να ισχύει $\frac{1}{7}<\frac{3}{3\nu+2}<\frac{1}{2}$, όπου ν φυσικός αριθμός ν με $\nu \neq 0$. Έτσι έχουμε:

$\frac{1}{7}<\frac{3}{3\nu+2}<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{7}<\frac{3}{3\nu+2}<\frac{1}{2} \Rightarrow 2<\frac{3\nu+2}{3}<7 \Rightarrow$

$6<3\nu+2<21 \Rightarrow 4<3\nu<19 \Rightarrow \frac{4}{3}<\nu<\frac{19}{3}$

Άρα $\nu \in \{2,3,4,5,6\}$. Έτσι οι ζητούμενοι όροι της ακολουθίας είναι:

$$\alpha_2=\frac{3}{8}, \alpha_3=\frac{3}{11}, \alpha_4=\frac{3}{14}, \alpha_5=\frac{3}{17}, \alpha_6=\frac{3}{20}$$

Άσκηση 10: **Δίνονται τρεις αριθμοί κ, λ, μ με $\kappa>\lambda>\mu>0$. Δείξτε ότι αν οι $\frac{1}{\kappa}$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε οι αριθμοί: $\kappa-\mu$, λ, $\kappa-\lambda+\mu$, μπορεί να είναι τα μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.**

Λύση: Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\kappa}$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $\frac{2}{\lambda}=\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\mu}$ οπότε $2\kappa\mu=\lambda(\mu+\kappa)\Rightarrow\lambda=\frac{2\kappa\mu}{\mu+\kappa}$. Παρατηρούμε ότι:

- $\kappa-\lambda+\mu>\kappa-\mu$ διότι $2\mu>\lambda$ δηλαδή $2\mu>\frac{2\kappa\mu}{\mu+\kappa}$ δηλαδή $1>\frac{\kappa}{\mu+\kappa}$ που ισχύει!
- $\kappa-\lambda+\mu>\lambda$ δηλαδή $\kappa+\mu>2\lambda=\frac{4\kappa\mu}{\kappa+\mu}$ δηλαδή $(\kappa+\mu)^2>4\kappa\mu$ δηλαδή $(\kappa-\mu)^2>0$ που ισχύει!

Άρα η υποψήφια υποτείνουσα θα έχει μήκος $\kappa-\lambda+\mu$. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$(\kappa-\lambda+\mu)^2=(\kappa-\mu)^2+\lambda^2$. Πράγματι,

$(\kappa-\lambda+\mu)^2=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-2\kappa\lambda+2\kappa\mu-2\lambda\mu=$

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-2\kappa\lambda+\lambda(\mu+\kappa)-2\lambda\mu=$

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-2\kappa\lambda+\lambda\mu+\lambda\kappa-2\lambda\mu=$

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-\kappa\lambda-\lambda\mu=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-\lambda(\kappa+\mu)=$

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-2\kappa\mu=(\kappa-\mu)^2+\lambda^2$

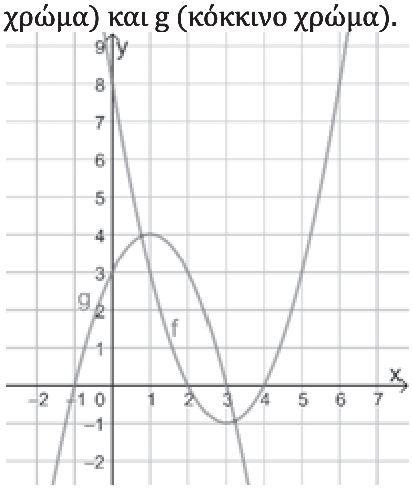
Άσκηση 11: **Δίνονται οι εξισώσεις $x^3=\alpha$, $\alpha>0$ (1) και $x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$, $\alpha>0$ (2).**

Α) Να βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων (1) και (2)

Β) Αν ρ_1 η ρίζα της εξίσωσης (1) και ρ_2,ρ_3 οι ρίζες της εξίσωσης (2) με $\rho_2<\rho_3$, να βρείτε τη τιμή του α αν οι αριθμοί ρ_1,ρ_2,ρ_3 με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γ.π.

Λύση: Α) $\rho_1=\sqrt[3]{\alpha}$ και $\rho_2=\alpha$ και $\rho_2=2\alpha$ (Οι αριθμοί α και 2α έχουν άθροισμα 3α και γινόμενο $2\alpha^2$ Β) Ισχύει: $\alpha^2=2\alpha\sqrt[3]{\alpha}$ που σημαίνει $\alpha=2\sqrt[3]{\alpha}$ που σημαίνει $\alpha^3=8\alpha$ που σημαίνει $\alpha^2=8$ δηλαδή $\alpha=2\sqrt{2}$)

Άσκηση 12: **Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f (μαύρο χρώμα) και g (κόκκινο χρώμα).**



α) Να βρεθεί το πρόσημο των παραστάσεων: $A=f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)$,

$B=g(-2)\cdot g(1)\cdot g(5)$, $\Gamma=f(\pi)\cdot g(\pi)$

β) Να λύσετε (γραφικά) τις εξισώσεις:

$f(x)=0$, $f(x)=3$, $g(x)=0$, $g(x)=3$

γ) Να λύσετε (γραφικά) τις ανισώσεις:

$f(x)>0$, $f(x)>3$, $g(x)>0$, $g(x)>3$

δ) Αν $\kappa<-1$ και $\lambda>3$ να δείξετε ότι: $\kappa\cdot g(\kappa)>\lambda\cdot g(\lambda)$

ε) Υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες και οι δύο συναρτήσεις παίρνουν θετικές τιμές; Αν ναι, σε ποιο διάστημα ανήκουν οι τιμές του x;

Λύση: $A<0$, $B<0$, $\Gamma>0$

α) $f(x)=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

$f(x)=3\Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$

$g(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$

$g(x)=3\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$

β) $f(x)>0\Leftrightarrow x<2$ ή $x>4$

$f(x)>3\Leftrightarrow x<1$ ή $x>5$

$g(x)>0\Leftrightarrow -1<x<3$ ή $x=3$

$g(x)>3\Leftrightarrow 0<x<2$ ή $x=2$

γ) $\kappa<-1\Rightarrow g(\kappa)<0\Rightarrow\kappa\cdot g(\kappa)>0$ και

$\lambda>3\Rightarrow g(\lambda)<0\Rightarrow\lambda\cdot g(\lambda)<0$.

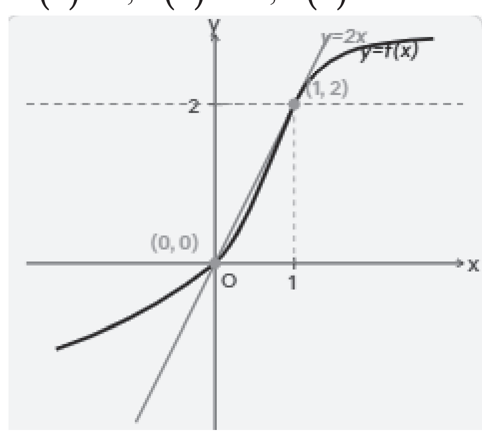
Άρα $\kappa\cdot g(\kappa)>\lambda\cdot g(\lambda)$

δ) Υπάρχουν και είναι οι τιμές του x που ανήκουν στο διάστημα $(-1,2)$

Άσκηση 13: **Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο Τ και η ευθεία $y=2x$**

i) Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις: $f(x)=2$, $f(x)=2x$

ii) Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις: $f(x)>2$, $f(x)<2x$, $f(x)\geq 2x$



Λύση

i) $f(x)=2 \Leftrightarrow x=1$, $f(x)=2x \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

ii) $f(x)>2 \Leftrightarrow x>1$,

$f(x)<2x \Leftrightarrow 0<x<1$ ή $x>1$,

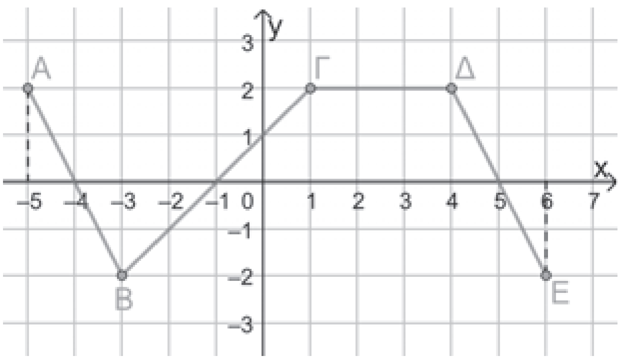
$f(x)>2x \Leftrightarrow x\le 0$ ή $x=1$

Άσκηση 14: Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-5,6]$

i) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης g για κάθε ακέραιο που ανήκει στο διάστημα $[-5,6]$

ii) Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις:

$$g(x)=0\,,\ g(x)=2\,,\ g(x)=-1$$



iii) α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $B(-3,-2)$ και $\Gamma(1,2)$

β) Στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση: $g(x)\ge x+1$

Λύση:

i) $g(-5)=2, g(-4)=0, g(-3)=-2, g(-2)=-1$,

$g(0)=1, g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=2, g(5)=0$,

$g(6)=-2$

ii) $g(x)=0 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=-1$ ή $x=5$,

$g(x)=2 \Leftrightarrow x=5$ ή $1\le x\le 4$,

$g(x)=-1 \Leftrightarrow x=-3,5$ ή $x=-2$ ή $x=5,5$

iii) α) $\lambda_{AB}=\dfrac{2-(-2)}{1-(-3)}=1$. Άρα η εξίσωση έχει μορφή: $y=x+\beta$. Όμως $2=1+\beta$ άρα $\beta=1$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι $y=x+1$

β) $g(x)\ge x+1 \Leftrightarrow -5\le x\le 1$

Έφυγαν από κοντά μας

† Γιώργος Κόσυβας

Η ΕΜΕ αποχαιρετά τον Γιώργο Κόσυβα

Στις 6 Μαρτίου 2026, έφυγε αιφνιδιαστικά, από τη ζωή, από καρδιακή ανακοπή, ο εκλεκτός μαθηματικός Γιώργος Κόσυβας. Γεννήθηκε στο Τυρό Αρκαδίας το **1958.** Σπούδασε στο Μαθηματικό του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (ΑΠΘ). Έκανε σπουδές στη διδακτική και στη μεθοδολογία των Μαθηματικών στο ΕΚΠΑ και οργάνωση και Διοίκηση στο **ULB** στο Βέλγιο. Διορίστηκε στην εκπαίδευση το 1987 και είχε διδάξει στο Πανεπιστήμιο (Ν. 407), καθώς και στην επιμόρφωση και στην μετεκπαίδευση των εκπαιδευτικών. Είχε υπηρετήσει στα Πειραματικά Λύκεια Αγίων Αναργύρων και Βαρβάκειο καθώς και στο Ευρωπαϊκό Λύκειο Βρυξελλών. Στο συγγραφικό του και ερευνητικό του έργο, συγκαταλέγονται κυρίως άρθρα του, σε θέματα Παιδαγωγικών και Διδακτικής Μαθηματικών. Το 2012-2015 ήταν Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών στην Α΄ Αθήνας. Από το 2015-2019 ήταν συντονιστής εκπαίδευσης στο **Λονδίνο**, ενώ πρόσφατα ήταν Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών στην Β΄ Αθήνας. Συμμετείχε επίσης ως ερευνητής και εκπαιδευτής στο ερευνητικό πρόγραμμα **MASCIL** (Μαθηματικά , Φυσικές Επιστήμες και καθημερινή ζωή). Ήταν επίσης Αναπληρωτής Διευθυντής του ΠΕΚ Πειραιά. Ένας άνθρωπος πράος, με **ακέραιο χαρακτήρα** και συνέπεια, δραστήριος, με **ήθος**, καλοσύνη και **ευγένεια** και με διαρκή υποστηρικτή διάθεση.

Η Ε.Μ.Ε. εκφράζει τα ειλικρινή συλλυπητήρια στους οικείους του και στην οικογένεια του.

† Ηλίας Ντζιώρας

Η ΕΜΕ αποχαιρετά τον Ηλία Ντζιώρα

Στις 30 Ιανουαρίου 2026 έφυγε από τη ζωή για το άπειρο του χρόνου, ο εκλεκτός μαθηματικός και Πανεπιστημιακός Δάσκαλος Ηλίας Ντζιώρας. Γεννήθηκε το **1939, στη Βράχα των Αγράφων της Ευρυτανίας.** Σπούδασε Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και αποφοίτησε το 1961. Ένας άνθρωπος που, για τον τόπο μας, ενσάρκωνε την ασύλληπτη σκέψη του επιστήμονα, αλλά και τη δυνατότητα της υπέρβασης μέσα από τη γνώση. Το **1969** εκδόθηκε το Σχολικό Βιβλίο των Μαθηματικών (Άλγεβρα) για την Ε΄ Γυμνασίου που παράμεινε ως διδακτικό βιβλίο μέχρι το **1983**. Ένα **βιβλίο πρωτοποριακό** για την εποχή του. Διατέλεσε επίτιμος Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και αργότερα στο ΕΜΠ. Άνθρωπος με ευρύ πνεύμα και γενναιοδωρία και στα Μαθηματικά, όσο και στην προσφορά του, στη μικρή πατρίδα του, στη Βράχα των Αγράφων, αλλά και συνολικά στην Ιστορία και τον Πολιτισμό της Ευρυτανίας.

Η Ε.Μ.Ε. εκφράζει τα ειλικρινή συλλυπητήρια της, στους οικείους του και στην οικογένεια του.

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Γιάννης Στάμου

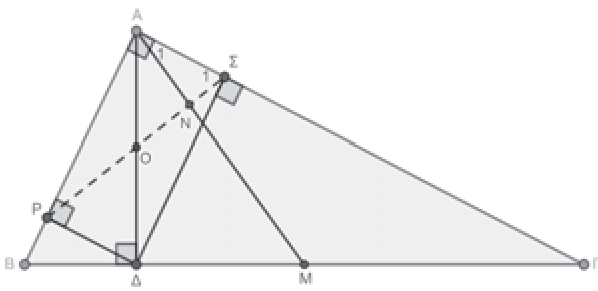
ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma\left(\hat{A}=90^\circ\right)$, το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Από το σημείο Δ φέρνουμε $\Delta P\perp AB$ και $\Delta\Sigma\perp A\Gamma$.
Να δείξετε ότι:
i. $P\Sigma\perp AM$

ii. η περίμετρος του τριγώνου $P\overset{\Delta}{\Delta}\Sigma$ είναι μικρότερη από $\frac{3}{2}\cdot B\Gamma$.

Λύση

i.



Έστω Ν το σημείο τομής των ΑΜ και ΡΣ και Ο το σημείο τομής των ΑΔ και ΡΣ. Αρκεί να δείξουμε ότι στο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{N}\Sigma$ οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{\Sigma}_1$ έχουν άθροισμα 90°.
Η ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, άρα $AM=\frac{B\Gamma}{2}=MB=M\Gamma$. Συνεπώς το τρίγωνο $M\overset{\Delta}{A}\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}\ (1)$.
Το τετράπλευρο ΑΡΔΣ είναι ορθογώνιο, διότι έχει 3 γωνίες ορθές και Ο το κέντρο του. Άρα $OA=O\Delta=O\Sigma=OP$, οπότε $\hat{\Sigma}_1=O\hat{A}\Sigma$ ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου. Επίσης $\hat{B}=O\hat{A}\Sigma$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες, άρα $\hat{\Sigma}_1=\hat{B}\ (2)$. Από (1) και (2) έχουμε: $\hat{A}_1+\hat{\Sigma}_1=\hat{\Gamma}+\hat{B}=90^\circ$.

Οπότε στο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{N}\Sigma$ είναι $\hat{N}=90^\circ\Rightarrow P\Sigma\perp AM$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $P\overset{\Delta}{\Delta}B$ είναι $\Delta\Sigma<\Delta\Gamma$, διότι ΔΒ υποτείνουσα.

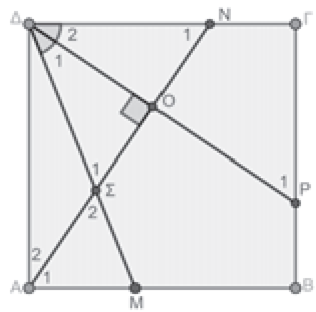
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Sigma\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ είναι $P\Delta<\Delta B$, αφού η ΔΓ υποτείνουσα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Delta}M$ είναι $A\Delta<AM$, αφού ΑΜ υποτείνουσα.
Όμως $P\Sigma=A\Delta$ ως διαγώνιοι ορθογωνίου, οπότε και $P\Sigma<AM$. Έχουμε τότε:
$\Delta P+\Delta\Sigma+P\Sigma<\Delta B+\Delta\Gamma+AM=B\Gamma+\frac{B\Gamma}{2}=\frac{3}{2}\cdot B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ τυχαίο σημείο της ΑΒ. Αν ΔΡ είναι η διχοτόμος της γωνίας $M\hat{\Delta}\Gamma$ και ΑΟ η κάθετη από το Α στη διχοτόμο ΔΡ, που τέμνει την ΔΜ στο Σ και τη ΔΓ στο Ν, να δείξετε ότι $\Delta M=\Gamma P+AM$.

Λύση



Στο τρίγωνο $\Delta\overset{\Delta}{\Sigma}N$ η ΔΟ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\Delta N=\Delta\Sigma$ και $\hat{N}_1=\hat{\Sigma}_1$. Επίσης $\hat{N}_1=\hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{\Sigma}_1=\hat{\Sigma}_2$ ως κατακορυφήν, οπότε $\hat{A}_1=\hat{\Sigma}_2$. Άρα το τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Sigma}M$ είναι ισοσκελές με $AM=\Sigma M$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\overset{\Delta}{\Delta}N$ και $\Delta\overset{\Delta}{\Gamma}P$ έχουν:

- $A\Delta=\Delta\Gamma$ ως πλευρές τετραγώνου
- $\hat{A}_2=\hat{\Delta}_2$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες

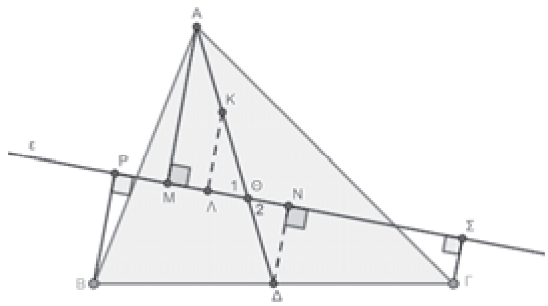
Άρα $A\overset{\Delta}{\Delta}N=\Delta\overset{\Delta}{\Gamma}P$, οπότε $AN=\Delta P$, $\Delta N=\Gamma P$ και $\hat{N}_1=\hat{P}_1$. Έτσι έχουμε:
$\Delta M=\Delta\Sigma+\Sigma M=\Delta N+AM=\Gamma P+AM$.

Άσκηση 3

Δίνεται τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$, η διάμεσός του ΑΔ και το Θ το βαρύκεντρό του. Από το Θ φέρνουμε

τυχαία ευθεία ε και Μ, Ρ, Σ είναι οι προβολές των κορυφών Α, Β, Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε. Να δείξετε ότι: $AM = BP + \Gamma\Sigma$.

Λύση



Το τετράπλευρο ΒΡΣΓ είναι τραπέζιο διότι $BP // \Gamma\Sigma$ ως κάθετες στην ευθεία ε. Από το μέσο Δ της ΒΓ φέρνουμε το τμήμα $\Delta N \perp \varepsilon$, οπότε $\Delta N // BP // \Gamma\Sigma$, άρα ΔΝ διάμεσος του τραπεζίου και Ν μέσο του τμήματος ΡΣ.

Έστω Κ και Λ τα μέσα των τμημάτων ΑΘ και ΜΘ αντίστοιχα. Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AM\Theta}$ είναι $K\Lambda = // \dfrac{AM}{2}$, οπότε και $K\Lambda \perp \varepsilon$.

Επίσης Θ βαρύκεντρο του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, άρα $A\Theta = 2\cdot\Theta\Delta \Leftrightarrow 2\cdot K\Theta = 2\cdot\Theta\Delta \Leftrightarrow K\Theta = \Theta\Delta$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{K\Lambda\Theta}$ και $\overset{\Delta}{\Theta N\Delta}$ έχουν:

- $K\Theta = \Theta\Delta$
- $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2$ ως κατακορυφήν

Άρα $\overset{\Delta}{K\Lambda\Theta} = \overset{\Delta}{\Theta N\Delta}$, οπότε $K\Lambda = \Delta N$.

Έχουμε τότε: $BP + \Gamma\Sigma = 2\cdot\Delta N = 2\cdot K\Lambda = \cancel{2}\cdot\dfrac{AM}{\cancel{2}} = AM$.

Άσκηση 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ **και η διάμεσός του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα** $M\Delta = MA$. **Από το Δ φέρνουμε τη** $\Delta E \perp B\Gamma$, **η οποία προεκτεινόμενη τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας** $\hat{B}$ **στο Ζ.**

i. Να δείξετε ότι: $A\Delta = B\Gamma$ **και** $\Delta Z = A\Gamma$.

ii. Αν επιπλέον Ε μέσο του ΜΓ, να δείξετε ότι $A\Gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot B\Gamma$.

Λύση

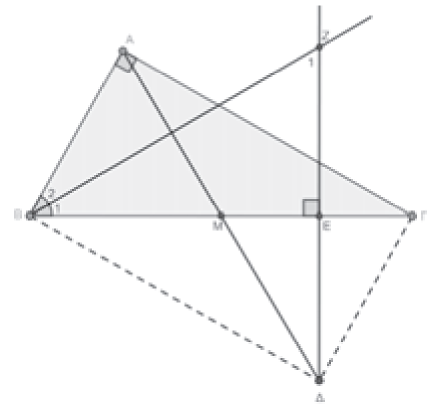
i) Φέρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ. Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιοι ΑΔ και ΒΓ διχοτομούνται. Επίσης $\hat{A} = 90^\circ$, οπότε ΑΒΔΓ ορθογώνιο. Συνεπώς $A\Delta = B\Gamma$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{EZB}$ είναι

$$\hat{Z}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{Z}_1 + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$$

Από το ορθογώνιο ΑΒΔΓ έχουμε ότι $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$, άρα: $Z\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Delta - A\hat{B}Z = 90^\circ - \hat{B}_2 = 90^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2}$.

Επομένως $\hat{Z}_1 = Z\hat{B}\Delta$, άρα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Delta Z}$ είναι ισοσκελές με $\Delta Z = \Delta B$. Όμως $\Delta B = A\Gamma$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου, άρα $\Delta Z = A\Gamma$.



ii) Αν Ε μέσο του ΜΓ, τότε στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{M\Delta\Gamma}$ η ΜΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\Delta M = M\Gamma$. Όμως $\Delta M = AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, άρα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{M\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο. Συνεπώς $B\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ$, οπότε: $\hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}\Delta - B\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

Άρα $AB = \dfrac{B\Gamma}{2}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{B\Gamma^2}{4} + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - \frac{B\Gamma^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$A\Gamma^2 = \frac{3}{4}\cdot B\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot B\Gamma$$

(Εναλλακτικά: $\text{συν}\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow \text{συν}30^\circ = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot B\Gamma$)

Τάξη: Β΄

Επαναληπτικές Ασκήσεις Άλγεβρας

Στυλιανός Τσακιρτζής

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+\alpha}, \alpha>0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1).

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f και έπειτα την τιμή του α.

ii) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο για x=1.

iii) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(\kappa)\cdot \eta\mu x + f(-\kappa)=0$ για κάθε $\kappa\neq 0$.

Λύση

i) Η f ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία $x^2+\alpha\neq 0$, αφού $\alpha>0$ η σχέση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $A=\mathbb{R}$.
Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(1,1) έχουμε

$$f(1)=1\Leftrightarrow \frac{2}{1+\alpha}=1\Leftrightarrow 1+\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=1.$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)\leq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\leq 1 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} 2x\leq x^2+1\Leftrightarrow$$

$(x-1)^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα το $f(1)$ είναι μέγιστο της f.

