141

Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

# Ευκλείδης Α΄

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2026 ευρώ 3

ΕΛΤΑ Hellenic Post

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1089/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Τάξ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156






## 4 μετάλλια

30th JBMO
Buzău România 2026

**30th JBMO**

Έγινε στην **Ρουμανία**
15 - 20 Ιουνίου 2026





Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
# Ευκλείδης α΄

Τεύχος 141
Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2026
Τιμή Τεύχους 3,00 Εύρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### ✓ Γενικά άρθρα

**Το τέλειο σφάλμα της Υπερπροσαρμογής**
*Γιώργος Ματζουράκης-εργασία του μαθητή μου Δαυίδ Ράδου* 1

### ✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

#### • Α΄ Τάξη

**Το μυστήριο του υπολοίπου**
*Γεωργία Μαρκάτου* ..... 10
**Προβλήματα που μπορούν να λυθούν χωρίς εξίσωση**
*Βαρβάρα Καμπουρίδη* ..... 11

#### • Β΄ Τάξη

**Εξισώσεις και Προβλήματα Εξισώσεων**
*Θανάσης Χριστόπουλος* ..... 15
**Συντεταγμένες στο επίπεδο**
*Νίκος Τζίφας - Γιώργος Λαγός* ..... 19
**Επίλυση εξισώσεων α' βαθμού**
*Τάκης Χρονόπουλος* ..... 23
**Ψηφιακά Escape Rooms**
*Δημήτριος Γάτσιος* ..... 26

### ✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

#### • Γ΄ Τάξη

**Μαθηματικά Εργαλεία για τη Γ' Γυμνασίου**
*Λία Λαγουτάρη, Παντελής Γρυπάρης* ..... 29
**ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**
*Αναστάσιος Κρατημένος, Βηθλεέμ Δέσποινα Ξύδη* ..... 31

### ✓ Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

**Μαθηματικοί Διαγωνισμοί**
*Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών* ..... 36

### ✓ Γενικά άρθρα

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ**
Τα μαθηματικά στη σκηνή της ιστορίας
Διαθεματικό Πρόγραμμα στο Γυμνάσιο Αρμενίου Λάρισας .... 46
**Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν**
*Χριστόπουλος Π. Παναγιώτης* ..... 49

**ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ**

Πανεπιστημίου 34 Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής
Επιμέλεια Έκδοσης: Μαραγκάκης Στυλιανός, Χριστόπουλος Παναγιώτης

**Συντακτική Επιτροπή**

Συντονιστές:
Δρούτσας Παναγιώτης
Χριστόπουλος Παναγιώτης
Κουτσούρης Λέων
Διαμαντίδης Δημήτριος

Μέλη:
Αρδαβάνη Καλλιόπη
Βαρβεράκης Ανδρέας
Βασιλοπούλου Ιωάννα
Γαρμπή Γερασιμούλα
Γεωργιάδου-ΚαμπουρίδηΒαρβάρα
Γκιουλέκα Αλεξάνδρα
Γουρνά Σωτηρία
Γρυπάρης Παντελής
Δημολιού Δήμητρα - Ζωή
Δοργιάκη Ιωάννα
Ζάγκας Κώστας
Ζιώγας Χρήστος
Καλαμπόκα Αθηνά
Καλδή Φωτεινή
Καμπουράκη Αντωνία - Ειρήνη
Καψή Θέμις
Κεΐσογλου Στέφανος
Κισκύρας Χρίστος
Κουστέρης Χρίστος
Κοτσακιλάφη Ειρήνη
Κρατημένος Τάσος
Κυράνας Παναγιώτης
Κυριακοπούλου Αθανασία
Κωστοπούλου Καλλιόπη
Λαγός Γεώργιος
Λαγουτάρη Ευαγγελία
Λυμπερόπουλος Γεώργιος
Μαγουλάς Αντώνιος
Μάλλιαρης Χρήστος
Μαρκάτου Γεωργία
Μπερδούσης Γεώργιος
Ντόρβας Νικόλαος
Παπ/νου - Κωστίδης Δημήτριος
Παππά Μαρία
Πατακάκης Ιωάννης
Πούλιου Χριστίνα
Ρίζος Ιωάννης
Ρουσούλη Μαρία
Σαμπάνης Νίκος
Σιούλας Ιωάννης
Σίσκου Μαρία
Σχίζα Κάτια
Τζίφας Νικόλαος
Τριανταφύλλου Ανδρέας
Τσαπακίδης Γεώργιος
Τσιφάκης Χρήστος
Φερεντίνος Σπύρος
Χριστόπουλος Θανάσης

Συνεργάτες:
Κολοβούρη Ευγενία-Θεοδώρα Φοιτήτρια
Κιουμουρτζή Μαρία Δασκάλα

## Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητά μας παιδιά, Μαθητές και Μαθήτριες

### *Καλή σχολική χρονιά*

Το περιοδικό μας θα είναι ένας καλός σύντροφος στη μελέτη σας.
Οι καθηγητές σας θα σας διδάξουν τα μαθηματικά.
Το περιοδικό με άρθρα από αξιόλογους καθηγητές με πείρα, θα συμπληρώνει τις γνώσεις σας. Επικοινωνήστε με το περιοδικό για κάθε απορία σας ή ιδέα σας.

*Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού*

**Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών**

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

**Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού**

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων.
Α΄ τάξη **Μαρία Παππά, Κάτια Σχίζα, Γεωργία Μαρκάτου, Σωτηρία Γουρνά, Χρήστος Ζιώγας.**
Β΄ τάξη **Ειρήνη Κοτσακιλάφη, Τάσος Κρατημένος, Αντώνης Μαγουλάς, Χρήστος Μάλλιαρης, Χρήστος Κουστέρης.**
Γ΄ τάξη **Θέμις Καψή, Παντελής Γρυπάρης, Θανάσης Χριστόπουλος, Γαρμπή Γερασιμούλα, Ευαγγελία Λαγουτάρη**

**ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ**
**Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:**
**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
**Εκτύπωση:**
**printfair**
**Τηλ.: 2102469799 -2102401695**
**Υπεύθυνος Τυπογραφείου:**
Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

**Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00**

**Ετήσια συνδρομή** (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
**Ετήσια συνδρομή για Σχολεία** 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

# Το τέλειο σφάλμα της Υπερπροσαρμογής (MSE[1] = 0)

## Μία σύγκλιση στα σύνορα Μαθηματικών, Τεχνητής Νοημοσύνης και Επιστημολογίας

**Ματζουράκης Γιώργος**

Καθηγητής Μαθηματικών και Θεωρίας Γνώσης στο σχολείο Campion School Athens.

Σας στέλνω άρθρο του μαθητή μου **Δαυίδ Ράδου**. Ο Δαυίδ είναι ένας πολύ εργατικός και ευφυής μαθητής μου με εξαιρετικό χαρακτήρα. Το άρθρο είναι εργασία του με την επίβλεψή μου.

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

*Γιατί η αποστήθιση περασμένων θεμάτων δεν εγγυάται την επιτυχία στις εξετάσεις; Γιατί το ChatGPT δεν απομνημονεύει όλο το περιεχόμενο του διαδικτύου; Η απάντηση και στις δύο ερωτήσεις είναι ίδια: Υπερπροσαρμογή (overfitting). Είναι η παγίδα του να προσαρμοζόμαστε σε υπάρχοντα δεδομένα με τόσο μεγάλη ακρίβεια, που έχει ως αποτέλεσμα να χάνουμε τα πλεονεκτήματα της γενίκευσης.*

*Το άρθρο εισάγει την έννοια του overfitting μέσα από ένα παράδειγμα πρόβλεψης ημερήσιων θερμοκρασιών, που το αναπτύσσει με τα μαθηματικά του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος, του Θεωρήματος Παρεμβολής Lagrange, της Μεροληψίας (Bias) και της Διακύμανσης (Variance).*

*Στη συνέχεια, συνδέει το overfitting με την εκπαίδευση των Μεγάλων Γλωσσικών Μοντέλων (LLMs), και εξηγεί πως το αποτέλεσμα της μαθηματικής υπερπροσαρμογής στους αλγορίθμους των social media παράγει «βεβαιότητα» χωρίς επιστημονική αλήθεια.*

*Τέλος, η έννοια της υπερπροσαρμογής αποδομείται από τις ιδέες των Popper, Kolmogorov, Kahneman, Descartes και Αριστοτέλη, μέσω των θεμελιωδών εννοιών των Πρώτων Αρχών και της Γενίκευσης.*

*Η προσέγγιση είναι διεπιστημονική, συνθέτοντας έννοιες από τα Μαθηματικά, την Τεχνητή Νοημοσύνη και την Επιστημολογία - Θεωρία της Γνώσης.*

**ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ**

Κάτω από ποιες μαθηματικές συνθήκες ένα υπολογιστικό μοντέλο αποτυγχάνει να γενικεύσει αυτό που έχει *μάθει*; Ποια είναι η θεμελιώδης αρχή που διακρίνει την επιφανειακή προσαρμογή στα δεδομένα από την αληθινή *κατανόηση*, τόσο στη μαθηματική μοντελοποίηση, όσο και στη λειτουργία της Τεχνητής Νοημοσύνης;

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ - Μετά το διαγώνισμα**

«*Μα πως είναι δυνατόν να έγραψα τόσο άσχημα;*» Ο Πάνος δεν μπορούσε να πιστέψει ότι, παρότι είχε διαβάσει για ατελείωτες ώρες, δεν είχε γράψει καλά. Πριν από κάθε διαγώνισμα, διαβάζει μόνο τα θέματα των προηγούμενων εξεταστικών και μαθαίνει όλες τις απαντήσεις άπταιστα. Όταν πέφτουν τα θέματα που έχει διαβάσει, είναι ασταμάτητος. Όταν όμως τα θέματα είναι έστω και λίγο διαφορετικά (που συνήθως είναι), 'την πατάει'.



*Εικ.1: Overfitting σε σπιτάκι σκύλου*

Από την άλλη, έχουμε την συμμαθήτριά του την Ιωάννα. Διαβάζει τις μισές ώρες και ασχολείται με τις μισές ασκήσεις σε σχέση με τον Πάνο. Όταν όμως έχει μια απορία, ψάχνει να βρει το '*γιατί*'.

Στις προπαρασκευαστικές ασκήσεις, τα πάει καλύτερα ο Πάνος, αλλά στα κανονικά διαγωνίσματα η Ιωάννα τον ξεπερνάει. Δεν τους χωρίζει η προσπάθεια που καταβάλλουν, τους χωρίζει μια έννοια που οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες πληροφορικής ονομάζουν **overfitting**[2] (υπερπροσαρμογή) – μια από τις σημαντικότερες ιδέες της Τεχνητής Νοημοσύνης - AI. [1]

Στην γλώσσα των μαθηματικών, ο Πάνος έχει μηδενικό σφάλμα στο σύνολο δεδομένων προετοιμασίας **(training set)**, δηλαδή στα παλιότερα θέματα. Έχει όμως υψηλό σφάλμα στο δοκιμαστικό σύνολο **(test set)**, δηλαδή στην κανονική εξέταση. Αντίθετα, η Ιωάννα τα πάει χειρότερα στο training set, αλλά πολύ καλύτερα στο πραγματικό διαγώνισμα.

Ο Πάνος έχει **απομνημονεύσει**, ενώ η Ιωάννα έχει **γενικεύσει.** Η πολύ σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων αποτελεί το κύριο θέμα αυτού του άρθρου.

Τα επόμενα τέσσερα κεφάλαια του άρθρου παρουσιάζουν ένα παράδειγμα με εικονικά δεδομένα ημερήσιας θερμοκρασίας, ώστε οι μαθηματικές έννοιες που θα αναπτυχθούν να είναι πιο εύκολα κατανοητές.

---

[1] *MSE = Mean Square Error είναι το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα - ΜΤΣ*

[2] *Στο άρθρο χρησιμοποιείται κυρίως η διεθνής αγγλική ορολογία ή, η ελληνική της απόδοση κατά περίπτωση. Η προσέγγιση αυτή κρίθηκε απαραίτητη καθώς η θεματική περιοχή της Τεχνητής Νοημοσύνης βασίζεται εξ' ολοκλήρου στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία.*

## ΤΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ - Θερμοκρασιακές μεταβολές

Ας υποθέσουμε ότι ένας μετεωρολόγος μετράει την θερμοκρασία αέρα 13 φορές κατά την διάρκεια ενός 24ωρου. Ο στόχος είναι να βρει ένα μαθηματικό μοντέλο που προσαρμόζεται καλύτερα στις μετρήσεις του, ώστε στην συνέχεια να υπολογίσει τιμές θερμοκρασίας σε ώρες που δεν έχει μετρήσει πρωτογενώς.

Το ζητούμενο μαθηματικό μοντέλο είναι ένα *πολυώνυμο*[3] *ν-οστού βαθμού* της εξής μορφής:

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + a_{\nu-2}x^{\nu-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (1)$$

Στην εξίσωση (1), το $P(x)$ είναι η προβλεπόμενη θερμοκρασία, το $x$ παρουσιάζει τα δεδομένα εισόδου (ώρες της ημέρας), και οι συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_\nu$ είναι σταθερές που χρησιμοποιούνται για καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα. [3]

Για παράδειγμα, ο συντελεστής $a_0$ είναι ο σταθερός όρος που ανεβάζει ή κατεβάζει όλη την καμπύλη, ο $a_1$ ελέγχει την κλίση (πόσο γρήγορα ανεβαίνει ή κατεβαίνει η καμπύλη), ο $a_2$ ελέγχει την καμπυλότητα (εάν η καμπύλη είναι κυρτή ή κοίλη), και οι λοιποί συντελεστές προσθέτουν ολοένα και πιο λεπτομερείς τοπικές διακυμάνσεις στην καμπύλη. Όπως θα δούμε παρακάτω, η ανεύρεση αυτών των συντελεστών είναι ουσιαστικά η εκπαίδευση του μαθηματικού μοντέλου.

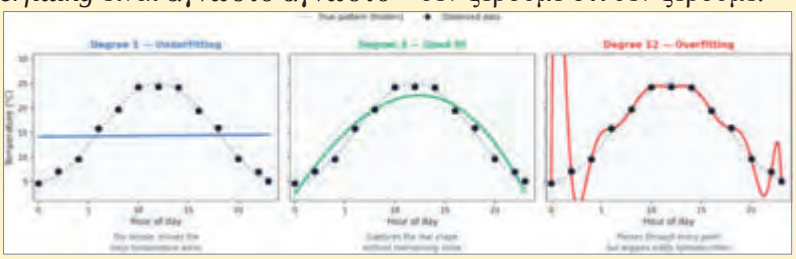
Η **Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων - ΜΕΤ**[4], όπως εξηγείται στο επόμενο κεφάλαιο, μας επιτρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών (σφαλμάτων) μεταξύ των παρατηρούμενων τιμών και των τιμών που προβλέπονται από το μοντέλο.

Ο μετεωρολόγος δοκιμάζει τρία μαθηματικά μοντέλα, οι γραφικές παραστάσεις των οποίων παρουσιάζονται στην *Εικόνα 2*. [2]

- Πολυώνυμο 1ου βαθμού: Μία ευθεία που δεν μπορεί να αποδώσει τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Είναι ένα καλό παράδειγμα **underfitting** (υποπροσαρμογής), το αντίθετο του overfitting και είναι προφανές ότι δεν μπορεί να αποδώσει το κυματοειδές μοτίβο της θερμοκρασίας.
- Πολυώνυμο 3ου βαθμού: Μία κυβική καμπύλη, που αποδίδει την καμπυλόμορφη μεταβολή της θερμοκρασίας αρκετά ικανοποιητικά.
- Πολυώνυμο 12ου βαθμού: Η γραφική παράσταση του πολυωνύμου περνάει από κάθε σημείο μέτρησης. Θα έπρεπε να είναι το πιο κατάλληλο γράφημα συνολικά, όμως δεν είναι. Παρατηρούμε έντονα καμπυλωμένες εξάρσεις μεταξύ σημείων που προβλέπουν παράλογες θερμοκρασίες όπως για παράδειγμα κοντά στην ώρα 01:00[5].
  Όταν το πολυώνυμο κληθεί να προβλέψει θερμοκρασίες εκτός των ωρών μέτρησης, καταρρέει. Είναι ένα καλό παράδειγμα **overfitting**.

Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι τα μοντέλα *underfitting* αποτυγχάνουν σχεδόν πάντα, αλλά το υψηλό σφάλμα αυτών των μοντέλων είναι **προβλέψιμο**. Δηλαδή ξέρουμε ότι το μοντέλο είναι κακό. Τα *overfitted* μοντέλα όμως μπορούν να μας εξαπατήσουν, αφού φαίνονται τέλεια στα γνωστά δεδομένα, αλλά καταρρέουν στα άγνωστα – το σφάλμα τους είναι **απρόβλεπτο**. [3, 4, 5]

Με απλά λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι το *underfitting* είναι **γνωστό άγνωστο** – ξέρουμε τι δεν ξέρουμε, ενώ το *overfitting* είναι **άγνωστο άγνωστο** – δεν ξέρουμε ότι δεν ξέρουμε.




*Εικόνα 2: Τρία πολυώνυμα προσαρμοσμένα στις ίδιες 13 θερμοκρασίες. Κοινά δεδομένα εισόδου, διαφορετικά αποτελέσματα.*

---

[3] *Στο παρόν άρθρο οι λέξεις 'μοντέλο' και 'πολυώνυμο' χρησιμοποιούνται εναλλάξ, αναφερόμενοι ειδικά στο πολυωνυμικό μοντέλο παρεμβολής.*

[4] *Η ΜΕΤ επινοήθηκε ανεξάρτητα από δύο κορυφαίους μαθηματικούς στις αρχές του 19ου αιώνα, με τον Γάλλο Adrien-Marie Legendre να προηγείται στην δημοσίευση (1805), και τον Γερμανό **Carl Friedrich Gauss** να υποστηρίζει ότι την είχε αναπτύξει ήδη από το 1795, αλλά τη δημοσίευσε επίσημα το 1809 στο έργο του "Theoria motus corporum coelestium".*

[5] *Τα πολυώνυμα Lagrange υψηλού βαθμού είναι γνωστά για τις πολύ μεγάλες εξάρσεις τους (σφάλματα), ειδικά στις άκρες του διαστήματος εφαρμογής. Ο Carl Runge ανακάλυψε αυτό το φαινόμενο (1901) μελετώντας την συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ στο διάστημα [-1,1]. Το φαινόμενο Runge είναι ένα κλασικό πρόβλημα της Αριθμητικής Ανάλυσης που εμφανίζεται όταν προσπαθούμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση χρησιμοποιώντας πολυωνυμική παρεμβολή υψηλού βαθμού.*

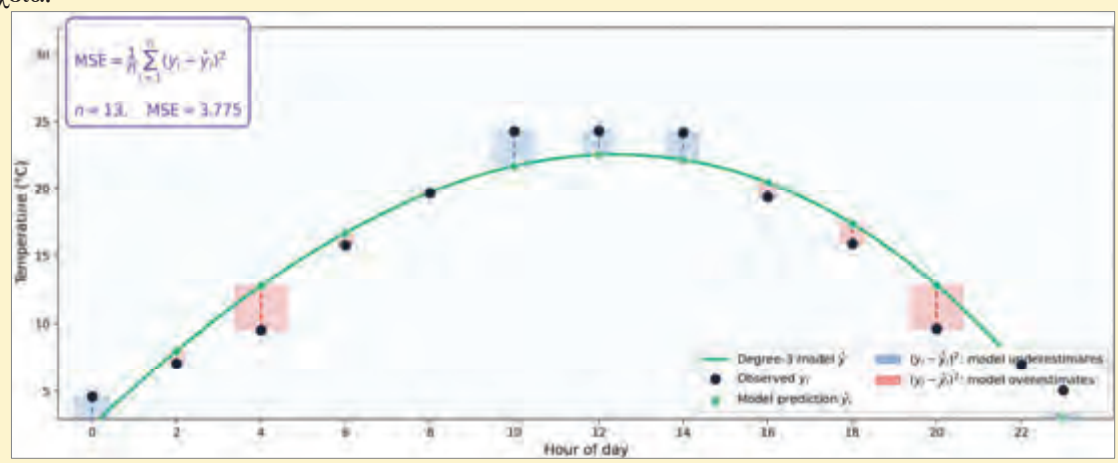
## ΠΟΣΟ ΛΑΘΟΣ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΛΑΘΟΣ - Παρεμβολή Lagrange & MSE

Για να ποσοτικοποιήσουμε πόσο καλά το κάθε μοντέλο προσαρμόζεται στα δεδομένα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα – ΜΤΣ, ή αλλιώς **MSE – Mean Squared Error**. Γενικότερα, για ένα σύνολο δεδομένων $n$, όπου το καθένα έχει μια μετρημένη τιμή $y_i$, και μία προβλεπόμενη από το μοντέλο $\hat{y}_i$, το MSE είναι:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad (2)$$

Κάθε όρος $(y_i - \hat{y}_i)^2$ είναι το τετράγωνο υπολοίπου – της διαφοράς μεταξύ της πραγματικής μέτρησης και της πρόβλεψης (βλέπε *Εικόνα 3*).

Υπάρχουν δύο λόγοι που υψώνουμε τις διαφορές στο τετράγωνο. Ο πρώτος είναι ότι υψώνοντας στο τετράγωνο, εξαλείφουμε το πρόσημο της διαφοράς. Ο δεύτερος λόγος είναι για να δώσουμε περισσότερο βάρος σε σημεία μέτρησης που απέχουν σημαντικά από την τιμή που δίνει η εφαρμογή του πολυωνύμου. Αυτή η μέθοδος – η οποία πρακτικά 'τιμωρεί' το μοντέλο, αφού η διαφορά $\Delta y$ υψώνεται στο τετράγωνο – μας οδηγεί σε μία πιθανή βελτίωση του πολυωνύμου, με τους περιορισμούς που θα αναπτύξουμε στην συνέχεια.




*Εικόνα 3: Τετράγωνα υπολοίπων για το πολυώνυμο 3ου βαθμού. Κάθε τετράγωνο έχει εμβαδό ίσο με το τετράγωνο σφάλματος στο σημείο. Το MSE είναι ο μέσος όρος τους.*

Τι συμβαίνει όμως με το πολυώνυμο 12ου βαθμού;

Όπως έχουμε προαναφέρει, το πολυώνυμο 12ου βαθμού έχει MSE = 0.

Κάθε τετράγωνο υπολοίπου είναι 0. Αυτό δεν είναι σύμπτωση. Είναι μαθηματική βεβαιότητα, αφού το πολυώνυμο σχεδιάστηκε για να κάνει ακριβώς αυτό.

Το 1795, ο Ιταλο-Γάλλος μαθηματικός Joseph-Louis Lagrange διατύπωσε το **Θεώρημα Παρεμβολής Lagrange**, – ένα από τα σημαντικά θεωρήματα της Αριθμητικής Ανάλυσης – σύμφωνα με το οποίο, για οποιαδήποτε σημεία δεδομένων $n$, υπάρχει πάντα ένα μοναδικό πολυώνυμο $n-1$ βαθμού που περνάει ακριβώς από όλα τα σημεία. Δηλαδή που ικανοποιεί την συνθήκη: $L(x_i)=y_i$ για κάθε $i$=1,…,n.



*Εικόνα 4: J.L. Lagrange (1736-1813)*

Στο δικό μας παράδειγμα, με 13 σημεία μέτρησης, το πολυώνυμο 12ου βαθμού έχει 13 συντελεστές (έναν για κάθε σημείο) που λαμβάνουν τιμές ώστε να αφήσουν MSE = 0. Σύμφωνα με τον Lagrange, για κάθε σημείο δεδομένων $i$, θεωρούμε ένα **Πολυώνυμο Βάσης**[6]:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (3)^{7}$$

[6] *Στην εξίσωση (3), ο αριθμητής είναι το γινόμενο των όρων $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, εξαιρώντας τον όρο $(x-x_i)$. Έτσι εξασφαλίζεται ότι το πολυώνυμο θα μηδενιστεί σε όλα τα δεδομένα σημεία $x_j$, εκτός από το $x_i$. Ο παρονομαστής είναι το ίδιο ακριβώς γινόμενο με τον αριθμητή, με την διαφορά ότι στην θέση του x έχει τοποθετηθεί η σταθερή τιμή $x_i$. Έτσι εξασφαλίζεται ότι στο σημείο $x_i$ το αποτέλεσμα θα είναι 1.*

[7] *Το κεφαλαίο **Π** στα μαθηματικά είναι το σύμβολο του γινομένου. Χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει με συντομογραφία το γινόμενο μιας ακολουθίας όρων.*

Αυτό το πολυώνυμο, όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό από την εξίσωση (3), έχει την εξής ιδιότητα: Εάν θέσουμε $x=x_i$, τότε $\ell_i(x_i) = 1$. Εάν θέσουμε οποιοδήποτε άλλο $x_j$ (όπου $j \neq i$), τότε $\ell_i(x_j) = 0$.

Το τελικό πολυώνυμο παρεμβολής είναι το άθροισμα των πολυώνυμων βάσης πολλαπλασιαζόμενων με το αντίστοιχο $y_i$:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ell_i(x) \qquad (4)$$

Η πολυωνυμική παρεμβολή του Lagrange θα έβγαζε MSE=0 για οποιεσδήποτε 13 τιμές θερμοκρασίας – χωρίς να ενδιαφέρεται να καταλάβει εάν υπάρχει κάποιο μοτίβο στα δεδομένα.

Είναι λοιπόν κατανοητό ότι το πολυώνυμο 12ου βαθμού έχει απλώς '**απομνημονεύσει**' κάθε μέτρηση που του έχει δοθεί. Η αξία του στην πρόβλεψη είναι μηδενική.