Β΄ τρόπος:
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 1=f(1)$, άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=1$.

iii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$f(-x)=\dfrac{-2x}{(-x)^2+1}=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-f(x)$, επομένως η f είναι περιττή.

iv) $f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$, άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$. Επομένως,

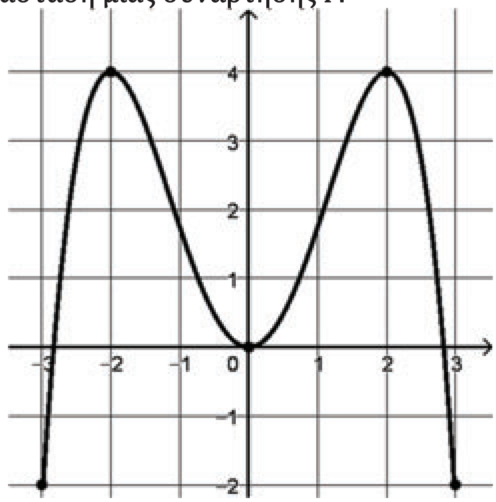
$$f(\kappa)\eta\mu x+f(-\kappa)=0 \overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{\Leftrightarrow} f(\kappa)\eta\mu x-f(\kappa)=0\Leftrightarrow$$

$$f(\kappa)(\eta\mu x-1)=0 \overset{f(\kappa)\neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=1\Leftrightarrow$$

$$x=\kappa\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

iii) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f καθώς και τις θέσεις αυτών.

iv) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

v) Αν $f(1)=\dfrac{7}{4}$, να λύσετε την εξίσωση

$$e^{2x}-2e^x+f\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

vi) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x)=\ln(4-f(x))$$

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού είναι το $A=[-3,3]$.

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-3,-2]$ και $[0,2]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-2,0]$ και $[2,3]$.

iii) Η ελάχιστη τιμή της f είναι το -2 και παρουσιάζεται όταν $x=-3$ ή $x=3$.
Η μέγιστη τιμή της f είναι το 4 και παρουσιάζεται όταν $x=-2$ ή $x=2$.

iv) Για κάθε $x\in A$ ισχύει ότι το $-x\in A$ και η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, άρα η f είναι άρτια.

v) Θέτουμε $\omega=e^x$ και η εξίσωση γίνεται

$y^2-2y+f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ με $\Delta=4\cdot\left(1-f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$ επομένως $1<\frac{3}{2}\Rightarrow f(1)<f\left(\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \frac{7}{4}<f\left(\frac{3}{2}\right)$, άρα $\Delta<0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

vi) Η g ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία $4-f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)<4$ και $x\in A$. Όμως το 4 είναι το μέγιστο της f και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -2 ή 2, δηλαδή $f(x)\leq 4$ για κάθε $x\in[-3,3]$ και $f(x)=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $B=[-3,3]-\{-2,2\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^3-7x+\alpha}{x-1}, x\neq 1, \alpha\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε για ποια τιμή του α ο τύπος της f απλοποιείται.

Για $\alpha=6$,

ii) να απλοποιήσετε τον τύπο της f και βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2+x-6e^{x^2-3x}$.

Λύση

i) Ο τύπος της f απλοποιείται αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $x^3-7x+\alpha$, δηλαδή αν το 1 είναι ρίζα του $x^3-7x+\alpha$. Αυτό συμβαίνει όταν $1^3-7+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=6$.

ii) Για το x^3-7x+6, από το σχήμα Horner για ρ=1 έχουμε

1	0	−7	6	1
↓	1	1	−6	
1	1	−6	$\boxed{0}$	

και για $x\neq 1$ είναι

$$f(x)=\frac{x^3-7x+6}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x-6)}{x-1}=x^2+x-6$$

οπότε $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-3$ άρα τέμνει τον x΄x στα σημεία $A(2,0)$ και $B(-3,0)$. Είναι $f(0)=-6$, άρα τέμνει τον y΄y στο σημείο $\Gamma(0,-6)$.

iii) Για $x\neq 1$ έχουμε:

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2+x-6<x^2+x-6e^{3x-x^2} \Leftrightarrow$$

$$-6<-6e^{x^2-3x} \Leftrightarrow e^{x^2-3x}<1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x}<e^0 \overset{e>1}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2-3x<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2\right)$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 2)$ και $f(\ln 4)$.

iii) Να βρείτε, αν υπάρχει, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* με την ευθεία $y=x$.

Λύση

i) Η f ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία

$$e^{2x}-2>0 \Leftrightarrow e^{2x}>2 \Leftrightarrow 2x>\ln 2 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\ln 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=\left(\frac{1}{2}\ln 2,+\infty\right)$

ii) $f(\ln 2)=\ln\left(e^{2\ln 2}-2\right)=\ln\left(e^{\ln 2^2}-2\right)=\ln 2$

$f(\ln 4)=\ln\left(e^{4\ln 2}-2\right)=\ln\left(e^{\ln 2^4}-2\right)=\ln 14$

και $2<14 \overset{\ln x 1}{\Rightarrow} \ln 2<\ln 14$.

iii) Για $x>\frac{1}{2}\ln 2$ είναι:

$f(x)=x \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-2\right)=\ln e^x \Leftrightarrow e^{2x}-2=e^x \Leftrightarrow$

$e^{2x}-e^x-2=0$. Θέτουμε $e^x=y>0$ και η εξίσωση γίνεται

$y^2-y-2=0 \Leftrightarrow y=-1$ (απορ) ή $y=2 \Leftrightarrow y=2$

Επομένως $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ και $\ln 2\in A$ οπότε το σημείο τομής είναι το $(\ln 2,\ln 2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=-x^3+2x^2+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο x^2-1 διαιρεί το $P(x)$

i) Να βρείτε την τιμή του α και β και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-1\right)$.

Για $\alpha=1,\beta=-2$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $P(\ln x)=0$ και την ανίσωση $P(\ln x)\geq 0$.

iv) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\frac{P(x)}{x-3}}$.

Λύση

i) Θα πρέπει το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

$$
\begin{array}{rrrr|rr}
-x^3 & +2x^2 & +\alpha x & +\beta & x^2 & -1 \\
x^3 & +0x^2 & -x & & -x & +2 \\
\hline
 & 2x^2 & (\alpha-1)x & \beta & & \\
 & -2x^2 & 0x & +2 & & \\
\hline
 & & (\alpha-1)x+ & \beta+2 & &
\end{array}
$$

Οπότε

$\upsilon(x)=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)x+(\beta+2)=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\beta=-2$

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$P(x)=(x^2-1)(2-x)$

Β΄ τρόπος

Είναι $q(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$ άρα τα πολυώνυμα $(x-1)$, $(x+1)$ είναι παράγοντες του $P(x)$. Αφού το $(x-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, το 1 είναι ρίζα του $P(x)$, άρα $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0$ (*) και από το σχήμα Horner για ρ=1 έχουμε

$$P(x)=(x-1)\left(\underbrace{-x^2+x+\alpha+1}_{w(x)}\right).$$

Επιπλέον το $(x+1)$ θα είναι παράγοντας του $w(x)$ άρα $w(-1)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ και από (*) έχουμε ότι $\beta=-2$.

ii) $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(2-x)\geq 0 \quad (1)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+		+	
$2-x$		+		+		+	0	−	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

$(1) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,2]$

iii) $P(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(2-x)=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=-1$ ή $x=2$

Επομένως, για $x>0$ έχουμε:

$P(\ln x)=0 \Leftrightarrow \ln x=1$ ή $\ln x=-1$ ή $\ln x=2 \Leftrightarrow$

$x=e$ ή $x=e^{-1}$ ή $x=e^2$

Για $x>0$ έχουμε:

$P(\ln x)\geq 0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} \ln x\in(-\infty,-1]\cup[1,2] \Leftrightarrow$

$\ln x\leq -1$ ή $1\leq \ln x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq e^{-1}$ ή $e\leq x\leq e^2$

Άρα $x\in\left(0,e^{-1}\right]\cup\left[e,e^2\right]$.

iv) Η f ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία

$\dfrac{P(x)}{x-3}\geq 0$ και $x\neq 3 \Leftrightarrow P(x)(x-3)\geq 0$ και $x\neq 3 \Leftrightarrow$

$(x^2-1)(2-x)(x-3)\geq 0$ και $x\neq 3$

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+		+		+	
$2-x$		+		+		+	0	−		−	
$x-3$		−		−		−		−	0	+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	‖	−	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $x\in[-1,1]\cup[2,3)$.

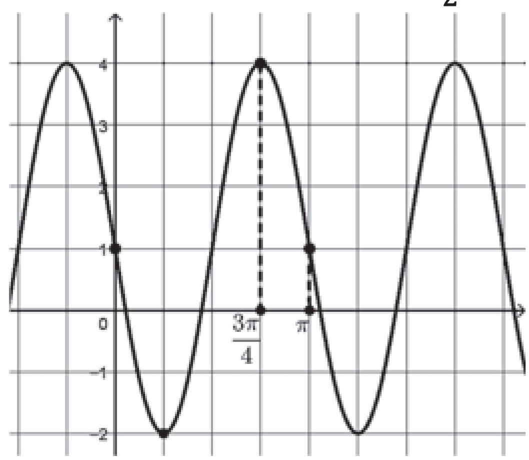
ΑΣΚΗΣΗ 6

Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την περίοδο και τα ολικά ακρότατα της f.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=-\dfrac{1}{2}$.



Λύση

i) Από το σχήμα προκύπτει ότι η περίοδος T είναι ίση με π. Επιπλέον η f έχει μέγιστο το 4 και ελάχιστο το -2.

ii) Η συνάρτηση του σχήματος είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+\beta$, με $\rho<0$.

Είναι $T=\dfrac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \pi=\dfrac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega=2$ οπότε

$f(x)=\rho\cdot\eta\mu(2x)+\beta$.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι $f(0)=1$, άρα $\beta=1$

και $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=4$ άρα

$\rho\cdot\eta\mu\left(\dfrac{6\pi}{4}\right)+\beta=4 \Leftrightarrow \rho\cdot\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+\beta=4 \overset{\beta=1}{\Leftrightarrow}$

$-\rho+1=4 \Leftrightarrow \rho=-3$, οπότε

$f(x)=-3\eta\mu(2x)+1$

iii) Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ στο $\mathbb{R}$.

$f(x)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -3\eta\mu(2x)+1=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu(2x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$2x=\kappa\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } 2x=\kappa\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$x=\kappa\pi+\frac{\pi}{12} \text{ ή } x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{12},\kappa\in\mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(1+\frac{\alpha-3}{\alpha-1}\right)^x$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Για ποιες τιμές του α η f
α) έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$;
β) είναι εκθετική;
γ) είναι γνησίως φθίνουσα ;
δ) είναι γνησίως αύξουσα;

ii) Για $\alpha=\frac{5}{2}$, να λύσετε την ανίσωση

$$27\cdot f(2x)-30f(x)+8\leq 0$$

Λύση

i) α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν ισχύει

$$1+\frac{\alpha-3}{\alpha-1}>0\Leftrightarrow\frac{2\alpha-4}{\alpha-1}>0\Leftrightarrow 2(\alpha-2)(\alpha-1)>0\Leftrightarrow$$

$\alpha<1$ ή $\alpha>2$

β) Η f είναι εκθετική όταν ισχύει

$$1+\frac{\alpha-3}{\alpha-1}>0 \text{ και } 1+\frac{\alpha-3}{\alpha-1}\neq 1\Leftrightarrow$$

$$(\alpha<1 \text{ ή } \alpha>2) \text{ και } \frac{\alpha-3}{\alpha-1}\neq 0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha<1 \text{ ή } \alpha>2) \text{ και } \alpha\neq 3\Leftrightarrow$$

$$\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$$

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν ισχύει

$$0<1+\frac{\alpha-3}{\alpha-1}<1\Leftrightarrow 0<\frac{2\alpha-4}{\alpha-1}<1\Leftrightarrow$$

$$\frac{2\alpha-4}{\alpha-1}>0 \text{ και } \frac{2\alpha-4}{\alpha-1}<1\Leftrightarrow$$

$$(\alpha<1 \text{ ή } \alpha>2) \text{ και } \frac{2\alpha-4}{\alpha-1}-1<0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha<1 \text{ ή } \alpha>2) \text{ και } (\alpha-3)(\alpha-1)<0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha<1 \text{ ή } \alpha>2) \text{ και } 1<\alpha<3\Leftrightarrow\alpha\in(2,3)$$

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα όταν ισχύει

$$1+\frac{\alpha-3}{\alpha-1}>1\Leftrightarrow\frac{\alpha-3}{\alpha-1}>0\Leftrightarrow(\alpha-3)(\alpha-1)>0\Leftrightarrow$$

$\alpha<1$ ή $\alpha>3$

ii) Για $\alpha=\frac{5}{2}$ είναι $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Επομένως

$$27f(2x)-30f(x)+8\leq 0\Leftrightarrow$$

$$27\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-30\left(\frac{2}{3}\right)^x+8\leq 0$$

Θέτουμε $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$ και λύνουμε την ανίσωση

$27y^2-30y+8\leq 0$.

Είναι $\Delta=36$ και $y_1=\frac{2}{3}, y_2=\frac{4}{9}$, άρα $y\in\left[\frac{4}{9},\frac{2}{3}\right]$

οπότε $\frac{4}{9}\leq y\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{4}{9}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^x\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\leq\left(\frac{2}{3}\right)^x\leq\left(\frac{2}{3}\right)^1 \overset{\frac{2}{3}<1}{\underset{f2}{\Leftrightarrow}} 1\leq x\leq 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln x\cdot\left(\ln|x|-4\ln\sqrt{e}\right)+\log 160-2\log 4.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 1$.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

Λύση

i) Η f ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία $x>0$ και $|x|>0\Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$. Για $x>0$ ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x)=\ln x\left(\ln x-4\ln e^{\frac{1}{2}}\right)+\log 160-\log 4^2=$$

$$\ln x\left(\ln x-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln e\right)+\log\left(\frac{160}{16}\right)=$$

$$\ln x(\ln x-2)+\log 10=\ln^2 x-2\ln x+1=(\ln x-1)^2$$

ii) Για $x>0$ έχουμε

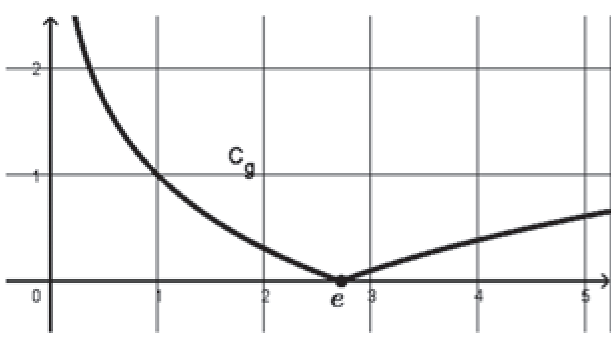
$$f(x)\leq 1\Leftrightarrow(\ln x-1)^2\leq 1\Leftrightarrow\sqrt{(\ln x-1)^2}\leq 1\Leftrightarrow$$

$$|\ln x-1|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq\ln x-1\leq 1\Leftrightarrow 0\leq\ln x\leq 2\Leftrightarrow$$

$$e^0\leq e^{\ln x}\leq e^2\Leftrightarrow 1\leq x\leq e^2$$

iii) $g(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{(\ln x-1)^2}=|\ln x-1|=$

$$=\begin{cases}\ln x-1 & ,x\geq e\\ -\ln x+1 & ,0<x<e\end{cases}$$



Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Χρήστος Π. Τσιφάκης – Βενέδικτος Μπαλτσαβιάς

Άσκηση 1

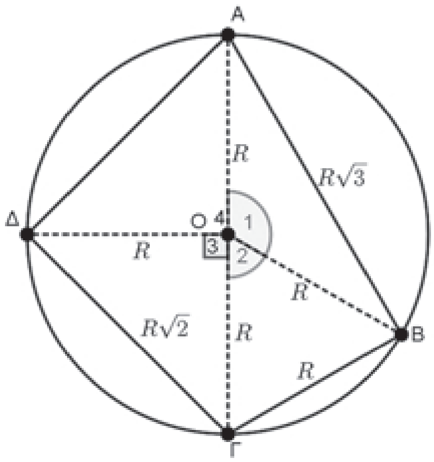
Δίνεται κύκλος (O,R) και οι χορδές του $AB=R\sqrt{3}$, $B\Gamma=R$ και $\Gamma\Delta=R\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το μήκος της χορδής ΑΔ και συναρτήσει της ακτίνας R.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

γ) Να βρείτε το λόγο $\dfrac{(B\Gamma\Delta)}{(AB\Delta)}$.

Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΟΒ από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot \text{συν}\hat{O}_1 \Rightarrow$

$\text{συν}\hat{O}_1=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \hat{O}_1=120^0$. Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{O}_2=60^0$ και από το αντίστροφο του Π.Θ. έχουμε ότι το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ορθογώνιο δηλαδή $\hat{O}_3=90^0$. Έτσι $\hat{O}_4=360^0-\hat{O}_1-\hat{O}_2-\hat{O}_3=90^0$ και από το Π.Θ. $A\Delta^2=OA^2+O\Delta^2 \Rightarrow A\Delta=R\sqrt{2}$.

β) Είναι $A\hat{O}\Gamma=180^0$ άρα η ΑΓ είναι διάμετρος οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma=A\hat{B}\Gamma=90^0$ και

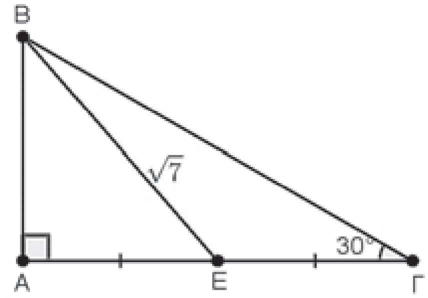
$(AB\Gamma\Delta)=(AB\Gamma)+(A\Delta\Gamma)=\dfrac{1}{2}AB\cdot B\Gamma+\dfrac{1}{2}A\Delta\cdot\Delta\Gamma=$

$\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}+R^2=R^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$.

γ) Είναι $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}+\overset{\frown}{\Delta AB}=360^o$ άρα $B\hat{\Gamma}\Delta+A\hat{B}\Delta=180^o$ οπότε $\dfrac{(B\Gamma\Delta)}{(AB\Delta)}=\dfrac{B\Gamma\cdot\Delta\Gamma}{A\Delta\cdot AB}=\dfrac{R^2\sqrt{2}}{R^2\sqrt{3}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Άσκηση 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^o$) η γωνία $\hat{\Gamma}=30^0$ και $BE=\sqrt{7}$, όπου Ε είναι το μέσο της ΑΓ.



α) Να δείξετε ότι: $BE^2+\dfrac{3}{4}A\Gamma^2=B\Gamma^2$

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=AB^2+(AE+E\Gamma)^2=$

$\underbrace{AB^2+AE^2}_{\text{Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΕ}}+2AE\cdot E\Gamma+E\Gamma^2 \overset{\text{Ε μέσο ΑΓ}}{=} BE^2+\dfrac{3}{4}A\Gamma^2$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma}=30^0$ άρα $AB=\dfrac{B\Gamma}{2}\Rightarrow AB^2=\dfrac{B\Gamma^2}{4}$ και

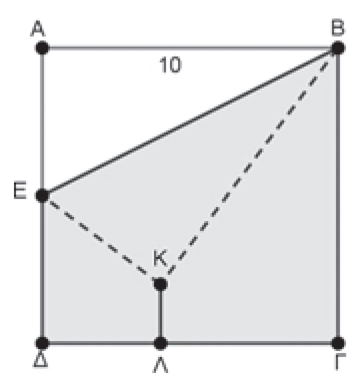
$A\Gamma^2=B\Gamma^2-AB^2=\dfrac{3}{4}B\Gamma^2$. Είναι

$BE^2+\dfrac{3}{4}A\Gamma^2=B\Gamma^2\Rightarrow 7+\dfrac{9}{16}B\Gamma^2=B\Gamma^2\Rightarrow B\Gamma=4$

άρα $A\Gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot B\Gamma=2\sqrt{3}$ και $AB=2$.

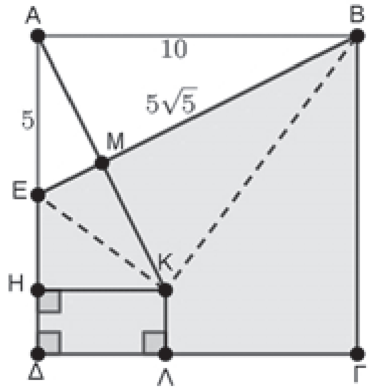
Άσκηση 3

Ένα χαρτί σχήματος τετραγώνου με πλευρά 10 cm διπλώνεται ως προς την ακμή ΕΒ, όπου Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ και Β μια κορυφή του. Να βρεθεί η απόσταση ΚΛ της άκρης του διπλωμένου χαρτιού που είναι εντός του τετραγώνου (η θέση της κορυφής Α) από την πλευρά του ΓΔ.



Λύση

Έχουμε ότι: $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 125$, άρα $BE = 5\sqrt{5}$. Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΕΒΚ είναι ίσα.
Φέρνουμε τις: ΑΚ που τέμνει κάθετα την ΒΕ στο σημείο Μ (γιατί;) και $KH \perp A\Delta$.

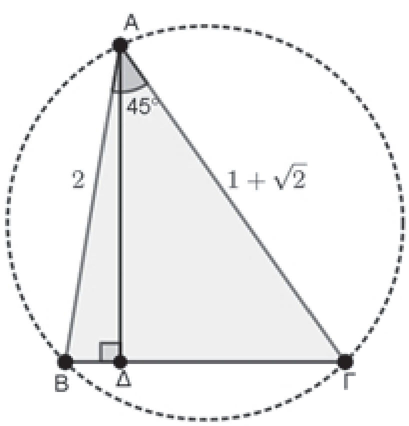


Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΕΜ είναι όμοια (γιατί;) οπότε
$$\frac{BE}{AB} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{5}{AM} \Rightarrow AM = 2\sqrt{5}.$$
Τα τρίγωνα ΕΜΚ, ΑΕΜ είναι ίσα, οπότε $AM = MK = 2\sqrt{5}$.
Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΗΚ είναι όμοια (γιατί;) συνεπώς
$$\frac{AH}{AB} = \frac{AK}{EB} \Rightarrow \frac{AH}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} \Rightarrow AH = 8.$$
Άρα $K\Lambda = H\Delta = A\Delta - AH = 10 - 8 = 2$

Άσκηση 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 1 + \sqrt{2}$, $\gamma = 2$ και εμβαδό $(AB\Gamma) = \dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$. Υπολογίστε:
i) Το μήκος της πλευράς α.
ii) Την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ
iii) Το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΒΓ.

Λύση

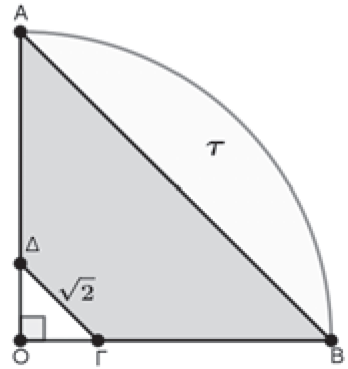


α) $(AB\Gamma) = \dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A = \dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$
$\eta\mu\hat{A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 45^{\circ}$ και από το νόμο των συνημίτονων
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{A} \Rightarrow \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$

β)
$$(AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Rightarrow \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Rightarrow R = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
γ) Από το Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot B\Delta \Rightarrow$
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} \cdot B\Delta \Rightarrow B\Delta = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Άσκηση 5

Στο τεταρτοκύκλιο ακτίνας R του σχήματος, το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος τ είναι ίσο με $4(\pi - 2)$ τ.μ. Αν $\Delta\Gamma = \sqrt{2}$, να βρείτε το εμβαδόν και το ύψος υ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.



Λύση

Έχουμε:
$$\tau = \frac{\pi R^2}{4} - (OAB) \Rightarrow 4(\pi - 2) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R^2 \Rightarrow$$
$$4(\pi - 2) = R^2\left(\frac{\pi - 2}{4}\right) \Rightarrow R = 4$$
Εφόσον το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο είναι $A\Delta = B\Gamma$ άρα $O\Delta = R - A\Delta = R - B\Gamma = O\Gamma$ οπότε το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε
$\Delta\Gamma^2 = O\Delta^2 + O\Gamma^2 \Rightarrow 2 = 2O\Gamma^2 \Rightarrow O\Gamma = O\Delta = 1$
Άρα
$$(AB\Gamma\Delta) = \left(\overset{\frown}{OAB}\right) - \tau - (O\Delta\Gamma) = \frac{16\pi}{4} - 4(\pi - 2) - \frac{1}{2}$$
$$= 4\pi - 4\pi + 8 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}.$$
Τα τρίγωνα ΟΔΓ και ΟΑΒ είναι όμοια (ορθογώνια με $O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{A}B$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά) με λόγο ομοιότητας $\lambda = \dfrac{O\Delta}{OA} = \dfrac{1}{4}$ άρα
$\dfrac{\Delta\Gamma}{AB} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$. Επομένως
$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{\Delta\Gamma + AB}{2} \cdot \upsilon = \frac{15}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \upsilon = \frac{15}{2} \Rightarrow \upsilon = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας

Χρήστος Π. Τσιφάκης

Άσκηση 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(1,3), Β(0, Ε) και Γ(Ε, 0), όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου και $E<4$.

i) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ

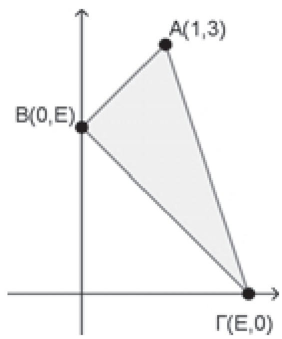
ii) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E=2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ έχει διάμετρο την ΑΓ.

β. Να βρεθεί η εξίσωση (C) του παραπάνω κύκλου.

γ. Έστω σημείο Μ που διαγράφει τον κύκλο (C). Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του Μ από την ευθεία $(\varepsilon): 6x+8y-41=0$.

Λύση



i) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=(E,-E)$ και

$\overrightarrow{BA}=(1,3-E)$ άρα

$$E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{BA}\right)\right|\Rightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}E & -E\\ 1 & 3-E\end{vmatrix}\right|\Rightarrow$$

$$2E=\left|4E-E^2\right|\Rightarrow$$

$$2E=\left|\underbrace{E(4-E)}_{>0}\right|\Rightarrow 2E=4E-E^2\Rightarrow$$

$$E(E-2)=0\overset{E>0}{\Rightarrow}E=2$$

ii) α) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}=(2,-2)\cdot(1,1)=2-2=0$, άρα $\overrightarrow{B\Gamma}\perp\overrightarrow{BA}\Rightarrow\hat{B}=90^0$, οπότε η ΑΓ είναι διάμετρος.

β) Ο κύκλος έχει κέντρο το μέσο Κ του ΒΓ, οπότε $K(1,1)$, και ακτίνα

$\rho=(K\Gamma)=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$, επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι

$C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

γ) Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|6\cdot1+8\cdot1-41|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{27}{10}>\rho$, οπότε η (ε) είναι εξωτερική του C και η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με

$$D=d(K,\varepsilon)-\rho=\frac{27}{10}-\sqrt{2}.$$

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$, $x\in[0,2]$.

Λύση

$$f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}=\sqrt{x}+4\sqrt{\frac{2-x}{2}}=$$

$$=\sqrt{x}+2\sqrt{2}\sqrt{2-x}$$

Αν θεωρήσουμε $\vec{\alpha}=\left(1,2\sqrt{2}\right)$ και

$\vec{\beta}=\left(\sqrt{x},\sqrt{2-x}\right)$, τότε $f(x)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Γνωρίζουμε ότι $-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\le\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ δηλαδή $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)_{max}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=3\sqrt{2}$, οπότε $f_{max}=3\sqrt{2}$.

Άσκηση 3

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $f(x)=\left|\vec{\alpha}+x\cdot\vec{\beta}\right|$, για κάθε $x\in R$.

i) Να δειχθεί $f(x)=0$ για κάποιο $x\in R$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ συγγραμμικά.

ii) Να δειχθεί $f\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)=|\vec{\alpha}|$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

iii) Να αποδειχθεί ότι αν $\varphi=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\neq\dfrac{\pi}{2}$, τότε $f\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right)\ge|\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

i) $f(x)=0\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}+x\cdot\vec{\beta}\right|=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}+x\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}=\underbrace{-x}_{\lambda\in\mathbb{R}}\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$

ii) $f\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)=|\vec{\alpha}|\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}+\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}\right|=|\vec{\alpha}|\Leftrightarrow$

$\left|\vec{\alpha}+\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}\right|^2=|\vec{\alpha}|^2\Leftrightarrow2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2+\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2\cdot\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$

$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2\cdot\left(\underbrace{2+\left|\vec{\beta}\right|^2}_{>0}\right)=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

iii) Αν $\kappa=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\cdot\dfrac{1}{\kappa}$ και

$f(\kappa)\geq\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\alpha}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}+\kappa\cdot\vec{\beta}\right|^2\geq\left(\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\alpha}\right|\right)^2\Leftrightarrow$

$\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\kappa\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta}+\kappa^2\left|\vec{\beta}\right|^2\geq\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow$

$\kappa^2\left|\vec{\beta}\right|^2\geq\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow\left(\kappa^2-1\right)\left|\vec{\beta}\right|^2\geq 0\overset{\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}$

$\kappa^2\geq 1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\varphi\leq 1$, που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi=1$ ή $\sigma\upsilon\nu\varphi=-1\Leftrightarrow$

$\varphi=0$ ή $\varphi=\pi\Leftrightarrow\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$

Άσκηση 4

Δίνονται οι εξισώσεις :

$(x+y-1)(x+y+1)=2xy$ (1) και

$(\lambda-1)x+(2\lambda+3)y+2\lambda-5=0$ (2)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C και να βρεθούν τα στοιχεία του.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ η ευθεία που παριστάνει η εξίσωση (2) να εφάπτεται στον κύκλο (C).

Λύση

α) $(1)\Leftrightarrow(x+y)^2-1^2=2xy\Leftrightarrow x^2+y^2=1$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β) Είναι $A=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$ και

$B=0\Leftrightarrow 2\lambda+3=0\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{3}{2}$, άρα $A\neq 0$ ή $B\neq 0$

οπότε η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Η ευθεία (ε), με εξίσωση την (2), εφάπτεται στον κύκλο C αν και μόνο αν

$d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\dfrac{|2\lambda-5|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+(2\lambda+3)^2}}=1\Leftrightarrow$

$(2\lambda-5)^2=(\lambda-1)^2+(2\lambda+3)^2\Leftrightarrow$

$\lambda^2+30\lambda-15=0\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{-30\pm 8\sqrt{15}}{2}\Leftrightarrow$

$\lambda=-15\pm 4\sqrt{15}$

Άσκηση 5

Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy δίνονται τα σημεία $P(-2,0)$ και $\Sigma(2,0)$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{\Sigma M}=0$ είναι ο κύκλος C_1 με εξίσωση $x^2+y^2=4$.

β. Όταν το σημείο $N(\kappa,\lambda)$ κινείται στον παραπάνω κύκλο C_1 να αποδείξετε ότι το σημείο $T\left(\dfrac{\kappa}{2},\lambda\right)$ κινείται σε έλλειψη C_2.

γ. Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι $4x^2+y^2=4$ να βρείτε τις εστίες Ε και Ε΄ και την εκκεντρότητα της

δ. Να αποδείξετε ότι $E\hat{B}O=60^\circ$ όπου Β μία από τις κορυφές του μικρού άξονα της έλλειψης και Ο η αρχή των αξόνων.

Λύση

α) $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{\Sigma M}=0\Leftrightarrow(x+2,y)\cdot(x-2,y)=0\Leftrightarrow$

$(x+2)\cdot(x-2)+y^2=0\Leftrightarrow x^2+y^2=4$, άρα το Μ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και $\rho=2$.

β) Έχουμε $\kappa^2+\lambda^2=4$. Αν $T(x,y)$ τότε

$x=\dfrac{\kappa}{2}\Leftrightarrow\kappa=2x$ και $y=\lambda$ συνεπώς

$\kappa^2+\lambda^2=4\Leftrightarrow(2x)^2+y^2=4\Leftrightarrow 4x^2+y^2=4\Leftrightarrow$

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$, δηλαδή το Τ κινείται σε έλλειψη.

γ) Είναι $\alpha^2=4\Leftrightarrow\alpha=2$ και $\beta^2=1\Leftrightarrow\beta=1$, οπότε $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{3}$, επομένως οι εστίες είναι $E\left(0,\sqrt{3}\right)$ και $E'\left(0,-\sqrt{3}\right)$, ενώ η εκκεντρότητα $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

δ) Αν $B(1,0)$, τότε $\overrightarrow{BE}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$ και $\overrightarrow{BO}=(-1,0)$, επομένως

$\sigma\upsilon\nu\left(E\hat{B}O\right)=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BO}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BO}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$, άρα $E\hat{B}O=60^\circ$,

ενώ αν $B(-1,0)$, τότε $\overrightarrow{BE}=\left(1,\sqrt{3}\right)$ και $\overrightarrow{BO}=(1,0)$ επομένως

$\sigma\upsilon\nu\left(E\hat{B}O\right)=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BO}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BO}\right|}=\dfrac{1}{2}$ άρα $E\hat{B}O=60^\circ$.

Τάξη: Γ΄

Θέματα Ανάλυσης

Ζανταρίδης Ν. – Μαυροφρύδης Β. – Τηλέγραφος Θ.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x\cdot(e^x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.

δ) i) Να εξηγήσετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν G είναι μία παράγουσα της $f(x^2)$ στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(G(x)-x^4\right)$.

Λύση

α) Είναι: $f'(x)=(x)'(e^x-1)+x(e^x-1)'=$

$1\cdot(e^x-1)+xe^x=(x+1)e^x-1$

Έχουμε:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow (x+1)e^x-1>0 \overset{(e^x>0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{(x+1)e^x-1}{e^x}>0\Leftrightarrow x+1-e^{-x}>0\Leftrightarrow \varphi(x)>0,$$

όπου $\varphi(x)=x+1-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x)=1+e^{-x}>0$.

Ακόμη, είναι $\varphi(0)=0+1-e^{-0}=0$.

Έτσι, έχουμε:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow \varphi(x)>0 \overset{(\varphi(0)=0)}{\Leftrightarrow} \varphi(x)>\varphi(0) \overset{(\varphi\nearrow\mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x>0$$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x<0$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο, το $\min f(x)=f(0)=0$.

β) Είναι: $f''(x)=\ldots=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

$$f''(x)>0\Leftrightarrow (x+2)e^x>0 \overset{(e^x>0)}{\Leftrightarrow} x+2>0\Leftrightarrow x>-2.$$

$f''(x)<0\Leftrightarrow x<-2$, $f''(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Από το πρόσημο της $f''(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$, κυρτή στο $[-2,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή (μόνο) στο $x_0=-2$.

Είναι $f(-2)=(-2)(e^{-2}-1)=\dfrac{2\cdot(e^2-1)}{e^2}$, οπότε το σημείο καμπής της C_f είναι το $M\left(-2,\dfrac{2(e^2-1)}{e^2}\right)$

γ) • Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, οπότε για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$.

Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$, οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

• Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=0-1=-1\in\mathbb{R}$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-1)x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x(e^x-1)+x\right]=$

$$=\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{(e^{-x})'}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}(-e^x)=-0=0\in\mathbb{R}.$$

Άρα, στο $-\infty$, η C_f έχει (πλάγια) ασύμπτωτη, την ευθεία $\varepsilon: y=-x$.

δ) i) Η συνάρτηση $g(x)=f(x^2), x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε η $g(x)=f(x^2)$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) • Επειδή η G είναι παράγουσα της $f(x^2)$ στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $G'(x)=f(x^2)=x^2\cdot(e^{x^2}-1)$.

• Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $e^x\geq x+1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $e^x>x+1$.

Έτσι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$e^{x^2}>x^2+1\Rightarrow e^{x^2}-1>x^2\overset{(x^2>0)}{\Rightarrow} x^2(e^{x^2}-1)>x^4\Rightarrow$$

$$G'(x)>x^4\Rightarrow G'(x)-x^4>0\Rightarrow\left(G(x)-\frac{x^5}{5}\right)'>0\Rightarrow$$

$h'(x)>0$, όπου $h(x)=G(x)-\dfrac{x^5}{5}, x\in\mathbb{R}$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x>1$ ισχύει:

$$h(x)>h(1)\Rightarrow G(x)-\frac{x^5}{5}>G(1)-\frac{1^5}{5}=\kappa\in\mathbb{R}$$

$$G(x)>\frac{x^5}{5}+\kappa\Rightarrow G(x)-x^4>\frac{1}{5}x^5-x^4+\kappa:(\Sigma).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{5}(x^5-x^4+\kappa)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}x^5\right)=+\infty$,

οπότε, λόγω της (Σ), προκύπτει ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(G(x)-x^4)=+\infty$.

Άσκηση 2

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και ισχύουν:

- $(f(1)+1)\cdot e^{f(1)}=(f(-1)+1)\cdot e^{f(-1)}=1$.
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{xf(x+h)-(x+h)f(x)}{h}=x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(1)=f(-1)=0$.

β) Να δείξετε ότι: $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}, x\neq 0$ και να βρεθεί ο τύπος της f.

γ) Αν $f(x)=\begin{cases}x\ln|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\ln|x|-\dfrac{x^2}{4}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ **είναι παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.**

δ) Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=e$.

Λύση

α) $\ldots(f(1)+1)\cdot e^{f(1)}=(f(-1)+1)\cdot e^{f(-1)}=1:(1)$.

Έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow f(1)+1=\frac{1}{e^{f(1)}}\Leftrightarrow e^{-f(1)}=f(1)+1\Leftrightarrow$$

$\boxed{e^{-f(1)}-f(1)=1}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{-x}-x, x\in\mathbb{R}$.

Είναι: $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η g είναι συνάρτηση 1-1.

Ακόμη είναι $g(0)=e^{-0}-0=1$.

Έτσι έχουμε:

$$e^{-f(1)}-f(1)=1\Leftrightarrow g(f(1))=g(0)\overset{(g:1-1)}{\Leftrightarrow} f(1)=0.$$

Άρα, είναι $\boxed{f(1)=0}$, όμοια αποδεικνύεται ότι και $\boxed{f(-1)=0}$, οπότε $\boxed{f(1)=f(-1)=0}$

β) $\ldots\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{xf(x+h)-(x+h)f(x)}{h}=x:(2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0$, οπότε είναι: $f(x)=x\cdot\varphi(x)$ για κάθε $x\neq 0$.

Για κάθε $x\neq 0$ και $h\in\mathbb{R}-\{0,-x\}$ είναι:

$$\frac{xf(x+h)-(x+h)f(x)}{h}=$$

$$=\frac{x\cdot(x+h)\varphi(x+h)-(x+h)x\varphi(x)}{h}=$$

$$=x(x+h)\cdot\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\Rightarrow$$

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{1}{x(x+h)}\cdot\frac{xf(x+h)-(x+h)f(x)}{h},$$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x(x+h)}\cdot\frac{xf(x+h)-(x+h)f(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x(x+h)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{xf(x+h)-(x+h)f(x)}{h}\overset{(2)}{=}$$

$$=\frac{1}{x(x+0)}\cdot x=\frac{1}{x}\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$, είναι παραγωγίσιμη, με $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\neq 0$.

Άρα, είναι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\ln|x|\right)'\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\ln|x|+c_1, & x<0\\ \ln|x|+c_2, & x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}x\ln(-x)+c_1x, & x<0\\ x\ln x+c_2x, & x>0\end{cases}.$$

Έχουμε

$f(1)=f(-1)=0\Leftrightarrow(-1)\cdot\ln 1-c_1=1\cdot\ln 1+c_2=0\Leftrightarrow$

$c_1=c_2=0$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0.$$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^-}x\ln(-x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(\ln(-x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{-x}\cdot(-x)'}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

Έτσι έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$

και $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x\ln(-x))=0$. Οπότε $f(0)=0$.

Άρα είναι

$$f(x)=\begin{cases}x\ln(-x), & x<0\\ 0, & x=0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}=\begin{cases}x\ln|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

γ) ...$G(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\cdot\ln|x|-\frac{x^2}{4}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Για κάθε $x\neq 0$ είναι:

$$G'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\ln|x|-\frac{x^2}{4}\right)'=\ldots=$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln|x|+\frac{x^2}{2}\left(\ln|x|\right)'-\left(\frac{1}{4}x^2\right)'=$$

$$=x\cdot\ln|x|+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\cdot 2x=x\ln|x|=f(x).$$

Ακόμη, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\cdot\ln|x|-\frac{x^2}{4}-0}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x\ln|x|-\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot 0=0=f(0),$$

οπότε η G είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$, με $G'(0)=f(0)$. Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $G'(x)=f(x)$, οπότε η G είναι παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

δ) Για κάθε $x\in[-1,0)$ είναι $f(x)=x\ln|x|\geq 0$.

Για κάθε $x\in(0,1]$ είναι $f(x)=x\ln|x|\leq 0$.

Για κάθε $x\in[1,e]$ είναι $f(x)=x\ln|x|\geq 0$ και $f(0)=0$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E=\int_{-1}^{e}\left|f(x)\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|f(x)\right|dx+$

$+\int_{0}^{1}\left|f(x)\right|dx+\int_{1}^{e}\left|f(x)\right|dx=$

$=\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=$

$=\left(G(0)-G(-1)\right)-\left(G(1)-G(0)\right)+G(e)-G(1).$

Είναι:

$G(0)=0, G(-1)=\frac{(-1)^2}{2}\ln|1|-\frac{(-1)^2}{4}=-\frac{1}{4},$

$G(1)=\frac{1^2}{2}\ln|1|-\frac{1^2}{4}=-\frac{1}{4}$ και

$G(e)=\frac{e^2}{2}\ln|e|-\frac{e^2}{4}=\frac{e^2}{4}$. Άρα,

$E=\left(0-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)-\left(-\frac{1}{4}-0\right)+\left(\frac{e^2}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(e^2+3\right)$ τ.μ..

Άσκηση 3

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$e^{f'(x)}+xf'(x)=x(\ln x+1)$ για κάθε $x>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$.

α) Να δείξετε ότι: $f(x)=x\ln x-x, x>0$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

γ) Αν για την συνεχή συνάρτηση $g:[0,1]\to(0,+\infty)$, ισχύει $\int_0^1 g(x)dx=1$, να δείξετε ότι:

i) $\int_0^1 \ln\left(g(x)\right)dx\le 0$.

ii) $\int_0^1 g(x)\ln\left(g(x)\right)dx\ge 0$.

δ) Ένα σημείο $M(\alpha,\beta), \alpha>0$, κινείται πάνω στη C_f με την τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό μεταβολής $\frac{1}{t+1}$ μ.μ./sec, $t\ge0$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $(1,-1)$.

i) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου M τη χρονική στιγμή $t_0=e^2-1$ (sec).

ii) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M, ως προς τον χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0.

Λύση

α) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$e^{f'(x)}+xf'(x)=x(\ln x+1)\Leftrightarrow$

$e^{f'(x)}+xf'(x)=x+x\ln x\Leftrightarrow$

$e^{f'(x)}+xf'(x)=e^{\ln x}+x\ln x:\ (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(t)=e^t+x\cdot t, t\in\mathbb{R}, (x>0)$.

Είναι $\varphi'(t)=e^t+x>0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνάρτηση "1−1".

Από την (1) για κάθε $x>0$ έχουμε:

$e^{f'(x)}+xf'(x)=e^{\ln x}+x\cdot\ln x\Leftrightarrow$

$\varphi\left(f'(x)\right)=\varphi(\ln x)\overset{(\varphi\ 1-1)}{\Leftrightarrow} f'(x)=\ln x\Leftrightarrow$

$f'(x)=(x)'\cdot\ln x+x(\ln x)'-1\Leftrightarrow$

$f'(x)=(x\ln x)'-(x)'\Leftrightarrow$

$\left(f(x)\right)'=(x\ln x-x)'\Leftrightarrow f(x)=x\ln x-x+c$

Είναι:

$\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$.

Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x-x+c)=0\Leftrightarrow$

$0-0+c=0\Leftrightarrow c=0$.

Άρα, $f(x)=x\ln x-x, x>0$.

β) • Είναι: $f'(x)=...=\ln x, x>0$.

Έχουμε:

• $f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x>\ln 1\overset{(\ln x\nearrow(0,+\infty))}{\Leftrightarrow}x>1$

• $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Από το πρόσημο της $f'(x)$, που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	

οπότε η f παρουσιάζει (μόνο) στο $x_0=1$ ολικό ελάχιστο, το $\min f(x)=f(1)=-1$.

• Είναι $f''(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

Επομένως, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημείο καμπής.

γ) i) Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x \le x-1$: (2).

Λόγω της (1) και επειδή ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, προκύπτει ότι για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $\ln(g(x))\le g(x)-1$.

Επομένως, $\int_0^1 \ln(g(x))dx \le \int_0^1 (g(x)-1)dx =$

$=\int_0^1 g(x)dx-\int_0^1 1\,dx=1-1\cdot(1-0)=0$.

Άρα, $\int_0^1 \ln(g(x))dx\le 0$.

ii) Επειδή η f έχει ελάχιστο το $\min f(x)=-1$, έπεται ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$f(x)\ge -1 \Rightarrow x\ln x - x\ge -1 \Rightarrow x\ln x\ge x-1$: (3)

Επομένως, για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει

$g(x)\ln(g(x))\ge g(x)-1$,

οπότε

$\int_0^1 g(x)\ln(g(x))dx \ge \int_0^1 (g(x)-1)dx =$

$\int_0^1 g(x)dx-\int_0^1 1\,dx=1-1\cdot(1-0)=0$

Άρα, $\int_0^1 g(x)\ln(g(x))dx\ge 0$.

δ) i) Έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή $t\ge 0$ είναι $\alpha=\alpha(t)$ μ.μ. και

$\beta=f(\alpha(t))=\alpha(t)\ln(\alpha(t))-\alpha(t)$ μ.μ..

Για κάθε $t\ge 0$ ισχύει:

$$\alpha'(t)=\frac{1}{t+1}\Leftrightarrow \alpha'(t)=\frac{(t+1)'}{t+1}\Leftrightarrow$$

$$(\alpha(t))'=(\ln(t+1))'\Leftrightarrow \alpha(t)=\ln(t+1)+c_1$$

Είναι: $\alpha(0)=1\Leftrightarrow \ln(0+1)+c_1=1\Leftrightarrow c_1=1$.

Άρα, $\alpha(t)=\ln(t+1)+1,\ t\ge 0$.

Για $t=t_0=e^2-1$ είναι

$$\alpha(t_0)=\alpha(e^2-1)=\ln(e^2-1+1)+1=$$

$\ln(e^2)+1=2+1=3$ μ.μ..

Άρα, η τετμημένη του σημείου M τη χρονική στιγμή $t_0=e^2-1$ (sec) είναι $\alpha(t_0)=3$ μ.μ..

ii) Είναι

$\beta(t)=f(\alpha(t))=\alpha(t)\ln(\alpha(t))-\alpha(t), t\ge 0$

και

$$\beta'(t)=\alpha'(t)\ln(\alpha(t))+\alpha(t)\cdot\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}-\alpha'(t)=$$

$=\alpha'(t)\ln(\alpha(t)), t\ge 0$.

Για τη χρονική στιγμή $t_0=e^2-1$ μ.μ. είναι:

$\alpha(t_0)=3$ μ.μ. και $\alpha'(t_0)=\dfrac{1}{t_0+1}=\dfrac{1}{e^2-1+1}=\dfrac{1}{e^2}$,

οπότε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M, ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή $t_0=e^2-1$ (sec) είναι:

$$\beta'(t_0)=\alpha'(t_0)\cdot\ln(\alpha(t_0))=\frac{\ln 3}{e^2}\ (\text{μ.μ./sec}).$$

Άσκηση 4

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, συνεχής στο $x_0=0$ και ισχύει:

$$f(x)=\begin{cases} f'(x)+1, & x>0 \\ -f(-x), & x\le 0\end{cases}.$$

α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Αν $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-1, & x<0 \\ 1-e^{x}, & x\ge 0\end{cases}$, τότε:

β) i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να οριστεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση της f.

γ) i) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

ii) Να υπολογίσετε το $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\eta\mu x)dx$.

Λύση

α) • Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$f(x)=f'(x)+1 \Leftrightarrow f'(x)=f(x)-1 \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)'=f(x)-1 \Leftrightarrow f(x)-1=c\cdot e^x \Leftrightarrow$

$f(x)=c\cdot e^x+1$

Ακόμη ισχύει $f(x)=-f(-x)$, για κάθε $x\le 0$, οπότε:

$f(0)=-f(-0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, οπότε:

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}(c\cdot e^x+1)=0\Leftrightarrow$

$c+1=0\Leftrightarrow c=-1$.

Άρα, $f(x)=1-e^x, x>0$.

• Για κάθε $x<0$ είναι $-x>0$, οπότε:

$f(-x)=1-e^{-x}\Leftrightarrow -f(-x)=e^{-x}-1\Leftrightarrow$

$f(x)=e^{-x}-1$.

Άρα, $f(x)=\begin{cases}1-e^x &, x>0\\ e^{-x}-1, & x<0\\ 0 &, x=0\end{cases} = \begin{cases} e^{-x}-1, & x<0\\ 1-e^x &, x\ge 0\end{cases}$.

β) i) • Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι

$f'(x)=(e^{-x}-1)'=-e^{-x}<0$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$f'(x)=(1-e^x)'=-e^x<0$.

Άρα για κάθε $x\ne 0$ ισχύει $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι συνάρτηση 1-1.