## ΕΚΠΑΙΔΕΥΟΝΤΑΣ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Μέχρι τώρα είδαμε ότι στο παράδειγμα των θερμοκρασιών, τα πολυώνυμα 1ου βαθμού και 12ου βαθμού έχουν πρακτικά μηδενική αξία, ενώ αντιθέτως το πολυώνυμο 3ου βαθμού λειτουργεί αρκετά ικανοποιητικά. Εύλογα λοιπόν προκύπτει μια σειρά ερωτημάτων:

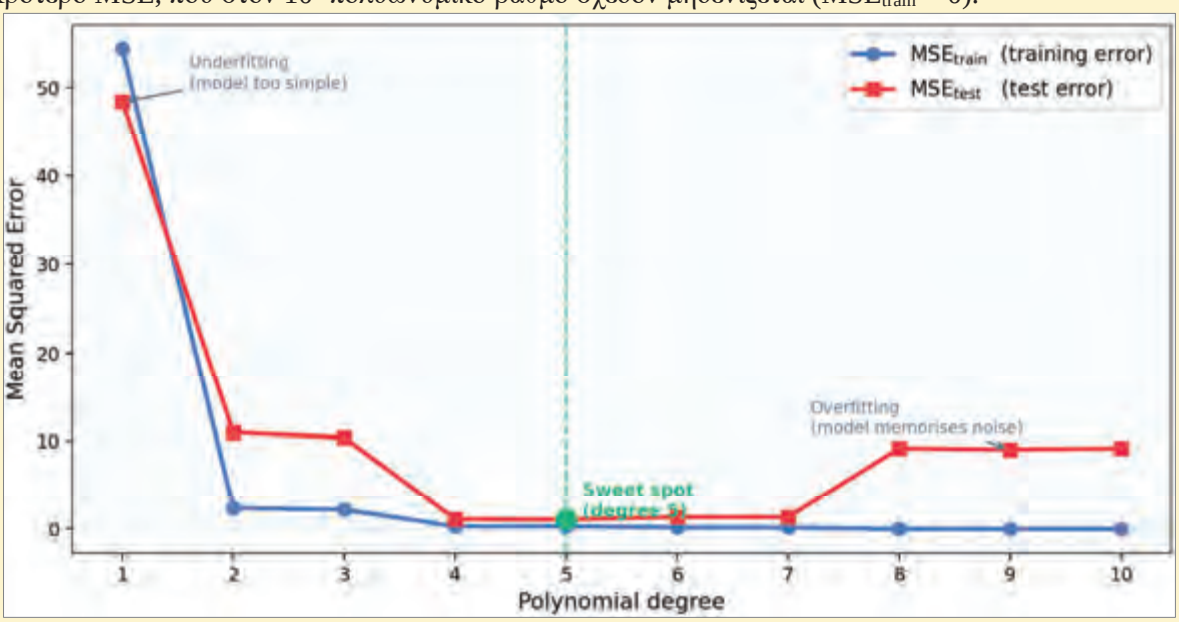
– Μήπως ένα πολυώνυμο 4ου ή 5ου βαθμού λειτουργεί καλύτερα;
– Ποιος βαθμός πολυωνύμου ελαχιστοποιεί το MSE, αλλά ταυτόχρονα εκπαιδεύει καλύτερα το μοντέλο;

Για να προσεγγίσουμε την απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα, θα πρέπει να ελέγξουμε το μοντέλο με καινούργια δεδομένα που δεν έχει ξαναδεί.

Για να το πετύχουμε αυτό μπορούμε να χωρίσουμε τα δεδομένα σε δύο υποσύνολα: στα δεδομένα εκπαίδευσης – **training set**, και στα δεδομένα ελέγχου – **test set**. Από τις 13 μετρήσεις θερμοκρασίας που έχουμε παίρνουμε 10 από αυτές (περίπου το 80%) για να αποτελέσουν το training set, και τις υπόλοιπες 3 τις χρησιμοποιούμε για το test set.

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε δύο διαφορετικές τιμές λάθους: $MSE_{train}$ $vs.$ $MSE_{test}$. [5, 6]

Η *Εικόνα 5*, παρουσιάζει τα MSE για τα δύο υποσύνολα όταν αυξάνουμε τον βαθμό του πολυωνύμου από το 1 στο 10. Από την μπλε γραμμή ($MSE_{train}$), παρατηρούμε πως περισσότεροι παράμετροι σημαίνουν μικρότερο MSE, που στον 10ο πολυωνυμικό βαθμό σχεδόν μηδενίζεται ($MSE_{train} = 0$).




*Εικόνα 5: Όσο ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνει, το $MSE_{train}$ πάντα μειώνεται (μπλε). Αντιθέτως, το $MSE_{test}$ φτάνει σε μια χαμηλή τιμή, πριν αρχίσει να ανεβαίνει.*

Αντιθέτως, παρατηρούμε μια διαφορετική συμπεριφορά στην κόκκινη γραμμή ($MSE_{test}$). Σε χαμηλούς βαθμούς πολυωνύμου, το $MSE_{test}$ είναι πολύ ψηλά. Όσο ο βαθμός όμως ανεβαίνει, το $MSE_{test}$ πέφτει, και στον 4ο ή 5ο βαθμό φτάνει στο ελάχιστό του σημείο. Στην συνέχεια όμως, όσο ανεβαίνει ο βαθμός πολυωνύμου, το $MSE_{test}$ αρχίζει να ανεβαίνει και αυτό. Αυτή η απόκλιση είναι χαρακτηριστική του *overfitting*. Για παράδειγμα, για πολυώνυμα 8ου βαθμού και πάνω:

$$MSE_{train} \approx 0 \; αλλά \; MSE_{test} \gg 0. \qquad (5)^{8}$$

[8] *≈ σημαίνει: προσεγγιστικά ίσο με. ≫ σημαίνει πολύ μεγαλύτερο από.*

Συμπερασματικά λοιπόν διαπιστώνουμε από το παράδειγμά μας ότι: Ένα μοντέλο με $MSE_{train}=0$ έχει **απομνημονεύσει**, ενώ ένα μοντέλο με χαμηλό $MSE_{test}$ έχει **κατανοήσει** και δίνει αξία στην πρόβλεψη.

## BIAS & VARIANCE - Γιατί τα μοντέλα αποτυγχάνουν

Κάθε αποτυχία ενός μαθηματικού μοντέλου εξηγείται με δύο έννοιες, την Μεροληψία – **Bias** και την Διακύμανση – **Variance**.

Το **Bias** είναι το σφάλμα που προκύπτει από ένα υπεραπλουστευμένο μοντέλο. Ας γυρίσουμε πίσω στην ευθεία 1ου πολυωνυμικού βαθμού στην *Εικόνα 2*. Το μοντέλο υποθέτει ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται γραμμικά. Αυτή η υπόθεση είναι προφανώς λανθασμένη, αφού καμία ποσότητα δεδομένων δεν μπορεί να βοηθήσει στην διόρθωσή της – το μοντέλο είναι από μόνο του ανίκανο να αποδώσει την καμπυλόμορφη κατανομή των θερμοκρασιών.

Συνοπτικά, θα λέγαμε ότι το *bias* μετρά την απόκλιση μεταξύ της μέσης πρόβλεψης του μοντέλου και της πραγματικής τιμής:

$$Bias^2 = \left(\bar{\hat{y}} - y\right)^2 \qquad (6)$$

Όπου $\bar{\hat{y}}$ είναι η μέση πρόβλεψη του μοντέλου από πολλά διαφορετικά *training sets* και $y$ είναι η πραγματική τιμή. Ένα μοντέλο με υψηλό bias κάνει **σταθερά το ίδιο λάθος**. Αυτό είναι το **underfitting**.

Το **Variance** από την άλλη, είναι ένα σφάλμα που προκύπτει από ένα πολύ 'ευαίσθητο' μοντέλο, όπως για παράδειγμα το πολυώνυμο 12ου βαθμού στην *Εικόνα 2*, που προσπαθεί να περάσει από κάθε σημείο.

Εάν επαναλάβουμε το πείραμα μία διαφορετική ημέρα, με μικρές αλλαγές στις μετρήσεις, η ευθεία 1ου βαθμού δεν θα άλλαζε σχεδόν καθόλου, ενώ αντιθέτως, η καμπύλη 12ου βαθμού θα έμοιαζε εντελώς διαφορετική. Το variance, μετρά ακριβώς αυτή την αστάθεια:

$$Variance = \mathbb{E}\left[\left(\hat{y} - \bar{\hat{y}}\right)^2\right] \qquad (7)^{9}$$

Ένα μοντέλο με υψηλό variance δεν κάνει σταθερά λάθη, κάνει **απρόβλεπτα λάθη**. Αυτό είναι το **overfitting**.

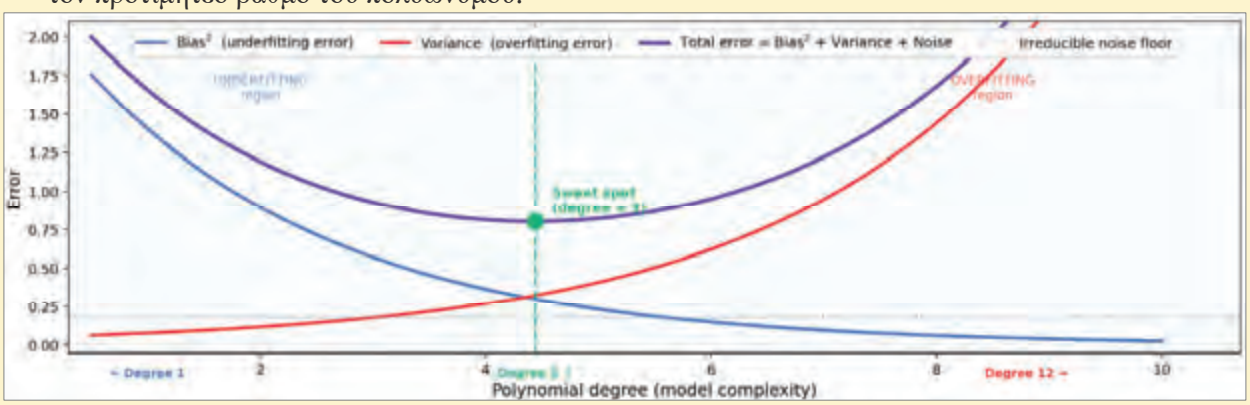
Οι δύο τύποι σφαλμάτων συνδέονται με μια ταυτότητα, η οποία δίνει το συνολικό σφάλμα πρόβλεψης κάθε μοντέλου και αναλύεται ως εξής:

$$Total\ Error = Bias^2 + Variance + Noise \qquad (8)^{10}$$

Η εξίσωση (8) στην βιβλιογραφία ονομάζεται **Bias-Variance Tradeoff** (Αντιστάθμιση Μεροληψίας – Διακύμανσης) και είναι μία από τις βασικές εξισώσεις της μηχανικής μάθησης – **machine learning**. Η απόδειξη της εξίσωσης (8) παρουσιάζεται στο Παράρτημα. [7, 8]

Η γραφική απεικόνιση της εξίσωσης παρουσιάζεται στην *Εικόνα 6* στην οποία παρατηρούμε ότι:

- Όσο ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνει, το *bias* μικραίνει και τείνει να μηδενιστεί, ενώ αντίστροφα το *variance* αυξάνεται.
- Το total error είναι καμπύλη μορφής U, όπου το κατώτατο σημείο της είναι το σημείο που καταδεικνύει τον προτιμητέο βαθμό του πολυωνύμου.




*Εικόνα 6: Bias - Variance Tradeoff. Παρουσιάζονται οι δύο κατηγορίες σφαλμάτων, το συνολικό σφάλμα και το sweet spot που πρακτικά δείχνει τον ιδανικό πολυωνυμικό βαθμό του μοντέλου (βλ. σχετικά και την Εικόνα 5).*

---

[9] *Το σύμβολο $\mathbb{E}$ ονομάζεται **expected value** (μαθηματική προσδοκία) και εκφράζει την μέση αναμενόμενη τιμή σε πολλές επαναλήψεις σετ μετρήσεων. Με άλλα λόγια εκφράζει τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων του μοντέλου, μετρώντας πόσο «νευρικές» είναι οι προβλέψεις του απέναντι σε μικρές διακυμάνσεις των δεδομένων.*

[10] *Το Noise αναφέρεται στον μη αναγώγιμο θόρυβο – **Irreducible Noise**, που είναι το σφάλμα που κανένα μοντέλο δεν μπορεί να εξαλείψει. Στο παράδειγμά μας, ακόμη και το πιο πλήρες μοντέλο αδυνατεί να προβλέψει την ακριβή θερμοκρασία, αφού για παράδειγμα η σκιά ενός σύννεφου μπορεί να την επηρεάσει απρόβλεπτα. Με άλλα λόγια είναι το κατώτατο όριο κάθε πρόβλεψης.*

Στην πράξη, όσο αυξάνεται η πολυπλοκότητα του μοντέλου, η μείωση του bias συνοδεύεται συνήθως από αύξηση του variance, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.

## Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα (LLMs) - Μορφότυπα, όχι Αντίγραφα

Το GPT-3 είχε περίπου 175 δις παραμέτρους. Πολύ υπεραπλουστευμένα μπορούμε να τις σκεφτούμε σαν τους συντελεστές του πολυωνύμου του παραδείγματός μας[11]. Το training set αποτελούνταν περίπου από 300 δις ***tokens***[12].

Είναι προφανές ότι 175 δις παράμετροι δεν μπορούν να αποθηκεύσουν 300 δις *tokens*. Αυτό που μπορούν να κάνουν όμως είναι να ενσωματώσουν την στατιστική δομή της γλώσσας, όπως για παράδειγμα: ποιες λέξεις ακολουθούν μετά από κάποιες άλλες, ποιο είναι το γνωστικό περιβάλλον, και ποια είναι τα θέματα ενδιαφέροντος. [8]

Οι παράμετροι ενσωματώνουν όχι τα ακριβή αντίγραφα των κειμένων που υπάρχουν στις πηγές του διαδικτύου, αλλά τους κανόνες που γενούν τις προτάσεις (τα μορφότυπα). Όπως ακριβώς και η Ιωάννα, που δεν απομνημονεύει θέματα προηγούμενων διαγωνισμών, αλλά προσπαθεί να καταλάβει την λογική που κρύβεται από πίσω.

Παρόλα αυτά, ένα μοντέλο με 175 δις παραμέτρους υπερπροσαρμόζει. Για να λύσουν αυτό το πρόβλημα, οι μαθηματικοί και μηχανικοί του ChatGPT χρησιμοποίησαν τρία εργαλεία:

- **Regularisation** (κανονικοποίηση / ομαλοποίηση). Κατά την διάρκεια της εκπαίδευσης του το μοντέλο ‘τιμωρείται’ όχι μόνο όταν κάνει σφάλματα στις προβλέψεις, αλλά και όταν στηρίζεται πάρα πολύ σε ένα συγκεκριμένο μοτίβο. Με απλά λόγια, είναι σαν τον καθηγητή που λέει στους μαθητές του «*θα χάσετε βαθμούς εάν η απάντησή σας είναι μεγαλύτερη από μία σελίδα.*» Αυτή η προτροπή του καθηγητή υποχρεώνει τον μαθητή να βρει την ουσία της απάντησης, αντί να γράψει ότι έχει αποστηθίσει.
- **Test set (**Validation set**)**. Με το test set, παρακολουθείται η γενίκευση κατά την διάρκεια της εκπαίδευσης του μοντέλου. Όταν το $MSE_{train}$ μειώνεται, και ταυτόχρονα το $MSE_{test}$ αυξάνεται, τότε έχει αρχίσει το overfitting.
- **Early stopping**. Η εκπαίδευση του μοντέλου σταματάει όταν το $MSE_{test}$ φτάσει στην ελάχιστη τιμή.

## Εντροπία[13], Σήμα και Θόρυβος – Τι πραγματικά μαθαίνουν τα LLMs

Η **εντροπία** είναι μια έννοια από τη φυσική που ο Αμερικανός μαθηματικός **Claude Shannon** δανείστηκε για να περιγράψει πόσο απρόβλεπτο είναι ένα μήνυμα, στο θεμελιώδες έργο του για την επιστήμη της Πληροφορίας: *A Mathematical Theory of Communication (1948).* [11]

Ο Shannon διέκρινε το **σήμα**, την πραγματική πληροφορία που θέλεις να μεταδώσεις, από τον **θόρυβο,** δηλαδή τις τυχαίες διακυμάνσεις που δεν σημαίνουν τίποτα. Ένα *overfitted* μοντέλο δεν καταφέρνει να κάνει αυτή τη διάκριση: μεταχειρίζεται τον θόρυβο σαν να ήταν σήμα, και τον αποθηκεύει με τον ίδιο τρόπο.

Αυτό συνδέεται άμεσα με τα LLMs. Το ChatGPT εκπαιδεύεται να βρίσκει τη **χαμηλή εντροπία μέσα στα δεδομένα**, δηλαδή τη βαθύτερη δομή της γλώσσας πίσω από εκατοντάδες δισεκατομμύρια λέξεις. Αν υπερπροσαρμοστεί, αποθηκεύει και τον θόρυβο, δηλαδή τις τυχαίες, μη επαναλαμβανόμενες λεπτομέρειες και χάνει τη γενική δομή.

## Overfitting & Context Drift - Το κρυφό πρόβλημα των LLMs

Υπάρχει μια λιγότερο γνωστή μορφή *overfitting* που εμφανίζεται κατά τη χρήση των *LLMs* σε μακρές συνομιλίες (*long chats*) που κάνουν οι χρήστες των μοντέλων της Τεχνητής Νοημοσύνης. Τα μοντέλα αυτά δεν ‘θυμούνται’ με την ανθρώπινη έννοια, αλλά διαβάζουν ολόκληρο το ιστορικό του *chat* κάθε φορά που παράγουν μια απάντηση. Όταν το chat γίνεται πολύ μεγάλο, συμβαίνουν τρία πράγματα:

- Πρώτον, τα πρώτα μηνύματα και οι αρχικές οδηγίες, λαμβάνουν ολοένα λιγότερη ‘προσοχή’ και σταδιακά ‘ξεχνιούνται’.

---

[11] *Τα γλωσσικά μοντέλα LLMs δεν χρησιμοποιούν πολυώνυμα - αυτό είναι μια απλοποίηση του άρθρου. Τα LLMs βασίζονται στη* ***Γραμμική Άλγεβρα****: οι παράμετροί τους είναι στοιχεία πινάκων βαρών (weight matrices) υψηλών διαστάσεων. Κάθε token μετατρέπεται σε* ***διάνυσμα*** *(vector) εκατοντάδων ή χιλιάδων διαστάσεων, και η εκπαίδευση του μοντέλου συνίσταται στη βελτιστοποίηση εκατοντάδων τέτοιων πινάκων μέσω πράξεων πολλαπλασιασμού και μετασχηματισμού.*

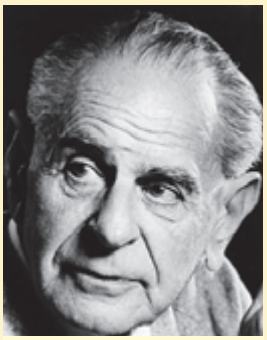
[12] *Token είναι η βασική μονάδα κειμένου που επεξεργάζεται ένα γλωσσικό μοντέλο. Μπορεί να είναι ένας χαρακτήρας, τμήμα λέξης, ή ολόκληρη λέξη. Κατά μέσο όρο, ένα token αντιστοιχεί στα τρία τέταρτα μιας αγγλικής λέξης.*

[13] *Η εντροπία παρότι είναι μία έννοια που ο Shannon δανείστηκε από την Φυσική, μετράει την μέση αβεβαιότητα μιας πηγής πληροφορίας. Όσο πιο απρόβλεπτα είναι τα δεδομένα, τόσο υψηλότερη η εντροπία τους. Για παράδειγμα εάν ήδη ξέρεις τι θα πει κάποιος, το μήνυμά του έχει χαμηλή εντροπία, δηλαδή λίγη πραγματική πληροφορία. Αν δεν έχεις ιδέα τι θα πει, έχει υψηλή εντροπία, πολλή πληροφορία.*

– Δεύτερον, αν το μοντέλο έκανε ένα λάθος στη μέση της συνομιλίας, αυτό το λάθος εισέρχεται στο τρέχον περιεχόμενο (context) και **ανατροφοδοτεί** τις επόμενες απαντήσεις, δηλαδή κάνει κυριολεκτικά *overfitting* στον θόρυβο-σφάλμα της συνομιλίας.
– Τρίτον, το μοντέλο προσαρμόζεται σταδιακά στο πιο πρόσφατο τμήμα της συνομιλίας, χάνοντας τη 'μεγάλη εικόνα'. Αυτό ονομάζεται **context drift**.

Η λύση στο πρόβλημα; Νέο chat για κάθε νέα ενότητα, επανάληψη των βασικών οδηγιών, και κριτική αξιολόγηση των απαντήσεων. Το *test set* σε αυτή την περίπτωση είναι η κρίση του ίδιου του χρήστη.

## ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΥ ΕΞΗΓΕΙ ΤΑ ΠΑΝΤΑ, ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΚΑΤΑΝΟΗΣΕΙ ΤΙΠΟΤΑ

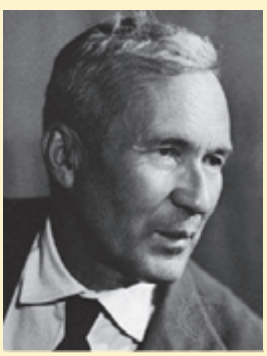


*Εικόνα 7: Karl Popper (1902-1994)*

Τον 14ο αιώνα, ο **William του Ockham** υποστήριξε ότι «*όταν δύο εξηγήσεις ταιριάζουν εξίσου καλά στα ίδια δεδομένα, πρέπει να προτιμούμε την απλούστερη, αυτή που έχει τις λιγότερες παραδοχές*». Αυτή η ρήση είναι γνωστή σαν το **Occam's razor** (ξυράφι του Occam), το οποίο 'ξυρίζει' όλες τις άχρηστες λεπτομέρειες ή παραδοχές από μία θεωρία.

Ο **Karl Popper** το 1934 υποστήριξε ότι μια καλή θεωρία δεν είναι αυτή που εξηγεί τα πάντα – είναι αυτή που αποκλείει κάτι. Με απλά λόγια, μια θεωρία συμβατή με κάθε παρατήρηση δεν ρισκάρει τίποτε, δεν δεσμεύεται σε τίποτε, και δεν μας διδάσκει τίποτε. Το ονόμασε **falsifiability** – διαψευσιμότητα, που σημαίνει ότι μια θεωρία αποκτά επιστημονική αξιοπιστία κάνοντας προβλέψεις, που θα πρέπει να μπορούν να αποδειχθούν λανθασμένες – εάν είναι λανθασμένες. Το πολυώνυμο 12ου βαθμού του παραδείγματός μας προσαρμόζεται πάντα και απόλυτα σε οποιεσδήποτε 13 μετρήσεις από τον σχεδιασμό του. Είναι **αδιάψευστο**. [9]

Την δεκαετία του 1960, ο μεγάλος μαθηματικός και ένας από τους θεμελιωτές της Θεωρίας της Αλγοριθμικής Πληροφορίας **Andrey Kolmogorov** έθεσε μια φαινομενικά απλή ερώτηση: «*υπάρχει αντικειμενικός τρόπος να μετρήσουμε πόσο περίπλοκο είναι ένα σύνολο δεδομένων;*» Η απάντησή του ήταν κομψή: όρισε την πολυπλοκότητα ενός συνόλου δεδομένων ως το μήκος του **συντομότερου προγράμματος** που το παράγει. Εάν το εφαρμόσουμε αυτό στο παράδειγμά μας, η ημερήσια θερμοκρασία ακολουθεί μία ημιτονοειδή μορφή που περιγράφεται από λίγες παραμέτρους. Αντίθετα για να αναπαράγουμε το πολυώνυμο 12ου βαθμού χρειαζόμαστε 13 συντελεστές, με υψηλή πολυπλοκότητα Kolmogorov. [10]



*Εικόνα 8: Andrey Kolmogorov (1903-1987)*

Ο διάσημος ψυχολόγος και κάτοχος Νόμπελ Οικονομικών το 2002 **Daniel Kahneman**, απέδειξε ότι η ανθρώπινη κρίση υποφέρει από τα ίδια προβλήματα που πραγματεύεται το άρθρο μας. Στο επιδραστικό βιβλίο του *Thinking Fast and Slow* (2011), διακρίνει δύο τρόπους σκέψης. Το **Σύστημα 1**, που είναι γρήγορο και διαισθητικό. Είναι ουσιαστικά ένα μοντέλο υψηλής διακύμανσης που υπερπροσαρμόζεται σε παραστάσεις και το αποκαλεί 'ένστικτο'. Το **Σύστημα 2**, που είναι αργό, αναλυτικό και συνειδητό, και που εφαρμόζει *κανονικοποίηση*, και *ρύθμιση* στις αντιδράσεις του Συστήματος 1. [12]

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε: Τι είναι αυτό που συνδέει έναν Άγγλο μοναχό του μεσαίωνα, έναν Αυστριακό φιλόσοφο, έναν Σοβιετικό μαθηματικό και έναν Ισραηλινό ψυχολόγο; Κανένας τους δεν είχε γράψει ούτε μία γραμμή από κώδικα, κανένας τους δεν είχε προσαρμόσει πολυώνυμα σε μετρήσεις θερμοκρασίας, κανένας τους δεν είχε εκπαιδεύσει νευρωνικά δίκτυα[14]. Και όμως, ο καθένας δουλεύοντας ανεξάρτητα, στην δική του επιστήμη και στην δική του εποχή, κατέληξε στο ίδιο συμπέρασμα.

4 στοχαστές, 7 αιώνες, 1 ιδέα: **Ένα μοντέλο που εξηγεί τα πάντα δεν έχει κατανοήσει τίποτα**.

## OVERFITTING ΠΕΡΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΗ – Βεβαιότητα χωρίς Επιστημονική Αλήθεια

Μέχρι τώρα μιλήσαμε για *overfitting* σε πολυώνυμα και νευρωνικά δίκτυα. Αλλά η ίδια παγίδα, η μη σωστή αντιστάθμιση Bias και Variance, εμφανίζεται παντού γύρω μας. Ας δούμε τι συμβαίνει όταν οι αλγόριθμοι και τα μοντέλα υπερπροσαρμόζουν εσκεμμένα.

### Θεωρίες συνωμοσίας

Φανταστείτε κάποιον που πιστεύει ότι η Γη είναι επίπεδη. Του δείχνετε φωτογραφίες από διαστημικές

[14] *Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι υπολογιστικά μοντέλα μηχανικής μάθησης, εμπνευσμένα από τη δομή του ανθρώπινου εγκεφάλου. Αποτελούνται από διασυνδεδεμένους κόμβους (τεχνητούς νευρώνες), και επεξεργάζονται δεδομένα για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων (π.χ. αναγνώριση προτύπων), μαθαίνοντας να βελτιώνουν τις αποφάσεις τους μέσα από την εμπειρία και τα λάθη τους.*

αποστολές. Απαντά: *«οι φωτογραφίες είναι ψεύτικες, τις έφτιαξε η NASA»*. Του δείχνετε μαθηματικές αποδείξεις. *«Τα μαθηματικά είναι λανθασμένα»*. Του δείχνετε τον καμπυλωμένο ορίζοντα στην ανοιχτή θάλασσα. *«Αυτό είναι ψευδαίσθηση λόγω της ατμόσφαιρας»*.