Άρα, η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$ της f.

• Εύρεση του $f(\mathbb{R})$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,0)$ και $\Delta_2=[0,+\infty)$, οπότε:

$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)$ και

$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(0)\right]$.

Είναι:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(e^{-x}-1)=+\infty$

και $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(1-e^x)=-\infty$.

Άρα, $f(\Delta_1)=(0,+\infty), f(\Delta_2)=(-\infty,0]$ και

$f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(0,+\infty)\cup(-\infty,0]=\mathbb{R}$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Σχόλιο: Το $f(\mathbb{R})$ μπορεί να βρεθεί και ως εξής

$f(\mathbb{R}) \underset{\left(\substack{f\ \text{συνεχής} \\ \text{στο}\ \mathbb{R}}\right)}{\overset{(f \searrow \mathbb{R})}{=}} \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

• Εύρεση του τύπου της f^{-1}.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$, με $x\in D_f=\mathbb{R}, y\in D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ και τη λύνουμε ως προς x

Έχουμε: $f(x)=y\Leftrightarrow$

$\begin{cases} e^{-x}-1=y, \text{αν } x\in(-\infty,0), y\in(0,+\infty)\\ 1-e^x=y \ , \text{αν } x\in[0,+\infty), y\in(-\infty,0]\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases} e^{-x}=y+1, \ x<0, y>0\\ e^x=1-y\ , \ x\ge 0, y\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases} -x=\ln(y+1), \ x<0, y>0\\ x=\ln(1-y), \ x\ge 0, y\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$x=\begin{cases} \ln(1-y), \ y\le 0\\ -\ln(1+y), \ y>0\end{cases}$.

Άρα, είναι: $f^{-1}(y)=\begin{cases} \ln(1-y), \ y\le 0\\ -\ln(1+y), \ y>0\end{cases}$.

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής: $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

$f^{-1}(x)=\begin{cases} \ln(1-x) &, x\in(-\infty,0]\\ -\ln(1+x), & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

γ) i) ...$f(x)=\begin{cases} f'(x)+1, & x>0 \\ -f(-x), & x\le 0 \end{cases}$.

• Για κάθε $x\le 0$ ισχύει $f(x)=-f(-x)$, οπότε για κάθε $x\le 0$ ισχύει $f(-x)=-f(x)$: (α).

• Για κάθε $x\ge 0$ είναι $-x\le 0$, οπότε λόγω της (α), ισχύει:

$f(-(-x))=-f(-x)\Rightarrow f(x)=-f(-x)\Rightarrow$

$f(-x)=-f(x)$: (β).

Από (α) και (β) έχουμε ότι για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$ ισχύει $-x\in D_f=\mathbb{R}$ και $f(-x)=-f(x)$, οπότε η f είναι περιττή.

ii) Για το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\eta\mu x)dx$ θέτουμε $u=-x$, οπότε $x=-u$ και $dx=(-1)du$.

• Για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$.

• Για $x=\alpha$ είναι $u=-\alpha$. Άρα,

$I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\eta\mu x)dx=\int_{\alpha}^{-\alpha} f(\eta\mu(-u))(-1)du=$

$=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-\eta\mu u)du \overset{(f(-x)=-f(x))}{=} \int_{-\alpha}^{\alpha} (-f(\eta\mu u))du=$

$=-\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\eta\mu u)du=-\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\eta\mu x)dx=-I.$

Άρα, $I=-I\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0$.

Επομένως, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\eta\mu x)dx=0$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}-(e-\alpha)x-1, x\in\mathbb{R}$, (όπου $\alpha\in R$ σταθερά) για την οποία ισχύει: $f(1+x)f(1-x)<0$, κοντά στο $x_0=0$.

α) Να δείξετε ότι: $\alpha=1$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το πρόσημο της f.

γ) Να δείξετε ότι

$$e^{f(x_0)}\cdot\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right)<\int_{x_0}^{1}\frac{e^{f(x)}}{x+1}dx<\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right),$$

όπου x_0 είναι η θέση του ολικού ελάχιστου της f.

δ) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=2026$, να δείξετε ότι $e^{x_1}<e-1<e^{x_2}$.

Λύση

α) ...$f(1+x)f(1-x)<0$: (1) (κοντά στο $x_0=0$).

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} f(1+x) \underset{\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1\right)}{\overset{(\omega=1+x)}{=}} \lim\limits_{\omega\to 1} f(\omega) \overset{(f\ \text{συνεχής})}{=} f(1)$

και $\lim\limits_{x\to 0} f(1-x) \underset{\left(\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1\right)}{\overset{(y=1-x)}{=}} \lim\limits_{y\to 1} f(y) \overset{(f\ \text{συνεχής})}{=} f(1)$.

Έτσι, από την (1) προκύπτει ότι:

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(1+x)f(1-x)\right]\le\lim\limits_{x\to 0} 0\Rightarrow$

$f(1)f(1)\le 0\Rightarrow (f(1))^2\le 0 \overset{\left((f(1))^2\ge 0\right)}{\Rightarrow}$

$(f(1))^2=0\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow e^{\alpha\cdot 1}-(e-\alpha)\cdot 1-1=0\Leftrightarrow$

$e^{\alpha}+\alpha=e+1\Leftrightarrow \boxed{g(\alpha)=e+1}$,

όπου $g(x)=e^x+x, x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η g είναι συνάρτηση "$1-1$". Ακόμη είναι $g(1)=e+1$. Έτσι έχουμε:

$g(\alpha)=e+1\Leftrightarrow g(\alpha)=g(1) \overset{(g\ 1-1)}{\Leftrightarrow} \alpha=1$.

Άρα $\boxed{\alpha=1}$.

β) • Επειδή είναι $\alpha=1$, έχουμε:

$f(x)=e^x-(e-1)x-1$ και $f'(x)=e^x-(e-1)$.

Έχουμε:

• $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-(e-1)>0\Leftrightarrow$

$e^x>e-1 \overset{(\ln x\ \nearrow)}{\Leftrightarrow} \ln(e^x)>\ln(e-1)\Leftrightarrow x>\ln(e-1)$.

• $f'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln(e-1)$.

• $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\ln(e-1)$.

x	$-\infty$	$x_0=\ln(e-1)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι:

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln(e-1)]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln(e-1), +\infty)$.

• Η f παρουσιάζει στο $x_0 = \ln(e-1)$ (ολικό) ελάχιστο, το $\min f(x) = f(\ln(e-1)) =$
$e^{\ln(e-1)} - (e-1)\ln(e-1) - 1 =$
$e - 1 - (e-1)\ln(e-1) - 1 =$
$(e-2) - (e-1)\ln(e-1)$.

• Εύρεση των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

x	$-\infty$	0	$x_0 = \ln(e-1)$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘ ↗	0	↗

$1 < e-1 \Rightarrow \ln 1 < \ln(e-1) < \ln e \Rightarrow 0 < \ln(e-1) < 1$

• Είναι $f(0) = \ldots = 0$ και $f(1) = \ldots = 0$.

• Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln(e-1)]$ και $f(0) = 0$, έπεται ότι στο $(-\infty, \ln(e-1)]$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\boxed{\rho_1 = 0}$.

• Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln(e-1), +\infty)$ και $f(1) = 0$, έπεται ότι στο $[\ln(e-1), +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα, το $\boxed{\rho_2 = 1}$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες: $\rho_1 = 0$ και $\rho_2 = 1$.

• Εύρεση του πρόσημου της f.

Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1$, έπεται ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0), (0,1), (1, +\infty)$, έπεται ότι διατηρεί σε καθένα από αυτά σταθερό πρόσημο.

Είναι: $f(-1) = e^{-1} - (e-1)(-1) - 1 = \dfrac{1}{e} + e - 2 > 0$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - (e-1)\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{\left(\sqrt{e}-1\right)^2}{2} < 0$

$f(2) = e^2 - (e-1)\cdot 2 - 1 = (e-1)^2 > 0$,

με $-1 \in (-\infty, 0), \dfrac{1}{2} \in (0,1)$ και $2 \in (1, +\infty)$.

Επομένως είναι: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

$f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

γ) Η θέση του ολικού ελάχιστου της f είναι το $x_0 = \ln(e-1) \in (0,1)$

x	$-\infty$	0	$x_0 = \ln(e-1)$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘ min ↗	0	↗

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$, οπότε για κάθε $x \in [x_0, 1]$ ισχύει:

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(1) = 0 \overset{(e^x \nearrow)}{\Rightarrow} e^{f(x_0)} \leq e^{f(x)} \leq e^0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{f(x_0)}}{x+1} \leq \frac{e^{f(x)}}{x+1} \leq \frac{1}{x+1},$$

με τις ισότητες να μην ισχύουν παντού στο $[x_0, 1]$, οπότε

$$\int_{x_0}^{1} \frac{e^{f(x_0)}}{x+1}dx < \int_{x_0}^{1} \frac{e^{f(x)}}{x+1}dx < \int_{x_0}^{1} \frac{1}{x+1}dx \Rightarrow$$

$$e^{f(x_0)}\int_{x_0}^{1} \frac{(x+1)'}{x+1}dx < \int_{x_0}^{1} \frac{e^{f(x)}}{x+1}dx < \int_{x_0}^{1} \frac{(x+1)'}{x+1}dx \Rightarrow$$

$$e^{f(x_0)}\cdot\left[\ln(x+1)\right]_{x_0}^{1} < \int_{x_0}^{1} \frac{e^{f(x)}}{x+1}dx < \left[\ln(x+1)\right]_{x_0}^{1} \Rightarrow$$

$$e^{f(x_0)}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right) < \int_{x_0}^{1} \frac{e^{f(x)}}{x+1}dx < \ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right).$$

δ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - (e-1)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2).

Ακόμη είναι $f(x_1) = f(x_2) = 2026$, αφού οι x_1, x_2

είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=2026$.

Άρα, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle στο $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, ώστε $f'(\xi)=0\Rightarrow e^{\xi}-(e-1)=0\Rightarrow$

$e^{\xi}=e-1\Rightarrow \xi=\ln(e-1)$. Έχουμε:

$$\xi\in(x_1,x_2)\Rightarrow x_1<\xi<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{\xi}<e^{x_2}\overset{(\xi=\ln(e-1))}{\Rightarrow}$$

$$e^{x_1}<e^{\ln(e-1)}<e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}<e-1<e^{x_2}.$$

Άσκηση 6

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left|x^2\cdot f(y)-y^2\cdot f(x)\right|\le\left(x^2y-xy^2\right)^2$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)=3.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ με $g'(x)=0$ για κάθε $x\neq0$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=3x^2$.

γ) Δύο σημεία $M(\alpha,\beta)$ και $N(\gamma,\delta)$, με $\alpha<0<\gamma$, κινούνται πάνω στην C_f και απομακρύνονται από τον $y'y$ με ρυθμό 1 μ.μ./sec το M και 2 μ.μ./sec το N.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία MN είναι $E=\dfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)^3$ τ.μ..

ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $\alpha=-2$ μ.μ. και $\gamma=3$ μ.μ..

Λύση

α) ...$\left|y^2\cdot f(x)-x^2\cdot f(y)\right|\le\left(x^2y-xy^2\right)^2:(1)$.

Έστω $x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$. Λόγω της (1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{x_0,0\}$ ισχύει:

$$\left|x_0^2f(x)-x^2f(x_0)\right|\le\left(x^2\cdot x_0-xx_0^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\left|x^2\cdot x_0^2\left(\frac{f(x)}{x^2}-\frac{f(x_0)}{x_0^2}\right)\right|\le\left[xx_0(x-x_0)\right]^2\Rightarrow$$

$x^2x_0^2\left|g(x)-g(x_0)\right|\le x^2x_0^2(x-x_0)^2$, (όπου $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$, $x\neq0$)

$$\Rightarrow\left|g(x)-g(x_0)\right|\le(x-x_0)^2\overset{(|x-x_0|>0)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\left|g(x)-g(x_0)\right|}{|x-x_0|}\le\frac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|}=\frac{|x-x_0|^2}{|x-x_0|}=|x-x_0|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|\Rightarrow$$

$$-|x-x_0|\le\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|:(2).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, οπότε, λόγω της (2) και του κριτήριου παρεμβολής, προκύπτει ότι:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=0\in\mathbb{R}$. Άρα, η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$ με $g'(x_0)=0$ για κάθε $x_0\neq0$.

Δηλαδή η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και ισχύει

$g'(x)=0$ για κάθε $x\neq0$.

β) • Για κάθε $x\neq0$ έχουμε:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases}c_1, & x<0\\ c_2, & x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x^2}=\begin{cases}c_1, & x<0\\ c_2, & x>0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}c_1x^2, & x<0\\ c_2x^2, & x>0\end{cases}.$$

• Από την (1) για $x=0$ και $y=1$ έχουμε:

$$|f(0)|\le0\overset{(|f(0)|\ge0)}{\Rightarrow}|f(0)|=0\Rightarrow f(0)=0.$$

• Από την (1) για $x<0$ και $y>0$ έχουμε:

$$\left|y^2\cdot c_1x^2-x^2\cdot c_2y^2\right|\le x^2y^2(x-y)^2\Rightarrow$$

$|c_1-c_2|\le(x-y)^2:(1)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to0^-}|c_1-c_2|\le\lim\limits_{x\to0^-}(x-y)^2\Rightarrow|c_1-c_2|\le y^2$, για κάθε $y>0$. Επομένως,

$$\lim_{y\to0^+}|c_1-c_2|\le\lim_{y\to0^+}y^2\Rightarrow|c_1-c_2|\le0\Rightarrow$$

$|c_1 - c_2| = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$.

Άρα είναι $f(x) = \begin{cases} c_1 x^2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ c_1 x^2, & x>0 \end{cases} = c_1 \cdot x^2$.

• Έχουμε:

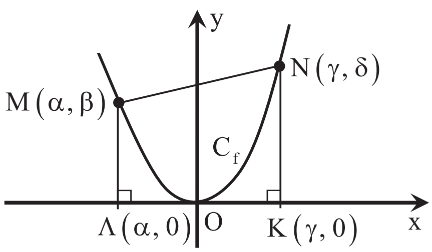
$$3 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(c_1\cdot x^2\cdot\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= c_1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = c_1\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)^2 \overset{\left(\omega=\frac{1}{x}\right)}{\underset{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\right)}{=}}$$

$$= c_1\cdot\lim_{\omega\to0^+}\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\right)^2 = c_1\cdot1^2 = c_1.$$

Άρα, $c_1 = 3$, οπότε $f(x) = 3x^2, x\in\mathbb{R}$.

γ) i) Έστω $M\Lambda \perp x'x$ και $NK \perp x'x$.



Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = E_1 - E_2$, όπου E_1 είναι το εμβαδό του τραπεζίου $MNK\Lambda$ και E_2 το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\gamma$.

Είναι: $E_1 = \frac{(M\Lambda)+(NK)}{2}\cdot(\Lambda K) = \frac{\beta+\delta}{2}(\gamma-\alpha) =$

$\frac{f(\alpha)+f(\gamma)}{2}\cdot(\gamma-\alpha) = \frac{3\alpha^2+3\gamma^2}{2}\cdot(\gamma-\alpha) =$

$= \frac{3}{2}(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma-\alpha)$ και

$E_2 = \int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\gamma 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_\alpha^\gamma = \gamma^3-\alpha^3$.

Άρα $E = \frac{3}{2}(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma-\alpha) - (\gamma^3-\alpha^3) =$

$= \frac{3}{2}(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma-\alpha) - (\gamma-\alpha)(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2) =$

$= \frac{1}{2}\left[(\gamma-\alpha)(3\gamma^2+3\alpha^2-2\gamma^2-2\gamma\alpha-2\alpha^2)\right] =$

$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha) = \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)^3$ τ.μ..

ii) Έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή t sec είναι $\alpha = \alpha(t)$ μ.μ., $\gamma = \gamma(t)$ μ.μ. και $E = E(t)$ τ.μ..

Είναι $E(t) = \frac{1}{2}(\gamma(t)-\alpha(t))^3$ και

$E'(t) = \frac{3}{2}(\gamma(t)-\alpha(t))^2\cdot(\gamma'(t)-\alpha'(t))$.

Για τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε:

$E'(t_0) = \frac{3}{2}(\gamma(t_0)-\alpha(t_0))^2\cdot(\gamma'(t_0)-\alpha'(t_0))$. Είναι $\alpha(t_0) = -2$ μ.μ., $\gamma(t_0) = 3$ μ.μ., $\alpha'(t_0) = -1$ μ.μ./sec και $\gamma'(t_0) = 2$μ.μ./sec. Επομένως, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι

$E'(t_0) = \frac{3}{2}\cdot(3-(-2))^2\cdot(2-(-1)) = \frac{225}{2}$ τ.μ./sec.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (e^x - \kappa)\ln x$, $x>0$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$ σταθερά, για την οποία ισχύει $f(x)\geq0$ για κάθε $x>0$.

α) Να δείξετε ότι $\kappa = e$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

δ) Να λυθεί η εξίσωση:

$f(x^3-5x+6) = f'(2x)(x^3-7x+6) + f(2x)$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f'(x) = (e^x-\kappa)'\ln x + (e^x-\kappa)(\ln x)' =$

$= e^x\ln x + \frac{e^x-\kappa}{x}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq0$ και είναι

$$f(1) = (e-\kappa)\ln 1 = 0.$$

Επομένως, για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq f(1)$.

Άρα, η f παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του $D_f = (0,+\infty)$ ελάχιστο και σύμφωνα με το θ. Fermat ισχύει

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow e^1\cdot\ln 1 + \frac{e^1-\kappa}{1} = 0 \Leftrightarrow$

$e-\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = e$. Άρα είναι $\kappa = e$.

β) Επειδή είναι $\kappa = e$, έχουμε $f(x)=(e^x-e)\ln x,\ x>0$.

Είναι $f'(x)=e^x\cdot\ln x+\dfrac{e^x-e}{x},\ x>0$, οπότε έχουμε:

- $f'(1)=...=0$.
- Για κάθε $x>1$ έχουμε:

$$x>1 \underset{(e^x \nearrow \mathbb{R})}{\overset{(\ln x \nearrow (0,+\infty))}{\Rightarrow}} \begin{cases}\ln x>\ln 1=0\\ e^x>e^1\end{cases} \overset{(e^x>0)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases}e^x\cdot\ln x>0\\ e^x-e>0\end{cases} \overset{(x>0)}{\Rightarrow} \begin{cases}e^x\cdot\ln x>0\\ \dfrac{e^x-e}{x}>0\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$e^x\ln x+\frac{e^x-e}{x}>0\Rightarrow f'(x)>0.$$

- Για $0<x<1$ έχουμε:

$$0<x<1 \underset{(e^x \nearrow \mathbb{R})}{\overset{(\ln x \nearrow (0,+\infty))}{\Rightarrow}} \begin{cases}\ln x<\ln 1=0\\ e^x<e^1\end{cases} \overset{(e^x>0)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases}e^x\cdot\ln x<0\\ e^x-e<0\end{cases} \overset{(x>0)}{\Rightarrow} \begin{cases}e^x\cdot\ln x<0\\ \dfrac{e^x-e}{x}<0\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$e^x\ln x+\frac{e^x-e}{x}<0\Rightarrow f'(x)<0.$$

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει (μόνο) στο $x_0=1$ ολικό ελάχιστο, το $\min f(x)=f(1)=0$.

γ) Είναι: $f''(x)=\left(e^x\ln x+\dfrac{e^x-e}{x}\right)'=$

$$e^x\ln x+\frac{e^x}{x}+\frac{e^x\cdot x-e^x+e}{x^2}=$$

$$\frac{x^2e^x\ln x+2xe^x-e^x+e}{x^2}=$$

$$\frac{e^x}{x^2}\left(x^2\ln x+2x-1+e^{1-x}\right).$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\le x-1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\ge x+1$.

Επομένως για κάθε $x>0$ ισχύουν:

- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{x}-1\Rightarrow -\ln x\le\dfrac{1}{x}-1\Rightarrow$ $x^2\ln x\ge x^2-x:(\alpha)$.
- $e^{1-x}\ge(1-x)+1\Rightarrow e^{1-x}\ge 2-x:(\beta)$.

Από (α) και (β), για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$x^2\ln x+e^{1-x}\ge x^2-2x+2\Rightarrow$$

$$x^2\ln x+e^{1-x}+2x-1\ge x^2+1\Rightarrow$$

$$\frac{e^x}{x^2}\left(x^2\ln x+2x-1+e^{1-x}\right)\ge\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{x^2}\Rightarrow$$

$$f''(x)\ge\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{x^2}>0\Rightarrow f''(x)>0.$$

Επομένως, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

δ) $f\left(x^2-5x+6\right)=f'(2x)\left(x^2-7x+6\right)+f(2x)$

Περιορισμοί:

$\left(x^2-5x+6\right),2x\in D_f=(0,+\infty)\Leftrightarrow x\in(0,2)\cup(3,+\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $(\alpha,f(\alpha))$, $\alpha>0$, είναι

$(\varepsilon):y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία (ε) σε όλο το $(0,+\infty)$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $(\alpha,f(\alpha))$.

Δηλαδή για κάθε $\alpha,x>0$ ισχύει

$f(x)\ge f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\alpha$.

Άρα για κάθε $x\in(0,2)\cup(3,+\infty)$ ισχύει:

$f\left(x^3-5x+6\right)\ge f'(2x)\left(x^3-5x+6-2x\right)+f(2x)$, με την ισότητα

$f\left(x^3-5x+6\right)=f'(2x)\left(x^3-7x+6\right)+f(2x)$, να ισχύει μόνο αν

$$x^2-5x+6=2x \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \overset{x\in(0,2)\cup(3,+\infty)}{\Leftrightarrow}$$

$x=1$ ή $x=6$. Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1=1$, $x_2=6$.

Άσκηση 8

Για τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-hf'(x)-f(x)}{h^2}>0 \text{ για κάθε } x>0$$

και είναι: $f(1)=\frac{1}{e}$, $f(e)=1$, $f'(1)=0$, $f'(e)=1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Αν $0<\kappa<\lambda$, να δείξετε ότι:

$$\int_\kappa^\lambda \frac{f(x^2+x)+(x-1)f(x)}{x}dx>\lambda\cdot f(\lambda)-\kappa\cdot f(\kappa).$$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$, με $x_1<x_2$, ώστε:

$$3f'(x_1)+2f'(x_2)=6f'(x_1)f'(x_2)+1.$$

ε) Να λυθεί η εξίσωση:

$$e\cdot f(x^2-2x+2)+f(e\cdot x)=e(x-1)+2.$$

στ)* Να δείξετε ότι στο διάστημα $\left(\frac{e+1}{2},e\right)$ η εξίσωση $f(x)=\frac{e+1}{2e}$ έχει ακριβώς μία λύση ξ_0, η οποία είναι μοναδική στο $[1,+\infty)$.

ζ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Λύση

α) ...$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-hf'(x)-f(x)}{h^2}>0$: (1).

Είναι $\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$, αφού η f, ως παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Άρα $\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)-hf'(x)-f(x)\right)=$

$=f(x)-0\cdot f'(x)-f(x)=0$ και $\lim_{h\to 0}h^2=0$. Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-hf'(x)-f(x)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)-hf'(x)-f(x)\right)'}{\left(h^2\right)'}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)(x+h)'-f'(x)\cdot 1-0}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\frac{1}{2}f''(x).$$

Άρα, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-hf'(x)-f(x)}{h^2}=\frac{1}{2}f''(x)$: (2), για κάθε $x>0$. Από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-hf'(x)-f(x)}{h^2}>0 \overset{((2))}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}f''(x)>0\Rightarrow\boxed{f''(x)>0}.$$

Άρα, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Επειδή είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Έτσι, έχουμε:

- $f'(1)=0$.
- $x>1 \overset{(f'\nearrow(0,+\infty))}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)=0$.
- $0<x<1 \overset{(f'\nearrow(0,+\infty))}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)=0$.

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει (μόνο) στο $x_0=1$ ολικό ελάχιστο, το $\min f(x)=f(1)=\frac{1}{e}$.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f σε ένα σημείο της $(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 0$, είναι:

$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$.

Άρα, $(\varepsilon): y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε) σε όλο το $(0,+\infty)$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 0$.

Άρα για κάθε $\alpha, x \in (0,+\infty)$ ισχύει:

$f(x) \geq f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$: (3).

Λόγω της (3) έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x^2+x) \geq f'(x)\left((x^2+x)-x\right) + f(x) \Rightarrow$$

$$f(x^2+x) \geq x^2 f'(x) + f(x) \Rightarrow$$

$$f(x^2+x) - f(x) \geq x^2 f'(x) \Rightarrow$$

$\dfrac{f(x^2+x)-f(x)}{x} \geq x f'(x)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x^2 + x = x \Leftrightarrow x = 0$, ΑΔΥΝΑΤΟ, αφού είναι $x > 0$.