Το νοητικό του μοντέλο έχει τόσο *Variance* — τόση ευελιξία να ενσωματώνει κάθε νέο αντίθετο δεδομένο ως επιπλέον παράμετρο — ώστε να προσαρμόζεται τέλεια σε οτιδήποτε. Έχει $MSE_{train}=0$. Η δομή σχηματισμού του νοητικού του μοντέλου είναι πάντα η ίδια. Ξεκινά με μια απλή αφήγηση, δηλαδή με χαμηλό βαθμό πολυωνύμου. Όταν εμφανίζονται **αντιφατικά δεδομένα**, αντί να απορρίψει την θεωρία, **προσθέτει νέες παραμέτρους** στο πολυώνυμο, νέους 'ενόχους', νέα στρώματα της συνωμοσίας. Ο πολυωνυμικός βαθμός ανεβαίνει και βεβαίως δεν τον ενδιαφέρει καθόλου ότι το μοντέλο του είναι αδιάψευστο κατά *Popper* και επομένως άχρηστο επιστημονικά. Δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι η επιστημονική εξήγηση έχει χαμηλή πολυπλοκότητα *Kolmogorov*, ότι είναι δηλαδή ένα λιτό πρόγραμμα: *«η Γη είναι σφαιρική γιατί η βαρύτητα δρα ισότροπα»*.

## Social media - Αλγοριθμική μυωπία - Ο αλγόριθμος ως μηχανή Overfitting

Οι αλγόριθμοι του *TikTok*, του *YouTube* και του *Instagram* εκπαιδεύονται να μεγιστοποιούν την αλληλεπίδραση (engagement) με τον χρήστη. Αυτό είναι το training set τους. Το test set, δηλαδή η μακροπρόθεσμη ευημερία του χρήστη, και η ποιότητα του δημόσιου διαλόγου δεν μετριέται ποτέ. Το αποτέλεσμα είναι το υψηλό variance**,** αφού ο αλγόριθμος προσαρμόζεται υπερβολικά στις στιγμιαίες προτιμήσεις κάθε χρήστη δημιουργώντας θαλάμους ηχούς (**echo chambers)**, δηλαδή ο χρήστης λαμβάνει πάντα το ίδιο είδος περιεχομένου, στερούμενος κάθε αντίθετης άποψης.

Όπως ο Πάνος, που μελετά αποκλειστικά προηγούμενα θέματα, ο αλγόριθμος σταματά να σου δείχνει νέες πληροφορίες. Δείχνει μόνο αυτές για τις οποίες έχει εκπαιδευτεί ότι θα αντιδράσεις. Το αποτέλεσμα: **Ο κόσμος σου να γίνεται ολοένα πιο μικρός και ολοένα πιο βέβαιος**. Η σύνδεση με τον Kahneman είναι προφανής: ο αλγόριθμος τροφοδοτεί αποκλειστικά το Σύστημα 1, το οποίο έχει υψηλό *variance*, είναι γρήγορο και συναισθηματικό, παρακάμπτοντας το Σύστημα 2, δηλαδή την κανονικοποίηση και ρύθμιση μέσω του προμετωπιαίου εγκεφάλου.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: *αἱ ἀρχαί*

Το overfitting δεν είναι μόνο ένα πρόβλημα των μαθηματικών και της πληροφορικής. Είναι ο τρόπος με τον οποίο ο σύγχρονος κόσμος παράγει **βεβαιότητα χωρίς αλήθεια,** εμπιστευόμενος μόνο το ανατροφοδοτούμενο training set.

Ο Πάνος απομνημόνευσε μόνο παλιά θέματα και είχε τέλεια βαθμολογία στο *training set*. Η Ιωάννα κατανόησε το *γιατί* και κέρδισε στο πραγματικό διαγώνισμα.

Ο μετεωρολόγος δοκίμασε μια σειρά από μοντέλα στις μετρήσεις του. Ο Lagrange του εγγυήθηκε το *MSE=0*, αλλά το *bias* και το *variance* του μοντέλου του τον βεβαίωσαν ότι αυτό δεν είναι η λύση.

Ο Ockham, ο Popper, ο Kolmogorov και ο Kahneman είπαν το ίδιο πράγμα: η τέλεια προσαρμογή στα ήδη υπάρχοντα δεδομένα δεν είναι κατανόηση – είναι απουσία κατανόησης.

Οι παραπάνω στοχαστές περιέγραψαν την παγίδα της υπερπροσαρμογής από διαφορετικές οπτικές, αλλά ήταν ο Γάλλος φιλόσοφος **René Descartes** στο έργο του *Discours de la méthode (1637), που* αντί να αναρωτηθεί «*πότε ένα μοντέλο είναι πολύ περίπλοκο;*», αναρωτήθηκε «*ποιο είναι το ελάχιστο από όπου πρέπει κάποιος να ξεκινήσει;*» [13]

Ο Descartes πρότεινε να αμφισβητούμε τα πάντα μέχρι να φτάσουμε στις *αναγώγιμες πρώτες αρχές*, και μόνο από εκεί να οικοδομούμε προς τα πάνω. Ονόμασε την μέθοδό του **Πρώτες Αρχές** (**First Principles**), στα γαλλικά *Premiers Principes*. Μια ονομασία, ένας ορισμός, που φυσικά δεν μπορεί να αποδώσει το πρωτότυπο, γιατί ο Descartes, παρόλη την ευφυία του, μετέφραζε από τα αρχαία ελληνικά:



***«ἡ δι' ἐλαττόνων ἄρα κρειττων, εἴπερ ὁμοίως γνώριμοι αἱ ἀρχαί.»***

*«Η απόδειξη διά λιγοτέρων αρχών είναι ανώτερη, εφόσον οι αρχές αυτές είναι γνωστές.»*

*Αριστοτέλης, Ἀναλυτικὰ Ὕστερα, 350 π.Χ. [14]*

Το πραγματικό ερώτημα δεν είναι εάν το μοντέλο μας είναι τέλειο. Είναι εάν έχει μάθει κάτι αληθινό.
Την απάντηση οι μαθηματικοί την έχουν ονομάσει **γενίκευση**.
Ο Αριστοτέλης την είχε ονομάσει ***σοφία***.

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ - ΔΗΛΩΣΗ ΧΡΗΣΗΣ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ


– Ευχαριστώ τους καθηγητές μου για την εποικοδομητική κριτική στις πρώιμες εκδοχές του άρθρου.
– Όλα τα διαγράμματα του παρόντος άρθρου σχεδιάστηκαν με την βοήθεια του AI agent Claude Opus 4.6 Extended (Anthropic, 2026), το οποίο συνέβαλε στην συγγραφή κώδικα Python / matplotlib για την διαμόρφωση τους, υπό τις λεπτομερείς οδηγίες του συγγραφέα.


## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – Μαθηματική θεμελίωση της Αντιστάθμισης Μεροληψίας - Διακύμανσης

Θεώρημα: $Συνολικό\ Σφάλμα = Μεροληψία^2 + Διακύμανση + Μη\ Αναγώγιμος\ Θόρυβος$

$$Συνολικό\ Σφάλμα = \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\hat{y} - \bar{\hat{y}}\right)^2\right]}_{Διακύμανση} + \underbrace{\left(\bar{\hat{y}} - f(x)\right)^2}_{Μεροληψία^2} + \underbrace{\sigma^2}_{Μη\ Αναγώγιμος\ Θόρυβος}$$

Ορισμοί: Έστω $f(x)$ η άγνωστη συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε και $\hat{y}$ η πρόβλεψη του μοντέλου μας. Κάθε παρατήρηση $y$ περιέχει μη αναγώγιμο θόρυβο $\varepsilon$: $y = f(x) + \varepsilon$, όπου $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ επειδή ο θόρυβος είναι τυχαίος, με μέση τιμή 0, και $\mathbb{E}[\varepsilon^2] = \sigma^2$ (σταθερή διακύμανση θορύβου).
Ορίζουμε επίσης: $\bar{\hat{y}} = \mathbb{E}[\hat{y}]$, σαν την μέση πρόβλεψη του μοντέλου σε πολλά διαφορετικά σύνολα εκπαίδευσης.
Απόδειξη: Ξεκινάμε από τον ορισμό του Variance: $=\mathbb{E}[(\hat{y} - y)^2]$. Αντικαθιστούμε $y = f(x) + \varepsilon$: $= \mathbb{E}[(\hat{y} - f(x) - \varepsilon)^2]$. Προσθέτουμε και αφαιρούμε $\bar{\hat{y}}$ για να διαχωρίσουμε τους όρους: $= \mathbb{E}\left[\left(\left(\hat{y} - \bar{\hat{y}}\right) + \left(\bar{\hat{y}} - f(x)\right) - \varepsilon\right)^2\right]$

Θέτουμε για συντομία:
– $A = \hat{y} - \bar{\hat{y}}$ : απόκλιση πρόβλεψης από την μέση της
– $B = \bar{\hat{y}} - f(x)$ : μέση απόκλιση από την αληθινή τιμή
– $C = \varepsilon$ : μη αναγώγιμος θόρυβος

Άρα: $Συνολικό\ Σφάλμα = \mathbb{E}[(A + B - C)^2]$
Αναπτύσσουμε: $= \mathbb{E}[A^2] + \mathbb{E}[B^2] + \mathbb{E}[C^2] + 2\mathbb{E}[AB] - 2\mathbb{E}[AC] - 2\mathbb{E}[BC]$
Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες της μαθηματικής προσδοκίας:
– $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}\left[\hat{y} - \bar{\hat{y}}\right] = 0$ , ο όρος $2\mathbb{E}[AB]$ **μηδενίζεται**
– $\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ , ο όρος $2\mathbb{E}[BC]$ **μηδενίζεται**
– $\mathbb{E}[AC] = \mathbb{E}\left[\left(\hat{y} - \bar{\hat{y}}\right)\varepsilon\right] = 0$ επειδή ο θόρυβος είναι ανεξάρτητος από το μοντέλο, ο όρος $2\mathbb{E}[AC]$ **μηδενίζεται**
– $O\ B^2 = \left(\bar{\hat{y}} - f(x)\right)^2$ είναι σταθερός, άρα $\mathbb{E}[B^2] = B^2$

Απομένουν τρεις όροι: $Συνολικό\ Σφάλμα = \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\hat{y} - \bar{\hat{y}}\right)^2\right]}_{Διακύμανση} + \underbrace{\left(\bar{\hat{y}} - f(x)\right)^2}_{Μεροληψία^2} + \underbrace{\sigma^2}_{Μη\ Αναγώγιμος\ Θόρυβος}$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


[1] Malato, G. (2021). An example of overfitting and how to avoid it.
[2] Your Data Teacher Blog. Retrieved April 2026, from https://www.yourdatateacher.com/2021/04/12/an-example-of-overfitting-and-how-to-avoid-it/
[3] Hastie, T., Tibshirani, R. & Friedman, J. (2009). The Elements of Statistical Learning (2nd ed.). Springer.
[4] James, G., Witten, D., Hastie, T. & Tibshirani, R. (2013). An Introduction to Statistical Learning. Springer.
[5] Ghojogh, B. & Crowley, M. (2023). The Theory Behind Overfitting, Cross Validation, Regularization, Bagging, and Boosting. arXiv:1905.12787v2.
[6] Stat 20 — Introduction to Probability and Statistics (2025). Overfitting. University of California, Berkeley. Retrieved April 2026, from https://stat20.berkeley.edu/fall-2025/5-prediction/03-overfitting/tutorial.html
[7] Bishop, C.M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.
[8] Goodfellow, I., Bengio, Y. & Courville, A. (2016). Deep Learning. MIT Press.
[9] Popper, K. (1959). The Logic of Scientific Discovery. Hutchinson.
[10] Kolmogorov, A.N. (1965). Three approaches to the quantitative definition of information. Problems of Information Transmission, 1(1), 1-7.
[11] Shannon, C.E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal, 27(3), 379–423.
[12] Kahneman, D. (2011). Thinking, Fast and Slow. Farrar, Straus and Giroux.
[13] Descartes, R. (1637). Discours de la Méthode. Leiden: Jan Maire. Αγγλική μετάφραση: Discourse on the Method (1968). Μετάφραση F.E. Sutcliffe. London: Penguin Classics.
[14] Aristotle (350 BC). Posterior Analytics. Book I, Chapter 25, 86a.

Α΄ Τάξη

# Το μυστήριο του υπολοίπου

**Γεωργία Μαρκάτου**

***Η Ευκλείδεια Διαίρεση αλλιώς…..***

47 σοκολατάκια, 6 παιδιά και ένα μικρό πρόβλημα…

Ας πούμε ότι έχεις 47 σοκολατάκια και θέλεις να τα βάλεις σε κουτάκια που χωράνε 6 .

Φτιάχνεις 7 γεμάτα κουτάκια και σου μένουν 5 σοκολατάκια.

Χωρίς να το καταλάβεις, μόλις έκανες Ευκλείδεια Διαίρεση!

$$47 = 6 \times 7 + 5$$

## Η υπόθεση του υπολοίπου

Η Ευκλείδεια Διαίρεση μοιάζει λίγο με… μαθηματικό ντετέκτιβ. Κάθε φορά προσπαθούμε να απαντήσουμε σε δύο ερωτήσεις: πόσες ολόκληρες φορές χωράει ένας αριθμός μέσα σε έναν άλλο και τι περισσεύει στο τέλος;

Οι μαθηματικοί το γράφουν: $\Delta = \delta \times \pi + \upsilon$

Δ είναι ο διαιρετέος, δ ο διαιρέτης, π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο.

Ο ***βασικός κανόνας*** είναι: $0 \leq \upsilon < \delta$. Δηλαδή το υπόλοιπο είναι πάντα μικρότερο από τον διαιρέτη.

## Ένα ταξίδι 100 ημερών

Ας υποθέσουμε ότι σήμερα είναι Δευτέρα. Ποια ημέρα θα είναι μετά από 100 ημέρες;

Σκεφτόμαστε ότι η εβδομάδα επαναλαμβάνεται κάθε 7 ημέρες, άρα:

$$\mathbf{100 = 7 \times 14 + 2}$$

Οι **98** ημέρες είναι ακριβώς **14 εβδομάδες**, οπότε **επιστρέφουμε στη Δευτέρα**. ‘Ετσι όμως μένουν 2 ημέρες: Τρίτη και Τετάρτη. Άρα, μετά από 100 ημέρες θα είναι Τετάρτη. **Την απάντηση μάς την έδωσε το υπόλοιπο 2.**

## Το….κόλπο με το τελευταίο ψηφίο

Ας πάρουμε τον αριθμό 583. Έχουμε $583 = 10 \times 58 + 3$. Το υπόλοιπο είναι 3. Για τον αριθμό 1.247 έχουμε $1.247 = 10 \times 124 + 7$, άρα το υπόλοιπο είναι 7.

*Συμπέρασμα*: όταν διαιρούμε έναν φυσικό αριθμό με το 10, **το υπόλοιπο είναι πάντα το τελευταίο ψηφίο** του. Δεν είναι μαγικό κόλπο· είναι η Ευκλείδεια Διαίρεση που δουλεύει στο παρασκήνιο.

## Δοκίμασε και εσύ: μπορείς χωρίς κάθετη διαίρεση;

**Ένας αριθμός, όταν διαιρεθεί με το 5, αφήνει υπόλοιπο 3.** Ποιος από τους παρακάτω θα μπορούσε να είναι;

| Α | Β | Γ | Δ |
|---|---|---|---|
| 35 | 43 | 50 | 62 |

**Σκέψου τα πολλαπλάσια του 5.**

## 1000 καραμέλες

Ένα εργοστάσιο έχει 1.000 καραμέλες και βάζει 24 σε κάθε κουτί. Πόσα γεμάτα κουτιά μπορεί να φτιάξει και πόσες καραμέλες θα περισσέψουν;

$$\mathbf{1.000 = 24 \times 41 + 16}$$

Άρα φτιάχνει 41 γεμάτα κουτιά και περισσεύουν 16 καραμέλες.

## Ήξερες ότι;

Η ιδέα της διαίρεσης με υπόλοιπο συνδέεται με τον Ευκλείδη, έναν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Η ίδια βασική ιδέα εμφανίζεται αργότερα στη διαιρετότητα, στον μέγιστο κοινό διαιρέτη, στους αλγόριθμους και στην Πληροφορική!

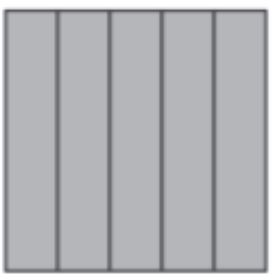
Η Ευκλείδεια Διαίρεση δεν είναι απλώς ένας τύπος για αποστήθιση. Είναι ένας τρόπος να βρίσκουμε πόσες ίσες ομάδες μπορούμε να σχηματίσουμε, τι περισσεύει και πώς λειτουργούν επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Την επόμενη φορά που θα δεις $\mathbf{\Delta = \delta \times \pi + \upsilon}$, σκέψου δύο ερωτήσεις: **Πόσα χωράνε; Και τι μένει στο τέλος;**

Α΄ Τάξη

# Προβλήματα που μπορούν να λυθούν χωρίς εξίσωση, με μία εξίσωση ή με δύο εξισώσεις που γίνονται μία

**Βαρβάρα Καμπουρίδη**

*Τα παρακάτω προβλήματα μπορούν να λυθούν με διάφορους τρόπους που, πολλές φορές, είναι ο ίδιος τρόπος εκφρασμένος με διαφορετικά μέσα. Στόχος είναι μελετώντας τα να τον αναγνωρίζετε κάθε φορά. Ένας άλλος στόχος είναι να δημιουργήσετε τα δικά σας προβλήματα που να μπορούν να λυθούν στο ίδιο πνεύμα με τα παρακάτω προβλήματα.*



**1.** Το τετράγωνο αποτελείται από 5 ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που το καθένα έχει περίμετρο 48 μονάδες μήκους (μον.μ.). Πόσες μον.μ. είναι η περίμετρος του τετραγώνου και πόσες μονάδες εμβαδού (μον.ε.) το εμβαδόν του;

### *Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με δύο εξισώσεις (1)*

Από την πρόταση «το καθένα έχει περίμετρο 48 μον.μ.» κατασκευάζουμε την πρώτη εξίσωση με δύο αγνώστους. Ονομάζουμε χ το μήκος (που είναι και η πλευρά του τετραγώνου) και ψ το πλάτος του ορθογωνίου.

Η περίμετρος του κάθε ορθογωνίου εκφράζεται από την εξίσωση 2χ+2ψ=48 μον.μ.(1)

Παρατηρούμε ότι η πλευρά χ του τετραγώνου είναι ίση με 5 φορές την πλευρά ψ του ορθογωνίου, δηλαδή χ=5ψ (2). Αυτή είναι η δεύτερη εξίσωση.

Η (2) είναι το κλειδί που θα ξεκλειδώσει την (1). Πώς;

Αντικαθιστώ στην (1) τον χ με 5ψ. Η (1) γίνεται 2•5ψ+2ψ=48→ 12ψ=48,

Ψ=4 Επομένως η πλευρά του τετραγώνου είναι χ=5ψ=5•4=20 μον.μ.

*Περίμετρος τετραγώνου* 4•20=80 μον.μ.
*Εμβαδόν τετραγώνου* 20•20=400 μον.ε.

### *Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με μία εξίσωση (2)*

Ονομάζω χ την πλευρά του τετραγώνου. Επειδή η μία πλευρά χ είναι χωρισμένη σε 5 ίσα τμήματα, το κάθε τμήμα είναι χ/5. Από την πρόταση «το καθένα έχει περίμετρο 48 μον.μ.» που ισχύει για τα ορθογώνια που έχουμε χωρίσει το τετράγωνο, κατασκευάζουμε την εξίσωση:

$2\chi + 2\frac{\chi}{5} = 48$

$2\chi + 2\frac{\chi}{5} = 48$, $5\cdot 2\chi + 2\chi = 5\cdot 48$, $12\chi = 240$, άρα $\chi = 20$ μον.μ.

*Περίμετρος τετραγώνου* 4•20=80 μον.μ.
*Εμβαδόν τετραγώνου* 20•20=400 μον.ε.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα χωρίς εξίσωση (3)*

Το κάθε ορθογώνιο έχει μία πλευρά την πλευρά του τετραγώνου (ας το πούμε μήκος) και την άλλη πλευρά (ας την πούμε πλάτος) το 1/5 της πλευράς του τετραγώνου ή αλλιώς το μήκος είναι 5 φορές το πλάτος. Άρα, η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 2x5+2x1= 12 και 48:12=4
Η κάθε πλευρά του τετραγώνου είναι 5x4=20 μον.μ.
*Περίμετρος τετραγώνου* 4•20=80 μον.μ.
*Εμβαδόν τετραγώνου* 20•20=400 μον.ε.

**1.** Το Ωδείο Παγκανίνι οργάνωσε παρακολούθηση ενός κονσέρτου για παιδιά και γονείς. Το εισιτήριο για τα παιδιά κόστισε 12 ευρώ και για τους γονείς 20 ευρώ. Οι συμμετέχοντες, παιδιά και γονείς, ήταν 36 και πλήρωσαν 552 ευρώ. Πόσα ήταν τα παιδιά;

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με δύο εξισώσεις (1)*

Για να απαντήσω στο ερώτημα του προβλήματος, ονομάζω χ τον αριθμό των παιδιών και ψ τον αριθμό των γονέων.
Από την πρόταση «Οι συμμετέχοντες, παιδιά και γονείς, ήταν 36…» κατασκευάζω την εξίσωση χ+ψ=36 (1)
Από τις προτάσεις «Το εισιτήριο για τα παιδιά κόστισε 12 ευρώ και για τους γονείς 20 ευρώ» και «Οι συμμετέχοντες, παιδιά και γονείς… πλήρωσαν 552 ευρώ» προκύπτει
12χ + 20ψ=552 (2)
Η (1) θα ξεκλειδώσει τη (2). Από την (1) έχω χ=36-ψ και αντικαθιστώ την τιμή του χ στην (2)
12(36-ψ) +20ψ=552, 432 -12ψ+20ψ=552, 8ψ=552-432, 8ψ=120, ψ=120:8, ψ=15
Από την (1) χ+15=36, χ=36-15, χ=21
Επομένως, τα παιδιά ήταν 21.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με μία εξίσωση (2)*

Μπορώ να ονομάσω χ τον αριθμό των παιδιών και, από την πρόταση «Οι συμμετέχοντες, παιδιά και γονείς, ήταν 36…», να θεωρήσω 36-χ τον αριθμό των γονέων.
Οπότε η (2) γράφεται απευθείας:
12χ+20(36-χ)=552, 12χ+720-20χ=552, 720-552=20χ-12χ, 168=8χ, χ=21
Επομένως, τα παιδιά ήταν 21.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα χωρίς εξίσωση (3)*

Αν υποθέσουμε ότι και οι 36 συμμετέχοντες ήταν γονείς. Τότε θα πλήρωναν 36x20=720 ευρώ. Η διαφορά 720-552 =168 ευρώ οφείλεται στη διαφορά της τιμής του εισιτηρίου γονέων-παιδιών, 20-12=8 ευρώ. Διαιρώντας 168:8 =21 βρίσκουμε τον αριθμό των παιδιών.

**2.** Οι γονείς της Μαρίνας έχουν κατάστημα ποδηλάτων, παιδικών με τρεις ρόδες και εφηβικών με δυο ρόδες. Κάθε ποδήλατο έχει δύο πεντάλ. Η Μαρίνα μέτρησε 100 πεντάλ για όλα τα ποδήλατα και 128 ρόδες. Πόσα ήταν τα παιδικά ποδήλατα;

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με δύο εξισώσεις (1)*

Για να απαντήσω στο ερώτημα του προβλήματος, ξεκινώ από τις προτάσεις: «Κάθε ποδήλατο έχει δύο πεντάλ. Η Μαρίνα μέτρησε 100 πεντάλ για όλα τα ποδήλατα» και συμπεραίνω ότι όλα τα ποδήλατα είναι 50. Ονομάζω χ τον αριθμό των παιδικών και ψ τον αριθμό των εφηβικών ποδηλάτων και κατασκευάζω την εξίσωση χ+ψ=50 (1).
Από το δεδομένο «128 ρόδες» κατασκευάζω την εξίσωση: 3χ+2ψ=128 (2)
Από την (1) χ=50-ψ και αντικαθιστώ την τιμή του χ στην (2)
3(50-ψ) +2ψ=128, 150-3ψ+2ψ=128, 150-128=3ψ-2ψ, ψ=22 τα ποδήλατα των εφήβων και
50-22=28 τα παιδικά ποδήλατα.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με μία εξίσωση (2)*

Ονομάζω χ τον αριθμό των παιδικών ποδηλάτων, άρα 50-χ είναι ο αριθμός των ποδηλάτων για έφηβους.
Άρα, 3χ+2(50-χ)=128, 3χ +100 -2χ=128, χ=28 παιδικά ποδήλατα.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα χωρίς εξίσωση (3)*

Ας υποθέσουμε ότι και τα 50 ποδήλατα ήταν εφηβικά. Τότε 2x50=100 ρόδες, άρα 128-100=28 είναι τα παιδικά ποδήλατα.

**3.** Ο Γιώργος αποφάσισε να ξοδέψει το χαρτζιλίκι που του έδωσαν η γιαγιά και ο παππούς για τη βοήθεια που τους προσέφερε το καλοκαίρι. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε τα μισά από τα χρήματά του και ακόμη 22 ευρώ. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε το 1/3 από τα χρήματα που είχαν μείνει και ακόμη 22 ευρώ. Δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Πόσα χρήματα ήταν το χαρτζιλίκι του;

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με μία εξίσωση (1)*

Ας ονομάσουμε χ το χαρτζιλίκι. Από την πρόταση «Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε τα μισά από τα χρήματά του», δηλαδή τα χ/2 και ακόμη 22 ευρώ, σχηματίζουμε την έκφραση για το πόσα χρήματα του έμειναν. Του έμειναν $\chi-\frac{\chi}{2}-22$ ευρώ, άρα $\frac{\chi}{2}-22$ (1).
Κατόπιν «στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε το 1/3 από τα χρήματα που είχαν μείνει…» που σημαίνει ξόδεψε $\frac{\frac{\chi}{2}-22}{3}$ (2) και ακόμη 22 ευρώ.
Από την πρόταση «Δεν του έμειναν καθόλου χρήματα» και με την αξιοποίηση της (1) και της (2) κατασκευάζουμε την εξίσωση: $\frac{\chi}{2}-22-\frac{\frac{\chi}{2}-22}{3}-22=0$ (3)
Απλοποιούμε το σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{\chi}{2}-22}{3}=\frac{\chi-2\cdot 22}{6}=\frac{\chi-44}{6}$
Και η (3) γίνεται

$\frac{\chi}{2}-22-\frac{\chi-44}{6}-22=0$, $\frac{3\chi}{6}-\frac{\chi-44}{6}-44=0$, $3\chi-\chi+44-44\cdot 6=0$, $2\chi=5\cdot 44$, $\chi=5\cdot 22$, $\chi=110$ ευρώ.

χ=110 ευρώ ήταν το χαρτζιλίκι του Γιώργου.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα χωρίς εξίσωση(2)*

Θα εργαστούμε ξεκινώντας από την δράση του Γιώργου στο δεύτερο κατάστημα, όπου ξόδεψε όλα τα υπόλοιπα χρήματά του.

| Αρχικό ποσό | Ποσό που δαπανήθηκε 1/3 | Ποσό που έμεινε 2/3 | Ποσό που δαπανήθηκε | Τελικό ποσό |
|---|---|---|---|---|
| | | | 22 ευρώ | 0 ευρώ |

Στο δεύτερο κατάστημα ο Γιώργος δαπάνησε το 1/3 των χρημάτων του και του έμειναν τα 2/3. Μετά ξόδεψε και άλλα 22. Άρα τα 2/3 του ποσού που είχε όταν μπήκε στο κατάστημα θα ήταν 22 ευρώ. Άρα το 1/3 θα ήταν 22:2=11 ευρώ και το ποσό που είχε όταν μπήκε στο δεύτερο κατάστημα θα ήταν 22+11=33 ευρώ. Αυτό μπορεί να συμπληρωθεί στην πρώτη στήλη του παραπάνω πίνακα. Στον επόμενο πίνακα αποτυπώνουμε τη δράση του Γιώργου στο πρώτο κατάστημα.

| Αρχικό ποσό | Ποσό που δαπανήθηκε 1/2 | Ποσό που έμεινε ½ | Ποσό που δαπανήθηκε | Τελικό ποσό |
|---|---|---|---|---|
| | | | 22 ευρώ | 33 ευρώ |

Ο Γιώργος είχε 33 ευρώ όταν έφυγε από το πρώτο κατάστημα. Στο πρώτο κατάστημα είχε ξοδέψει 22 ευρώ και προσθέτοντας τα 33 ευρώ, βρίσκουμε ότι 22+33=55 ευρώ είχε πριν δαπανήσει τα 22 ευρώ. Αλλά τα 55 ευρώ είναι το ½ του αρχικού ποσού. Άρα, το χαρτζιλίκι του ήταν 110 ευρώ.

**4.** Ένα δοχείο γεμάτο νερό ζυγίζει 20 κιλά. Εάν χύσουμε το μισό νερό, το δοχείο με το υπόλοιπο νερό ζυγίζει 11,5 κιλά. Πόσο ζυγίζει το δοχείο άδειο;

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με δύο εξισώσεις (1)*

Για να απαντήσουμε στην ερώτηση του προβλήματος ονομάζουμε χ το βάρος του δοχείου και ψ το βάρος του νερού που χωράει.

Από την πρόταση «Ένα δοχείο γεμάτο νερό ζυγίζει 20 κιλά» κατασκευάζουμε την εξίσωση:

$$\chi+\psi=20 \ (1).$$

Από τη επόμενη πρόταση «Εάν χύσουμε…11,5 κιλά» $\chi+\frac{\psi}{2}=11,5$ (2)

Από την (1) ψ=20-χ η (2) γίνεται $\chi+\frac{20-\chi}{2}=11,5$, $\frac{\chi}{2}+10=11,5$, $\chi+20=23$ χ=3 κιλά ζυγίζει το δοχείο.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα με μία εξίσωση (2)*

Αν χ το βάρος του δοχείου, τότε, από την πρώτη πρόταση του προβλήματος, το βάρος του νερού αρχικά είναι 20-χ. Άρα το νερό που χύνεται είναι $\frac{20-\chi}{2}$. Από τη δεύτερη πρόταση του προβλήματος προκύπτει $\chi+\frac{20-\chi}{2}=11$, $5\frac{\chi}{2}+10=11,5$, $\chi+20=23$, χ=3 κιλά ζυγίζει το δοχείο άδειο.

*Στρατηγική -λύση-αποτελέσματα χωρίς εξίσωση (3)*

Το νερό που χύθηκε ζύγιζε 20-11,5=8,5 κιλά. Αλλά αυτό ήταν το μισό του αρχικού, οπότε αρχικά το νερό ζύγιζε 2x8,5=17 κιλά. Άρα το δοχείο άδειο ζυγίζει 20-17=3 κιλά. (*Ευχαριστώ τον συνάδελφο Χρήστο Μπατέλη για τη βοήθεια).*

Β΄ Τάξη

# Εξισώσεις και Προβλήματα Εξισώσεων

Θανάσης Χριστόπουλος

**Μια απαραίτητη γνώση, πριν πάμε στις εξισώσεις, είναι η επιμεριστική ιδιότητα η οποία βοηθάει να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με ένα άθροισμα ή διαφορά. Ας την γνωρίσουμε.**

**α·(β+γ) = α·β+α·γ**

**παραδείγματα:**

i) $4(3x+2)=12x+8$

ii) $5(3-2x)=15-10x$

iii) $-2(3x-1)=-6x+2$

**Άσκηση 1η**

**Να λύσετε τις εξισώσεις:**

**i.** $3(x-2)-5(2x-1)=3x-(4x+7)$

**ii.** $0{,}05x-\frac{3}{5}=0{,}2-0{,}3x$

**iii.** $\frac{3-2x}{5}+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{5}(x-4)=6-(-x+1)$

**Λύση**

**i.** $3(x-2)-5(2x-1)=3x-(4x+7)$ **ή**

$3x-6-10x+5=3x-4x-7$ **ή**

$3x-10x-3x+4x=-7+6-5$ **ή**

$-6x=-6$ **άρα x=1**

**ii.** $0{,}05x-\frac{3}{5}=0{,}2-0{,}3x$ , αφού γράψουμε το κλάσμα σαν δεκαδικό, παρατηρούμε ότι για να γίνουν όλοι οι αριθμοί ακέραιοι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το 100, οπότε $5x-60=20-30x$ **ή** $5x+30x=20+60$ **ή 35x=80 ή**

$x=\frac{80}{35}$ **άρα** $x=\frac{80:5}{35:5}=\frac{16}{7}$

**iii.** $10\cdot\frac{3-2x}{5}+10\cdot\frac{x-1}{2}-10\cdot\frac{1}{5}(x-4)=10\cdot 6-10(-x+1)$ **ή**

$2(3-2x)+5(x-1)-2(x-4)=60-10(-x+1)$

**ή** $6-4x+5x-5-2x+8=60+10x-10$

**ή** $-4x+5x-2x-10x=60-10-6+5-8$

**ή** $-11x=41$ **άρα** $x=-\frac{41}{11}$

**Άσκηση 2η**

**Να λύσετε τις εξισώσεις:**

**i)** $\frac{5-x}{3}-\frac{3x-2}{4}+x-1=\frac{x}{2}$

**ii)** $\frac{3(x-2)}{5}-\frac{4-2x}{3}=\frac{4}{15}(1-4x)$

**iii)** $3-2\frac{2x-3}{3}-\frac{x}{6}=\frac{1}{2}(1-5\frac{x-1}{3})$

**iv)** $\frac{2(3x-4)}{3}-\frac{2-x}{2}=2-\frac{2x-1}{6}$

**Λύση**

**i)** Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το ΕΚΠ των παρονομαστών, οπότε:

$12\cdot\frac{5-x}{3}-12\cdot\frac{3x-2}{4}+12\cdot(x-1)=12\cdot\frac{x}{2}$ ή

$4\cdot(5-x)-3\cdot(3x-2)+12(x-1)=6\cdot x$ ή

$20-4x-9x+6+12x-12=6x$ ή

$-4x-9x+12x-6x=-20-6+12$ ή

$-7x=-14$ **άρα x=2**

**ii)** $15\cdot\frac{3(x-2)}{5}-15\cdot\frac{4-2x}{3}=15\cdot\frac{4}{15}(1-4x)$

ή $9(x-2)-5(4-2x)=4(1-4x)$

ή $9x-18-20+10x=4-16x$

ή $9x+10x+16x=4+18+20$

ή $35x=42$ **άρα** $x=\frac{42}{35}$ ή $x=\frac{6}{5}$

**iii)** $3-2\frac{2x-3}{3}-\frac{x}{6}=\frac{1}{2}(1-5\frac{x-1}{3})$ ή

$3-2\frac{2x-3}{3}-\frac{x}{6}=\frac{1}{2}-5\frac{x-1}{6}$ ΕΚΠ=6

άρα $6\cdot 3-6\cdot 2\frac{2x-3}{3}-6\cdot\frac{x}{6}=6\cdot\frac{1}{2}-6\cdot 5\frac{x-1}{6}$ ή

$18-4(2x-3)-x=3-5(x-1)$ ή

$18-8x+12-x=3-5x+5$ ή

$-4x=-22$ **άρα** $x=\frac{11}{2}$

**iv)** $\frac{2(3x-4)}{3}-\frac{2+x}{2}=2+\frac{1+2x}{6}$, **ΕΚΠ=6**

$6\cdot\frac{2(3x-4)}{3}-6\frac{2+x}{2}=6\cdot 2+6\cdot\frac{1+2x}{6}$, **ή**

**$4(3x-4)-3(2+x)=12+(1+2x)$ ή**

**$12x-16-6-3x=12+1+2x$ ή**

**$12x-3x-2x=16+6+12+1$ ή $7x=35$**

**Και τελικά $x=\frac{35}{7}$ άρα $x=5$**

**Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε πως τα βασικά βήματα για τη λύση μιας εξίσωσης είναι:**

1. **Βλέπουμε αν έχουμε κλάσματα, αν έχουμε, βλέπουμε αν είναι απλά, διαφορετικά αν είναι σύνθετα τα μετατρέπουμε σε απλά.**
2. **Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών, οπότε απλοποιούμε όλους τους παρονομαστές.**
3. **Καθαρογράφουμε βάζοντας παρένθεση στη θέση της γραμμής του κάθε κλάσματος.**
4. **Εκτελούμε τις επιμεριστικές ιδιότητες με αποτέλεσμα να μην έχουμε πλέον παρενθέσεις.**
5. **Χωρίζουμε άγνωστους από γνωστούς**
6. **Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις στα δύο μέλη οπότε η εξίσωση παίρνει τελική μορφή: $\alpha x=\beta$**
7. **Αν $\alpha\neq 0$ τότε** $x=\frac{\beta}{\alpha}$

- **Αν η εξίσωση πάρει μορφή $0x=0$ τότε έχει άπειρες λύσεις και συγκεκριμένα, κάθε αριθμός, είναι λύση της εξίσωσης, η οποία εξίσωση ονομάζεται ΑΟΡΙΣΤΗ εξίσωση.**
- **Αν η εξίσωση πάρει μορφή $0x=\beta$ (όπου $\beta\neq 0$) τότε δεν έχει λύση και η εξίσωση ονομάζεται ΑΔΥΝΑΤΗ εξίσωση.**

## Προβλήματα που θα τα λύσουμε με τη βοήθεια εξισώσεων.

Ας δούμε ένα πρόβλημα και αν μπορούμε να το λύσουμε με τη βοήθεια εξίσωσης. Βέβαια το δύσκολο στην περίπτωση αυτή είναι να δημιουργήσουμε την εξίσωση!

**Πρόβλημα 1ο: Ο Αχιλλέας αγόρασε ένα μολύβι, ένα τετράδιο και ένα βιβλίο και έδωσε συνολικά 15€. Αν για το τετράδιο έδωσε διπλάσια χρήματα από το μολύβι και για το βιβλίο 6 € περισσότερα από το τριπλάσιο, που έδωσε για το μολύβι. Πόσα Ευρώ άξιζε το Βιβλίο.**

### Λύση

[Πόσα Ευρώ άξιζε το Βιβλίο] το πρώτο πράγμα που εντοπίζουμε είναι ποιο είναι το ζητούμενο.

Πόσα Ευρώ άξιζε το Βιβλίο; Στο πρόβλημα όμως έχουμε τρία αντικείμενα:

[ένα μολύβι, ένα τετράδιο και ένα βιβλίο]

Η αξία όμως του τετραδίου και του βιβλίου αναφέρονται στο μολύβι. Γι' αυτό θα θέσουμε: **x, την αξία του μολυβιού,** οπότε

**Το τετράδιο αξίζει**: **2x αφού** [για το τετράδιο έδωσε διπλάσια χρήματα από το μολύβι]

**Το βιβλίο αξίζει**: **3x+6**

**αφού** [για το βιβλίο έδωσε 6 € περισσότερα από το τριπλάσιο, που έδωσε για μολύβι]

**Τώρα ήρθε η ώρα να σχηματίσουμε την εξίσωση.**

[και έδωσε συνολικά 15€] οπότε:

**Μολύβι + τετράδιο + βιβλίο = 15**

$x+2x+(3x+6)=15$ ή $6x=9$ οπότε **x=1,5 άρα η αξία του μολυβιού είναι 1,5€**

**επομένως η τιμή του βιβλίου είναι:**

**$3\cdot 1{,}5+6=10{,}5$** δηλαδή **10,50€**

Περιγραφικά οι ενέργειες που κάνουμε για να επιλύσουμε ένα τυπικό πρόβλημα με τη βοήθεια εξισώσεων είναι οι εξής:

- εντοπίζουμε την ζητούμενη ή τις ζητούμενες ποσότητες και κάθε άλλη ποσότητα που εμπλέκεται στο πρόβλημα.
- επιλέγουμε και θέτουμε ένα από αυτά ως **x.**
- εκφράζουμε τότε τα υπόλοιπα με βάση το x και σε αυτό θα μας βοηθούν τα δεδομένα του προβλήματος που διατυπώνονται με λόγια.
- Τέλος σχηματίζουμε την εξίσωση, συνήθως η φράση που περιέχει τη λέξη: «ισούται», «γίνεται», «συνολικά» και άλλες παρόμοιες,

είναι σημαντικές γιατί αυτές οι λέξεις κρύβουν το **ίσον** της εξίσωσης.

- οπότε ακολουθεί η επίλυση της εξίσωσης και τέλος ο έλεγχος το αποτελέσματος. Παράδειγμα, αν το ζητούμενο είναι πόσα παιδιά έχει η τάξη, προφανώς η απάντηση πρέπει να είναι φυσικός αριθμός, αν δηλαδή βρούμε x= 3,7 δεν το δεχόμαστε για λύση του προβλήματος.

**Η επιλογή του αγνώστου**

η επιλογή του αγνώστου που θέτουμε ως x, επηρεάζει πολλές φορές το βαθμό δυσκολίας της επίλυσης.

Συνήθως διευκολύνει αν θέσουμε **x** το μικρότερο από τα ζητούμενα (αν αυτό μπορεί να εκτιμηθεί)

Επίσης το να θέτουμε x αυτό ως προς το οποίο αναφέρονται (υπολογίζονται) τα υπόλοιπα ζητούμενα.

θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στα προβλήματα που ακολουθούν.

**Επίσης, ας δούμε πως τα λόγια που χρησιμοποιούμε σε ένα πρόβλημα μετατρέπονται σε αλγεβρικές παραστάσεις και στη συνέχεια σε εξίσωση.**

γλωσσική διατύπωση→Μαθηματική διατύπωση

1) Το α είναι κατά 10 μεγαλύτερο του β.

   γράφω **α=β+10**

2) Το α είναι κατά 5 μικρότερο από το τριπλάσιο του β

   γράφω: **α=3β−5**

3) Το α είναι κατά 5% μικρότερο του β

   γράφω: $\alpha=\beta-\frac{5}{100}\cdot\beta$ ή $\alpha=\frac{95}{100}\cdot\beta$ ή α=0,95β

4) Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά ένα.

   Γράφω: **2x+1**

5) Η διαφορά του α **από** το β είναι 7

   Γράφω: **β-α=7 οπότε β=α+7 ή α=β-7**

   **Σημαντικό επίσης είναι, μια σχέση του α ως προς το β, να την εκφράσουμε με το β ως προς το α.**

   **i)** Το **α** είναι **διπλάσιο** του **β (α=2·β).** Μπορεί να γραφεί: Το **β** είναι το **μισό** του **α** **(β=$\frac{1}{2}\alpha$)**

   **ii)** Το **α** αξίζει 10€ **περισσότερο** από το **β (α=β+10)** είναι το ίδιο να πούμε ότι, το **β** αξίζει 10€ **λιγότερο** από το **α (β=α−10)**

   **iii)** το **α** είναι το ένα τρίτο του **β (α=$\frac{1}{3}\beta$)** είναι το ίδιο αν πούμε το **β** είναι τριπλάσιο του **α.** **(β=3·α)**

   **iv)** τρεις διαδοχικοί ακέραιοι**:**

   **x, x+1, x+2 ή x-1, x, x+1**

## Πρόβλημα 2ο

**Ένας εργαζόμενος διέθεσε το μισθό του αυτό το μήνα ως εξής: τα 2/5 του μισθού του έδωσε για ενοίκιο και 1/10 του μισθού του για επισκευή του αυτοκινήτου, τα 2/3 των υπόλοιπων χρημάτων για τις υπόλοιπες ανάγκες του και περίσσεψαν στο τέλος του μήνα 200€. Πόσα Ευρώ είναι ο μισθός του;**

## Λύση

Εδώ το πρόβλημα ζητάει ποιος είναι ο μισθός. Επομένως, έστω x ο μισθός του. Διαβάζουμε το πρόβλημα και σχηματίζω με λόγια την εξίσωση: μισθός = ενοίκιο + επισκευή + υπόλοιπες ανάγκες + 200

Επίσης με τη γλώσσα των μαθηματικών έχουμε:

Μισθός=x, ενοίκιο=$\frac{2}{5}x$, επισκευή=$\frac{1}{10}x$, οι υπόλοιπες ανάγκες είναι τα $\frac{2}{3}$ των υπόλοιπων χρημάτων και για να βρούμε τα υπόλοιπα

χρήματα, αυτά είναι: x− $\frac{2}{5}x-\frac{1}{10}x$ έτσι η εξίσωση θα είναι:

$x=\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}x+\frac{2}{3}\cdot(x-\frac{2}{5}x-\frac{1}{10}x)+200$ ή

$30\cdot x=30\cdot\frac{2}{5}x+30\cdot\frac{1}{10}x+$

$+30\cdot\frac{2}{3}(x-\frac{2}{5}x-\frac{1}{10}x)+30\cdot 200$ ή

30x=12x+3x+20(x− $\frac{2}{5}x-\frac{1}{10}x$) +6000 ή

30x=12x+3x+20x− $8x-2x$ +6000 ή

40x-35x=6000 οπότε 5x=6000 άρα **x=1200€**

## Πρόβλημα 3ο

**Σε μια θεατρική παράσταση εισπράχθηκαν 1080€. Τα παιδικό εισιτήριο στοιχίζει 6€, ενώ για τους μεγάλους 10€.**
**Τα παιδικά εισιτήρια που κόπηκαν είναι κατά 10 λιγότερα από το διπλάσιο αριθμό εισιτηρίων των μεγάλων. Πόσα παιδιά παρακολούθησαν την παράσταση;**

## Λύση

Έστω **x** τα εισιτήρια των μεγάλων και εισπράχθηκαν **10x** ευρώ.
Τα εισιτήρια των παιδιών θα είναι: **2x-10** και εισπράχθηκαν **6( 2x-10 )** ευρώ.
Επομένως τα συνολικά έσοδα είναι:

**10x+6( 2x-10 )=1260 ή**

10x+ 12x-60 )=1260 ή

22x =1260+60 ή 22x =1320 και τελικά $x=\frac{1320}{22}$ ή x=60 εισιτήρια μεγάλων και 2·60-10=110 εισιτήρια παιδιών.
Άρα την παράσταση παρακολούθησαν 110 παιδιά.

## Πρόβλημα 4ο

**Η ηλικία της Δανάης είναι το ένα τέταρτο της ηλικίας του πατέρα της. Μετά από 8 χρόνια η ηλικία της θα είναι το ένα τρίτο της ηλικίας του πατέρα της. Ποια είναι η ηλικία της Δανάης σήμερα.**

## Λύση

Έστω **x** η ηλικία της Δανάης **σήμερα.**
Η ηλικία του πατέρα της είναι τετραπλάσια άρα **4x**.
**Μετά από 8 χρόνια** η Δανάη θα είναι **x+8** ενώ του πατέρα της **4x+8.** Αλλά **ηλικία πατέρα=3·ηλικία Δανάης** δηλαδή :

4x+8=3(x+8) ή 4x+8=3x+24 ή 4x−3x=24−8 και **τελικά x=16.**

**Πράγματι**

| | **Δανάη** | **Πατέρας** |
|---|---|---|
| **Σήμερα:** | **16** | **64** |
| **Μετά 8 χρόνια:** | **24** | **72** |

## Πρόβλημα 5ο

**Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 12 ώρες μία δεύτερη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 10 ώρες και μία τρίτη βρύση την αδειάζει σε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν ανοίξουμε και τις τρεις βρύσες ταυτόχρονα.**

## Λύση

Έστω ότι η δεξαμενή θα γεμίσει μετά από **x** ώρες.
Η πρώτη βρύση θα έχει γεμίσει $\frac{1}{12}\cdot$x της δεξαμενής.
Η Δεύτερη βρύση θα έχει γεμίσει $\frac{1}{10}\cdot$x της δεξαμενής.
Η τρίτη βρύση θα έχει αδειάσει $\frac{1}{6}\cdot$x της δεξαμενής. Οπότε:
$\frac{1}{12}\cdot$x+$\frac{1}{10}\cdot$x− $\frac{1}{6}\cdot$x=1 (=1 δηλαδή, μία δεξαμενή)

ΕΚΠ=60 άρα 60 $\frac{1}{12}\cdot$x+60 $\frac{1}{10}\cdot$x−60 $\frac{1}{6}\cdot$x=60·1 ή

5x+6x-10x=60 ή x=60 ώρες.

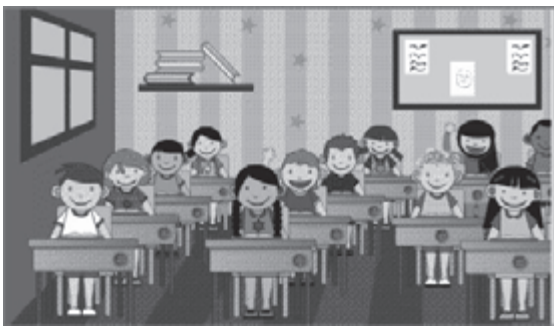
Β΄ Τάξη

# Συντεταγμένες στο επίπεδο

**Τζίφας Νίκος -Λαγός Γιώργος**

## Δραστηριότητα 1η

Δύο μαθητές Ο Δημήτρης και η Μαρία που δεν είναι στο ίδιο τμήμα του σχολείου συζητούν.
ΔΗΜΗΤΡΗΣ: Μαρία τι κάνατε σήμερα στο μάθημα των μαθηματικών;
ΜΑΡΙΑ: Ασχοληθήκαμε με τις συντεταγμένες ενός σημείου πάνω στο επίπεδο.
ΔΗΜΗΤΡΗΣ: Μαρία: σε παρακαλώ εξήγησέ μου λίγο για να καταλάβω.
ΜΑΡΙΑ: «Μία εφαρμογή που σκέφτομαι είναι να καθορίσεις τη θέση του θρανίου σου μέσα στην αίθουσα»
ΔΗΜΗΤΡΗΣ: Μαρία σε ποια θέση κάθεσαι στην αίθουσα της τάξης του;

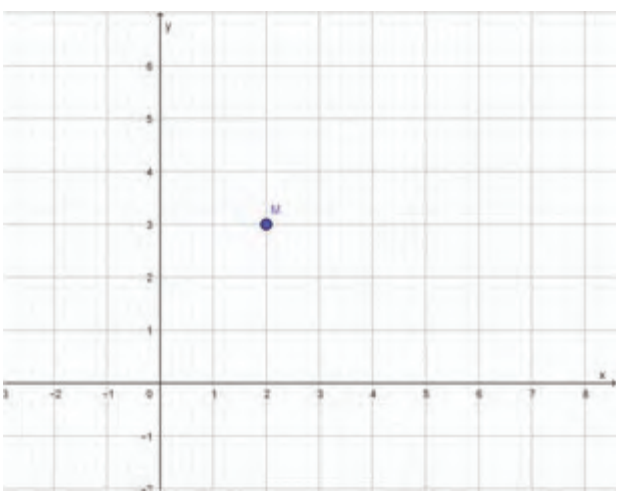


Η Μαρία όμως για να φανεί πόσο «**σωστά και με ακρίβεια καθορίζεται η θέση αυτή**» όταν χρησιμοποιούνται συντεταγμένες, του έδωσε αρχικά «**ασαφή**» απάντηση
ΜΑΡΙΑ: Κάθομαι μπροστά από τον Γιώργο.
ΔΗΜΗΤΡΗΣ: και ο Πέτρος πού κάθεται;
ΜΑΡΙΑ: Δεν ξέρω τώρα γιατί του άλλαξαν θέση. Μπροστά όμως από μένα κάθεται ο Φώτης
ΔΗΜΗΤΡΗΣ: Με φώτισες αυτόν δεν τον ξέρω. Η Μαρία μετά από την συνομιλία αυτή για να βοηθήσει τον συμμαθητή της ετοίμασε τον παρακάτω πίνακα. Τόνισε φυσικά ότι τα θρανία της αίθουσας είναι μονοθέσια.

| | **1η στήλη** | **2η στήλη** | **3η στήλη** |
|---|---|---|---|
| **1η σειρά** | | | ΦΩΤΗΣ |
| **2η σειρά** | ΠΑΥΛΟΣ | | ΜΑΡΙΑ |
| **3η σειρά** | | | ΓΙΩΡΓΟΣ |
| **4η σειρά** | | | |

*Στον πίνακα αυτό φαίνονται οι σειρές και οι στήλες των θρανίων της τάξης της.*

ΔΗΜΗΤΡΗΣ: Τώρα είναι πολύ απλό να καταλάβω που κάθεσαι: «στη διασταύρωση της δεύτερης σειράς με την τρίτη στήλη»
Όπως βλέπουμε χρειαζόμαστε 2 πληροφορίες για να ορίσουμε τη θέση της Μαρίας μέσα στην αίθουσα. «**Τον αριθμό της σειράς και τον αριθμό της στήλης του θρανίου».** Μπορούμε μάλιστα ευκολότερα να καθορίσουμε τη θέση με το ζευγάρι που βλέπουμε δίπλα: (**2η σειρά, 3η στήλη**)
Αν τώρα συμφωνήσουμε ο πρώτος αριθμός του ζευγαριού να καθορίζει την σειρά και ο δεύτερος την στήλη του θρανίου η συγκεκριμένη θέση της Μαρίας καθορίζεται απλούστερα από το ζευγάρι (2,3) το οποίο λέγεται και «**διατεταγμένο ζευγάρι**»
Θα σας προτείνουμε τώρα να γράψετε τα διατεταγμένα ζευγάρια των θέσεων των άλλων παιδιών που αναγράφονται στον πίνακα. ΦΩΤΗΣ: (….,…..), ΠΑΥΛΟΣ: (….,…..), ΓΙΩΡΓΟΣ: (….,…..)
Ποιοι κάθονται στις θέσεις που ορίζονται από τα ζεύγη (1, 3) και (3, 1);
Στη θέση που ορίζεται από το ζεύγος (1, 3) κάθεται ο Φώτης και στη θέση που ορίζεται από το ζεύγος (3, 1) είναι κενή.
Κάθονται στις θέσεις αυτές οι ίδιοι οι μαθητές;
Παρατηρούμε ότι τα (1, 3) και (3, 1) παριστάνουν διαφορετικές θέσεις. **Δεν μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά τους** γι' αυτό και τα ονομάσαμε **διατεταγμένα ζεύγη.**

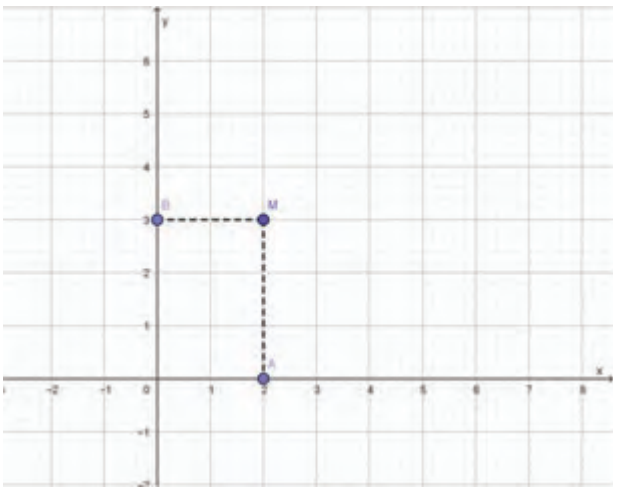



### Σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε μαθητή μέσα στην τάξη χρησιμοποιώντας ένα ζεύγος αριθμών με τον πρώτο να παριστάνει τον αριθμό της σειράς και το δεύτερο της στήλης του θρανίου. Οπότε

αυτή την ιδέα μπορεί να την εφαρμόσουμε γενικότερα για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου ενός επιπέδου ως εξής

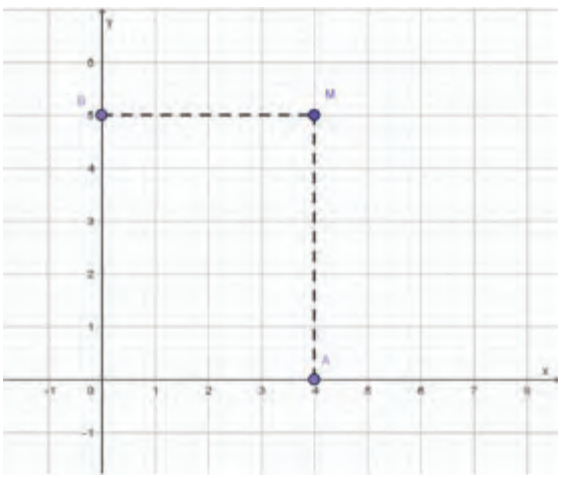
Αρχικά σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή Ο και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο Μ



Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α. Για το σχήμα μας το Α αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα $x'x$. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β. Για το σχήμα το Β αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα $y'y$. Δηλαδή το σημείο Μ αντιστοιχεί στο ζεύγος δύο αριθμών ο πρώτος εξ αυτών λέγεται **τετμημένη** του σημείου Μ και ο δεύτερος **τεταγμένη** του σημείου Μ.