Άρα για κάθε $x \in [1,e]$ ισχύει

$\dfrac{f(x^2+x)-f(x)}{x} > x f'(x)$, οπότε:

$$\int_\kappa^\lambda \frac{f(x^2+x)-f(x)}{x}dx > \int_\kappa^\lambda x f'(x)dx =$$

$$= \left[x f(x)\right]_\kappa^\lambda - \int_\kappa^\lambda (x)' f(x)dx =$$

$$= (\lambda \cdot f(\lambda) - \kappa \cdot f(\kappa)) - \int_\kappa^\lambda f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_\kappa^\lambda \frac{f(x^2+x)-f(x)}{x}dx + \int_\kappa^\lambda f(x)dx > \lambda f(\lambda) - \kappa f(\kappa) \Rightarrow$$

$$\int_\kappa^\lambda \left(\frac{f(x^2+x)-f(x)}{x} + f(x)\right)dx > \lambda f(\lambda) - \kappa f(\kappa) \Rightarrow$$

$$\int_\kappa^\lambda \frac{f(x^2+x)+(x-1)f(x)}{x}dx > \lambda f(\lambda) - \kappa f(\kappa).$$

δ) Είναι: $f'(1) = 0 < \dfrac{1}{3} < f'(e) = 1$ και η f' είναι συνεχής στο $[1,e]$, ως παραγωγίσιμη, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $x_1 \in (1,e)$ ώστε $f'(x_1) = \dfrac{1}{3}$.

Επειδή $f'(x_1) = \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < f'(e) = 1$ και η f' είναι συνεχής στο $[x_1, e]$, έπεται, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, ότι υπάρχει $x_2 \in (x_1, e)$ ώστε $f'(x_2) = \dfrac{1}{2}$.

Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,e)$, με $x_1 < x_2$, ώστε:

$$(3f'(x_1)-1)\cdot(2f'(x_2)-1) =$$

$$= \left(3\cdot\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$6f'(x_1)f'(x_2) - 3f'(x_1) - 2f'(x_2) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3f'(x_1) + 2f'(x_2) = 6f'(x_1)\cdot f'(x_2) + 1.$$

ε) … $e \cdot f(x^2-2x+2) + f(e\cdot x) = e(x-1) + 2$: (E).

Η εξίσωση (E) ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν $\begin{cases} x^2-2x+2>0 \\ e\cdot x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x-1)^2+1>0 \text{ (ισχύει για κάθε } x\in\mathbb{R}) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει (μόνο) στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο, το $\min f(x) = f(1) = \dfrac{1}{e}$.

Επομένως για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει

$f(x) \geq \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e\cdot f(x) \geq 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει

$e \cdot f(x^2-2x+2) \geq 1$: (α), με την ισότητα να ισχύει μόνο αν

$x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$, είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x-e) \Leftrightarrow y - 1 = 1\cdot(x-e) \Leftrightarrow$$

$\boxed{y = x+1-e}$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της $(\delta): y=x+1-e$, σε όλο το $(0,+\infty)$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $(e,f(e))$.

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq x+1-e$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e$.

Επομένως, για κάθε $x>0$ ισχύει $f(ex)\geq ex+1-e:(\beta)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $ex=e\Leftrightarrow x=1$.

Από τις (α) και (β) προκύπτει ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$ef\left(x^2-2x+2\right)+f(ex)\geq e(x-1)+2$, με την ισότητα

$ef\left(x^2-2x+2\right)+f(ex)=e(x-1)+2$, να ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα, η εξίσωση (E) έχει ακριβώς μία λύση, το $x_0=1$.

στ) Θα δείξουμε ότι $f\left(\frac{e+1}{2}\right)<\frac{e+1}{2e}<f(e)$.

Η συνάρτηση f, ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $\left[1,\frac{e+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{e+1}{2},e\right]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(1,\frac{e+1}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{e+1}{2},e\right)$, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{e+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{e+1}{2}-1}=\frac{2}{e-1}\cdot\left(f\left(\frac{e+1}{2}\right)-\frac{1}{e}\right)$$ και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(e)-f\left(\frac{e+1}{2}\right)}{e-\frac{e+1}{2}}=\frac{2}{e-1}\cdot\left(1-f\left(\frac{e+1}{2}\right)\right).$$

Έχουμε:

$$1<\xi_1<\frac{e+1}{2}<\xi_2<1\overset{(f'\nearrow(0,+\infty))}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$\frac{2}{e-1}\cdot\left(f\left(\frac{e+1}{2}\right)-\frac{1}{e}\right)<\frac{2}{e-1}\cdot\left(1-f\left(\frac{e+1}{2}\right)\right)\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{e+1}{2}\right)-\frac{1}{e}<1-f\left(\frac{e+1}{2}\right)\Rightarrow 2f\left(\frac{e+1}{2}\right)<1+\frac{1}{e}\Rightarrow$$

$\boxed{f\left(\frac{e+1}{2}\right)<\frac{e+1}{2e}}:(\Sigma_1)$.

Ακόμη, $f(e)-\frac{e+1}{2e}=1-\frac{e+1}{2e}=\frac{e-1}{2e}>0$, οπότε $\boxed{\frac{e+1}{2e}<f(e)}:(\Sigma_2)$. Από (Σ_1) και (Σ_2) έχουμε $f\left(\frac{e+1}{2}\right)<\frac{e+1}{2e}<f(e)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{e+1}{2},e\right]$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi_0\in\left(\frac{e+1}{2},e\right)$ ώστε $f(\xi_0)=\frac{e+1}{2e}$.

Το ξ_0 είναι μοναδικό στο $[1,+\infty)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $[1,+\infty)$. Άρα, η εξίσωση $f(x)=\frac{e+1}{2e}$ έχει λύση $\xi_0\in\left(\frac{e+1}{2},e\right)$, η οποία είναι μοναδική στο $[1,+\infty)$.

ζ) • Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε

$$f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[\frac{1}{e},\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, οπότε $f((-\infty,1])=\left[f(1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) της C_f στο σημείο της $(e,f(e))$ είναι:

$$\boxed{(\delta): y=x+1-e}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένης της $(\delta): y=x+1-e$ σε όλο το $\mathbb{R}$, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους $(e,f(e))$.

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq x+1-e$ και επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-e)=+\infty$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Άρα, $f([1,+\infty))=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και

$f\left((-\infty,1]\right)=\left[\frac{1}{e},\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)\subseteq\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, οπότε

$f(\mathbb{R})=f\left((-\infty,1]\right)\cup f\left([1,+\infty)\right)=$

$=\left[\frac{1}{e},\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)\cup\left[\frac{1}{e},+\infty\right)=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

Άσκηση 9

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν: $f(x)=(x-1)\ln x-x, x>0$ και η g έχει συνεχή παράγωγο στο $(0,+\infty)$, με $g'(x)>0$ για κάθε $x>0$.

α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει σε ένα ακριβώς σημείο x_0 ολικό ελάχιστο και είναι: $1<x_0<2$ και $-\frac{3}{2}<f(x_0)<-1$.

β) Η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς δύο λύσεις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ και $\rho_1\cdot\rho_2=1$ (αντίστροφες).

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν:

$\xi_1,\xi_2\in(x_0,\rho_2)$ με $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_2)=\frac{2}{\rho_2-\xi_1}$.

δ) Να δείξετε ότι: $\int_{\rho_1}^{\rho_2}f'(x)g(x)dx>0$.

Λύση

α) • Είναι: $f'(x)=...=\ln x-\frac{1}{x}$.

$\left(f''(x)=...=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x>0\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f'\nearrow(0,+\infty)}$

• Είναι: $f'(1)=-1<0$ και

$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{2\ln 2-1}{2}=\frac{\ln 4-\ln e}{2}>0$

(αφού

$4>e\Rightarrow\ln 4>\ln e\Rightarrow\ln 4-\ln e>0\Rightarrow\frac{\ln 4-\ln e}{2}>0)$

Άρα είναι $f'(1)f'(2)<0$ και η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$, οπότε, σύμφωνα με το θ. Bolzano, υπάρχει $x_0\in(1,2)$, ώστε $f'(x_0)=0$.

Έχουμε:

• $x>x_0 \overset{(f'\nearrow(0,+\infty))}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0$.

• $0<x<x_0 \overset{(f'\nearrow(0,+\infty))}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0$.

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει (μόνο) στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$. Για το x_0 έχουμε: $1<x_0<2$ και

$f'(x_0)=0\Rightarrow\ln x_0-\frac{1}{x_0}=0\Rightarrow\boxed{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}:\ (1).$

Επομένως, $f(x_0)=(x_0-1)\ln x_0-x_0=(x_0-1)\frac{1}{x_0}-x_0=$

$=1-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$.

• Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=1-\left(x+\frac{1}{x}\right),\ x\in[1,2]$.

Είναι: $\varphi'(x)=\frac{1-x^2}{x^2}<0$ για κάθε $x\in(1,2)$ και η φ είναι συνεχής στο $[1,2]$, οπότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

Έτσι έχουμε:

$1<x_0<2 \overset{(\varphi\searrow[1,2])}{\Rightarrow} \varphi(1)>\varphi(x_0)>\varphi(2)\Rightarrow$

$1-\left(1+\frac{1}{1}\right)>1-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)>1-\left(2+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$

$$\boxed{-\frac{3}{2}<f(x_0)<-1}$$

β) • Είναι: $f(e)=(e-1)\ln e-e=-1<0$ και $f(e^2)=(e^2-1)\ln(e^2)-e^2=e^2-2>0$, οπότε $f(e)=-1<1<e^2-2=f(e^2)$ και η f είναι συνεχής στο $[e,e^2]$, οπότε, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\rho_2\in(e,e^2)\subseteq[x_0,+\infty)$ ώστε

$f(\rho_2)=1$. Το ρ_2 είναι μοναδικό στο $[x_0,+\infty)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $[x_0,+\infty)$.

- Για το ρ_2 ισχύει:

$f(\rho_2)=1 \Rightarrow (\rho_2-1)\ln\rho_2-\rho_2=1 \Rightarrow$

$\boxed{\ln\rho_2=\dfrac{\rho_2+1}{\rho_2-1}}$: (α). Ακόμη, είναι:

$$e<\rho_2<e^2 \Rightarrow \frac{1}{e^2}<\frac{1}{\rho_2}<\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{\rho_2}\in\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)\in(0,x_0].$$

Για το $\rho_1=\dfrac{1}{\rho_2}<\rho_2$ (αφού $\rho_1\in\left(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e}\right)$ και $\rho_2\in(e,e^2)$) ισχύει:

$$f(\rho_1)=f\left(\frac{1}{\rho_2}\right)=\left(\frac{1}{\rho_2}-1\right)\ln\left(\frac{1}{\rho_2}\right)-\frac{1}{\rho_2}=$$

$$=\frac{1-\rho_2}{\rho_2}(-\ln\rho_2)-\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_2-1}{\rho_2}\ln\rho_2-\frac{1}{\rho_2}\overset{(\alpha)}{=}$$

$$\frac{\rho_2-1}{\rho_2}\cdot\frac{\rho_2+1}{\rho_2-1}-\frac{1}{\rho_2}==\frac{\rho_2+1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_2}=1.$$

Άρα το $\rho_1=\dfrac{1}{\rho_2}\in(0,x_0)$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=1$ και μάλιστα μοναδική στο $(0,x_0]$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0,x_0]$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(0,+\infty)$ με $\rho_1<\rho_2$ και $\rho_1=\dfrac{1}{\rho_2}$ δηλαδή $\rho_1\rho_2=1$.

γ) • Είναι: $f(x_0)<-1<f(\rho_2)=1$ και η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho_2]$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi_1\in(x_0,\rho_2)$ ώστε $f(\xi_1)=-1$.

- Η συνάρτηση f, ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\xi_1,\rho_2]$, οπότε υπάρχει $\xi_2\in(\xi_1,\rho_2)$ ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\rho_2)-f(\xi_1)}{\rho_2-\xi_1}=\frac{1-(-1)}{\rho_2-\xi_1}=\frac{2}{\rho_2-\xi_1}.$$

Άρα, υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(x_0,\rho_2)$ με $\xi_1<\xi_2$, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{2}{\rho_2-\xi_1}.$$

δ) Είναι:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} f'(x)g(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_{\rho_1}^{\rho_2}-\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)g'(x)dx=$$

$$f(\rho_2)g(\rho_2)-f(\rho_1)g(\rho_1)-\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)g'(x)dx\overset{(f(\rho_1)=f(\rho_2)=1)}{=}$$

$$1\cdot g(\rho_2)-1\cdot g(\rho_1)-\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)g'(x)dx=$$

$$g(\rho_2)-g(\rho_1)-\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)g'(x)dx=$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} g'(x)dx-\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)g'(x)dx=$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[g'(x)-f(x)\cdot g'(x)\right]dx=\int_{\rho_1}^{\rho_2}(1-f(x))g'(x)dx$$

Επειδή η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$, τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ έπεται ότι για κάθε $x\in(\rho_1,\rho_2)$ ισχύει:

$f(x)\neq1\Rightarrow1-f(x)\neq0\Rightarrow h(x)\neq0$, όπου $h(x)=1-f(x)$ και η $h(x)$ είναι συνεχής στο (ρ_1,ρ_2), οπότε η $h(x)$ διατηρεί στο (ρ_1,ρ_2) σταθερό πρόσημο.

Για το $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ είναι: $h(x_0)=1-f(x_0)>0$, αφού $-\dfrac{3}{2}<f(x_0)<-1$, οπότε είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in(\rho_1,\rho_2)$ και $h(\rho_1)=h(\rho_2)=0$.

Ακόμη είναι: $g'(x)>0$ για κάθε $x\in[\rho_1,\rho_2]$.

Άρα για κάθε $x\in[\rho_1,\rho_2]$ ισχύει: $\begin{cases}h(x)\geq0\\g'(x)>0\end{cases}\Rightarrow$

$h(x)g'(x)\geq0\Rightarrow(1-f(x))g'(x)\geq0$,

με την ισότητα να ισχύει μόνο στις θέσεις ρ_1 και ρ_2. Επομένως $\int_{\rho_1}^{\rho_2}(1-f(x))g'(x)dx>0$, οπότε: $\int_{\rho_1}^{\rho_2} f'(x)g(x)dx>0$.

Τάξη: Γ΄

Χρήσιμες Επισημάνσεις στην Ανάλυση

Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος

Στο άρθρο αυτό θα επισημάνουμε μερικά χρήσιμα σημεία της θεωρίας και της ύλης γενικότερα. Να τονίσουμε ότι η ελλιπής γνώση της θεωρίας οδηγεί συνήθως σε λάθη κατά την επίλυση ασκήσεων ή σε πλημμελή παρουσίαση της λύσης. Για καθεμία λοιπόν από τις παρακάτω ασκήσεις προσπαθήστε να **εντοπίσετε λάθος ή παράλειψη στη λύση της.**

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $x\ge 1$. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την f^{-1}.

Λύση

Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε

$$x_1<x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Rightarrow e^{\sqrt{x_1}}<e^{\sqrt{x_2}} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε και 1-1 , συνεπώς αντιστρέφεται.

Εύρεση αντίστροφης: $f(x)=y \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}=y \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sqrt{x}=\ln y\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=(\ln y)^2\\ y>0\\ \ln y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=(\ln y)^2\\ y\ge 1\end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(x)=(\ln x)^2$, $x\ge 1$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Δεν βρέθηκε σωστά το σύνολο τιμών της f άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης. Πρέπει επιπρόσθετα να αναφερθεί ότι η λύση $x=(\ln y)^2$ ανήκει στο $[1,+\infty)$, καθώς $x\ge 1$, αν και μόνο αν $(\ln y)^2\ge 1$. Όμως,

$$(\ln y)^2\ge 1 \Leftrightarrow |\ln y|\ge 1 \underset{\ln y\ge 0}{\overset{\text{αφού } y\ge 1}{\Leftrightarrow}} \ln y\ge 1 \Leftrightarrow y\ge e.$$

Άρα $f^{-1}(x)=(\ln x)^2$, $x\in[e,+\infty)$.

Όμως αν βρούμε εκ των προτέρων το σύνολο τιμών της f δεν χρειάζεται να μεριμνήσουμε για όλους αυτούς τους περιορισμούς. Πράγματι, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,+\infty)$ έχουμε $f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[e,+\infty)$, επομένως όταν θεωρήσουμε $f(x)=y$ γνωρίζουμε ήδη ότι $y\ge e$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\ne 1$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Λύση

Για $x\ne 1$ είναι $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}-\{1\}$ οπότε και 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ αλλά όχι στην ένωσή τους $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}-\{1\}$ αφού π.χ. είναι $0<2\Rightarrow f(0)<f(2)$.

Για να δείξουμε λοιπόν ότι η f είναι 1-1 θεωρούμε τυχαία $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{1\}$ για τα οποία υποθέτουμε ότι $f(x_1)=f(x_2)$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι $x_1=x_2$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x\ne 1\\ \kappa, & \text{αν } x=1\end{cases}$.

Για ποια τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, η f είναι συνεχής;

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{1}=2$ και $f(1)=\kappa$. Για να είναι η f συνεχής αρκεί $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ άρα $\kappa=2$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Παραλήφθηκε η μελέτη της συνέχειας στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Δηλαδή πρέπει να αναφέρουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$ ως ρητή και ύστερα για να είναι συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής στο 1 δηλαδή αρκεί $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ ...

Θα ήταν πλήρης η παραπάνω λύση αν θέλαμε την τιμή του κ για την οποία η f είναι συνεχής στο 1.

Άσκηση 4

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή f', για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=0$. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι 1-1

β) $g'(1)=1$

Λύση

α) Έστω ότι η f δεν είναι 1-1. Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Επιπλέον η f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) άρα από το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο. Άρα η f είναι 1-1.

β) Είναι $g(1)=0$. Θα βρούμε την παράγωγο της g στο 1 με τον ορισμό:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{f'(x)(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{f''(x)(x-1)+f'(x)}\overset{f'\text{ συνεχής στο }1}{\underset{\lim_{x\to1}f'(x)=f'(1)}{=}}\frac{f'(1)}{0+f'(1)}=1,$$

άρα $g'(1)=1$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

α) Πρέπει να υποθέσουμε ότι $x_1<x_2$ για να έχει νόημα το διάστημα $[x_1,x_2]$. Στο τέλος αναφέρουμε ότι εργαζόμαστε όμοια αν $x_1>x_2$.

β) Η f' δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη κοντά στο 1 οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κανόνες DLH. Επιπλέον δεν γνωρίζουμε αν η f'' έχει όριο στο 1. Έτσι,

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{f'(x)(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}\right)\overset{f'\text{ συνεχής στο }1}{\underset{f\text{ παρ/μη στο }1}{=}}\frac{1}{f'(1)}\cdot f'(1)=1$$

άρα $g'(1)=1$.

Άσκηση 5

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x)-2xf(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(x)-2xf(x)=1\Leftrightarrow$
$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1\Leftrightarrow$
$(f(x)-x)^2=x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{(f(x)-x)^2}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$
$|f(x)-x|=\sqrt{x^2+1}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, για την οποία ισχύει $|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$ οπότε $\left(g(x)=\sqrt{x^2+1}\text{ ή } g(x)=-\sqrt{x^2+1}\right)$ για κάθε $x\in R$ (1).

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- Αν $g(x)>0$ τότε

$(1)\Leftrightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

- Αν $g(x)<0$ τότε

$(1)\Leftrightarrow -g(x)=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Το λάθος είναι ότι από τη σχέση (1) προκύπτουν γενικά άπειρες συναρτήσεις αφού $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & ,x\in A\subseteq R\\ -\sqrt{x^2+1} & ,x\in R-A\end{cases}$

Για να απαντήσουμε σωστά ακολουθούμε τα εξής:

Αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ για το οποίο να ισχύει $g(x_0)=0$ τότε από την (1) προκύπτει ότι $0=\sqrt{x_0^2+1}\Leftrightarrow x_0^2=-1$, άτοπο άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον εφόσον η g είναι συνεχής (διαφορά συνεχών), διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ δηλαδή $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)=-\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή τελικά δύο συναρτήσεις.

Άσκηση 6

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f^2(x)=x^2 \Leftrightarrow$

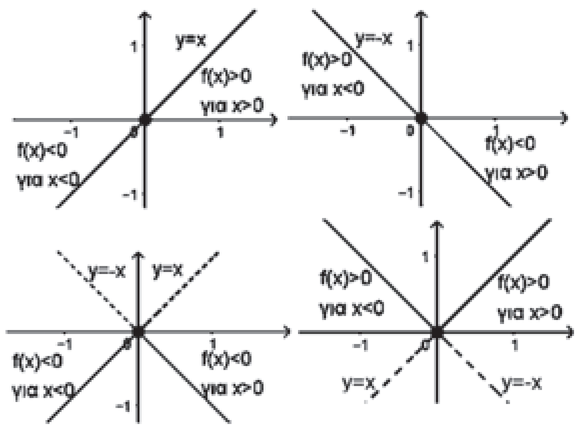
$\Leftrightarrow f^2(x)-x^2=0 \Leftrightarrow (f(x)-x)(f(x)+x)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Η άσκηση αυτή είναι η 7η της Β ομάδας στη σελίδα 82 του σχολικού βιβλίου. Από τη σχέση: $(f(x)=x$ ή $f(x)=-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ προκύπτουν γενικά άπειρες συναρτήσεις αφού $f(x)=\begin{cases} x & ,x\in A\subseteq R \\ -x & ,x\in R-A \end{cases}$ και δεν ισοδυναμεί με την σχέση: $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για να απαντήσουμε σωστά ακολουθούμε τα εξής: $f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$. Άρα η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται στο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής στα $(-\infty,0),(0,+\infty)$, οπότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$. Δεδομένου $f(0)=0$, έχουμε:



$f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$ ή

$f(x)=-|x|,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$

Άσκηση 7

Να μελετήσετε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$ **ως προς τη μονοτονία.**

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\ln x+1$ και

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$,
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x<-1 \Leftrightarrow 0<x<e^{-1}$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,e^{-1}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-1},+\infty\right)$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Αρχικά πρέπει να μελετήσουμε τη συνέχεια της f προκειμένου να εφαρμόσουμε τα θεωρήματα της μονοτονίας.

Στο $(0,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Θα μελετήσουμε τη συνέχεια της f στο $x_0=0$. Έχουμε,

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{1/x}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right)=\lim_{x\to0^+}(-x)=0=f(0),$$

άρα η f είναι συνεχής στο 0 οπότε συνεχής (στο πεδίο ορισμού της). Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,e^{-1}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-1},+\infty\right)$.

Άσκηση 8

Να μελετήσετε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\neq0 \\ 1, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$ **ως προς τη μονοτονία.**

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ είναι:

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)'x-(x)'(e^x-1)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

Θέτουμε $g(x)=xe^x-e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και για $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=xe^x$ και $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0 min	↗

Η g παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$, επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$.

Τελικά έχουμε ότι $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}\geq 0$ για $x\neq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

> Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
> Ο ισχυρισμός ότι επειδή $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\neq 0$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, δεν είναι απαραίτητα σωστός. Για τη σωστή απάντηση αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ακροτάτων της σελίδας 144 του σχολικού βιβλίου. Πράγματι,
> $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{1}\right)=1=f(0)$$
> οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.
> Επιπλέον με τη βοήθεια της συνάρτησης g προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
> Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να δείξουμε όπως πριν ότι $f'(x)>0$ για $x\neq 0$ και με τον ορισμό ότι $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\ldots=\dfrac{1}{2}$ δηλαδή $f'(0)=\dfrac{1}{2}>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο της $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

Λύση

Γράφουμε την f ως $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ και έχουμε

$$f'(x)=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\ x>0.$$

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

> Επειδή $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$! Επιπλέον να θυμίσουμε ότι η παράσταση $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ ορίζεται αν $\alpha>0, \mu\in\mathbb{Z}$ και ν θετικός ακέραιος και ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$ αν μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι. Οπότε
> $$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{|x|^2}\underset{\mu,\nu\in\mathbb{N}^*}{\overset{|x|\geq 0}{=}}\begin{cases}x^{\frac{2}{3}}, & \text{αν } x\geq 0\\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & \text{αν } x<0\end{cases}$$
> και. Έτσι $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & ,x>0\\ -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x}} & ,x<0\end{cases}$ και
> για το σημείο $x_0=0$ θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής. Είναι
> $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}=$$
> $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty,\notin\mathbb{R}$$
> άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άσκηση 10

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x\sigma\upsilon\nu x-6\eta\mu x+1, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ έχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο.

Λύση

Για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)=3x^2-3x\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x$.

Η συνάρτηση $g(x)=3x^2-3x\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και $g(0)=-3$,

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-3\frac{\pi}{2}=3\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)>0$$ άρα

$g(0)\cdot g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ άρα $f'(x_0)=0$. Είναι

$$f''(x)=6x-3x\sigma\upsilon\nu x=3x(2-\sigma\upsilon\nu x)>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ οπότε το x_0 είναι μοναδικό. Άρα το x_0 είναι μοναδική θέση τοπικού ακροτάτου στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

> Για να είναι το x_0 θέση τοπικού ακροτάτου αρκεί η $f'(x)$ να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και η f να είναι συνεχής στο x_0. Πράγματι, για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
>
> - $x>x_0\overset{f'1}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_0)\Rightarrow f'(x)>0$ και
> - $x<x_0\overset{f'1}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)\Rightarrow f'(x)<0$,
>
> και η f είναι συνεχής στο x_0, άρα το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $f(1)=f(-1)=1$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

Για $x\neq 0$ έχουμε $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'$

άρα $f(x)=\frac{1}{x}+c$. Είναι $f(1)=1+c\Leftrightarrow c=0$ άρα $f(x)=\frac{1}{x}$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

> Το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι ένωση διαστημάτων, οπότε για $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει:
>
> $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\Leftrightarrow$
>
> $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+c_1, & \text{αν } x<0\\ \frac{1}{x}+c_2, & \text{αν } x>0\end{cases}$. Είναι
>
> $f(-1)=-1+c_1\Leftrightarrow c_1=2$ και
>
> $f(1)=1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$
>
> άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+2, & \text{αν } x<0\\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x>0\end{cases}$

Άσκηση 12

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf'(x)=2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=1$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

Για $x\neq 0$ έχουμε

$xf'(x)=2x^2\Leftrightarrow f'(x)=2x\Leftrightarrow f'(x)=(x^2)'$

άρα $f(x)=x^2+c$.

Είναι $f(1)=1+c\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=x^2$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

> Το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι ένωση διαστημάτων, οπότε για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:
>
> $xf'(x)=2x^2\Leftrightarrow f'(x)=2x\Leftrightarrow f'(x)=(x^2)'$,
>
> έχουμε $f(x)=\begin{cases}x^2+c_1, & \text{αν } x<0\\ c_2, & \text{αν } x=0\\ x^2+c_3, & \text{αν } x>0\end{cases}$.
>
> Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα και συνεχής στο 0 οπότε
>
> $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\Rightarrow c_1=c_2=c_3$
>
> συνεπώς $f(x)=\begin{cases}x^2+c_1, & \text{αν } x\neq 0\\ c_1, & \text{αν } x=0\end{cases}$.
>
> Είναι $f(1)=1+c_1\Leftrightarrow 1+c_1=1\Leftrightarrow c_1=0$ άρα
>
> $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ ή $f(x)=x^2$, $x\in R$.

Άσκηση 13

Δίνεται συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=3$ και $f(1)=2$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να λύσετε την ανίσωση

$$f\left(f^{-1}(x+3)-1\right)>3$$

Λύση

α) Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το

$f([0,1])=[f(1),f(0)]=[2,3]$

β)

$f\left(f^{-1}(x+3)-1\right)>3\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x+3)-1\right)>f(0)\overset{f2}{\Leftrightarrow}$

$f^{-1}(x+3)-1<0\Leftrightarrow f^{-1}(x+3)<1\overset{f2}{\Leftrightarrow}$

$f\left(f^{-1}(x+3)\right)>f(1)\Leftrightarrow x+3>2\Leftrightarrow x>-1$

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

β) Η ανίσωση ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει

$$\begin{cases} f^{-1}(x+3)-1\in D_f \\ x+3\in D_{f^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le f^{-1}(x+3)-1\le 1 \\ 2\le x+3\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1\le f^{-1}(x+3)\le 2 \\ -1\le x\le 0 \end{cases} \overset{\text{για } x\in[2,3]}{\underset{f^{-1}(x)\in[0,1]}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} f^{-1}(x+3)=1 \\ -1\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3=f(1) \\ -1\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -1\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$ Όμως η τιμή -1 δεν επαληθεύει την ανίσωση

Άρα η ανίσωση ότι είναι αδύνατη .

Άσκηση 14

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_{-2}^{-1} f(x)dx=2$ και $\int_{1}^{2} f(x)dx=-2$. Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Λύση

Εφόσον $\int_{-2}^{-1} f(x)dx>0$ τότε $f(x)>0$ στο $[-2,-1]$ άρα θα υπάρχει $\rho_1\in[-2,-1]$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1)>0$. Επίσης εφόσον $\int_{1}^{2} f(x)dx<0$ τότε $f(x)<0$ στο $[1,2]$ άρα θα υπάρχει $\rho_2\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ και $f(\rho_1)f(\rho_2)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Δεν ισχύει απαραίτητα ότι αν $\int_{-2}^{-1} f(x)dx>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-2,-1]$ ή αν $\int_{1}^{2} f(x)dx<0$ τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$ Όμως αν $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[-2,-1]$ τότε $\int_{-2}^{-1} f(x)dx\le 0$, άτοπο, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1\in[-2,-1]$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1)>0$. Όμοια, αφού $\int_{1}^{2} f(x)dx<0$ δείχνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2)<0$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για την f στο $[\rho_1,\rho_2]$.

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x+\alpha^2+2\alpha$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών α και β ώστε η f να παρουσιάζει στο $x_0=1$ τοπικό μέγιστο με τιμή $f(1)=1$.

Λύση

Το 1 είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και στο 1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, άρα από το θεώρημα του Fermat είναι $f'(1)=0$. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3\alpha x^2+\beta$. Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha+\beta=0 \\ \beta+\alpha^2+3\alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha \\ \alpha^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta=-3\alpha \\ \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3 \\ \alpha=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \beta=3 \\ \alpha=-1 \end{cases}$$

Εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$. Τότε ...από θ. Fermat προκύπτει $f'(1)=0$ και στη συνέχεια ότι $\alpha=1$, $\beta=-3$ ή $\alpha=-1$, $\beta=3$. Για τις τιμές αυτές επαληθεύουμε στη συνάρτηση f:

Για $\alpha=1$ και $\beta=-3$, $f(x)=x^3-3x+3$ $f'(x)=3x^2-3$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	5 τ. μ.	↘	1 τ. ε.	↗	

Η f δεν παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο άρα οι τιμές $\alpha=1$ και $\beta=-3$ απορρίπτονται.

Αν $\alpha=-1$ και $\beta=3$ τότε $f(x)=-x^3+3x-1$ με $f'(x)=-3x^2+3$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
f(x)		↘	-3 τ. ε.	↗	1 τ. μ	↘	

Η f παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο άρα οι τιμές $\alpha=-1$ και $\beta=3$ είναι δεκτές.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Διαγωνιστικές Διαδρομές Άλγεβρας

πρώτο μέρος

Θανάσης Ντρίζος - Δημήτρης Ντρίζος, Τρίκαλα

Οι ασκήσεις αυτού του άρθρου εμπλουτίζουν και κυρίως επεκτείνουν δημιουργικά την ύλη της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου και προσφέρονται για την υποστήριξη ενός πρώτου κύκλου μαθημάτων για παιδιά με κάποιο αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά. Αλλά και σε μαθήματα σε κανονικά τμήματα θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν κάποια ερωτήματα αυτού του άρθρου κατά τη διδασκαλία σχετικών ενοτήτων.

Προτείνουμε στους αναγνώστες μαθητές να προσπαθούν να λύνουν πρώτα μόνοι τους τις ασκήσεις και να μην προσφεύγουν εξαρχής στις προσφερόμενες λύσεις. Με αυτόν τον τρόπο εξασκούν τη μαθηματική τους ικανότητα και, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να επινοήσουν και άλλους, νέους τρόπους λύσης.

Άσκηση 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς τις εξισώσεις:

α) $x^2-16x-4\sqrt{x^2-16x+64}+4=0$ β) $\left(x^2+6x-16\right)^2+\left(x^2+3x-18\right)^2=\left(2x^2+9x-34\right)^2$

γ) $\left(x^2-6x+10\right)^2-19=2x(x-6)$ δ) $\left(x^2-10x+25\right)^2-3\left(x^2-10x+25\right)=2(5-x)$

ε) $(x-1)^5+27x^2+9=9x^3+27x$ στ) $\dfrac{x^6-2x^3+1}{x^2+x+1}+9x=9$

ζ) $x^3-6x^2-12x-8=0$

Απάντηση

α) $x^2-16x-4\sqrt{x^2-16x+64}+4=0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot 8x+8^2-4\sqrt{x^2-2\cdot 8x+8^2}+4-8^2=0$

$\Leftrightarrow (x-8)^2-4\sqrt{(x-8)^2}-60=0 \Leftrightarrow |x-8|^2-4|x-8|-60=0 \underset{\omega>0}{\overset{|x-8|=\omega}{\Leftrightarrow}} \omega^2-4\omega-60=0,\ (1)$

Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης (1)

$\omega^2-4\omega-60=0 \Leftrightarrow \omega^2+6\omega-10\omega-60=0 \Leftrightarrow \omega(\omega+6)-10(\omega+6)=0 \Leftrightarrow (\omega+6)(\omega-10)=0$

$\Leftrightarrow \omega=-6$, που απορρίπτεται ή $\omega=10$, δεκτή.

Οπότε $|x-8|=10 \Leftrightarrow x-8=10$ ή $x-8=-10 \Leftrightarrow x=18$ ή $x=-2$

Άρα το σύνολο των λύσεων είναι το $L=\{-2,18\}$

β) $\left(x^2+6x-16\right)^2+\left(x^2+3x-18\right)^2=\left(2x^2+9x-34\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2+6x-16\right)^2+\left(x^2+3x-18\right)^2=\left[\left(x^2+6x-16\right)+\left(x^2+3x-18\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+6x-16\right)\left(x^2+3x-18\right)=0 \Leftrightarrow x^2+6x-16=0$ ή $x^2+3x-18=0$

Βρίσκουμε ότι το σύνολο των λύσεων είναι το $L=\{-8,-6,2,3\}$

γ) $\left(x^2-6x+10\right)^2-19=2x(x-6) \Leftrightarrow \left(x^2-6x+10\right)^2-2x^2+12x-20+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-6x+10\right)^2-2\left(x^2-6x+10\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(x^2-6x+10\right)-1\right]^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-6x+9\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[(x-3)^2\right]^2=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^4 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, τετραπλή ρίζα .

δ) $(x^2-10x+25)^2 - 3(x^2-10x+25) = 2(5-x)$

$$\Leftrightarrow \left[(x-5)^2\right]^2 - 3(x-5)^2 - 2(5-x) = 0 \Leftrightarrow (x-5)^4 - 3(x-5)^2 + 2(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left[(x-5)^3 - 3(x-5) + 2\right] = 0 \overset{x-5=\omega}{\Leftrightarrow} \omega(\omega^3 - 3\omega + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega(\omega^3 - \omega - 2\omega + 2) = 0 \Leftrightarrow \omega\left[\omega(\omega^2-1) - 2(\omega-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega\left[\omega(\omega-1)(\omega+1) - 2(\omega-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \omega(\omega-1)(\omega^2+\omega-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega(\omega-1)(\omega-1)(\omega+2) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ή } \omega = 1, \text{ διπλή ρίζα ή } \omega = -2$$

Οπότε από την $x-5=\omega$ βρίσκουμε $x=5$ ή $x=6$, διπλή ρίζα ή $x=3$

ε) $(x-1)^5 + 27x^2 + 9 = 9x^3 + 27x \Leftrightarrow (x-1)^5 - 9(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^5 - 9(x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3\left[(x-1)^2 - 3^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3(x-4)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{τριπλή ρίζα ή } x = 4 \text{ ή } x = -2$$

στ) $\dfrac{x^6 - 2x^3 + 1}{x^2 + x + 1} + 9x = 9 \Leftrightarrow (x^3-1)^2 + 9x(x^2+x+1) = 9(x^2+x+1)$

$$\Leftrightarrow (x^3-1)^2 + 9(x^2+x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x^3-1)^2 + 9(x^3-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-1)\left[(x^3-1)+9\right] = 0 \Leftrightarrow (x^3-1)(x^3+8) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2$$

ζ) $x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 6x^2 + 12x + 8 \Leftrightarrow x^3 + x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = (x+2)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}\cdot x = x + 2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

Άσκηση 2

Αν για τρεις ακέραιους α, β, γ ισχύει $|\alpha+\beta| = |\gamma|$ με $\alpha+\beta \neq \gamma$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $2\alpha^4 + 2\beta^4 + 2\gamma^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Απάντηση

Από την υπόθεση $|\alpha+\beta| = |\gamma|$ ισοδύναμα παίρνουμε $\alpha+\beta=\gamma$ ή $\alpha+\beta=-\gamma$ και καθώς δίνεται ότι $\alpha+\beta \neq \gamma$, απομένει να ισχύει μόνο $\alpha+\beta=-\gamma$, δηλαδή $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

για $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ αντί των α, β, γ αντίστοιχα, παίρνουμε

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2).$$

Οπότε, $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) =$

$$= \left[\left(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{=0}\right)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right]^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$$

$$= 4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$$

$$= 4(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 2\alpha\beta^2\gamma + 2\beta\gamma^2\alpha + 2\gamma\alpha^2\beta) - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2$$

$$=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+8\alpha\beta^2\gamma+8\beta\gamma^2\alpha+8\gamma\alpha^2\beta$$

$$=2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)+8\alpha\beta\gamma\left(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{=0}\right)=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$$

Βρήκαμε ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$.

Οπότε $2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2$, που είναι τετράγωνο ακεραίου.

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους ν για τους οποίους η τιμή της παράστασης $\nu^2+2\nu+106$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Απάντηση

Έστω $\nu^2+2\nu+106=\kappa^2$, όπου κ θετικός ακέραιος.

$$\nu^2+2\nu+106=\kappa^2\Leftrightarrow\left(\nu^2+2\nu+1\right)+105=\kappa^2\Leftrightarrow(\nu+1)^2+105=\kappa^2$$

$$\Leftrightarrow\kappa^2-(\nu+1)^2=105\Leftrightarrow\left(\kappa-|\nu+1|\right)\left(\kappa+|\nu+1|\right)=105\ ,\ \ (1)$$

Το αριστερό μέλος της ισότητας (1) πρέπει να είναι θετικό και επειδή $\kappa+|\nu+1|>0$ πρέπει και ο παράγοντας $\left(\kappa-|\nu+1|\right)$ να είναι θετικός, δηλαδή $\kappa>|\nu+1|$.

Οπότε έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\left(\kappa-|\nu+1|\right)\left(\kappa+|\nu+1|\right)=105=1\cdot3\cdot5\cdot7\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa-|\nu+1|=1\\ \kappa+|\nu+1|=105\end{cases} ή \begin{cases}\kappa-|\nu+1|=3\\ \kappa+|\nu+1|=35\end{cases} ή \begin{cases}\kappa-|\nu+1|=5\\ \kappa+|\nu+1|=21\end{cases} ή \begin{cases}\kappa-|\nu+1|=7\\ \kappa+|\nu+1|=15\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=53\\ |\nu+1|=52\end{cases} ή \begin{cases}\kappa=19\\ |\nu+1|=16\end{cases} ή \begin{cases}\kappa=13\\ |\nu+1|=8\end{cases} ή \begin{cases}\kappa=11\\ |\nu+1|=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=53\\ \nu+1=52\ ή\ \nu+1=-52\end{cases} ή \begin{cases}\kappa=19\\ \nu+1=16\ ή\ \nu+1=-16\end{cases}$$

$$ή \begin{cases}\kappa=13\\ \nu+1=8\ ή\ \nu+1=-8\end{cases} ή \begin{cases}\kappa=11\\ \nu+1=4\ ή\ \nu+1=-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=53\\ \nu=51\ ή\ \nu=-53\end{cases} ή \begin{cases}\kappa=19\\ \nu=15\ ή\ \nu=-17\end{cases} ή$$

$$ή \begin{cases}\kappa=13\\ \nu=7\ ή\ \nu=-2\end{cases} ή \begin{cases}\kappa=11\\ \nu=3\ ή\ \nu=-5\end{cases}$$

Άρα το σύνολο όλων των ζητούμενων ακέραιων τιμών του ν είναι το

$$\{-53,-17,-5,-2,3,7,15,51\}$$

Άσκηση 4

Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων $x^2+y^2=7$, (1) και $x^3+y^3=10$, (2), όπου $x,y\in\mathbb{R}$.
Αν $s=x+y$ και $p=xy$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη $(\mathbf{s},\mathbf{p})$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις $(\mathbf{1})$ και $(\mathbf{2})$.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ζεύγη των πραγματικών αριθμών $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ που επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{2})$ του συστήματος.

Απάντηση

α) $x^2+y^2=7$ και $x^3+y^3=10$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy=7$ και $(x+y)^3-3xy(x+y)=10$, (E)

Με $x+y=s$ και $xy=p$, οι εξισώσεις (E) γράφονται $s^2-2p=7$ και $s^3-3ps=10$

Θέλοντας να απαλείψουμε το p, από τις τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{s^2-7}{2}=p \text{ και } \frac{s^3-10}{3s}=p$$

(Είναι $s\neq 0$, γιατί με $s=0$ από τη σχέση $s^3-3ps=10$ προκύπτει $0=10$, που δεν ισχύει.)

Οπότε, $\dfrac{s^2-7}{2}=\dfrac{s^3-10}{3s}\Leftrightarrow 2s^3-20=3s^3-21s\Leftrightarrow s^3-21s+20=0$, (3)

Η εξίσωση (3) έχει προφανή ρίζα την $s=1$, οπότε γράφεται $(s-1)(s^2+s-20)=0$

και βρίσκουμε $s=1$ ή $s=4$ ή $s=-5$.

Με $s=1$, $s=4$, $s=-5$ από τη σχέση $\dfrac{s^2-7}{2}=p$ βρίσκουμε αντίστοιχα $p=-3$, $p=\dfrac{9}{2}$, $p=9$

Επομένως, $(s,p)=(1,-3)$, $(s,p)=\left(4,\dfrac{9}{2}\right)$, $(s,p)=(-5,9)$

β) Αν υπάρχουν ζεύγη (x,y), με $x,y\in\mathbb{R}$, που ικανοποιούν τις (1) και (2), αυτά τα x και y θα είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $t^2-St+P=0$. Με $(s,p)=(1,-3)$ παίρνουμε την εξίσωση $t^2-t-3=0$ που έχει διακρίνουσα $\Delta=13>0$, οπότε η εξίσωση αυτή έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ και $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. Άρα τα ζεύγη $(x,y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

και $(x,y)=\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις (1) και (2).

Με $(s,p)=\left(4,\dfrac{9}{2}\right)$ παίρνουμε την εξίσωση $t^2-4t+\dfrac{9}{2}=0$ που έχει αρνητική διακρίνουσα $(\Delta=-2<0)$, οπότε η εξίσωση $t^2-4t+\dfrac{9}{2}=0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν ζεύγη (x,y), με $x,y\in\mathbb{R}$, που να ικανοποιούν τις εξισώσεις (1) και (2).

Με $(s,p)=(-5,9)$ παίρνουμε την εξίσωση $t^2+5t+9=0$ που έχει αρνητική διακρίνουσα $(\Delta=-11<0)$, οπότε η εξίσωση $t^2+5t+9=0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν ζεύγη (x,y), με $x,y\in\mathbb{R}$, που να ικανοποιούν τις εξισώσεις (1) και (2).

Τελικά, υπάρχουν δύο ακριβώς ζεύγη πραγματικών αριθμών (x,y) που ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις (1) και (2), τα $(x,y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ και $(x,y)=\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Άσκηση 5

Δύο αριθμητικές πρόοδοι (α_ν) και (β_ν), όπου $\nu=1,2,3,\cdots$, ορίζονται ως εξής:

(α_ν): με πρώτο όρο $\alpha_1=4$ και διαφορά $\omega_1=3$

(β_ν): με πρώτο όρο $\beta_1=5$ και διαφορά $\omega_2=5$

α) **Αν α_μ και β_μ είναι αντίστοιχα όροι των προόδων (α_ν) και (β_ν), να προσδιορίσετε όλους τους μ για τους οποίους το άθροισμα $\alpha_\mu+\beta_\mu$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.**

β) **Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο των ζευγών (α_μ,β_μ) με την ιδιότητα των α_μ και β_μ όπως αυτή περιγράφηκε στο α) ερώτημα.**

Απάντηση

α) Είναι $\alpha_\mu=\alpha_1+(\mu-1)\omega_1$ και $\beta_\mu=\beta_1+(\mu-1)\omega_2$, όπου $\alpha_1=4$, $\omega_1=3$ και $\beta_1=5$, $\omega_2=5$.
Άρα $\alpha_\mu=3\mu+1$ και $\beta_\mu=5\mu$, οπότε $\alpha_\mu+\beta_\mu=8\mu+1$.
Θα προσδιορίσουμε τους ακέραιους μ ώστε $\alpha_\mu+\beta_\mu=\kappa^2$, δηλαδή $8\mu+1=\kappa^2$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$ (1).
Γνωρίζουμε όμως ότι "το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής $8\lambda+1$", άρα η (1) θα ισχύει αν και μόνο αν ο ακέραιος κ είναι περιττός και προφανώς $\kappa\neq 1$.
Άρα $\kappa=2\sigma+1$, $\kappa\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ και $\sigma\in\mathbb{N}^*$. Οπότε η (1) γίνεται $8\mu+1=(2\sigma+1)^2$.

Είναι $8\mu+1=(2\sigma+1)^2 \Leftrightarrow 8\mu+1=4\sigma^2+4\sigma+1 \Leftrightarrow \mu=\dfrac{\sigma^2+\sigma}{2}$.

Επομένως, όλοι οι θετικοί ακέραιοι μ για τους οποίους το άθροισμα $\alpha_\mu+\beta_\mu$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου προσδιορίζονται από τη σχέση $\mu=\dfrac{\sigma^2+\sigma}{2}$, (2), όπου $\sigma=1,2,3,\cdots$

β) Θέτοντας διαδοχικά όπου $\sigma=1,2,3,\cdots$ από τη σχέση (2) και τις υποθέσεις της άσκησης βρίσκουμε αντίστοιχα:

$\mu=1$, άρα $(\alpha_\mu,\beta_\mu)=(\alpha_1,\beta_1)=(4,5)$, $4+5=9=3^2$

$\mu=3$, άρα $(\alpha_\mu,\beta_\mu)=(\alpha_3,\beta_3)=(10,15)$, $10+15=25=5^2$

$\mu=6$, άρα $(\alpha_\mu,\beta_\mu)=(\alpha_6,\beta_6)=(19,30)$, $19+30=49=7^2$

$\mu=10$, άρα $(\alpha_\mu,\beta_\mu)=(\alpha_{10},\beta_{10})=(31,50)$, $31+50=81=9^2$ κλπ.

Επομένως το ζητούμενο σύνολο είναι το $A=\{(4,5),(10,15),(19,30),(31,50),\cdots\}$

Σχόλιο

Το παραπάνω α) ερώτημα της άσκησης 5 θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής:
"Αν α_μ και β_μ είναι αντίστοιχα όροι των προόδων (α_ν) και (β_ν), να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη (α_μ,β_μ) για τα οποία το άθροισμα $\alpha_\mu+\beta_\mu$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου". Η απάντηση και με αυτήν την δεύτερη διατύπωση θα εστιάζονταν πάλι στη σχέση $\mu=\dfrac{\sigma^2+\sigma}{2}$ από την οποία για καθεμιά συγκεκριμένη τιμή του $\sigma\in\mathbb{N}^*$ προκύπτει ένα ζεύγος (α_μ,β_μ). Και επειδή το σ διατρέχει το απειροσύνολο $\mathbb{N}^*$, αυτά τα ζεύγη (α_μ,β_μ) με την συγκεκριμένη ιδιότητα που περιγράφηκε θα είναι άπειρα.

Άσκηση 6

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του πραγματικού αριθμού α για την οποία ισχύει $x^2+y^2+88x+16y+250\alpha\geq 0$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y.