Οπότε ο άξονας $x'x$ ονομάζεται **άξονας των τετμημένων** και ο άξονας $y'y$ ονομάζεται **άξονας των τεταγμένων.**

Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει τετμημένη 0



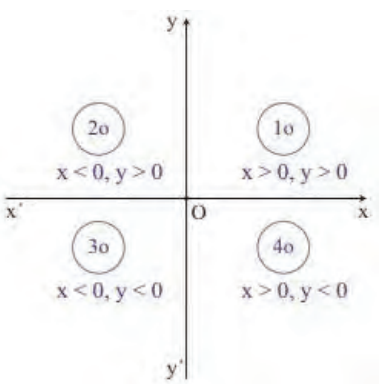
Η τετμημένη και η τεταγμένη του Μ λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου Μ.

Επίσης και **αντιστρόφως** αν έχουμε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο και πάρουμε ένα ζεύγος αριθμών μπορούμε να βρούμε ένα μόνο σημείο Μ του επιπέδου που αντιστοιχεί στο ζεύγος αυτό.

**Κάθε σημείο λοιπόν του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και αντίστροφα, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου**

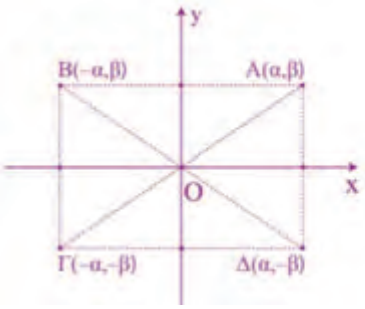
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι άξονες $x'x$ και $y'y$ αποτελούν ένα **σύστημα ορθογωνίων αξόνων** ή απλώς **σύστημα αξόνων.**

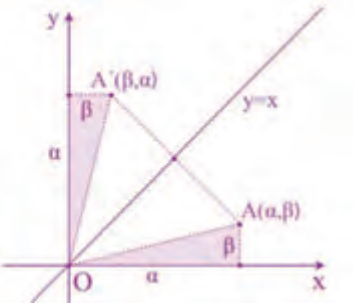
Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Οxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**. Επειδή οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Οxy λέγεται **ορθοκανονικό**.




Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $\widehat{xOy}, \widehat{yOx'}, \widehat{x'Oy'}, \widehat{y'Ox}$ και ονομάζεται 1ο, 2ο, 3ο και 4ο, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

- Αν Α (α, β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα ότι:
- Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x' x είναι το σημείο Δ (α,-β), που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο Β(-α,β), που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη.
- Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Γ (-α,-β), που έχει αντίθετες συντεταγμένες.
- Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α'(β,α) που έχει τετμημένη την τεταγμένη του Α και τεταγμένη την τετμημένη του Α .




**Μέσο ευθύγραμμου τμήματος-Απόσταση σημείων**

Θα μελετήσουμε τώρα άλλη μία εφαρμογή των συντεταγμένων. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τις συντεταγμένες του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος εάν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των άκρων του. Γνωρίζετε φυσικά ότι το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι το σημείο που ισαπέχει από τα άκρα του.

## Δραστηριότητα 2η

Πάρτε τώρα χιλιστομετρικό χαρτί και μολύβι και σχεδιάστε ένα ορθοκανονικό σύστημα Oxy. Στο σύστημα αυτό να βρείτε τη θέση των σημείων Α(2,1) και Β(6,4). Στη συνέχεια χαράξτε το τμήμα ΑΒ και με τη βοήθεια του υποδεκαμέτρου σας μετρήστε το μήκος του ΑΒ. Γνωρίζοντας το μήκος του ΑΒ βρείτε το μέσο Μ και στη συνέχεια της συντεταγμένες του Μ .Στο σημείο αυτό θα σας πούμε ότι εάν έχετε εργαστεί σωστά οι συντεταγμένες του Μ είναι (4,2.5)

**ένα ερώτημα**

Συνδέονται οι συντεταγμένες του Μ με τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β; Για την τετμημένη 4 του Μ θα μπορούμε να πούμε ότι $4 = \frac{2+6}{2}$. Ισχύει το ίδιο και την τεταγμένη 2,5; (Εξετάστε το).

Στη συνέχεια τώρα στο ίδιο σύστημα αξόνων να βρείτε το μέσο Λ του τμήματος ΓΔ και τις συντεταγμένες του με Γ(1,3) και Δ(5,1) καθώς και το μέσο Ν του ΕΖ με Ε(1,3) και Ζ(3,1).

Εάν εργαστείτε σωστά θα διαπιστώσετε ότι ισχύει για όλες τις περιπτώσεις.

Μετά από τα παραπάνω συμπληρώσετε τον κανόνα :

**Οι συνταγμένες του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι το ημι……. των ομώνυμων συντεταγμένων των άκρων του** ……

**Εάν $(x_1, y_1)$ και $(x_2, y_2)$ είναι οι συντεταγμένες των άκρων ενός τμήματος ΑΒ τότε συντεταγμένες του μέσου είναι:** $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

## Δραστηριότητα 3η

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρτε δύο σημεία Α(3,0) και Β(4,0) αφού διαπιστώσετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με την βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος να βρείτε την απόσταση τους ΑΒ.Επίσης σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρτε δύο σημεία Α(-3,0) και Β(0,-4) αφού διαπιστώσετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με την βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος να βρείτε την απόσταση τους ΑΒ .

Μπορείτε να διατυπώσετε και εδώ αντίστοιχο κανόνα για την απόσταση αυτή με την βοήθεια των συντεταγμένων των σημείων Α και Β;

Εάν εργαστείτε σωστά θα διαπιστώσετε ότι ισχύει για όλες τις περιπτώσεις.

**Εάν $(x_1, y_1)$ και $(x_2, y_2)$ είναι οι συντεταγμένες των άκρων ενός τμήματος ΑΒ .Η απόσταση ΑΒ των σημείων Α και Β είναι** $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

**Ιστορικό σημείωμα:** Οι τοπογράφοι και η χαρτογράφοι της αρχαίας Αιγύπτου, της Κίνας, της Ελλάδας και της Ρώμης χρησιμοποιούσαν διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων για να εντοπίσουν σημεία. Οι Αιγύπτιοι έκαναν εκτεταμένη χρήση τετραγωνικών πλεγμάτων και χρησιμοποίησαν τις πρώτες γνωστές ορθογώνιες συντεταγμένες στη Σακκάρα γύρω στο 2650 π. χ μέχρι τον δέκατο έβδομο αιώνα ,την εποχή της ευρωπαϊκής εξερεύνησης η ανάγκη για ακριβείς χάρτες και η ανάπτυξη εύχρηστων αλγεβρικών συμβόλων οδήγησαν στη σύγχρονη γεωμετρία συντεταγμένων. Παρατηρήστε τις γραμμές γεωγραφικού πλάτους και μήκους σε αυτόν τον χάρτη του 17ου αιώνα.



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

Το τμήμα ΑΒ έχει άκρα$(-8,5)$ και $(3,-6)$ βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου του ΑΒ και το μήκος του ΑΒ.

**Λύση:** Το μέσο δεν βρίσκεται σε σημείο τομής του πλέγματος, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα μέσου των συντεταγμένων οπότε το μέσο του ΑΒ είναι

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-8+3}{2} = -2{,}5, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{[5+(-6)]}{2} = -0{,}5$$

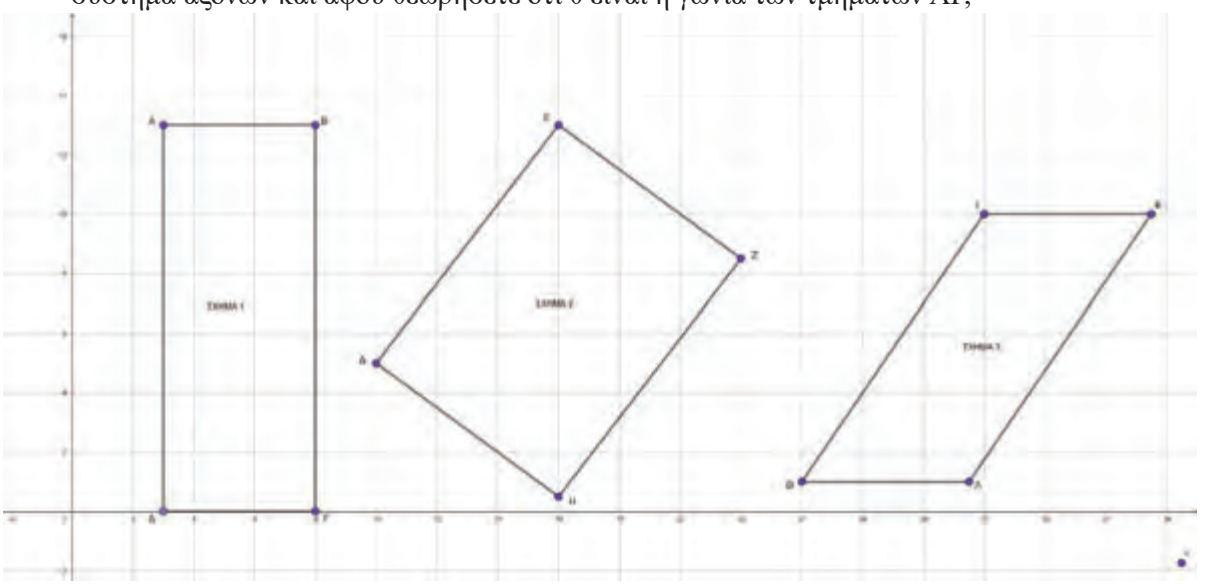
Επομένως το μέσο του ΑΒ είναι το $(-2{,}5, -0{,}5)$. Το μήκος του ΑΒ δίνεται από τον τύπο $(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $(AB) = \sqrt{\big(5-(-8)\big)^2+(-6-3)^2}$ ,

$(AB) = \sqrt{13^2+(-9)^2}$ , $(AB) = \sqrt{169+81} = \sqrt{250} \cong 15{,}81$

## Ασκήσεις

Στα ερωτήματα α, β και γ της άσκησης 1 να βρείτε το μέσο κάθε ζεύγους.

1. α) (12,-7) και (-6,15), β) (-17,-8) και (-1,11) ,γ) (14,-7) και (-3,18)
2. Το ένα άκρο ενός τμήματος είναι το (12,8). Το μέσο είναι το (3,18), να βρείτε τις συντεταγμένες του άλλου άκρου.
3. Ένας συμμαθητής σας λέει : "η εύρεση των συντεταγμένων ενός μέσου είναι εύκολη απλώς βρίσκετε τους μέσους όρους" . Υπάρχει κάποια αλήθεια σε αυτό εξηγήστε τι νομίζετε ότι εννοεί ο συμμαθητής σας.
4. Βρείτε τα 2 σημεία στο ΑΒ που διαιρούν το τμήμα σε 3 ίσα μέρη .Το σημείο Α έχει συντεταγμένες (0,0) και το σημείο Β έχει συντεταγμένες (9,6) .Εξηγήστε τη μέθοδο σας
5. Περιγράψτε έναν τρόπο εύρεσης σημείων που διαιρούν ένα τμήμα σε τέταρτα.
6. Σε κάθε παρακάτω σχήμα φανταστείτε να σχεδιάσετε τις διαγώνιους ΑΓ και ΒΔ.
   α) Βρείτε το μέσο του ΑΓ και το μέσο του ΒΔ σε κάθε σχήμα.
   β) Τι παρατηρείτε στα μέσα;
7. Δίνονται τα σημεία Α(3,5), Β(-2,0),Γ(8,0) .Αφού τοποθετήσετε τα σημεία αυτά σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και αφού θεωρήσετε ότι θ είναι η γωνία των τμημάτων ΑΓ,



ΒΓ και φ η γωνία των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ να επιλέξετε σας σωστές απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα.

a) Α: $\hat{A} < 90^0$ Β:$\hat{A} = 90^0$ Γ: $\hat{A} > 90^0$

b) Α:$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Β: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{6}{5}$ Γ: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{5}{6}$ Δ: $\varepsilon\varphi\theta = 1$

c) Α:$AB < A\Gamma$ Β: $AB = A\Gamma$ Γ: $AB > A\Gamma$

d) Α:$\varepsilon\varphi\varphi = 2$ Β: $\varepsilon\varphi\varphi = 3$ Γ: $\varepsilon\varphi\varphi = 1$ Δ: $\varepsilon\varphi\varphi = 4$

8. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της πρώτης γραμμής και κατόπιν να ελέγξετε τα συμπεράσματα σας τοποθετώντας τα σημεία σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

| **Σημείο Α** | **Συμμετρικό του Α ως προς τον $x'x$** | **Συμμετρικό του Α ως προς τον $y'y$** | **Συμμετρικό του Α ως προς το Ο(αρχή αξόνων)** |
|---|---|---|---|
| **(-3,5)** | (-3,-5) | (3,5) | (3,-5) |
| **(2,4)** | | | |
| **(-2,1)** | | | |
| **(-3,-3)** | | | |
| **(4,6)** | | | |

B΄ Τάξη

# Επίλυση εξισώσεων α΄ βαθμού

Τάκης Χρονόπουλος

**3 λυμένες ασκήσεις με βήματα**

1η: $\frac{4-x}{4}-\frac{3x-1}{12}=2-\frac{3-2x}{5}-2x-\frac{3+2x}{6}$

2η: $\frac{4(3x+1)-2}{3}-\frac{2+3(3x-2)}{2}=2x-\frac{5-(x-3)}{4}-\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{4}+x-2\right)-(x-2)$

3η: $4-\{2-[3(2-x)+(4-3x)]\}=2-\{2[(3-2x)-(x-2)]-(2x-6)\}$

1η άσκηση / κλασική, με κλάσματα, χωρίς παρενθέσεις στην αρχή

$$\frac{4-x}{4}-\frac{3x-1}{12}=2-\frac{3-2x}{5}-2x-\frac{3+2x}{6} \quad (1)$$

**βήματα**

**1. [απαλοιφή παρονομαστών]**

Πρέπει να φύγουν οι παρονομαστές για να αποφύγω πράξεις με κλάσματα. Πολλαπλασιάζω τα πάντα, είτε είναι κλάσμα είτε όχι, και στα 2 μέλη της εξίσωσης, με το ΕΚΠ των παρονομαστών, απλοποιώ τους παρονομαστές και τα ξαναγράφω βάζοντας παρενθέσεις στις θέσεις των αριθμητών**.** Σε περίπτωση που δεν απλοποιούνται όλοι οι παρονομαστές, έχω βρει λάθος ΕΚΠ . Προσοχή όταν μένει μετά την απλοποίηση 1, να βάζω την παρένθεση με το 1, αλλιώς χάνω πρόσημο. Οποιοδήποτε κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών μου κάνει (=πολλαπλάσιο ΕΚΠ), αλλά συνήθως επιλέγω το ΕΚΠ για να έχω όσο γίνεται μικρότερα νούμερα.

(ΕΚΠ(4,5,6,12) =60 η εξίσωση θα μπορούσε να λυθεί με κάθε πολλαπλάσιο του ΕΚΠ δηλ. 60,120,180,… )

$$(1)\Leftrightarrow \cancel{60}^{15}\frac{4-x}{\cancel{4}}-\cancel{60}^{5}\frac{3x-1}{\cancel{12}}=60\cdot 2-\cancel{60}^{12}\frac{3-2x}{\cancel{5}}-60\cdot 2x-\cancel{60}^{10}\frac{3+2x}{\cancel{6}}$$

$$\Leftrightarrow 15(4-x)-5(3x-1)=60\cdot 2-12(3-2x)-60\cdot 2x-10(3+2x)$$

**2. [επιμεριστικές ιδιότητες με ο,τι έμεινε από τους αριθμητές]**

Χρησιμοποιώ τα πρόσημα του πολλαπλασιασμού. $\Leftrightarrow 60-15x-15x+5=120-36+24x-120x-30-20x$

**3. [χωρίζω γνωστούς από αγνώστους]**

Μεταφέρω όλους τους αγνώστους στο 1ο μέλος της εξίσωσης και όλους τους γνωστούς στο 2ο μέλος, όσοι όροι της εξίσωσης περιέχουν τον άγνωστο της εξίσωσης θεωρούνται άγνωστοι, οι αριθμοί και τυχόν άλλες μεταβλητές (γράμματα), θεωρούνται γνωστοί.

$\Leftrightarrow -15x-15x-24x+120x+20x=-60-5+120-36-30$

Σε μια εξίσωση ο,τι αλλάζει μέλος, αλλάζει πρόσημο

**4. [πράξεις σε κάθε μέλος]**

Μέχρι να μείνει ένας όρος σε κάθε μέλος, για ευκολία μπορώ να χωρίσω τους θετικούς από τους αρνητικούς σε κάθε μέλος, να προσθέσω όλους τους θετικούς, να προσθέσω όλους τους αρνητικούς και να βρω τη διαφορά των αθροισμάτων θετικών – αρνητικών σε κάθε μέλος. Διαγράφω τυχόν αντίθετους, αν υπάρχουν στο ίδιο μέλος της εξίσωσης π.χ. -5x +5x ή -7+7. Αν δεν διαγράψω αντίθετους, δεν αλλάζει το αποτέλεσμα, μόνο που θα κάνω ενδιάμεσα πράξεις με περισσότερους αριθμούς.

$\Leftrightarrow +\underline{120x+20x}-\underline{15x-15x-24x}=+\underline{120}-\underline{60-5-36-30}\Leftrightarrow 140x-54x=120-131\Leftrightarrow 86x=-11$

**5. [διαιρώ και τα 2 μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου, αν αυτός δεν είναι μηδέν]**

Διαγράφω τον συντελεστή του αγνώστου με τον παρονομαστή του, μετά βάζω ένα πρόσημο μπροστά από το κλάσμα του 2ου μέλους και κάνω απλοποίηση στο 2ο μέλος, αν μπορεί να γίνει. Αν ο συντελεστής του

αγνώστου είναι μηδέν, τότε (**επειδή το χειρότερο λάθος στα μαθηματικά είναι η διαίρεση με το μηδέν)** απαγορεύεται να διαιρέσω και σταματάω εκεί. **Η εξίσωση τότε ή θα είναι η εξίσωση 0x=0** και γράφω την λέξη **αόριστη ή ταυτότητα** (αυτό σημαίνει ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι λύση της , μιας και κάθε αριθμός όταν πολλαπλασιαστεί με το 0 μας δίνει 0, άρα την επαληθεύει) **ή θα είναι της μορφής** 0x=5, 0x=-2, 0x=13 γενικά **0x=αριθμός όχι μηδέν** και γράφω την λέξη **αδύνατη** (αυτό σημαίνει ότι κανένας πραγματικός αριθμός δεν είναι λύση της διαφορετικά λέμε ότι η εξίσωση δεν έχει λύσεις, μιας και για την εξίσωση 0x=5 για παράδειγμα, δεν υπάρχει κανένας αριθμός που, όταν πολλαπλασιαστεί με το 0 θα μας δώσει 5 ) $\Leftrightarrow \frac{\cancel{86}x}{\cancel{86}} = \frac{-11}{86} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{86}$

*Σχόλια: Η εξίσωση σταματά όταν βρω τον άγνωστο x, που λέγεται λύση της εξίσωσης ή όταν γράψω την λέξη αδύνατη ή μια από τις λέξεις αόριστη / ταυτότητα. Ανάμεσα στα βήματα κάθε εξίσωσης, είτε στην αρχή είτε στο τέλος, είναι λάθος να βάζω παντού ίσον (=). Το σωστό είναι να βάζω το σύμβολο* $\Leftrightarrow$ *, που διαβάζεται ''διπλό συνεπάγεται'' (ή ''ισοδύναμα'') και δηλώνει ότι τα βήματα κατά την επίλυση μιας εξίσωσης είναι αντιστρεπτά.*

**2η άσκηση** / απαιτητική, με κλάσματα και παρενθέσεις στην αρχή

$$\frac{4(3x+1)-2}{3} - \frac{2+3(3x-2)}{2} = 2x - \frac{5-(x-3)}{4} - \frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{4} + x - 2\right) - (x-2) \quad (2)$$

**Βήματα:** [βασικά προστίθεται ένα βήμα στην αρχή, το οποίο ονομάζω ως βήμα 0]

**0. [απαλοιφή παρενθέσεων]**

Αρχικά διώχνω όλες τις παρενθέσεις, είτε με επιμεριστικές, όταν έχω αριθμό παρένθεση συνεχόμενα, είτε με τον κανόνα απαλοιφής παρενθέσεων όταν έχω μπροστά πρόσημο + ή – (το συν - όταν βγει η παρένθεση- αφήνει τους όρους ίδιους, ενώ το μείον - όταν βγει η παρένθεση - αλλάζει όλα τα πρόσημα των όρων μέσα στην παρένθεση) . Αν δεν θυμάμαι τον κανόνα αυτό, μπορώ πάντα να βάλω την μονάδα μετά το +, - πριν την παρένθεση και να κάνω επιμεριστικές με το +1 ή -1 αντίστοιχα.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{12x+4-2}{3} - \frac{2+9x-6}{2} = 2x - \frac{5-x+3}{4} - \frac{2(x-1)}{12} - \frac{2x}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1} - x + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x+4-2}{3} - \frac{2+9x-6}{2} = 2x - \frac{5-x+3}{4} - \frac{2x-2}{12} - \frac{2x}{3} + \frac{4}{3} - x + 2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{12}^{4}\frac{12x+4-2}{\cancel{3}} - \cancel{12}^{6}\frac{2+9x-6}{\cancel{2}} = 12\cdot 2x - \cancel{12}^{3}\frac{5-x+3}{\cancel{4}} - \cancel{12}^{1}\frac{2x-2}{\cancel{12}} - \cancel{12}^{4}\frac{2x}{\cancel{3}} + \cancel{12}^{4}\frac{4}{\cancel{3}} - 12\cdot x + 12\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 4(12x+4-2) - 6(2+9x-6) = 12\cdot 2x - 3(5-x+3) - 1(2x-2) - 4(2x) + 4(4) - 12\cdot x + 12\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 48x+16-8-12-54x+36 = 24x-15+3x-9-2x+2-8x+16-12x+24$$

$$\Leftrightarrow 48x-54x-24x-3x+2x+8x+12x = -16+8+12-36-15-9+2+16+24$$

$$\Leftrightarrow \underline{48x+2x+8x+12x} - \underline{54x-24x-3x} = \underline{+8+12+2+\cancel{16}+24} - \underline{\cancel{16}-36-15-9}$$

$$\Leftrightarrow 70x-81x = 46-60 \Leftrightarrow -11x = -14 \Leftrightarrow \frac{\cancel{-11}x}{\cancel{-11}} = \frac{-14}{-11} \Leftrightarrow x = +\frac{14}{11}$$

**3η άσκηση** / απαιτητική, με παρενθέσεις, αγκύλες και άγκιστρα

$$4 - \left\{2 - \left[3(2-x) + (4-3x)\right]\right\} = 2 - \left\{2\left[(3-2x) - (x-2)\right] - (2x-6)\right\} \quad (3)$$

**Βήματα:** [βασικά προστίθεται ένα βήμα στην αρχή, το οποίο ονομάζω ως βήμα 0]

**0. [απαλοιφή αγκύλων και άγκιστρων]**

Επειδή αποφεύγω στα Μαθηματικά να βάζω παρένθεση μέσα σε παρένθεση, χρησιμοποιώ αγκύλες […] και άγκιστρα {..}. Για να κάνω πράξεις, ξεκινάω από μέσα προς τα έξω σε κάθε άγκιστρο:

Όταν όλες οι παρενθέσεις φύγουν μέσα σε μια αγκύλη είτε με επιμεριστικές είτε με απαλοιφή παρενθέσεων, τότε η αγκύλη γίνεται παρένθεση και το άγκιστρο που περιέχει την αγκύλη αυτή γίνεται