Απάντηση

$$S=x^2+y^2+88x+16y+250\alpha=$$
$$=x^2+2\cdot44x+44^2+y^2+2\cdot8y+8^2-44^2-8^2+250\alpha$$
$$=x^2+2\cdot44x+44^2+y^2+2\cdot8y+8^2-1936-64+250\alpha$$

Άρα $S=(x+44)^2+(y+8)^2-2000+250\alpha$

Θέλουμε $S\geq0\Leftrightarrow(x+44)^2+(y+8)^2\geq2000-250\alpha$, (1)

Καθώς το αριστερό μέλος της σχέσης (1) είναι θετικό ή μηδέν, η (1) θα ισχύει για όλους τους $x,y\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $2000-250\alpha\leq0\Leftrightarrow\alpha\geq8$

Άρα η ζητούμενη ελάχιστη τιμή του α ισούται με 8.

Άσκηση 7

Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}$, $x\in\mathbb{R}$
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της παράστασης;

Απάντηση

$$\frac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}=\frac{2\left(x^2-4x+7\right)+3}{x^2-4x+7}=2+\frac{3}{x^2-4x+7}=2+\frac{3}{(x-2)^2+3}$$

Δηλαδή, $\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}=2+\dfrac{3}{(x-2)^2+3}$, (1). Από την ισότητα (1) γίνεται φανερό ότι η παράσταση $\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν το κλάσμα $\dfrac{3}{(x-2)^2+3}$ γίνεται μέγιστο, και αυτό συμβαίνει όταν γίνεται ελάχιστος ο παρονομαστής $(x-2)^2+3$, δηλαδή όταν $x=2$.

Τελικά, η μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}$ ισούται με $2+\dfrac{3}{(2-2)^2+3}=3$ και αυτό επιτυγχάνεται για $x=2$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τετραψήφιο αριθμό που ο πολλαπλασιασμός του με το 9 δίνει τετραψήφιο που έχει τα ίδια ψηφία με τον αρχικό τετραψήφιο γραμμένα με ανάστροφη σειρά.

Υπενθύμιση

Στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης ένας τετραψήφιος αριθμός με α το ψηφίο των χιλιάδων $(\alpha\neq0)$, β των εκατοντάδων, γ των δεκάδων και δ των μονάδων γράφεται στη μορφή $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=10^3\alpha+10^2\beta+10\gamma+\delta$.

Απάντηση

Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ ο αρχικός τετραψήφιος αριθμός, ο πολλαπλασιασμός του οποίου με το 9 μάς δίνει τον τετραψήφιο $\overline{\delta\gamma\beta\alpha}$. Προφανώς το ψηφίο α του $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ πρέπει να είναι το 1 γιατί αν ήταν $\alpha\geq2$, τότε ο πολλαπλασιασμός του $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ με το 9 θα μάς έδινε γινόμενο με περισσότερα από τέσσερα ψηφία.

Αρχικά λοιπόν πρέπει $\left(\overline{1\beta\gamma\delta}\right)\cdot 9=\overline{\delta\gamma\beta 1}$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι το ψηφίο δ του γινομένου $\overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του 9 με το ψηφίο 1 του αριθμού $\overline{1\beta\gamma\delta}$. Επομένως $\delta=9$, οπότε η ισότητα $\left(\overline{1\beta\gamma\delta}\right)\cdot 9=\overline{\delta\gamma\beta 1}$ γίνεται $\left(\overline{1\beta\gamma 9}\right)\cdot 9=\overline{9\gamma\beta 1}$. Έτσι θα έχουμε

$$\left(\overline{1\beta\gamma 9}\right)\cdot 9=\overline{9\gamma\beta 1}\Leftrightarrow 9\cdot 1000+9\beta\cdot 100+9\gamma\cdot 10+81=9\cdot 1000+100\gamma+10\beta+1$$

$$\Leftrightarrow 890\beta-10\gamma+80=0\Leftrightarrow 89\beta+8=\gamma,$$

και καθώς το γ είναι ψηφίο του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης θα είναι υποχρεωτικά $\beta=0$ και $\gamma=8$. Οπότε ο αρχικός τετραψήφιος είναι ο αριθμός 1089.

Άσκηση 9

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο ν ο αριθμός $\nu^3+5\nu$ είναι άρτιος.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$\mathbf{15x^3-x^2-8y^2-56xy+74x+15=0}$$

Απάντηση

α) Είναι $\nu^3+5\nu=\nu\left(\nu^2+5\right)$

Έστω ότι ο ν είναι άρτιος. Τότε ο $\nu\left(\nu^2+5\right)$ είναι άρτιος (γινόμενο αρτίου με ακέραιο).

Έστω ότι ο ν είναι περιττός. Τότε ν^2 περιττός (τετράγωνο περιττού) και ν^2+5 άρτιος (άθροισμα περιττών). Άρα ο αριθμός $\nu\left(\nu^2+5\right)$ είναι άρτιος, ως γινόμενο του αρτίου ν^2+5 με τον ακέραιο ν.

Επομένως σε κάθε περίπτωση ο αριθμός $\nu^3+5\nu$ είναι άρτιος.

β) $15x^3-x^2-8y^2-56xy+74x+15=0\Leftrightarrow 15x^3+75x+15=x^2+8y^2+56xy+x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15\left(\left(x^3+5x\right)+1\right)=x\left(x+1\right)+8\left(y^2+7y\right),\quad (1)$$

Στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (1) το x^3+5x είναι άρτιος, λόγω του α) ερωτήματος, άρα το $\left(\left(x^3+5x\right)+1\right)$ είναι περιττός (άθροισμα αρτίου με περιττό). Οπότε το αριστερό μέλος, $15\left(\left(x^3+5x\right)+1\right)$, είναι περιττός (γινόμενο δύο περιττών). Στο δεξιό μέλος της (1) το $x\left(x+1\right)$ είναι άρτιος (γινόμενο διαδοχικών ακεραίων) και το $8\left(y^2+7xy\right)$ είναι επίσης άρτιος (γινόμενο αρτίου με ακέραιο). Άρα, το δεξιό μέλος της (1) είναι άρτιος (άθροισμα αρτίων). Τελικά αποδείξαμε ότι, το αριστερό μέλος της (1) είναι περιττός, ενώ το δεξιό μέλος είναι άρτιος. Αυτό όμως είναι άτοπο. Επομένως δεν υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι, ώστε να ισχύει $15x^3-x^2-8y^2-56xy+74x+15=0$.

Άσκηση 10

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) που ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις: $\mathbf{x+y=4-\frac{xy}{2}}$ **,** $\mathbf{y+z=8-\frac{yz}{2}}$ **,** $\mathbf{z+x=\frac{11}{2}-\frac{zx}{2}}$

Απάντηση

$$\begin{cases} x+y=4-\dfrac{xy}{2} \\ y+z=8-\dfrac{yz}{2} \\ z+x=\dfrac{11}{2}-\dfrac{zx}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+2y+xy=8 \\ 2y+2z+yz=16 \\ 2z+2x+zx=11 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+2y+xy+4=12 \\ 2y+2z+yz+4=20 \\ 2z+2x+zx+4=15 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(y+2)+2(y+2)=12 \\ y(z+2)+2(z+2)=20 \\ z(x+2)+2(x+2)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2)=12 \\ (y+2)(z+2)=20 \\ (z+2)(x+2)=15 \end{cases}, \ (\Sigma)$$

Θέτοντας $x+2=\alpha$, $y+2=\beta$ και $z+2=\gamma$ οι εξισώσεις (Σ) γράφονται αντίστοιχα

$$\alpha\beta=12 \quad (1), \quad \beta\gamma=20 \quad (2), \quad \gamma\alpha=15 \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) παίρνουμε

$$(\alpha\beta\gamma)^2=3600 \Leftrightarrow |\alpha\beta\gamma|=60 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma=60 \text{ ή } \alpha\beta\gamma=-60$$

- Με διαίρεση κατά μέλη της $\alpha\beta\gamma=60$ δια καθεμιάς των (1), (2) και (3)

βρίσκουμε αντίστοιχα $\gamma=5$, $\alpha=3$ και $\beta=4$

Οπότε από τις $x+2=\alpha$, $y+2=\beta$ και $z+2=\gamma$ βρίσκουμε $x=1$, $y=2$, $z=3$

- Με διαίρεση κατά μέλη της $\alpha\beta\gamma=-60$ δια καθεμιάς των (1), (2) και (3)

βρίσκουμε αντίστοιχα $\gamma=-5$, $\alpha=-3$ και $\beta=-4$

Οπότε από τις $x+2=\alpha$, $y+2=\beta$ και $z+2=\gamma$ βρίσκουμε $x=-5$, $y=-6$, $z=-7$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(x,y,z)=(1,2,3)$ και $(x,y,z)=(-5,-6,-7)$

Ασκήσεις για λύση

1. Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους ν για τις οποίους η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

α) $\nu^2+8\nu+341$, β) $\nu^2+4\nu+41$, γ) $\nu^2+10\nu+8$

2. Να προσδιορίσετε το άθροισμα όλων των τριψήφιων θετικών ακεραίων, των οποίων η διαίρεση καθενός από αυτούς με το 18 και με το 30 δίνει υπόλοιπο 7.

3. Διαμερίζουμε το σύνολο των θετικών άρτιων ακεραίων $A=\{2,4,6,\cdots\}$ σε διατεταγμένες ομάδες $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_\nu, \cdots$ με τον εξής τρόπο:

$$A_1=(2),\ A_2=(4,6),\ A_3=(8,10,12),\ \cdots, A_\nu=(\alpha_1,\cdots),\cdots$$

όπου κάθε ομάδα έχει ένα στοιχείο παραπάνω από την ακριβώς προηγούμενη ομάδα.
Να προσδιορίσετε το άθροισμα των στοιχείων της ομάδας A_ν ως συνάρτηση του ν.

4. Να βρείτε τα ζεύγη ακεραίων (x, y) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$9x^2+4y^2-9x^2y^2+6xy+2=0$$

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Δημήτρης Ντρίζος, *Μαθηματικές Διαγωνιστικές Διαδρομές – Θέματα για μια Εισαγωγή στα Διαγωνιστικά Μαθηματικά*, Εκδόσεις Ζανταρίδης – Τηλέγραφος, 2025.

[2] Θανάσης Ντρίζος, *Θέματα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου* (αδημοσίευτες σημειώσεις).

[3] George Polya, *Η Μαθηματική Ανακάλυψη*, τόμος 1ος, Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[4] G. Dorofeev et al. *Elementary Mathematics*, G.K. Publications, 2016.

Επίλυση της διοφαντικής εξίσωσης $x^2 - By^2 = Az^2$ (Ε), όπου Α, .$B \in \mathbb{N}^*$. ελεύθεροι τετράγωνου παράγοντα, με $A \geq B$ και: $(x, y) = (y, A) = 1$.

Λευτέρης Τσιλιακός

Επίλυση: Για άνετη παρουσίαση της σχετικής διαδικασίας θα επιλύσουμε τη διοφαντική εξίσωση:

$$x^2 - 17y^2 = 26z^2 \qquad (1)$$

$(B = 17,\ A = 26)$, χωρίς να κάνουμε έκπτωση στη θεωρητική αυστηρότητα.

Η (1), με τον μετασχηματισμό (M_1): $x = ny - Ay_1 = ny - 26y_1$, γίνεται:

$$(ny - 26y_1)^2 - 17y^2 = 26z^2 \Leftrightarrow \ldots \left(\frac{n^2 - 17}{26}\right)y^2 + 26y_1^2 - 2nyy_1 = z^2 \qquad (2).$$

Θεωρούμε ότι:

(i) Οι x, y, z της (1) δεν έχουν κοινό παράγοντα $\delta \in \mathbb{Z}^*$, γιατί διαφορετικά έπρεπε να διαγράφει το από τα δύο μέλη της (1) και θα προέκυπτε εξίσωση της ίδιας μορφής.

(ii) Δύο τυχαίοι από τους x, y, z είναι πρώτοι μεταξύ τους, γιατί, αν π.χ. $\theta^2 \mid x^2$ και $\theta^2 \mid y^2$, θα έπρεπε $\theta^2 \mid 26z^2$ και επειδή $\theta^2 \nmid 26$, θα έπρεπε $\theta^2 \mid z^2$, πράγμα άτοπο, αφού οι x, y, z (λόγω της (i)) δεν έχουν κοινό διαιρέτη.

Επίσης οι y^2 και 26 δεν έχουν κοινό παράγοντα θ, γιατί, λόγω της (i), θα τον είχε και ο x^2, πράγμα άτοπο, αφού $(x^2, y^2) = 1$. Έτσι $(y^2, 26) = 1$, δηλαδή στην (2) δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση του 26 με τον y^2.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ με $n < 26$ τέτοιοι, ώστε ο αριθμός $f = \frac{n^2 - 17}{26}$ να είναι ακέραιος. Έχουμε:

$$f = \frac{n^2 - 17}{26} = \begin{cases} 4 = 1 \cdot 2^2 = A_1 \cdot k^2 \text{ για } n = 11,\ (A_1 = 1,\ k = 2) & (3)\quad (*) \\ 8 = 2 \cdot 2^2 = A_1 \cdot k^2 \text{ για } n = 15,\ (A_1 = 2,\ k = 2) & (4) \end{cases}$$

Η (2) με τα στοιχεία της (4) και με τον μετασχηματισμό: (M_2): $y = \frac{x_1 + ny_1}{A_1 k^2}$ και $z = \frac{z_1}{k}$

δηλαδή $y = \frac{x_1 + 15y_1}{8}$ και $z = \frac{z_1}{2}$, γίνεται:

$$8 \cdot \left(\frac{x_1 + 15y_1}{8}\right)^2 + 26y_1^2 - 2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{x_1 + 15y_1}{8}\right) \cdot y_1 = \left(\frac{z_1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \ldots x_1^2 - 17y_1^2 = 2z_1^2 \qquad (5)$$

που ονομάζεται 1^{η} μετασχηματισμένη της (1).

(∗) Αν π.χ. $f = 48$, τότε $f = 3 \cdot 4^2$, δηλαδή $A_1 = 3$, $k = 4$ και όχι $f = 12 \cdot 2^2$ (χρησιμοποιούμε το μέγιστο δυνατό τετράγωνο).

1ο Θεώρημα

Η εξίσωση (Ε), με χρήση των μετασχηματισμών (M_1), (M_2) και την ύπαρξη των n, A_1, k παίρνει τη μορφή: $x_1^2 - By_1^2 = A_1 z_1^2$, με $A_1 \in \mathbb{N}^*$ και $A_1 < A$.

Πράγματι, η εξίσωση (5) έχει αυτή την μορφή, αφού $17 = B$ και $A_1 = 2 < A = 26$.

Το παρόν θεώρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση της (5), γιατί $A_1 < B$ $(2 < 17)$. Εφαρμόζεται όμως στην ισοδύναμή της $x_1^2 - 2z_1^2 = 17y_1^2$ (6).

Για ευκολία του τυπολογίου θεωρούμε (για την (6)), τις αντικαταστάσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \text{όπου } x_1 \text{ ο } X_1 \\ \text{όπου } z_1 \text{ ο } \Psi_1 \\ \text{όπου } y_1 \text{ ο } Z_1 \end{array}\right\} \quad (7)$$

και η (6) γράφεται: $X_1^2 - 2\Psi_1^2 = 17Z_1^2$ (8).

Σημείωση: Για ευκολία αφήνουμε τις μεταβλητές f, n, A1, k με τον ίδιο συμβολισμό σε κάθε εξίσωση. Όποτε τις χρησιμοποιούμε αναφερόμαστε σ' αυτές που αντιστοιχούν στην κάθε αριθμημένη εξίσωση (δείτε π.χ. τα στοιχεία της (4), που χρησιμοποιήσαμε).

Εφαρμόζουμε τώρα για την (8) τη διαδικασία του 1ου θεωρήματος, όπως κάναμε και για την (1). Είναι: $f = \frac{n^2-2}{17} = \begin{cases} 2 = 2\cdot 1^2 = A_1\cdot k^2 \text{ για } n=6,\ (A_1=2,\ k=1) & (9) \\ 7 = 7\cdot 1^2 = A_1\cdot k^2 \text{ για } n=11,\ (A_1=7,\ k=1) & (10) \end{cases}$

Έτσι με τα στοιχεία της (9) και με τους μετασχηματισμούς:

$$(M_3):\ X_1 = 6\Psi_1 - 17\Psi_2 \quad \text{και} \quad (M_4):\ \Psi_1 = \frac{X_2+6\Psi_2}{2} \ \text{ και } \ Z_1 = \frac{Z_2}{1} = Z_2$$

η (8) δίνει την εξίσωση: $X_2^2 - 2\Psi_2^2 = 2Z_2^2$ (11). Στην (11) έχουμε την περίπτωση $A = B = 2$, δηλαδή έχουμε την μορφή: $x^2 - Ay^2 = Az^2$, οπότε: $f = \frac{n^2-A}{A} = \begin{cases} -1 = (-1)\cdot 1^2 \text{ για } n=0 \\ A-1 \text{ για } n=A \end{cases}$

Έτσι για την (11) έχουμε: $f = \frac{n^2-2}{2} = \begin{cases} -1 = (-1)\cdot 1^2 \text{ για } n=0,\ (A_1=-1,\ k=1) & (12) \\ 1 = 1\cdot 1^2 \text{ για } n=2,\ (A_1=1,\ k=1) & (13) \end{cases}$

που με τα στοιχεία της (12) και τους μετασχηματισμούς:

$$(M_5):\ X_2 = 0\cdot\Psi_2 - 2\Psi_3 \quad \text{και} \quad (M_6):\ \Psi_2 = \frac{X_3+0\cdot\Psi_3}{-1} \ \text{ και } \ Z_2 = \frac{Z_3}{1}$$

οδηγεί την (11) στην εξίσωση: $X_3^2 - 2\Psi_3^2 = -Z_3^2 \Leftrightarrow X_3^2 + Z_3^2 = 2\Psi_3^2$ (14). Η (14) επιλύεται άμεσα από τους τύπους: $X_3 = \mu^2 + 2\mu\nu - \nu^2$, $Z_3 = \mu^2 - 2\mu\nu - \nu^2$, $\Psi_3 = \mu^2 + \nu^2$, $\mu,\ \nu \in \mathbb{Z}$ (15)

Επίσης με τα στοιχεία της (13) και τους μετασχηματισμούς:

$$(M_7):\ X_2 = 2\Psi_2 - 2\Psi_3 \quad \text{και} \quad (M_8):\ \Psi_2 = \frac{X_3+2\Psi_3}{1} \ \text{ και } \ Z_2 = \frac{Z_3}{1} = Z_3$$

οδηγεί την (11) στην εξίσωση: $X_3^2 - 2\Psi_3^2 = Z_3^2 \Leftrightarrow Z_3^2 + 2\Psi_3^2 = X_3^2$ (16).

Η (16) επιλύεται άμεσα από τους τύπους $X_3 = 2\mu^2 + \nu^2$, $\Psi_3 = 2\mu\nu$, $Z_3 = 2\mu^2 - \nu^2$, $\mu,\ \nu \in \mathbb{Z}$ (17).

Παράδειγμα. Θα επιλύσουμε την (16) και στη συνέχεια, πηγαίνοντας αντίστροφα, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών και των αντικαταστάσεων θα βρούμε μια λύση της (1). Έτσι, π.χ. αν $(\mu,\ \nu) = (2,\ 1)$ από τους (17) βρίσκουμε $X_3 = 9$, $\Psi_3 = 4$, $Z_3 = 7$, που επαληθεύουν την (16). Από τους: $(M_8),\ (M_7) \Rightarrow \Psi_2 = \frac{9+8}{1} = 17$, $Z_2 = Z_3 = 7$, $X_2 = 2\cdot 17 - 2\cdot 4 = 26$,

που ικανοποιούν την (11). Από τους $(M_3),\ (M_4)$ βρίσκουμε:

$$\Psi_1 = \frac{26+6\cdot 17}{2} = 64,\quad X_1 = 6\cdot 64 - 17\cdot 17 = 95,\quad Z_1 = 7,$$

που ικανοποιούν την (8). Από τις αντικαταστάσεις (7) είναι $x_1 = 95$, $y_1 = 7$, $z_1 = 64$. Από τον $(M_2) \Rightarrow y = \frac{95+17\cdot 5}{8} = 25$, $z = \frac{64}{2} = 32$, οπότε: $x = 15\cdot 25 - 26\cdot 7 = 193$

και η τριάδα $(x, y, z) = (193, 25, 32)$ ικανοποιεί την (1). Δεδομένου ότι αυτή η τριάδα – λύση προήλθε από το τυχαίο ζεύγος $(\mu, \nu) = (2, 1)$ αποδεικνύει ότι η (1) έχει άπειρο πλήθος λύσεων (τριάδων). Τελείως ανάλογα επιλύουμε την (14) με τους τύπους (15). Έτσι π.χ. για $(\mu, \nu) = (1, 1)$ βρίσκουμε: $(X_3, \Psi_3, Z_3) = (2, 2, -2)$ και με τη χρήση των (M_5), (M_6) (που αντιστοιχούν στις (13) και (14)) στη συνέχεια έχουμε: $(X_2, \Psi_2, Z_2) = (-4, -2, -2) \Rightarrow$

$$(X_1, \Psi_1, Z_1) = (-14, -8, -2) \equiv (14, 8, 2) \underset{(7)}{\Rightarrow} (x_1, y_1, z_1) = (14, 2, 8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{61}{2}, \frac{11}{2}, 4\right) \equiv (61, 11, 8) \text{, που επαληθεύει την (1).}$$

Προφανώς και από τα στοιχεία των (13), (14) φαίνεται αμέσως ότι η (1) έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Η (2) με τα στοιχεία της (3) και με τον μετασχηματισμό:

$$(M_9): \quad y = \frac{x_1 + 11y_1}{4} \quad \text{και} \quad z = \frac{z_1}{2}$$

γίνεται $x_1^2 - 17y_1^2 = z_1^2$ (18), που επιλύεται άμεσα από τους τύπους:

$$x_1 = 17\mu^2 + \nu^2, \quad y_1 = 2\mu\nu, \quad Z_1 = 17\mu^2 - \nu^2 \quad \text{με} \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}.$$

Έτσι π.χ. για $(\mu, \nu) = (1, 1)$ έχουμε: $x_1 = 18$, $y_1 = 2$, $z_1 = 16 \underset{(M_2)}{\Rightarrow} y = 10, z = 8$ και από τον $(M_1) \Rightarrow x = 58$. Η τριάδα $(x, y, z) = (58, 10, 8)$ ή $(x, y, z) = (9, 5, 4)$ ικανοποιεί την (1).

Συνοπτική Θεωρία

- Αν για μια διοφαντική εξίσωση της μορφής (Ε) **δεν** υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ με $n < A$ τέτοια, ώστε ο αριθμός $f = \dfrac{n^2 - B}{A}$ να είναι ακέραιος, τότε η (Ε) είναι αδύνατη εξίσωση.
- Από το 1ο θεώρημα γνωρίζουμε ότι $A_1 < A$ (ο A_1 της 1ης μετασχ/νης). Το ίδιο ισχύει και για τον A_1 κάθε επόμενης μετασχ/νης, δηλαδή $A_1 <$ του συντελεστού του εκάστοτε 2ου μέλους κάθε νέας εξίσωσης. Αυτές οι συνεχείς μειώσεις των A_1 θα οδηγήσουν τελικά σε μια εξίσωση (Ε) της μορφής: $x_i^2 - B_\kappa y_i^2 = A_\lambda z_i^2$, όπου $B_\kappa = 1$ ή $A_\lambda = 1$, που επιλύεται άμεσα, όπως φάνηκε στις (14), (16), (18).
- **Θεώρημα 2ο (ύπαρξης λύσεων).**
  Η διοφαντική εξίσωση $x^2 - By^2 = Az^2$ με τις υποθέσεις που δεχτήκαμε είναι πάντοτε επιλύσιμη στο $\mathbb{Z}^3$, αν υπάρχουν 4 φυσικοί αριθμοί n_1, n_2, n_3, n_4, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{n_1^2 - B}{A}$, $\dfrac{n_2^2 - A}{B}$, $\dfrac{n_3^2 - B}{A_1}$ και $\dfrac{n_4^2 - A_1}{B}$ να ανήκουν στο $\mathbb{Z}$, όπου A_1 ο συντελεστής του z_1^2 στην 1η μετασχηματισμένη (δείτε την (5)).
- Αν $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, χωρίς κοινό παράγοντα και ελεύθεροι τετραγώνου, τότε η διοφαντική εξίσωση $ax^2 + by^2 = cz^2$ (19) μπορεί να πάρει τη μορφή $X^2 - B\Psi^2 = AZ^2$.