αντίστοιχα αγκύλη. Χωρίς άγκιστρα πλέον, όταν όλες οι παρενθέσεις φύγουν μέσα σε μια αγκύλη, τότε η αγκύλη γίνεται παρένθεση και μετά κάνω πράξεις κατά τα γνωστά (επιμεριστικές, χωρίζω γνωστούς από αγνώστους …)

$$(3) \Leftrightarrow 4-\left[2-\left(6-3x+4-3x\right)\right]=2-\left[2\left(3-2x-x+2\right)-2x+6\right]$$

$$\Leftrightarrow 4-\left(2-6+3x-4+3x\right)=2-\left(6-4x-2x+4-2x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow 4-2+6-3x+4-3x=2-6+4x+2x-4+2x-6$$

$$\Leftrightarrow -3x-3x-4x-2x-2x=-\cancel{4}+\cancel{2}-6-4+\cancel{2}-6-4-6$$

$$\Leftrightarrow -14x=-26 \Leftrightarrow \frac{\cancel{-14}x}{\cancel{-14}}=\frac{-26}{-14} \Leftrightarrow x=\frac{26:2}{14:2} \Leftrightarrow x=\frac{13}{7}$$

η μέθοδος συνοπτικά

*χωρίς αγκύλες / άγκιστρα*

**0**. Απαλοιφή παρενθέσεων

**1**. Απαλοιφή παρονομαστών

**2**. Επιμεριστικές με ο,τι έμεινε από αριθμητές

**3**. Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους

**4**. Πράξεις σε κάθε μέλος

**5**. Διαιρώ και τα 2 μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου, όταν δεν είναι 0 ο συντελεστής αυτός.

Αν είναι 0, η εξίσωση είτε είναι αδύνατη, είτε έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

*με αγκύλες / άγκιστρα*

πρώτα δουλεύω από μέσα προς τα έξω, μέχρι να μείνουν μόνο παρενθέσεις και μετά εφαρμόζω τα παραπάνω βήματα 0-5

## Άλυτες ασκήσεις

**1.** $3\left(x-2\right)-2\left(x+4\right)=\left(2x-3\right)-\left(5x+4\right)$ $\left[\frac{7}{4}\right]$

**2.** $7x-\left(3x-1\right)=5-\left(2x+1\right)-7\left(3x-2\right)$ $\left[\frac{17}{27}\right]$

**3.** $\frac{2x-1}{3}=\frac{4x-1}{6}-x$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

**4.** $\frac{5x-2}{3}-\frac{2x+1}{2}=7-x$ $\left[\frac{49}{10}\right]$

**5.** $\frac{7x-2}{3}-\frac{4x-2}{2}=\frac{4-x}{6}-2-x$ $\left[-\frac{10}{9}\right]$

**6.** $\frac{3x+1}{3}-\frac{4x+1}{4}=\frac{5x+2}{6}-\frac{2x-2}{3}$ $\left[-\frac{11}{2}\right]$

**7.** $\frac{4x-1}{3}-\frac{5x+2}{4}=\frac{7x-3}{6}-\frac{3x+1}{8}-2$ $\left[\frac{43}{17}\right]$

**8.** $3-\frac{2x-1}{4}=\frac{4-x}{3}-\frac{5x-1}{5}+\frac{3x-2}{6}$ $\left[-\frac{123}{20}\right]$

**9.** $\frac{x-2}{3}-\frac{4x-1}{10}=\frac{5-x}{6}-x-2$ $\left[-\frac{6}{11}\right]$

**10.** $\frac{3x-2}{8}-\frac{2x+3}{4}=\frac{5x-2}{6}+\frac{3x+1}{-5}$ $\left[-\frac{56}{43}\right]$

**11.** $\frac{3x-\left(x-2\right)}{8}-\frac{3+2\left(x+3\right)}{4}=\frac{5-\left(2x-3\right)}{6}-\frac{\left(x+1\right)3+2}{3}$ $\left[\frac{20}{13}\right]$

**12.** $\frac{3x}{4}-\frac{x-3\left(x-2\right)}{2}-\left(\frac{3-x}{4}-2x+3\right)=-x-2+\frac{5-2\left(x-1\right)}{5}$ $\left[\frac{41}{36}\right]$

**13.** $\frac{3x}{4}-2\left(\frac{3x-2}{2}-\frac{2x+3}{5}\right)=-x-3\left(\frac{4x-1}{2}-\frac{x+3}{4}\right)$ $\left[\frac{11}{96}\right]$

**14.** $\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}\left(\frac{x-2}{2}-2x+3\right)=-x-\frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{5}\right)$ $\left[\frac{67}{66}\right]$

**15.** $\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}\left(\frac{x-2}{2}-2x+3\right)=-x-\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{5}\right)-\frac{4-\left(x-1\right)}{2}-\frac{\left(5x-1\right)3+2}{3}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

Β΄ Τάξη

# Ψηφιακά Escape Rooms

**Δημήτριος Χαρ. Γάτσιος**

**Μαθηματικός *1ο Πρ.Γυμνάσιο Πρέβεζας***

Τα τελευταία χρόνια όλο και πιο συχνά εμφανίζονται δραστηριότητες παιγνιοποίησης κατά τη διδασκαλία μαθηματικών για την ενίσχυση του ενδιαφέροντος και της ενεργής συμμετοχής των μαθητών. Η εργασία αυτή αναλύει τη σχεδίαση και την υλοποίηση δύο ψηφιακών escape rooms που εφαρμόστηκαν στη Β΄ Γυμνασίου, ένα σχετικό με τις εξισώσεις Α΄ βαθμού και ένα σχετικό με συναρτήσεις.

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν στην πλατφόρμα Genially και εφαρμόστηκαν στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου. Οι μαθητές ανά δύο έπρεπε να επιλύσουν διαδοχικούς μαθηματικούς γρίφους ώστε να ολοκληρώσουν την αποστολή του παιχνιδιού – escape room. Αυτό ενίσχυσε το ενδιαφέρον και τη θετική στάση των μαθητών για το μάθημα των Μαθηματικών και προώθησε την ενεργό συμμετοχή και τη συνεργασία μεταξύ τους. **Λέξεις κλειδιά:** Escape room, gamification, ψηφιακή μάθηση, μαθηματική εκπαίδευση.

Κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών χρειάζονται καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις, ψηφιακά εργαλεία και σύγχρονες τεχνικές ώστε να δημιουργείται ένα διαφοροποιημένο περιβάλλον μάθησης άμεσης εμπλοκής, πιο ελκυστικό και ενδιαφέρον για τον μαθητή (Huang et al., 2019).

Η χρήση στοιχείων παιχνιδιού στη διδακτική πράξη για μαθητές Γυμνασίου έχει αρχίσει τα τελευταία χρόνια να απαντάται όλο και πιο συχνά.

Τα escape rooms είναι ουσιαστικά ένα σύνολο από διαδοχικούς γρίφους ή προβλήματα τα οποία οι συμμετέχοντες καλούνται κριτικά να επιλύουν ώστε να προχωρούν σε κάθε επόμενο στάδιο – επίπεδο του παιχνιδιού έως, ότου να ολοκληρώσουν επιτυχώς την αποστολή τους και ουσιαστικά να «δραπετεύσουν» από το «δωμάτιο». Στην εκπαίδευση, οι γρίφοι είναι σχετικοί με την αντίστοιχη ύλη του αναλυτικού προγράμματος και λειτουργούν ως εργαλείο και μέσο εμπέδωσης ή επανάληψης της ύλης. Κατά τη διαδικασία της σχεδίασης των δύο αυτών δραστηριοτήτων τέθηκαν τρεις βασικοί στόχοι:

- Η ουσιαστικότερη και πιο αποδοτική επανάληψη βασικών εννοιών.
- Η ενίσχυση της συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών.
- Η ενεργή συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Για την υλοποίηση των δραστηριοτήτων χρησιμοποιήθηκε η ψηφιακή πλατφόρμα Genially, στην οποία δημιουργήσαμε δύο escape rooms που αντιστοιχούσαν:

**Α)** Στις εξισώσεις Α΄ βαθμού και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων.

**Β)** Στις συναρτήσεις.

Κάθε δραστηριότητα περιλάμβανε μια σειρά μαθηματικών γρίφων - προβλημάτων που έπρεπε σε διαδοχικά βήματα να επιλυθούν ώστε οι μαθητές να φτάσουν στο τελικό στάδιο.

### Α. Για τις εξισώσεις Α΄ βαθμού και προβλήματα που λύνονται με αυτές.

Η πρώτη δραστηριότητα σχεδιάστηκε στο πλαίσιο της επανάληψης των ενοτήτων που αφορούν στις εξισώσεις Α΄ βαθμού αλλά και στα προβλήματα που λύνονται με αυτές. Ουσιαστικά περιλάμβανε 7 μαθηματικούς γρίφους και έναν αντίστοιχο τελικό. Οι μαθητές καλούνταν να λύσουν εξισώσεις ή προβλήματα με εξισώσεις και οι αριθμητικές απαντήσεις – λύσεις χρησιμοποιούνταν για να ξεκλειδώσουν το επόμενο στάδιο – δωμάτιο.

### Β. Για τις συναρτήσεις.

Η δεύτερη δραστηριότητα σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε κατά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου των συναρτήσεων. Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν γρίφους με γραφικές

παραστάσεις συνάρτησης, με υπολογισμό τιμής συνάρτησης ή σύνδεσης συνάρτησης με τη γραφική της παράσταση. Κάθε σωστή λύση χρειάζονταν ώστε να δημιουργηθεί το «κλειδί» του τελικού επιπέδου του παιχνιδιού.

## Εφαρμογή στην τάξη

Αμφότερα τα Escape rooms υλοποιήθηκαν στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου. Οι μαθητές εργάστηκαν ανά ομάδες των δύο. Στόχος ήταν η ενίσχυση της συνεργασίας και της επικοινωνίας μεταξύ τους ώστε να επιτύχουν τον κοινό στόχο· την επίλυση των γρίφων και την επιτυχή ολοκλήρωση της δοκιμασίας. Πράγματι, παρατηρήθηκε καθόλη τη διάρκεια και των δύο escape rooms έντονη συμμετοχή και ενδιαφέρον των μαθητών, ενώ οι περισσότερες ομάδες ανέπτυξαν στρατηγικές συνεργασίας για την επίλυση των προβλημάτων.

Η διάρκεια του κάθε escape room ήταν 35 λεπτά. Δεδομένου ότι οι διδακτικές ώρες είναι 45 λεπτά, οι δραστηριότητες είχαν σχεδιαστεί με τρόπο τέτοιο, ώστε να είναι αρκετή μία διδακτική ώρα, μαζί μάλιστα με τις εισαγωγικές πληροφορίες και κατευθυντήριες γραμμές από μεριάς του εκπαιδευτικού.

## Παρατηρήσεις από την εφαρμογή

Κατά την εφαρμογή των δύο Escape rooms φάνηκε ότι οι μαθητές ανταποκρίθηκαν με αρκετό ενδιαφέρον στη χρήση τους. Σχεδόν το σύνολο των ομάδων και κατ΄ επέκταση των μαθητών συμμετείχαν ενεργά στην όλη διαδικασία και με ενθουσιασμό επιχειρούσαν να επιλύσουν τους γρίφους, γεγονός που συμφωνεί και με την οικεία βιβλιογραφία (Φελεκίδου & Λενακάκης, 2022; Ramírez-Ruiz et al., 2024). Ιδιαίτερη αναφορά χρειάζεται στο ότι οι μαθητές συζητούσαν, επικοινωνούσαν και αντάλλασσαν ιδέες και προτάσεις προς τον κοινό στόχο, γεγονός που συνέβαλλε στην ανάπτυξη της συνεργατικής μάθησης. Πράγματι, λοιπόν, η αρχική σκέψη για μία δραστηριότητα η οποία θα λειτουργήσει ως ευχάριστος και πιο αποδοτικός τρόπος επανάληψης της διδαχθείσας ύλης, απέδωσε.

## Η γνώμη των μαθητών

Πέραν της προσωπικής αποτίμησης των δύο διαφορετικών εφαρμογών από τον εκπαιδευτικό, ζητήθηκε κάτι αντίστοιχο και από την πλευρά των μαθητών, κυρίως ως ανατροφοδότηση. Σε μία Google φόρμα, με ερωτήσεις κλίμακας Likert αλλά και ανοιχτού τύπου, οι 60 μαθητές ανώνυμα και εθελοντικά αποτύπωσαν τη δική τους γνώμη απέναντι σε αυτό το ψηφιακό εργαλείο και τρόπο μάθησης ή/και ανακεφαλαίωσης της ύλης.

Ειδικότερα, στην ερώτηση «*Πόσο σου άρεσε η δραστηριότητα με το Escape Room*» το 58,3% απάντησε «πάρα πολύ» ενώ ένα αντίστοιχο 16,7% απάντησε «πολύ», προσφέροντας ένα 75% στις θετικές γνώμες. Υψηλότερα ποσοστά στις απαντήσεις «πάρα πολύ» και «πολύ» καταγράφηκαν στην ερώτηση «*πόσο διασκεδαστική τη βρήκες*;» με ποσοστά 46,7% και 33,3%, αντίστοιχα. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός ότι στην ερώτηση «*τι σε βοήθησε περισσότερο να λύσεις τους γρίφους*» το 73,3% απάντησε «η ομάδα μου», γεγονός που φανερώνει την κατανόηση και την υιοθέτηση της αξίας της συνεργασίας.

Επιπλέον, στην ερώτηση «*Ποιες (μαθηματικές) δεξιότητες πιστεύεις ότι βελτίωσες μέσα από το Escape Room;*» η οποία έδινε τη δυνατότητα περισσότερων της μίας απαντήσεις, 40 μαθητές απάντησαν «Λογική σκέψη», ενώ από 36 μαθητές σημειώθηκαν οι απαντήσεις «Συνεργασία» και «επίλυση προβλημάτων». Αξιοσημείωτο και λόγω του συστήματος εξετάσεων των ελληνικών σχολείων είναι οι 21 μαθητές που απάντησαν στην προηγούμενη ερώτηση «διαχείριση χρόνου».

Ακόμη, σε ερώτηση ανοιχτού τύπου για προτάσεις βελτίωσης ή προσθήκες σε μελλοντικά escape rooms, 46 μαθητές ζήτησαν περισσότερα βραβεία, 22 θα ήθελαν περισσότερους γρίφους, 16 διαφορετικό τύπο δραστηριοτήτων και 10 μαθητές περισσότερο χρόνο.

Τέλος, αναφορικά με την ερώτηση που αφορούσε το κατά πόσο βοηθήθηκαν στο να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες, το 63,4% απάντησε «πάρα πολύ» και «πολύ». Όμως, υπήρχε ένα ποσοστό

28,3% που απάντησε «μέτρια», γεγονός που φανερώνει ότι πράγματι, μία τέτοια δραστηριότητα είναι πιο αποδοτική και βοηθητική –πιθανώς- ως επανάληψη-ανακεφαλαίωση και όχι ως μέρος της κατανόησης-διδασκαλίας (Huang et al., 2019).

## Συμπεράσματα

Συνυπολογίζοντας την προσωπική άποψη που σχημάτισε ο εκπαιδευτικός, τις ανατροφοδοτικές απαντήσεις των μαθητών αλλά και τις όποιες αντίστοιχες έρευνες υπάρχουν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, πράγματι, η χρήση των μαθηματικών ψηφιακών escape rooms μπορεί να αποτελέσει μία άκρως ενδιαφέρουσα διδακτική πρακτική η οποία ενισχύει σε σημαντικό βαθμό το ενδιαφέρον και τη συμμετοχή των μαθητών. Επιπλέον, η παραπάνω εμπειρία έδειξε πως οι μαθητές ανταποκρίνονται με θετικό πρόσημο σε δραστηριότητες που συνδυάζουν τη μάθηση και την ύλη με στοιχεία ψηφιακού παιχνιδιού γρίφων. Πέραν τούτων, αντίστοιχες δραστηριότητες μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη ενός πιο ενεργού και συνεργατικού περιβάλλοντος αλλά και κουλτούρας μάθησης. Τέλος, στην παρούσα –περιορισμένης έκτασης – μελέτη, φάνηκε ότι δραστηριότητες ψηφιακού escape room στα Μαθηματικά της Β΄ Γυμνασίου αποδίδουν καλύτερα ως εργαλεία επανάληψης παρά ως αντίστοιχα μάθησης και κατάκτησης της νέας γνώσης.

## Βιβλιογραφικές αναφορές

**Φελεκίδου, Μ., & Λενακάκης, Α. (2022).** *Gamification in education: A literature review*. Education Sciences, 12(7), 456.

**Huang, B., Hew, K. F., & Lo, C. K. (2019).** *Investigating the effects of gamification in mathematics learning*. Educational Technology Research and Development, 67(3), 675–705.

**Piñero Charlo, J. C. (2020).** *Educational escape rooms as a tool for horizontal mathematization: Learning process evidence*. Education Sciences, 10(9), 213.

**Ramírez-Ruiz, M., Vargas-Sánchez, A., & Boude-Figueredo, J. (2024).** *The impact of gamification on school engagement: A systematic review*. Frontiers in Education, 9, Article 1466926.

**Οι δραστηριότητες είναι διαθέσιμες στα ακόλουθα QR codes:**



# Μαθηματικά Εργαλεία για τη Γ' Γυμνασίου

**Λαγουτάρη Λία, Γρυπάρης Παντελής**

Καλώς ήρθατε στη Γ' Γυμνασίου! Η χρονιά αυτή αποτελεί ένα κρίσιμο και συναρπαστικό σκαλοπάτι στη μαθηματική σας διαδρομή, καθώς προετοιμάζει το έδαφος για νέες, πιο σύνθετες έννοιες. Για να ξεκινήσετε με αυτοπεποίθηση και σιγουριά τη νέα ύλη, είναι απαραίτητο να έχετε στις «αποσκευές» σας γερά θεμέλια από τις προηγούμενες τάξεις.

Σε αυτό το αρχείο έχουμε συγκεντρώσει τα πιο βασικά μαθηματικά εργαλεία, τους κανόνες και τις τεχνικές που θα αποτελέσουν τον καθημερινό σας σύμμαχο. Για να γίνει η επανάληψη ακόμα πιο εύκολη και ουσιαστική, κάθε ενότητα συνοδεύεται από πρακτικά παραδείγματα που θα σας βοηθήσουν να φρεσκάρετε τη μνήμη σας.

Ας δούμε αναλυτικά τα πιο σημαντικά εφόδια που θα χρειαστείτε για το νέο σας ξεκίνημα:

**1. Πράξεις με Ρητούς Αριθμούς**

- Πρόσθεση και Αφαίρεση: Όταν οι αριθμοί έχουν ίδιο πρόσημο, κάνουμε πρόσθεση και κρατάμε το κοινό πρόσημο. Όταν έχουν διαφορετικό πρόσημο, κάνουμε αφαίρεση και βάζουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού κατά απόλυτη τιμή.
  Παραδείγματα: (+5) + (+3) = +8, (-4) - (+2) = -6
- Πολλοί αριθμοί: Αν έχουμε πολλούς αριθμούς, προσθέτουμε πρώτα όλους τους θετικούς, μετά όλους τους αρνητικούς και στο τέλος κάνουμε αφαίρεση μεταξύ των δύο αποτελεσμάτων.
  Παράδειγμα: -2 + 5 - 3 + 8 = (5 + 8) - (2 + 3) = 13 - 5 = 8
- Αντίθετοι αριθμοί: Αν υπάρχουν αντίθετοι αριθμοί σε ένα άθροισμα, τους διαγράφουμε εξαρχής, καθώς το άθροισμά τους είναι μηδέν.
  Παράδειγμα: 5 - 3 + 2 - 5 = -3 + 2 = -1
- Γινόμενο πολλών παραγόντων: Για να βρούμε το πρόσημο σε πολλαπλασιασμό πολλών αριθμών, μετράμε τα αρνητικά πρόσημα (-). Αν ο αριθμός των (-) είναι άρτιος, το αποτέλεσμα είναι θετικό (+), ενώ αν είναι περιττός, το αποτέλεσμα είναι αρνητικό (-).
  Παράδειγμα: (+3)·(–1)·(–2)·(+1)·(–5)·(–10) = +300 (επειδή έχουμε 4 μείον). (+3)·(–1)·(+2)·(+1)·(–5)·(–10) = –300 (επειδή έχουμε 3 μείον).

**2. Αλγεβρικοί Χειρισμοί, Παρενθέσεις και Προτεραιότητα Πράξεων**

- Απαλοιφή παρενθέσεων με πρόσθεση/αφαίρεση: Αν μια παρένθεση έχει μπροστά (+) ή τίποτα, διώχνουμε την παρένθεση και γράφουμε τους αριθμούς με τα ίδια πρόσημα. Αν έχει μπροστά (-), διώχνουμε την παρένθεση και το (-) και γράφουμε τους αριθμούς με τα αντίθετα πρόσημα.
  Παράδειγμα: +(2x - 3) = 2x - 3, -(2x - 3) = -2x + 3
- Επιμεριστική ιδιότητα: Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της σύμβολο πολλαπλασιασμού, κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα (π.χ. α.(β+γ)=α.β+α.γ).
  Παράδειγμα: 3(x+1) = 3x+3, –3(x+1) = –3x–3, –3(x–1) = –3x+3
- Αγκύλες: Όταν έχουμε παρένθεση μέσα σε αγκύλη, διώχνουμε πρώτα την παρένθεση και στη συνέχεια μετατρέπουμε την αγκύλη σε παρένθεση.
  Παράδειγμα: 2 - [3 - (x + 1)] = 2 - [3 - x - 1] = 2 - [2 - x] = 2 - 2 + x = x
- Προτεραιότητα πράξεων: Πρώτα γίνονται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις και έπειτα οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις.
  Παράδειγμα:
  5 + 2·3 = 5 + 6 = 11 (και όχι 7·3 = 21)

**3. Πράξεις με Κλάσματα**

- **Πρόσθεση και Αφαίρεση: Για να γίνουν αυτές οι πράξεις, τα κλάσματα πρέπει να είναι ομώνυμα. Αν είναι ετερώνυμα, βρίσκουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο**

**(Ε.Κ.Π.) των παρονομαστών. Παράδειγμα:**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\overset{3}{\cancel{1}}}{2}+\frac{\overset{2}{\cancel{1}}}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

- Πολλαπλασιασμός: Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή. **Δεν κάνουμε ποτέ χιαστί.** Απλοποιούμε, αν γίνεται. Παραδείγματα:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{8}=\frac{4\cdot 14}{7\cdot 8}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}=\frac{2}{2}=1$$

- Διαίρεση: Αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό αντί για διαίρεση. Απλοποιούμε, αν γίνεται. Παράδειγμα:

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

**4. Τεχνικές Υπολογισμών**

- Εύρεση Ε.Κ.Π. με το μυαλό: Για να βρούμε γρήγορα το Ε.Κ.Π., παίρνουμε τον μεγαλύτερο αριθμό και ελέγχουμε αν οι μικρότεροι χωράνε ακριβώς σε αυτόν. Αν όχι, διπλασιάζουμε ή τριπλασιάζουμε τον μεγαλύτερο αριθμό μέχρι να βρούμε τον κατάλληλο αριθμό που να χωράει ακριβώς στους υπόλοιπους. Παράδειγμα: Ε.Κ.Π. (3, 4, 8). Μεγαλύτερος είναι ο αριθμός 8. Το 4 χωράει στο 8, αλλά το 3 όχι. Διπλασιάζουμε (2·8 = 16) το 4 χωράει στο 16, το 3 όχι. Τριπλασιάζουμε (3·8 = 24) το 3 χωράει (3·8=24) και το 4 χωράει (4·6=24). Άρα Ε.Κ.Π. (3, 4, 8) = 24.

**5. Βασικές Γνώσεις Γεωμετρίας (από Α' και Β' Γυμνασίου)**

- Πυθαγόρειο Θεώρημα: Το σημαντικότερο εργαλείο για τα ορθογώνια τρίγωνα. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας (η μεγαλύτερη πλευρά, απέναντι από την ορθή γωνία) ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών ($\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$). Παράδειγμα: Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές είναι 3 cm και 4 cm, για να βρούμε την υποτείνουσα (x) κάνουμε:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 9 + 16$$
$$x^2 = 25$$

Άρα, x = 5 cm (αφού $5^2 = 25$ και $(-5)^2=25$, όμως η πλευρά ενός τριγώνου πρέπει να είναι θετικός αριθμός).

- Άθροισμα Γωνιών Τριγώνου & Είδη Τριγώνων: Το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι πάντα 180°. Στο ισοσκελές τρίγωνο, οι προσκείμενες γωνίες της βάσης είναι ίσες. Στο ισόπλευρο τρίγωνο, όλες οι πλευρές είναι ίσες και όλες οι γωνίες είναι από 60°.

Παράδειγμα: Αν σε ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις δύο γωνίες, π.χ. 50° και 60°, η τρίτη γωνία θα είναι: 180° - (50° + 60°) = 180° - 110° = 70°.

- Βασικά Ζευγάρια Γωνιών (Συμπληρωματικές, Παραπληρωματικές, Κατακορυφήν): **Συμπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90°.

**Παραπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180°.

**Κατακορυφήν** είναι οι γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες, και είναι πάντα ίσες μεταξύ τους. Παράδειγμα: Αν μια γωνία είναι 40°, η συμπληρωματική της είναι 50° (90° - 40°) και η παραπληρωματική της 140° (180° - 40°).

- **Μήκος Κύκλου**: Το μήκος (περίμετρος) του κύκλου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$L = 2\cdot\pi\cdot\rho$$

**Εμβαδόν Κυκλικού Δίσκου:** Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \pi\cdot\rho^2$$

(όπου ρ η ακτίνα του κύκλου και $\pi \approx 3{,}14$). Παράδειγμα: Ένας κύκλος με ακτίνα ρ = 3 cm, έχει μήκος L = 2·π·3 = 6π cm και εμβαδόν E = π·3² = 9π cm².

- Εμβαδά Βασικών Σχημάτων:

Ορθογώνιο:

$$E = \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\cdot\acute{\upsilon}\psi\circ\varsigma\ (E = \alpha\cdot\beta)$$

Τρίγωνο:

$$E = \frac{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\cdot\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\circ\iota\chi\circ\ \acute{\upsilon}\psi\circ\varsigma)}{2}$$

Παράδειγμα: Ένα τρίγωνο με βάση 6 cm και ύψος 4 cm έχει εμβαδόν (6 · 4) / 2 = 24 / 2 = 12 cm².

Γ΄ Τάξη

# ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

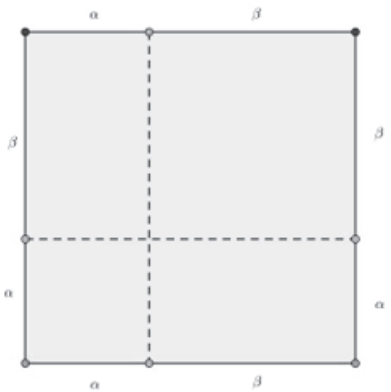
**Αναστάσιος Κρατημένος, Βηθλεέμ Δέσποινα Ξύδη**

## Τι κρύβεται πίσω από μια ταυτότητα;

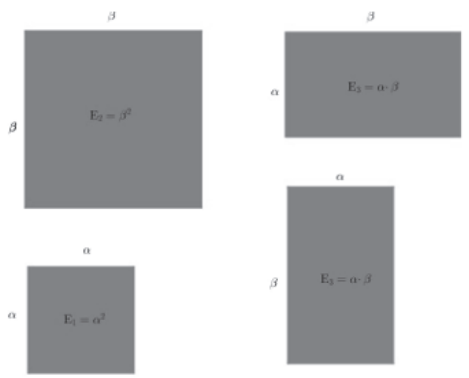
*Από τη Γεωμετρία στους τύπους και στην επίλυση προβλημάτων*

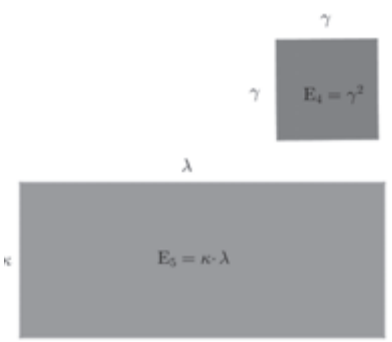
### Ας παίξουμε…!

Στο παρακάτω γεωμετρικό παζλ, έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς $(\alpha + \beta)$, καθώς επίσης μερικά χρωματιστά τετράγωνα και ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαφόρων διαστάσεων.

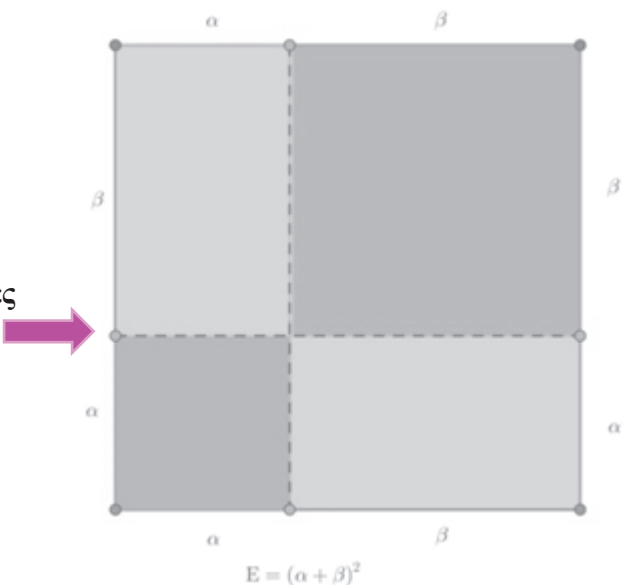



**Με ποια σχήματα και με ποιόν τρόπο μπορούμε να καλύψουμε πλήρως το αρχικό τετράγωνο;**




**Με λίγη παρατηρητικότητα και κάποιες δοκιμές, θα οδηγηθούμε εδώ.**




**Παρατηρούμε ότι:**

Το αρχικό τετράγωνο έχει εμβαδόν: $E_{τετραγώνου} = (\alpha + \beta)^2$

Τα χρωματιστά τετράγωνα και ορθογώνια που κάλυψαν το αρχικό τετράγωνο έχουν εμβαδά:

$$E_{πορτοκαλί} = \alpha^2, \quad E_{μπλέ} = \beta^2, \quad E_{πράσινου} = \alpha \cdot \beta$$

Τα 4 αυτά σχήματα, είδαμε ότι κάλυψαν πλήρως το τετράγωνο, άρα φαίνεται λογικό να ισχύει ότι:

$$E_{τετραγώνου} = E_{πορτοκαλί} + 2 \cdot E_{πράσινου} + E_{μπλέ}$$

το οποίο μας οδηγεί στην ισότητα: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
Η παραπάνω ισότητα λέγεται **ταυτότητα** και επαληθεύεται (αληθεύει) για οποιαδήποτε τιμή και αν πάρουν οι μεταβλητές α και β.

**Ορισμός**

**Ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται και τα δύο μέλη της.

**Για παράδειγμα**
Η ισότητα $2(x+y)=2x+2y$ είναι ταυτότητα, διότι επαληθεύεται για κάθε τιμή που μπορούν να πάρουν τα x, y.
Ενώ, η ισότητα $x-y=2$ επαληθεύεται για $x=5,\ y=3$
$x=10,\ y=8$
$x=21,\ y=19$
Αλλά δεν επαληθεύεται για $x=12,\ y=1$. Άρα **δεν** είναι ταυτότητα.
Υπάρχουν πολλές ταυτότητες, αλλά εμείς θα μελετήσουμε ορισμένες **χαρακτηριστικές - αξιοσημείωτες** που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στις επόμενες τάξεις.

**Αξιοσημείωτες Ταυτότητες**

**Α) Τετράγωνο αθροίσματος** $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

**Απόδειξη**
$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$
$=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2$
$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Στην αρχή, είδαμε την γεωμετρική προσέγγιση της ταυτότητας, ενώ τώρα έχουμε την αλγεβρική απόδειξη.

**Για παράδειγμα**

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$$

i. $(2x^2+3x)^2=(2x^2)^2+2\cdot(2x^2)\cdot(3x)+(3x)^2=4x^4+12x^3+9x^2$

ii. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^2=(x^2)^2+2\cdot(x^2)\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^4+2x+\frac{1}{x^2}$

iii. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+2+\frac{1}{x}$

**Β) Τετράγωνο διαφοράς** $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

**Απόδειξη**
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

**Για παράδειγμα**

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(x-3)^2=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2-6x+9$$

i. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2=(x^2)^2-2\cdot(x^2)\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^4-2x+\frac{1}{x^2}$

ii. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x-2+\frac{1}{x}$

**Γ) Κύβος αθροίσματος** $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

**Απόδειξη**

$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$
$=\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

**Για παράδειγμα**

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$(x+3)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$$

i. $(x+3)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3=x^3+9x^2+27x+27$

ii. $(2x+3y)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(3y)+3\cdot(2x)\cdot(3y)^2+(3y)^3$
$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

**Δ) Κύβος διαφοράς** $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

**Απόδειξη**

$(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta)=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)$
$=\alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha-\beta^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

**Ε) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

**Για παράδειγμα**

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

$$(x+3)(x-3)=x^2-3^2$$

*i.* $(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

*ii.* $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-(\sqrt{y})^2=x-y$

*iii.* $\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)=\left(2\sqrt{x}\right)^2-(3\sqrt{y})^2=4x-9y$

**Πού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες;**

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

i. $101\cdot 99=(100+1)(100-1)=100^2-1^2=10.000-1=9.999$

ii. $1005\cdot 995=(1000+5)(1000-5)=1000^2-5^2=1.000.000-25=999.975$

Υπάρχει μία πληθώρα από παρόμοια παραδείγματα που δείχνουν την σημασία της χρήσης των ταυτοτήτων. Η γνώση και χρήση ταυτοτήτων είναι ιδιαίτερα σημαντική και στις τάξεις του Λυκείου.

**Άλλες ταυτότητες**

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

**Απόδειξη**

Ξεκινάω από το 1ο μέλος της ισότητας και με διαδοχικές ισότητες θα καταλήξω στο 2ο μέλος.

**1ο τρόπος**

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma\beta+\gamma^2$
$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

**2ος τρόπος**

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=[(\alpha+\beta)+\gamma]^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$
$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

***Σχόλιο:*** *Στην παραπάνω απόδειξη, κάναμε χρήση της ταυτότητας* $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ *θεωρήσαμε ως πρώτο όρο το* $(\alpha+\beta)$ *και ως δεύτερο όρο το* $\gamma$

**Προσπάθησε να δείξεις με γεωμετρικό τρόπο ότι αληθεύει η παραπάνω ταυτότητα.**

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$$

**Απόδειξη**

$$\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)}_{\text{A}}=\underbrace{(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2}_{\text{B}}$$

$$A=(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\Gamma$$

$$B=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2=\alpha^2x^2+2\alpha x\beta y+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-2\alpha y\beta x+\beta^2x^2=\Gamma$$

Είναι αντίθετα, άρα διαγράφονται!

**Άρα έχουμε ότι:**

$$\left.\begin{matrix}A=\cdots=\Gamma\\ B=\cdots=\Gamma\end{matrix}\right\}\ \text{οπότε } A=B \text{ (τα δεξιά μέλη είναι ίσα, άρα και τα αριστερά)}$$

**Σημείωση:** Η ταυτότητα που μόλις αποδείξαμε λέγεται ταυτότητα Lagrange!

**Σημεία - Επισημάνσεις!**

$$(-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{2}}=[-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})]^{\mathbf{2}}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{2}}$$

Προσέχουμε ότι το **(-)** «φεύγει», καθώς υψώνουμε σε άρτια δύναμη.

1. $(-\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{2}}=[-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})]^{\mathbf{2}}=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{2}}$

Όμως

$$(-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{3}}=[-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})]^{\mathbf{3}}=-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{3}}$$

Προσέχουμε ότι το **(-)** «παραμένει», καθώς υψώνουμε σε περιττή δύναμη.

2. $(-\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{3}}=[-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})]^{\mathbf{3}}=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^{\mathbf{3}}$

**Χρήσιμες θα μας φανούν και οι παρακάτω ταυτότητες**

i. $(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$
ii. $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
iii. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
iv. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
v. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
vi. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

**Παράδειγμα**

Α) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

i. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
ii. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Β) Αν $x+\frac{1}{x}=2$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων $x^2+\frac{1}{x^2}$ και $x^3+\frac{1}{x^3}$.

**Λύση**

Α) Για την απόδειξη της ταυτότητας $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, θα ξεκινήσω από το 2ο μέλος και θα οδηγηθώ στο 1ο , καθώς έχω την δυνατότητα να κάνω «εύκολα» πράξεις.

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$$

Όμοια για την επόμενη ταυτότητα έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$$
$$=\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3$$

Β) Είναι σημαντικό να γίνει πλήρως κατανοητό ότι μία ταυτότητα αληθεύει για κάθε επιτρεπτή τιμή των μεταβλητών της, δηλαδή για κάθε τιμή για την οποία ορίζονται και τα δύο μέλη της.

Για να υπολογίσω την τιμή $x^2+\frac{1}{x^2}$ , θα κάνω χρήση της (i) ταυτότητας που αποδείχθηκε.

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

Για $\alpha=x$ και $\beta=\frac{1}{x}$ έχουμε:

$$x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}=2^2-2=4-2=2$$

Δόθηκε ότι $x+\frac{1}{x}=2$

Για να υπολογίσω την τιμή $x^3+\frac{1}{x^3}$ , θα κάνω χρήση της (ii) ταυτότητας που αποδείχθηκε.

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

Για $\alpha=x$ και $\beta=\frac{1}{x}$ έχουμε:

$$x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=2^3-3\cdot1\cdot2=8-6=2$$

Οι αξιοσημείωτες ταυτότητες δεν είναι απλώς τύποι προς απομνημόνευση. Μας επιτρέπουν να αναγνωρίζουμε γνωστές μαθηματικές σχέσεις και να απλοποιούμε υπολογισμούς και αλγεβρικές παραστάσεις.

### *Πρόβλημα 1*

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί.

i. Εάν ισχύει ότι το άθροισμά τους ισούται με 20 και το γινόμενό τους με 91, να υπολογίσετε το άθροισμα των τετραγώνων τους.

ii. Εάν ισχύει ότι η διαφορά τους ισούται με 8 και το γινόμενό τους με 12, να υπολογίσετε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.

iii. Εάν η διαφορά τους ισούται με 5 και το γινόμενο τους με 6, να υπολογίσετε τη διαφορά των κύβων τους.

### *Πρόβλημα 2*

Να αποδείξετε ότι η παράσταση $(x+7)^2-(x+5)^2$ είναι πολλαπλάσιο του 4 για κάθε ακέραιο αριθμό $x$.

### *Πρόβλημα 3*

Να βρεθούν δύο διαδοχικοί θετικοί περιττοί αριθμοί των οποίων η διαφορά των τετραγώνων είναι 48.

### *Πρόβλημα 4*

Να δειχθεί ότι $(\nu+1)^2-(\nu-1)^2=4\nu$ και να εξηγήσετε τι σημαίνει αυτό για κάθε φυσικό αριθμό ν.

### *Πρόβλημα 5*

Εάν $x+\frac{1}{x}=7$ , $x\neq0$ να υπολογίσετε την ποσότητα $x^2+\frac{1}{x^2}$ .

### *Πρόβλημα 6*

Το άθροισμα δύο πραγματικών αριθμών είναι 18, ενώ η διαφορά των τετραγώνων τους είναι 108. Να βρεθούν οι δύο αυτοί αριθμοί.

### *Πρόβλημα 7*

Ένας μαθητής διατύπωσε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ισχύει πάντοτε ότι το τετράγωνο του μεσαίου αριθμού είναι κατά 1 μεγαλύτερο από το γινόμενο του πρώτου και του τρίτου.»

I. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του;

II. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

# Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

## Προκριματικός διαγωνισμών Νέων

### 4 Απριλίου 2026

**Πρόβλημα 1.** **Να λύσετε στους φυσικούς αριθμούς την εξίσωση**

$$(x-y)(xy+3) = 21 - x^2y^2.$$

**Λύση.** Θέτουμε $x-y=s\in\mathbb{Z}$, $xy=t\in\mathbb{N}$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$s(t+3)+t^2=21 \Leftrightarrow s=\frac{21-t^2}{t+3} \Leftrightarrow s=\frac{12-(t^2-9)}{t+3} \Leftrightarrow s=\frac{12}{t+3}-t+3.$$

Επειδή $x-y=s\in\mathbb{Z}$ και $t+3\geq 3$, έπεται ότι

$$\frac{12}{t+3}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow t+3\in\{3,4,6,12\} \Leftrightarrow t\in\{0,1,3,9\}.$$

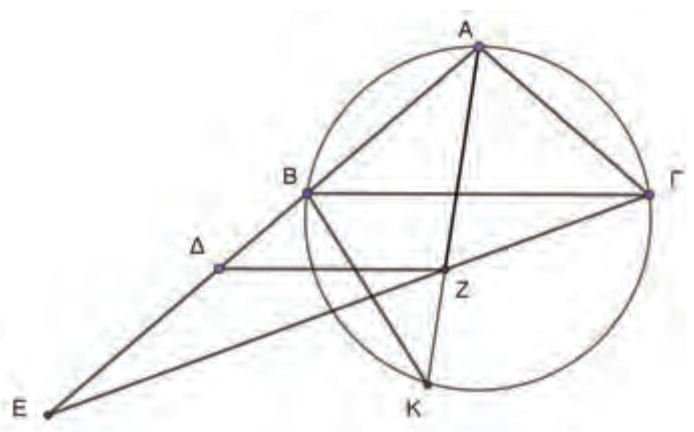
- Αν $t=0$, τότε $s=7$, οπότε προκύπτει το σύστημα
$$x-y=7, xy=0 \Leftrightarrow (x,y)=(7,0).$$
- Αν $t=1$, τότε $s=5$, οπότε προκύπτει το σύστημα
$$x-y=5, xy=1, \text{αδύνατο στο } \mathbb{N}.$$
- Αν $t=3$, τότε $s=2$, οπότε προκύπτει το σύστημα
$$x-y=2, xy=3 \Leftrightarrow (x,y)=(3,1).$$
- Αν $t=9$, τότε $s=-5$, οπότε προκύπτει το σύστημα
$$x-y=-5, xy=9, \text{αδύνατο στο } \mathbb{N}.$$

**Πρόβλημα 2.** **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma<B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $BE=B\Gamma$, και παίρνουμε σημείο Δ πάνω στο τμήμα ΒΕ έτσι ώστε $A\Delta=B\Gamma$. Η παράλληλη ευθεία από το Δ προς την ευθεία ΒΓ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ στο σημείο Ζ. Έστω σημείο Κ στην ημιευθεία ΑΖ τέτοιο ώστε $BK=AZ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Κ είναι ομοκυκλικά.**

**Λύση.** Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $AZ=A\Gamma$. Έχουμε $A\Delta=B\Gamma=BE$, και αφού το Δ βρίσκεται μεταξύ των Β, Ε πάνω στην ευθεία ΑΒΕ, είναι $AB=\Delta E$.

Αφού $BE=B\Gamma$, το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με $B\hat{\Gamma}E=\Gamma\hat{E}B$. Επειδή $\Delta Z \parallel B\Gamma$, έπεται ότι $\Delta\hat{Z}E=B\hat{\Gamma}E=\Gamma\hat{E}B=Z\hat{E}\Delta$. Άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές με $\Delta Z=\Delta E=AB$.




Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ είναι ίσα (Κριτήριο Π-Γ-Π), αφού έχουν:

1. $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$ (από υπόθεση).
2. $\text{ΔΖ} = \text{ΑΒ}$ (το αποδείξαμε παραπάνω).
3. $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ζ} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά).

Άρα θα έχουν και $\text{ΑΖ} = \text{ΑΓ}$. Συνεπώς, ισχύει $\text{ΒΚ} = \text{ΑΖ} = \text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}$, και άρα

$$\text{Β}\hat{\text{Κ}}\text{Α} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Κ} = \Delta\hat{\text{Α}}\text{Ζ} = \text{Β}\hat{\Gamma}\text{Α}.$$

Συνεπώς, τα σημεία Α, Β, Γ, Κ είναι ομοκυκλικά.

**Πρόβλημα 3.** **Έστω πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma$ τέτοιοι ώστε**

$$\boldsymbol{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6.}$$

**Να αποδείξετε ότι**

$$(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1)(|\gamma| - 1)(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| - 4) \geq 0.$$

**Λύση.** Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 6 + 2(-3) = 0,$$

οπότε $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

**Ισχυρισμός 1.** Ισχύει $\alpha^2 - 4 \leq 0$.

**(1ος τρόπος απόδειξης του ισχυρισμού 1).** Έχουμε

$$\beta + \gamma = -\alpha \text{ και } \beta^2 + \gamma^2 = 6 - \alpha^2.$$

Έτσι, η γνωστή ανισότητα $(\beta + \gamma)^2 \leq 2(\beta^2 + \gamma^2)$ γράφεται

$$(-\alpha)^2 \leq 2(6 - \alpha^2)$$

η οποία δίνει

$$\alpha^2 \leq 12 - 2\alpha^2,$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha^2 - 4 \leq 0.$$

**(2ος τρόπος απόδειξης του ισχυρισμού 1).** Έχουμε $\beta\gamma = -\alpha(\beta + \gamma) - 3 = \alpha^2 - 3$, οπότε οι αριθμοί $\beta, \gamma$ είναι ρίζες του τριωνύμου $x^2 + \alpha x + a^2 - 3$, Τότε η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού θα πρέπει να είναι $\Delta \geq 0$. Είναι $\Delta = \alpha^2 - 4(\alpha^2 - 3) = 3(4 - \alpha^2)$, οπότε πρέπει

$$\alpha^2 - 4 \leq 0.$$

■

**Ισχυρισμός 2.** Ισχύει

$$(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1)(|\gamma| - 1) \leq 0.$$

**Απόδειξη του ισχυρισμού 2.** Έχουμε

$$(\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1) = (\beta\gamma)^2 - (\beta^2 + \gamma^2) + 1 = (\alpha^2 - 3)^2 + \alpha^2 - 5 = (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)$$

οπότε

$$(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1) = (\alpha^2 - 1)^2(\alpha^2 - 4) \leq 0.$$

Αφού $x^2 - 1 = (|x| + 1)(|x| - 1)$ και $|x| + 1 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x$, έπεται ότι

$$(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1)(|\gamma| - 1) \leq 0.$$

**Ισχυρισμός 3.** Ισχύει

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \leq 4.$$

**Απόδειξη του ισχυρισμού 3.**

Παραπάνω δείξαμε ότι $\alpha^2 - 4 \leq 0$.

Συνεπώς, $|\alpha| \leq 2$. Ομοίως ισχύει $|\beta| \leq 2$ και $|\gamma| \leq 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Αφού $\alpha + \beta + \gamma = 0$, έχουμε τις περιπτώσεις:

(1) $\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma$. Τότε

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -\alpha + \beta + \gamma = -2\alpha = 2|\alpha| \leq 2 \cdot 2 = 4.$$

(2) $\alpha \leq \beta \leq 0 \leq \gamma$. Τότε

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -\alpha - \beta + \gamma = 2\gamma = 2|\gamma| \leq 2 \cdot 2 = 4. \quad ■$$

Η ζητούμενη ανισότητα έπεται άμεσα από τον ισχυρισμό 2 και τον ισχυρισμό 3.

**Πρόβλημα 4.**

**Στο $6 \times 6$ πλέγμα του διπλανού σχήματος είναι γραμμένοι οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 36. Δύο τετράγωνα του πλέγματος είναι γειτονικά αν έχουν μία κοινή πλευρά. Ένα ρομπότ ξεκινάει από το τετράγωνο με τον αριθμό 1 και κινούμενο καταλήγει στο τετράγωνο με τον αριθμό 6, ακολουθώντας τους εξής κανόνες:**

**1. Το ρομπότ από το τετράγωνο που βρίσκεται μπορεί να κινείται σε οποιοδήποτε γειτονικό τετράγωνο.**

**2. Το ρομπότ δεν μπορεί να περάσει δύο φορές από το ίδιο τετράγωνο.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 7 | 30 | 15 | 33 |
| 29 | 2 | 21 | 8 | 31 | 16 |
| 11 | 28 | 3 | 22 | 9 | 32 |
| 34 | 12 | 27 | 4 | 23 | 10 |
| 17 | 19 | 13 | 26 | 5 | 24 |
| 35 | 18 | 36 | 14 | 25 | 6 |

**(α) Να προσδιορίσετε το μέγιστο δυνατό άθροισμα που μπορούν να έχουν τα τετράγωνα μιας έγκυρης διαδρομής.**

**( β) Αντιγράψτε το πλέγμα στο γραπτό σας, και σχεδιάστε πάνω στο πλέγμα μία τέτοια διαδρομή που να επιτυγχάνει αυτό το μέγιστο άθροισμα.**

Λύση. Χρωματίζουμε το $6 \times 6$ πλέγμα εναλλάξ με μαύρο και λευκό χρώμα, σαν μια σκακιέρα. Ας υποθέσουμε ότι το τετράγωνο με το 1 (πάνω αριστερά) είναι Μαύρο. Τότε το τετράγωνο τερματισμού, το 6 (κάτω δεξιά), είναι επίσης Μαύρο, οπότε το ρομπότ καταλήγει στο ίδιο χρώμα από το οποίο ξεκίνησε.

Σε κάθε κίνηση το ρομπότ αλλάζει χρώμα τετραγώνου. Άρα κάθε διαδρομή που ξεκινά και τελειώνει στο ίδιο χρώμα περνά από περιττό πλήθος τετραγώνων. Επομένως δεν μπορεί να περάσει και από τα 36 τετράγωνα, οπότε μπορεί να περάσει το πολύ από 35 από αυτά.

Μια διαδρομή 35 τετραγώνων που ξεκινάει και τελειώνει σε Μαύρο, θα περάσει αναγκαστικά από 18 Μαύρα και 17 Λευκά τετράγωνα. Αφού το πλέγμα έχει συνολικά 18 Μαύρα και 18 Λευκά τετράγωνα, το ρομπότ θα περάσει από όλα τα Μαύρα και θα αφήσει έξω ακριβώς ένα Λευκό τετράγωνο.

Για να είναι το τελικό άθροισμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, το Λευκό τετράγωνο που θα παραλείψουμε πρέπει να έχει τη μικρότερη δυνατή τιμή.

- Όλοι οι αριθμοί από το 1 έως το 18 βρίσκονται αποκλειστικά σε Μαύρα τετράγωνα.
- Όλοι οι αριθμοί από το 19 έως το 36 βρίσκονται αποκλειστικά σε Λευκά τετράγωνα.

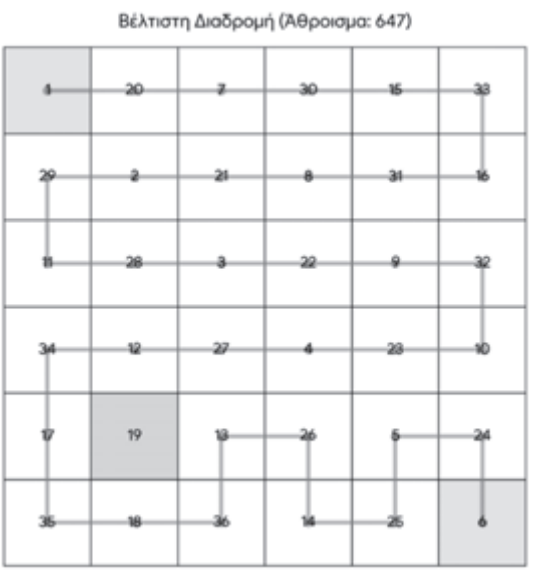
Επομένως, το τετράγωνο που πρέπει να παραλείψουμε είναι το Λευκό τετράγωνο με τη μικρότερη τιμή, δηλ. το 19.

Το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως το 36 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$S = 1 + 2 + \cdots + 36 = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666.$$

Αφού η διαδρομή μας παραλείπει μόνο το 19, το μέγιστο δυνατό άθροισμα των τετραγώνων από τα οποία θα περάσει το ρομπότ είναι: $666 - 19 = 647$.

**(β)** Μια βέλτιστη διαδρομή, φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



# Η 30η Βαλκανική μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων

Η 30η ΒΜΟΝ πραγματοποιήθηκε από 15 έως 20 Ιουνίου 2026 στην πόλη Buzau της Ρουμανίας. Συμμετείχαν έντεκα χώρες της Νοτιοανατολικής Ευρώπης και δώδεκα επισκέπτριες χώρες από την Ευρώπη και την Ασία, οι οποίες συμμετείχαν ανεπίσημα.