Απόδειξη

$$(19) \Leftrightarrow acx^2 + bcy^2 = (cz)^2 \Leftrightarrow (cz)^2 - bcy^2 = acx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^2 - B\Psi^2 = AZ^2 \text{, όπου } X = cz,\ B = bc,\ A = ac,\ \Psi = y \text{ και } Z = x \text{ ο.ε.δ.}$$

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 457 (ΤΕΥΧΟΣ 138)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ, Ν σημεία της ΒΓ ώστε $ΒΜ=ΓΝ$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{ΑΒ^2}{ΑΝ}+\frac{ΑΓ^2}{ΑΜ}>ΒΓ$$

Από το αρχείο του αξέχαστου συνάδελφου Αποστολόπουλου Γιώργου.

ΛΥΣΗ (Πετρολέκας Στυλιανός – Δραπετσώνα)

Αν θέσουμε

$$x=\frac{ΑΒ}{\sqrt{ΑΝ}},\ y=\frac{ΑΓ}{\sqrt{ΑΜ}},\ z=\sqrt{ΑΝ},\ \ w=\sqrt{ΑΜ}$$

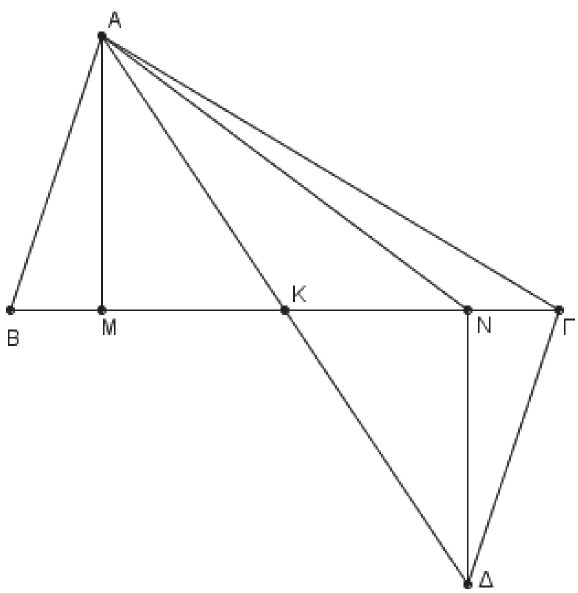
τότε την ανισότητα Chaucy – Swartz για τους x, y, z, w έχουμε

$$(x^2+y^2)(z^2+w^2)\geq(xz+yw)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{ΑΒ^2}{ΑΝ}+\frac{ΑΓ^2}{ΑΜ}\right)(ΑΝ+ΑΜ)\geq(ΑΒ+ΑΓ)^2$$

$$\Rightarrow\frac{ΑΒ^2}{ΑΝ}+\frac{ΑΓ^2}{ΑΜ}\geq\frac{(ΑΒ+ΑΓ)^2}{ΑΝ+ΑΜ},\ \ (1)$$

Θα δείξουμε ότι $ΑΜ+ΑΝ<ΑΒ+ΑΓ$



Αν Κ είναι το μέσο της ΒΓ, προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΚ μέχρι το Δ, ώστε $ΚΔ+ΑΚ$ και λόγω συμμετρίας του σχήματος ως προς κέντρο το Κ, έχουμε:

$$ΑΜ=ΝΔ\ \text{ και }\ ΑΒ=ΓΔ\ \ (2)$$

Λόγω των (2) έχουμε

$$ΑΜ+ΑΝ=ΝΔ+ΑΝ<ΑΓ+ΓΔ=ΑΓ+ΑΒ$$

οπότε:

$$\frac{(ΑΒ+ΑΓ)^2}{ΑΝ+ΑΜ}>\frac{(ΑΒ+ΑΓ)^2}{ΑΒ+ΑΓ}=ΑΒ+ΑΓ>ΒΓ$$

και από την (1) προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΒ^2}{ΑΝ}+\frac{ΑΓ^2}{ΑΜ}>ΒΓ$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Χασάπης Γεώργιος – Ρόδος, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο και Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα.

Επισήμανση

Όπως εύστοχα επισημαίνει ο συνεργάτης μας Δεληστάθης Γιώργος, και τον ευχαριστούμε γι' αυτό, το προηγούμενο θέμα το έχουμε διαπραγματευτεί και παλαιότερα με αύξοντα αριθμό 388.

ΑΣΚΗΣΗ 458 (ΤΕΥΧΟΣ 138)

Έστω α, β, γ διαφορετικοί ανά δυο πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης

$$Α=\frac{(α-β)^2(β-γ)^2(γ-α)^2}{[(α-β)^2+(β-γ)^2+(γ-α)^2]^3}$$

Διονύσης Γιάνναρος - Πύργος

ΛΥΣΗ (Χασάπης Γιώργος – Ρόδος)

Θέτουμε

$$x=α-β,\ \ y=β-γ,\ z=γ-α$$

Οι x,y,z είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $z=-x-y$.

Έχουμε:

$$A=\frac{x^2y^2(x+y)^2}{\left[x^2+y^2+(x+y)^2\right]^3}$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{x}{y}+1\right)^2}{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+1+\left(\frac{x}{y}+1\right)^2\right]^3}=\frac{(t^2+t)^2}{\left(t^2+1+(t+1)^2\right)^3}$$

όπου έχουμε θέσει $x=ty$. Αν τώρα θέσουμε $t^2+t+1=u$, τότε $u\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$ και είναι:

$$A=\frac{(u-1)^2}{8u^3}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\left[\frac{3}{4},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με $f(u)=\frac{(u-1)^2}{8u^3}$ για κάθε $u\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(u)=\frac{-u^2+4u-3}{8u^4}$ για κάθε $u\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$f\left(\left[\frac{3}{4},+\infty\right)\right)=\left[0,\frac{1}{54}\right].$$

Για την A έχουμε ότι $0<A\leq\frac{1}{54}$.

Είναι $f\left(\frac{3}{4}\right)=f(3)=\frac{1}{54}$.

$$\left(f(u)\overset{u\geq\frac{3}{4}}{=}\frac{1}{54}\Leftrightarrow u\in\left\{\frac{3}{4},3\right\}\right)$$

Η ζητούμενη μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{54}$ και προκύπτει όταν $t\in\left\{-2,-\frac{1}{2},1\right\}$.

Η μέγιστη τιμή λαμβάνεται για

$$y=z=-\frac{x}{2},\ x\in\mathbb{R}-\{0\} \text{ ή}$$

$$y=x, z=-2x,\ x\in\mathbb{R}-\{0\} \text{ ή}$$

$$y=-2x,\ z=x,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Η μέγιστη τιμή λαμβάνεται για $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ ή $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ ή $\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2}$.

(Ο α είναι ο αριθμητικός μέσος των β και γ ή ο β είναι ο αριθμητικός μέσος των α και γ ή ο γ είναι ο αριθμητικός μέσος των α και β.)

Λύση έστειλαν επίσης οι Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια και Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 459 (ΤΕΥΧΟΣ 138)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\upsilon_\beta=3$ και $\upsilon_\gamma=5$. Αν η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου είναι $\rho=1$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών α, β και γ.

Λαγογιάννης Βασίλειος – Νέο Ηράκλειο

ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια)

Από τις

$$2E=2\alpha\upsilon_\alpha=\beta\upsilon_\beta=\gamma\upsilon_\gamma \text{ και } E=\tau\rho$$

παίρνουμε:

$$2E=2\tau\rho=(\alpha+\beta+\gamma)\rho=\left(\frac{2E}{\upsilon_\alpha}+\frac{2E}{\upsilon_\beta}+\frac{2E}{\upsilon_\gamma}\right)\rho$$

οπότε:

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$$

Έτσι, από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}=\frac{7}{15}\Rightarrow\upsilon_\alpha=\frac{15}{7}$$

Επίσης,

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}\right)\left(\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}-\frac{1}{\upsilon_\gamma}\right)\left(\frac{1}{\upsilon_\alpha}-\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}(2E)^2\sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2}{\upsilon_\alpha}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2}{\upsilon_\beta}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2}{\upsilon_\gamma}\right)}$$

$$=E^2\sqrt{1\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{4}{15}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{E}=\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}}\Rightarrow E=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$$

Άρα,

$$\alpha=\frac{2E}{\upsilon_\alpha}=\frac{7}{15}\cdot5\sqrt{3}\cdot2=\frac{14\sqrt{3}}{3},\ \beta=\frac{2E}{\upsilon_\beta}=\frac{1}{3}\cdot10\sqrt{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

και

$$\gamma=\frac{2E}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{5}\cdot2\cdot5\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

Λύση έστειλαν επίσης οι Χασάπης Γεώργιος – Ρόδος, Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο και Καραβότας Δημήτριος –Κάτω Αχαΐα.

ΑΣΚΗΣΗ 460 (ΤΕΥΧΟΣ 138)

Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z για τους οποίους ισχύουν

$x^2-yz=-5$ και $y^2-zx=1$ και $z^2-xy=7$

Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία

ΛΥΣΗ (Καραβότας Δημήτριος –Κάτω Αχαΐα)

Αν αφαιρέσουμε από την πρώτη εξίσωση την δεύτερη, παίρνουμε:

$$(x^2-yz)-(y^2-zx)=-6$$

$$\Rightarrow x^2-y^2+zx-zy=-6$$

$$\Rightarrow(x-y)(x+y+z)=-6,\ (1)$$

Ομοίως από την πρώτη και την τρίτη παίρνουμε

$$(x-z)(x+y+z)=-12,\ (2)$$

ενώ από την δεύτερη και την τρίτη

$$(y-z)(x+y+z)=-6,\ (3)$$

Με διαίρεση των (1) και (3) προκύπτει:

$$\frac{(x-y)(x+y+z)}{(y-z)(x+y+z)}=1$$

$$\Rightarrow x-y=y-z\Rightarrow x+z=2y$$

Με $y=\frac{1}{2}(x+z)$ οι δυο πρώτες εξισώσεις του συστήματος γράφονται:

$$2x^2-xz-z^2=-10,\ (4)\ \text{και}\ (x-z)^2=4,\ (5)$$

Από την (5) προκύπτει ότι:

$$x=z+2\ \ \text{ή}\ \ x=z-2$$

- Αν $x=z+2$ τότε η (4) γράφεται

$$2(z+2)^2-(z+2)z-z^2=-10\Leftrightarrow z=-3$$

Άρα $x=z+2=-1$ και $y=\frac{1}{2}(x+z)=-2$

- Αν $x=z-2$, τότε με ανάλογη πορεία βρίσκουμε $x=1,\ y=2,\ z=3$

Επομένως,

$(x,y,z)=(-1,-2,-3)$ ή $(x,y,z)=(1,2,3)$

Λύση έστειλαν επίσης οι Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο, Χασάπης Γεώργιος – Ρόδος, Χασάπης Γεώργιος – Ρόδος, Κυριαζής Χρήστος - Περιστέρι Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο, Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα και Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη.

Προτεινόμενα Θέματα

465. Να αποδείξετε ότι

$$1\le\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-xz}+\frac{z}{1-xy}\le\frac{9}{8}$$

για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς x, y, z για τους οποίους ισχύει $x+y+z=1$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

466. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma=\beta$ και έστω $AM=\upsilon$ το μήκος του ύψους – διαμέσου- διχοτόμου και $\Gamma\Delta=\delta$ το μήκος της διχοτόμου της γωνίας Γ. Αν ισχύει $\frac{\upsilon}{\delta}=\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

467. Έστω x, y, α πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$x+y=2\alpha-1\ \ \text{και}\ \ x^2+y^2=\alpha^2+2\alpha-3$$

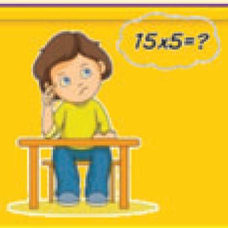
Να βρείτε για ποιες τιμές του α το γινόμενο $x\cdot y$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή του.

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος.

468. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ το σύστημα:

$$\begin{cases}x^2-yz=-5x\ (1)\\ y^2-zx=y\ (2)\\ z^2-xy=-3z\ (3)\end{cases}$$

Σταματιάδης Ευάγγελος – Νέα Ιωνία.



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Παράξενοι αριθμοί

Μοτίβα

Το 16 με το 15

$16=4^2$, $1156=34^2$, $111556=334^2$, $11115556=3334^2$, …….. , $111…1155…556=33…334^2$

Το 1089

1089x2=2178, 10989x2=21978, 109989x2=219978, …….., 1099...9989x2=2199…9978

Οι δυνάμεις

$298=(2^2+9^2+8^2)+(2^2+9^2+8^2)$ $336=(3+3+6)+(3^2+3^2+6^2)+(3^3+3^3+6^3)$

$444=(4+4+4)+(4^2+4^2+4^2)+(4^3+4^3+4^3)+4^3+4^3+4^3)$, $153=1^3+5^3+3^3$

Το μηδέν ανάμεσα

Ανάμεσα στα ψηφία του αριθμού 961 βάζουμε μηδενικά και έχουμε τέλεια τετράγωνα. $961=31^2$, $90601=301^2$, $9006001=3001^2$, $90006001=30001^2$… κ.λ.π.

Ο 2/19

Ξεκινάμε από το τέλος με τον αριθμό 2 και βλέπουμε ότι προς τα αριστερά έχουμε πάντα το διπλάσιο του αριθμού: 2·2=4, 4·2=8, 8·2=16, γράφουμε 6 κρατάμε 1, 6·2=12και 1 ίσον 13 γράφουμε 3 και συνεχίζουμε κάθε φορά επί 2 και έχουμε 105263157894736842 αυτός ο αριθμός είναι η περίοδος 0,105263157894736842 του περιοδικού αριθμού 2/19= 0,105263157894736842.

Ο αριθμός που απαριθμεί τα ψηφία.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Στις 10 θέσεις του παραπάνω σχήματος γράψτε έναν αριθμό με δέκα ψηφία έτσι ώστε, το ψηφίο στην πρώτη θέση να δείχνει τον συνολικό αριθμό των μηδενικών του αριθμού, το ψηφίο στη θέση με την ένδειξη 1 να δείχνει τον συνολικό αριθμό των 1, το ψηφίο στη θέση με την ένδειξη 2 να δείχνει τον συνολικό αριθμό των 2 και ούτω καθεξής, μέχρι που στην τελευταία θέση, να δείχνει τον συνολικό αριθμό των 9 στον αριθμό.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	2	1	0	0	0	1	0	0	0

Τα ψηφία του αριθμού που είναι στη δεύτερη γραμμή δείχνουν πόσα ψηφία σαν αυτό που είναι πάνω τους στην πρώτη γραμμή υπάρχουν σε αυτό τον αριθμό.

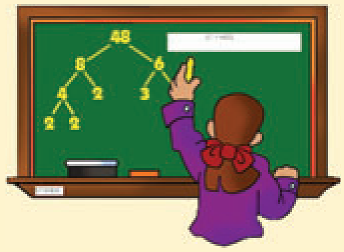
Ο αριθμός 6210001000 είναι μοναδικός. Γιατί αν π.χ. τα μηδενικά ήταν 9 στην $1^η$ θέση θα γράφαμε 9 και στην τελευταία 1 άτοπο γιατί μένουν 8 θέσεις, αν τα μηδενικά ήταν 8 στην $1^η$ θέση θα γράφανε 8 στην $9^η$ θέση γράφουμε 1 και στην δεύτερη θέση επίσης 1 άτοπο γιατί μένουν 7 θέσεις, κ.ο.κ. οπότε αν τα μηδενικά είναι 6 γράφουμε στην πρώτη θέση 6 στην $7^η$ θέση γράφουμε 1 αλλά αν στη $2^η$ θέση γράψουμε

1 θα είναι λάθος γιατί θα γίνουν 2 οι αριθμοί 1, γι’ αυτό στη $2^{η}$ θέση θα βάλουμε 2 και στην $3^{η}$ θέση 1 επομένως ο αριθμός 6210001000 είναι μοναδικός.

Πολλαπλασιασμοί

9876543210·9-2=88888888888
987654321·9 -1=8888888888
98765432·9+0=888888888
9876543·9+1=88888888
987654·9+2=8888888
98765·9+3=888888
9876·9+4=88888
987·9+5=8888
98·9+6=888
9·9+7=88
0·9+8=8

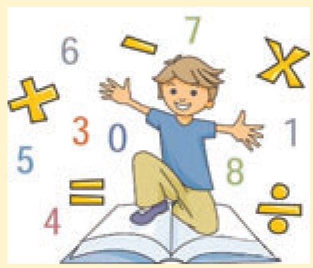
123456789·9+10=1111111111
12345678·9+9=111111111
1234567·9+8 = 1111111
123456·9+7=1111111
12345·9+6=111111
1234·9+5=11111
123·9+4 = 1111
12·9+3=111
1·9+2=11
0·9+1 = 1



Το 6 με 7 και το 4 με 2

6·7=42 66·67=4422 666·667=444222
6666·6667=44442222 66666·66667=4444422222 666666·666667=444444222222
6666666·6666667=44444442222222 66666666·66666667=4444444422222222
666666666-666666667=444444444222222222

Το 12345679·9·1=111111111, ... , 12345679·9·9 = 999999999 .
Το 1:63=0,015873015873015873...
15873·7·1=111111, 15873·7·2=222222, 15873·7·3=333333
15873·7·4=333333, 15873·7·5=555555, 15873·7·6=666666
15873·7·7=777777, 15873·7·8=888888, 15873·7·9=999999



Με 2ψήφιους

$$\frac{11}{2.1}=\frac{22}{2.2}=\frac{33}{2.3}=\frac{44}{2.4}=\frac{55}{2.5}=\frac{66}{2.6}=\frac{77}{2.7}=\frac{88}{2.8}=\frac{99}{2.9}=5{,}5$$

Με 3ψήφιους: $\frac{111}{3.1}=\frac{222}{3.2}=\cdots=\frac{999}{3.9}=37$

Απαντήσεις Γρίφων τεύχους 139

Ο παράξενος αριθμός

Πολλαπλασιάζεις επί 6 και 142857 · 6=857142, δοκίμασε και με άλλα ψηφία.

Ρίζες και τετράγωνα

1 · 2 · 3 · 4+1=25=5^2, 2 · 3 · 4 · 5+1= 121=11^2, ... 6 · 7 · 8 · 9+1=3025=55^2.

Οι φράουλες

Η αρχική ξηρή ουσία ήταν 2% και έγινε 4% άρα το νέο βάρος Φ που έχουν οι φράουλες είναι 0,4·Φ=2 ή Φ=2:0,4=50 κιλά.

- Κανόνας είναι να υπολογίζουμε την ξηρά ουσία και όχι το νερό.
- Ξηρή ουσία = 100% – νερό
- Τύπος: Νέο βάρος=Αρχικό βάρος × παλιά ξηρή **δια** νέα ξηρή ουσία.

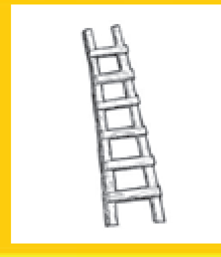
Το Ψωμί

Η αρχική ξηρή ουσία(αλεύρι) ήταν 60% (60 κιλά αλεύρι και 40 κιλά νερό) και έγινε αφού ψήθηκε 70% , το νέο βάρος Ψ είναι 0,70 · Ψ=60 ή Ψ=60:0,70=85,71κιλά.

Τώρα αφού με 60 κιλά αλεύρι κάνει 85,71 κιλά ψωμί, με πόσο αλεύρι κάνει 100 κιλά ψωμί; Χ=60 · 100:85,71=70 κιλά αλεύρι.

Αφού την ημέρα ο αρτοποιός πουλάει 100 κιλά ψωμί εισπράττει, 100 · 2=200€ μείον 70 · 1,5=105€ το αλεύρι, άρα κερδίζει 95€.

αφορμές … και στιγμιότυπα



Egmo 2026 – Bordeaux, Γαλλία

Έγινε πρόσφατα, στο Bordeaux της Γαλλίας, με συμμετοχή **67 χωρών** από όλο τον κόσμο (**41 χώρες** από την Ευρώπη) από **09 – 15 Απριλίου 2026**, η **$15^{η}$ EGMO** η γνωστή Ολυμπιάδα κοριτσιών στα Μαθηματικά. Οι επόμενες διοργανώσεις έχουν προγραμματιστεί να γίνουν το **2027** (στο Sibenik της Κροατίας) και το **2028** (στο Vilnius της **Λιθουανίας**). Μια πολύ καλή προσπάθεια συμμετοχής της Ελληνικής ομάδας, που επέστρεψε με **μία εύφημη μνεία,** σε έναν πολύ απαιτητικό διαγωνισμό, **με ομάδες** άλλων χωρών, που κάνουν συστηματική προετοιμασία πολλών ετών, ειδικά φέτος, με θέματα αυξημένης δυσκολίας. Ένα **αισιόδοξο** αποτέλεσμα για την Ελληνική ομάδα, με ελπιδοφόρα προοπτική για το μέλλον.

Το βραβείο Abel 2026

Η Νορβηγική Ακαδημία Επιστημών και Γραμμάτων **βράβευσε τον Γερμανό Faltings**, για τη συμβολή του στην **αριθμητική γεωμετρία** και ειδικότερα για την ανάπτυξη ισχυρών μεθόδων και την **επίλυση μακροχρόνιων Διοφαντικών εξισώσεων**, όπως εκείνες των **Louis Mordell** και **Serge Lang**. Το έργο του, έχει μεταμορφώσει τον κλάδο, καθώς συνδυάζει τη μελέτη των **αριθμών** με τη **γεωμετρία**. Το 1983 έγινε διεθνώς γνωστός όταν απέδειξε με εντελώς νέες μεθόδους την **εικασία του Mordell**, η οποία αφορούσε το πλήθος των ρητών λύσεων σε ορισμένες πολυωνυμικές εξισώσεις. Η εικασία αυτή, που είχε διατυπωθεί το **1922** και θεωρούνταν εξαιρετικά δύσκολη, αποδείχθηκε τελικά σωστή και έκτοτε είναι γνωστή ως θεώρημα του Faltings. Το αποτέλεσμα αυτό είχε βαθιές συνέπειες για τη μελέτη των Διοφαντικών εξισώσεων και επηρέασε σημαντικά μεταγενέστερες εξελίξεις, όπως η απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του **Fermat** από τον **Andrew Wiles**, στην οποία ο Faltings συμμετείχε στη διαδικασία ελέγχου. Το 1986 είχε τιμηθεί και με το βραβείο Fields Medal. Η ιδέα, πίσω από αυτά τα προβλήματα, έχει **ρίζες** ήδη από την **αρχαιότητα**, με τον **Διόφαντο** της **Αλεξάνδρειας** να μελετά εξισώσεις που σχετίζονται με Πυθαγόρειες τριάδες. Στη σύγχρονη προσέγγιση, η ύπαρξη λύσεων συνδέεται με γεωμετρικές ιδιότητες των εξισώσεων, όπως το γένος μιας αλγεβρικής καμπύλης, δηλαδή τον αριθμό των **«οπών»** της. Όταν το γένος είναι μεγαλύτερο του 1, οι λύσεις δεν είναι άπειρες αλλά πεπερασμένες, γεγονός που εξηγεί και τη σημασία του θεωρήματος του Faltings. Το πρώτο βραβείο Abel είχε απονεμηθεί το 2003 στον Γάλλο **Jan Pierre Serre**.

Το βραβείο Turing 2026

Το λεγόμενο «**Nobel** των Υπολογιστών» απονέμεται φέτος στον Αμερικανό ερευνητή της IBM **Charles Bennet** και τον Καναδό **Gil Brassard** του Πανεπιστημίου του Μόντρεαλ. Όπως ανακοίνωσε η Ένωση Υπολογιστικών Μηχανών (ACM), οι δύο ερευνητές τιμώνται «για τον καθοριστικό τους ρόλο στη θεμελίωση της επιστήμης της **κβαντικής πληροφορίας**».Η αρχή έγινε το 1984, όταν οι δύο ερευνητές επινόησαν ένα πρωτόκολλο επικοινωνίας που βασιζόταν σε ένα κβαντικό **κλειδί κρυπτογράφησης,** το οποίο μοιράζονται μέσω φωτονίων ο αποστολέας και ο αποδέκτης ενός μυστικού μηνύματος.Μια άλλη επιτυχία τους, ήρθε το 1993, όταν ανέπτυξαν την ιδέα της «κβαντικής τηλεμεταφοράς», η οποία δεν έχει καμία σχέση με τη «διακτίνιση» του **Star Trek** αλλά επιτρέπει τη μετάδοση κβαντικών πληροφοριών, από τον ένα κβαντικό υπολογιστή στον άλλο. Σήμερα, οι κβαντικές επικοινωνίες έχουν αρχίσει να βγαίνουν από το εργαστήριο και να χρησιμοποιούνται στην πράξη. Το πεδίο των κβαντικών υπολογιστών εξελίσσεται ταχύτερα και να πούμε επίσης ότι, το **2022** το **Nobel Φυσικής** ήταν για την Κβαντική τηλεμεταφορά και επικοινωνία.