Η Ελληνική ομάδα κατέκτησε **ένα Αργυρό** και **τρία Χάλκινα Μετάλλια** συνεχίζοντας τη μεγάλη παράδοση των επιτυχιών των Ελληνικών ομάδων στις Βαλκανικές και Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες και δημιουργώντας υψηλές προσδοκίες για ακόμη μεγαλύτερες επιτυχίες τα επόμενα χρόνια.

| ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ | ΣΧΟΛΕΙΟ | ΜΕΤΑΛΛΙΟ |
|---|---|---|
| **Κωτούλα Άννα** | Βαρβάκειο Πρότυπο Γυμνάσιο | Αργυρό Μετάλλιο |
| **Μισθός Αλέξανδρος** | Κολλέγιο Αθηνών | Χάλκινο Μετάλλιο |
| **Γιουβανόπουλος Εμμανουήλ** | Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη | Χάλκινο Μετάλλιο |
| **Μίαρης- Κοιλάδης Δημήτριος** | Πρότυπο Γυμνάσιο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης | Χάλκινο Μετάλλιο |
| **Κανδηλάκης Αλέξιος** | 26ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών | Συμμετοχή |
| **Μιχαήλ Κωνσταντίνος** | 1ο Γυμνάσιο Άνω Λιοσίων | Συμμετοχή |

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο πτυχιούχος Πολυτεχνικής Σχολής ΑΠΘ, πρώην χρυσός Ολυμπιονίκης (ΔΜΟ 2017) **Βασίλειος Γεωργιάδης** και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Ελευθέριος Μάστορης**.

Δουλεύοντας σκληρά και συστηματικά τις τελευταίες εβδομάδες και παρακολουθώντας το εντατικό πρόγραμμα των διαδικτυακών μαθημάτων της ΕΜΕ, έφτασαν σε μια μεγάλη επιτυχία. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει όλα τα μέλη της ομάδας. Η συμμετοχή και μόνο σε έναν τέτοιο διεθνή διαγωνισμό είναι τεράστια τιμή και επιτυχία για κάθε διαγωνιζόμενο. Η επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων του διαγωνισμού που ακολουθούν οφείλεται στον υπαρχηγό της αποστολής μαθηματικό Ελευθέριο Μάστορη.



# Πρόβλημα 1

Έστω $a, b, c$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{a^4}{a^2+2b+2c}+\frac{b^4}{b^2+2c+2a}+\frac{c^4}{c^2+2a+2b} \geqslant \frac{3}{5}.$$

**Λύση.** Αφού $2a \leqslant a^2+1$, $2b \leqslant b^2+1$ και $2c \leqslant c^2+1$, έχουμε

$$\text{LHS} \geqslant \frac{a^4}{a^2+b^2+c^2+2}+\frac{b^4}{a^2+b^2+c^2+2}+\frac{c^4}{a^2+b^2+c^2+2}=\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2+2}.$$

Από την ανισότητα Τετραγωνικού–Αριθμητικού Μέσου για τους $a^2, b^2, c^2$, έχουμε

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}.$$

Συνεπώς

$$\frac{a^4}{a^2+2b+2c}+\frac{b^4}{b^2+2c+2a}+\frac{c^4}{c^2+2a+2b} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(a^2+b^2+c^2+2)}.$$

Συμβολίζουμε $S=a^2+b^2+c^2$. Συνδυάζοντας αυτό με την υπόθεση παίρνουμε

$$\frac{S^2}{3(S+2)} \leqslant \frac{3}{5}.$$

Άρα $5S^2 \leqslant 9(S+2) \iff (S-3)(5S+6) \leqslant 0$. Αφού $5S+6>0$, προκύπτει ότι $S-3 \leqslant 0$. Επομένως $a^2+b^2+c^2 \leqslant 3$, που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

*Άλλη λύση.* Από την ανισότητα $\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geqslant \frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}$ για θετικούς $y_i$, έχουμε

$$\frac{(a^2)^2}{a^2+2b+2c}+\frac{(b^2)^2}{b^2+2c+2a}+\frac{(c^2)^2}{c^2+2a+2b} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)+4(a+b+c)}$$

Έστω $S=a^2+b^2+c^2$. Η ανισότητα απλοποιείται στην

$$\text{LHS} \geqslant \frac{S^2}{S+4(a+b+c)}$$

Τώρα $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=3S \implies a+b+c \leqslant \sqrt{3S}$. Αντικαθιστώντας στην εκφώνηση:

$$\frac{3}{5} \geqslant \text{LHS} \geqslant \frac{S^2}{S+4\sqrt{3S}}.$$

Ας ελέγξουμε αν το $S=3$ λειτουργεί ως όριο. Αν θέσουμε $S=3$:

$$\frac{3^2}{3+4\sqrt{3\cdot 3}}=\frac{9}{3+12}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

Αφού η συνάρτηση $f(S)=\dfrac{S^2}{S+4\sqrt{3S}}=\dfrac{S}{1+4\sqrt{3/S}}$ είναι γνησίως αύξουσα για θετικά $S$, η συνθήκη $\dfrac{S^2}{S+4\sqrt{3S}} \leqslant \dfrac{3}{5}$ συνεπάγεται άμεσα $S \leqslant 3$.

# Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη $(a, b)$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $(a+1)$ διαιρεί το $(b+2)$ και $b$ διαιρεί το $2a^2$.

**Απάντηση:** $(2,1)$, $(3,2)$, $(3,18)$ και $(m, 2m)$ για $m \in \mathbb{N}^*$. (Στη λύση, το ζεύγος $(a, b)$ γράφεται $(m, n)$.)

**Λύση.** Ένα ζεύγος $(m, n)$ που ικανοποιεί τις δοσμένες ιδιότητες θα λέγεται *καλό ζεύγος*.

*Λύση 1.* Περίπτωση 1: $n < m$. Τότε $n+2 \leqslant m+1$ το οποίο, σε συνδυασμό με το $m+1 \mid n+2$, συνεπάγεται $n+2 = m+1$, άρα $n = m-1$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη συνθήκη παίρνουμε $m-1 \mid 2m^2$. Αφού $2m^2 = 2(m^2-1)+2 = 2(m-1)(m+1)+2$, αυτό ανάγεται στο $m-1 \mid 2 \implies m-1 \in \{1,2\} \implies m \in \{2,3\}$. Αυτό δίνει τα ζεύγη $(2,1)$ και $(3,2)$, τα οποία είναι και τα δύο καλά ζεύγη.

Περίπτωση 2: $n \geqslant m$. Έστω $k \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε $2m^2 = kn$. Από το $m+1 \mid n+2$ έπεται ότι $m+1 \mid k(n+2) = kn+2k = 2m^2+2k$. Αφού $2m^2 = 2(m^2-1)+2 = 2(m-1)(m+1)+2$, έχουμε $2m^2 \equiv 2 \pmod{m+1}$. Επομένως $m+1 \mid 2k+2$.

Έστω $p \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε $2k+2 = p(m+1)$. Αφού $n \geqslant m$,

$$k = \frac{2m^2}{n} = 2m \cdot \frac{m}{n} \leqslant 2m \implies p = \frac{2k+2}{m+1} \leqslant \frac{4m+2}{m+1} < 4.$$

Άρα $p \in \{1,2,3\}$. Εξετάζουμε κάθε υποπερίπτωση:

• Αν $p = 1$, τότε $2k+2 = m+1$, άρα $2k = m-1$. Αυτό δίνει $4m^2 = 2kn = (m-1)n$. Αφού $\text{ΜΚΔ}(m-1, m^2) = \text{ΜΚΔ}(m-1, 1) = 1$, το $m-1$ πρέπει να είναι διαιρέτης του $4$. Από την άλλη, το $m-1 = 2k$ είναι άρτιος αριθμός, άρα $m \in \{3,5\}$.
Για $m = 3$, παίρνουμε $n = 18$, που δίνει το καλό ζεύγος $(3,18)$.
Για $m = 5$, παίρνουμε $n = 25$, αλλά το ζεύγος $(5,25)$ δεν είναι καλό επειδή $5+1 \nmid 25+2$.

• Αν $p = 2$, τότε $2k+2 = 2(m+1) \implies k = m$. Αντικαθιστώντας στην $2m^2 = kn$ παίρνουμε $2m^2 = mn$, που συνεπάγεται $n = 2m$. Αυτό δίνει την οικογένεια καλών ζευγών $(m, 2m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$.

• Αν $p = 3$, τότε $2k+2 = 3(m+1) \implies 2k = 3m+1$. Αυτό δίνει $4m^2 = 2kn = (3m+1)n$. Αφού $\text{ΜΚΔ}(3m+1, m^2) = \text{ΜΚΔ}(1, m^2) = 1$, το $3m+1$ πρέπει να διαιρεί το $4$. Αφού $m \in \mathbb{N}^*$, έχουμε $3m+1 \geqslant 4$, που αφήνει μόνο $3m+1 = 4 \implies m = 1$. Αν $m = 1$, τότε $n = 1$, αλλά το ζεύγος $(1,1)$ δεν είναι καλό επειδή $1+1 \nmid 1+2$. □

*Λύση 2.* Γράφουμε $n+2 = t(m+1)$ και $2m^2 = kn$, με $t, k$ θετικούς ακεραίους. Τότε $2m^2 - ktm - kt + 2k = 0$. Η διακρίνουσα αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς $m$ είναι

$$\Delta = k^2t^2 + 8kt - 16k = (kt+4)^2 - 16k - 16$$

και πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι $\Delta < (kt+4)^2$, και τα $\Delta$ και $kt+4$ έχουν την ίδια ομοτιμία, οπότε οι δυνατές περιπτώσεις είναι οι εξής.

Περίπτωση 1: $\Delta = (kt+2)^2$. Αυτό δίνει $k(t-4) = 1$, άρα $k = 1$, $t = 5$, που δίνει το καλό ζεύγος $(3,18)$.

Περίπτωση 2: $\Delta = (kt)^2$. Αυτό δίνει $k(t-2) = 0$, άρα $t = 2$, που δίνει τα καλά ζεύγη $(m, 2m)$, με $m$ οποιονδήποτε θετικό ακέραιο.

Περίπτωση 3: $\Delta \leqslant (kt-2)^2$. Αυτό δίνει $k(3t-4) \leqslant 1$, το οποίο είναι δυνατό μόνο για $t=1$. Στην περίπτωση αυτή $\Delta = k^2-8k = s^2 \iff (k-4+s)(k-4-s) = 16$. Αφού οι δύο παράγοντες έχουν την ίδια ομοτιμία, αυτό οδηγεί σε $k-4+s=8,\ k-4-s=2$ ή $k-4+s=k-4-s=4$. Η πρώτη υποπερίπτωση δίνει $k=9$, που οδηγεί στο καλό ζεύγος $(3,2)$, και η δεύτερη υποπερίπτωση δίνει $k=8$, που οδηγεί στο καλό ζεύγος $(2,1)$. □

# Πρόβλημα 3

Έστω $n \geqslant 3$ ακέραιος. Υπάρχουν $n$ χρωματισμένες λάμπες τοποθετημένες σε κύκλο. Πατώντας μία φορά το κουμπί μιας λάμπας, το χρώμα της αλλάζει ως εξής:

$$\text{πράσινο} \to \text{κόκκινο}, \qquad \text{κόκκινο} \to \text{μπλε}, \qquad \text{μπλε} \to \text{πράσινο}.$$

Αρχικά, όλες οι λάμπες είναι κόκκινες. Ο Αλαντίν κάνει κινήσεις στις λάμπες. Κάθε κίνηση αποτελείται από τα ακόλουθα τρία βήματα:

- επιλέγει μία λάμπα $L$, χωρίς να πατήσει το κουμπί της·
- πατά μία φορά το κουμπί της λάμπας που είναι ακριβώς μετά από την $L$ κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού·
- πατά δύο φορές το κουμπί της λάμπας που είναι ακριβώς πριν από την $L$ κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Για κάθε $n$, να προσδιορίσετε τον μέγιστο δυνατό αριθμό λαμπών που μπορούν να είναι ταυτόχρονα πράσινες, έπειτα από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων.

**Απάντηση:**

$$M(n) = \begin{cases} n, & 3 \mid n, \\ n-1, & 3 \nmid n \text{ και το } n \text{ είναι περιττός}, \\ n-2, & 3 \nmid n \text{ και το } n \text{ είναι άρτιος}. \end{cases}$$

**Λύση.** Αντιστοιχίζουμε σε κάθε χρώμα ένα υπόλοιπο modulo 3 ως εξής: κόκκινο $=0$, μπλε $=1$, πράσινο $=2$. Τότε το να πατηθεί το κουμπί μία φορά σημαίνει πρόσθεση του 1 modulo 3, ενώ το να πατηθεί δύο φορές σημαίνει πρόσθεση του 2, που είναι το ίδιο με αφαίρεση του 1 modulo 3.

Όταν το $n$ είναι περιττός, η ακολουθία $0, 2, 4, \ldots, 2(n-1) \pmod n$ διατρέχει όλες τις λάμπες ακριβώς μία φορά. Έτσι, μπορούμε να ονομάσουμε τις λάμπες $w_1, w_2, \ldots, w_n$ με αυτή τη σειρά. Μια κίνηση αλλάζει τότε δύο γειτονικές λάμπες modulo 3 κατά $w_k \mapsto w_k - 1$, $w_{k+1} \mapsto w_{k+1} + 1$, επομένως το άθροισμα $S := w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ είναι αναλλοίωτο mod 3. Αφού όλες οι λάμπες είναι αρχικά κόκκινες, έχουμε $S \equiv 0 \pmod 3$, το οποίο ισχύει για όλες τις διατάξεις. Η συνθήκη αυτή είναι επίσης ικανή, αφού χρησιμοποιώντας κινήσεις της μορφής $(w_k, w_{k+1}) \mapsto (w_k - 1, w_{k+1} + 1)$, μπορούμε να μεταφέρουμε μονάδες γύρω από τον κύκλο. Επομένως, κάθε διάταξη με $S \equiv 0 \pmod 3$ είναι εφικτή. Μένει να μεγιστοποιήσουμε τον αριθμό των πράσινων λαμπών. Αν και οι $n$ λάμπες είναι πράσινες, τότε το συνολικό άθροισμα είναι $2n$, που είναι $0 \bmod 3$ όταν $3 \mid n$. Άρα, αν $3 \mid n$, τότε όλες οι λάμπες μπορούν να είναι πράσινες, διαφορετικά μπορούμε να επιτύχουμε μόνο $n-1$ πράσινες λάμπες, επιλέγοντας την $n$-οστή να είναι κόκκινη ή μπλε, ανάλογα με το $n \bmod 3$. Έπεται για περιττό $n$ ότι $M(n) = n$ όταν $3 \mid n$ και $M(n) = n-1$ αν $3 \nmid n$.

Όταν το $n$ είναι άρτιος, χρωματίζουμε επιπλέον τις λάμπες εναλλάξ με μαύρο και λευκό. Παρατηρούμε ότι αν ο Αλαντίν επιλέξει μια μαύρη λάμπα, τότε οι επηρεαζόμενοι γείτονές της είναι λευκοί και αντίστροφα. Αυτό δείχνει ότι οι μαύρες και οι λευκές λάμπες σχηματίζουν δύο ομάδες που εξελίσσονται ανεξάρτητα, καθεμία από τις οποίες περιέχει $m := n/2$ λάμπες. Σε κάθε μία από αυτές τις ομάδες το συνολικό άθροισμα είναι αναλλοίωτο mod 3 και αρχικά 0, και ισχύει το ίδιο επιχείρημα με παραπάνω. Ως αποτέλεσμα, σε κάθε ομάδα των $m$ λαμπών παίρνουμε $m$ πράσινες λάμπες όταν $3 \mid n$ και $m-1$ διαφορετικά. Έπεται για άρτιο $n$ ότι $M(n) = n$ όταν $3 \mid n$ και $M(n) = n-2$ αν $3 \nmid n$. □

# Πρόβλημα 4

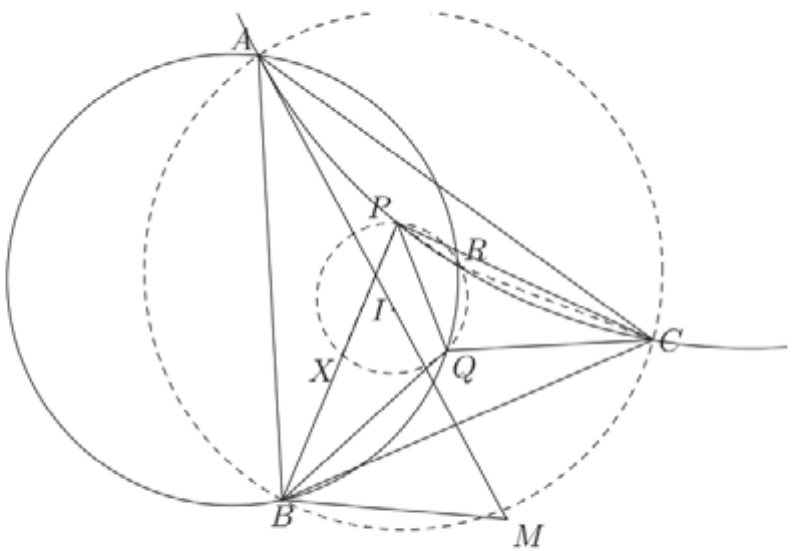
Έστω $ABC$ τρίγωνο με $AB \neq AC$ και έστω $I$ το έγκεντρό του. Έστω $P$ και $Q$ σημεία στο εσωτερικό του τριγώνου $ABC$ τέτοια ώστε $PB = PC > QC = QB$. Οι ευθείες $BP$ και $CQ$ τέμνονται στο $X$. Υποθέτουμε ότι η ευθεία $AI$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $IPQ$. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ABQ$, $ACP$ και $PQX$ έχουν κοινό σημείο.

**Λύση.** Αρχικά, μεταφράζουμε το ότι η $AI$ εφάπτεται στον $(IPQ)$ σε συνθήκη γωνιών. Έστω $M$ το δεύτερο σημείο τομής της $AI$ με τον $(ABC)$. Αφού $MB = MC$, έπεται ότι το $M$ βρίσκεται στην $PQ$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα εγκέντρου–παράκεντρου και τη δοσμένη εφαπτομένη, έχουμε

$$MB^2 = MI^2 = MP \cdot MQ,$$

άρα η $MB$ εφάπτεται στον $(BPQ)$. Αυτό δίνει ότι

$$\begin{aligned} \angle MBQ = \angle MPB &\iff \tfrac{1}{2}\angle BAC + \angle QBC = 90^\circ - \angle PBC \\ &\iff \angle QBC + \angle PBC = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle BAC. \end{aligned}$$




Δείχνουμε τώρα ότι η συντρέχεια των κύκλων ανάγεται στην ίδια ισότητα γωνιών. Έστω ότι οι $(AQB)$ και $(APC)$ τέμνονται για δεύτερη φορά στο $R \neq A$.

Παρατηρούμε ότι

$$\angle PXQ = \angle PBC + \angle QCB = \angle PBC + \angle QBC.$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned}\angle PRQ &= \angle ARQ - \angle ARP \\ &= (180^\circ - \angle ABQ) - \angle ACP \\ &= 180^\circ - (\angle ABC - \angle QBC) - (\angle ACB - \angle PCB) \\ &= \angle BAC + \angle QBC + \angle PBC.\end{aligned}$$

Τέλος, το $X$ βρίσκεται στον $(PQR)$ αν και μόνο αν

$$\angle PRQ = 180^\circ - \angle PXQ \iff \angle PBC + \angle QBC = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle BAC,$$

που είναι η ίδια συνθήκη με πριν. Η απόδειξή μας είναι πλήρης. □

## Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 140

**Γ70. Έστω Ο το περίκεντρο του οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΑΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΟ για δεύτερη φορά στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι: ΔΟ ⊥ ΑΓ.**

**(ΜΟ Ουκρανίας 2017-18)**

**Λύση**

Έστω ότι η ευθεία ΔΟ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. θεωρούμε και τη διάμετρο ΑΖ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΟΔ έχουμε

$$A\hat{B}O = O\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Delta}\Gamma \qquad (1)$$

Επειδή ΑΟ = ΟΒ έχουμε

$$A\hat{B}O = O\hat{A}B = Z\hat{A}B \qquad (2)$$

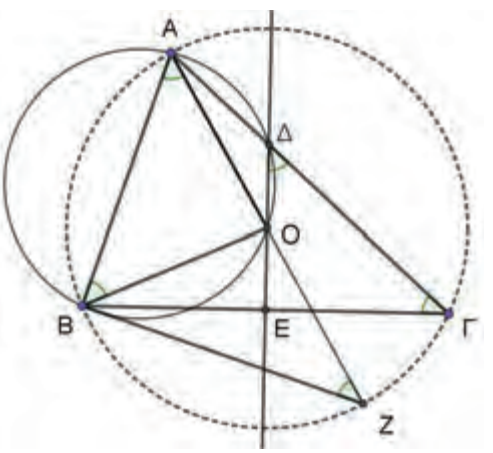
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$E\hat{\Delta}\Gamma = Z\hat{A}B \qquad (3)$$

Επίσης από ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών έχουμε

$$E\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{Z}A \qquad (4)$$

Τότε, αφού ΑΖ διάμετρος, έχουμε



Σχήμα 1

$$\Gamma\hat{E}\Delta = 180^0 - E\hat{\Delta}\Gamma - E\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - Z\hat{A}B - B\hat{Z}A = A\hat{B}Z = 90^o.$$

**Γ71. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και με διάμετρο ΑΒ. Έστω Ε το μέσο του τόξου ⩽ΑΒ. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΕΟΒΔ. Αν η ευθεία ΑΔ τέμνει τον κύκλο για δεύτερη φορά στο σημείο Ζ και Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΖ, να βρείτε το μέτρο της γωνίας ΟΓ̂Β.**

**(ΜΟ Ουκρανίας 2017-18)**

**Λύση**

Επειδή ΑΒ διάμετρος έχουμε

$$A\hat{Z}B = 90^o$$

Επειδή Γ μέσο της χορδής ΑΖ, έπεται ότι ΟΓ ⊥ ΑΖ, οπότε

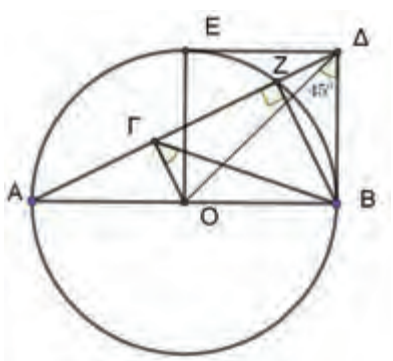
$$O\hat{\Gamma}Z = O\hat{\Gamma}\Delta = 90^o.$$

Επειδή ΕΟΒΔ τετράγωνο είναι

$$O\hat{B}\Delta = 90^o.$$

Επομένως, το τετράπλευρο ΓΟΒΔ είναι εγγράψιμο, οπότε

$$O\hat{\Gamma}B = O\hat{\Delta}B = 45^o.$$



Σχήμα 2

## Ασκήσεις για λύση

**Α90.** Να βρείτε την τιμή της παράτασης:

$$A=\frac{10^{2024}+10^{2025}+10^{2026}}{10^{2024}+10^{2024}+10^{2024}}.$$

**Α91.** Αν οι $a, b$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να προσδιορίσετε την τιμή του $x$ για την οποία το κλάσμα

$$\frac{a+bx^4}{x^2}$$

παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή του.

**Α92.** Δίνονται οι αριθμοί:

$$2025, 2025^2, 2025^3, \dots, 2025^{2025}.$$

Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς αυτούς είναι τέλεια τετράγωνα.

**Α93.** Δίνεται η εξίσωση:

$$(y+x^2-1)(y-x^2+1)=4xy.$$

**(α)** Αν είναι $x=10$, να προσδιορίσετε τις τιμές του $y$ για τις οποίες το ζεύγος $(x, y)$ είναι λύση της εξίσωσης.

**(β)** Έστω ότι $(x, y)$ είναι λύση της εξίσωσης, όπου ο $x$ είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι ο $y$ ή ο $-y$ είναι ίσος με τετράγωνο ακεραίου.

**Ν59.** Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου $\nu$ για τις οποίες οι αριθμοί $2^\nu-1$ και $2^\nu+1$ είναι και οι δύο πρώτοι.

**Ν60.** Αν οι θετικοί ακέραιοι $p$ και $8p-1$ είναι και οι δύο πρώτοι, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $8p+1$ είναι σύνθετος.

**Ν61.** Αν ο $\alpha$ είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι το κλάσμα

$$\frac{\alpha^3+2\alpha}{\alpha^4+3\alpha^2+1}$$

είναι ανάγωγο.

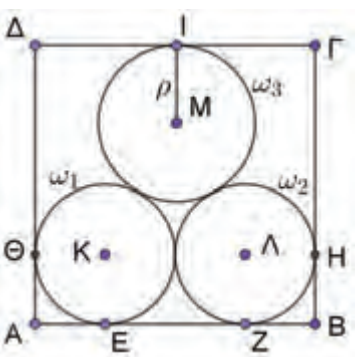
**Γ72.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{\mathrm{B}}=90^o$ και $\mathrm{AB}=15, \mathrm{B\Gamma}=20, \Gamma\Delta=14$ και $\Delta\mathrm{A}=25$.

Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

**Γ73.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}}=90^o$. Η υποτείνουσα του $\alpha$ ισούται με 11 cm και η περίμετρός του ισούται με 25 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

**Γ74.** Το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος έχει πλευρά ίση με 4 μέτρα. Οι κύκλοι $\omega_1$, $\omega_2$ και $\omega_3$ εφάπτονται μεταξύ τους ανά δύο και επίσης εφάπτονται στις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ στα σημεία Θ, Ε, Ζ, Η και Ι, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι κύκλοι $\omega_1$ *και* $\omega_2$ έχουν ίσες ακτίνες, ενώ ο κύκλος $\omega_3$ έχει ακτίνα ίση με $\rho$.

Να βρείτε το μήκος της ακτίνας $\rho$.



# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ

## Τα μαθηματικά στη σκηνή της ιστορίας

### Διαθεματικό Πρόγραμμα στο Γυμνάσιο Αρμενίου Λάρισας

*Ο Διευθυντής του σχολείου Κώστας Καραμπάτσας μας έστειλε τις δραστηριότητες και τα θέματα με τα οποία οι μαθητές του σχολείου του έκλεισαν την περσινή σχολική χρονιά 2025-2026. Ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον πρόγραμμα που συνδυάζει τα Μαθηματικά με την Ιστορία και τον Πολιτισμό, υλοποίησαν οι μαθητές του Γυμνασίου & Λυκειακών τάξεων του Αρμενίου Λάρισας, με την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού του σχολείου **Δρ. Μαρίας Σαμπάνη**.*




Το πρόγραμμα περιείχε τις παρακάτω δράσεις:

- Θεατρική Παράσταση η οποία αφορά τη ζωή και το έργο του πρόωρα χαμένου μεγάλου Γάλλου μαθηματικού **Evariste Galois** (διαθέσιμο στον υπερσύνδεσμο https://www.youtube.com/watch?v=ldTaB615PYY&t=1s ).
- Παραγωγή βίντεο με θέμα «**Από την Αρχαία Ελλάδα στο Tik Tok**» με τους μαθητές των Λυκειακών Τάξεων του σχολείου σε πρωταγωνιστικούς ρόλους μεγάλων μορφών της μαθηματικής επιστήμης (διαθέσιμο στον υπερσύνδεσμο https://www.youtube.com/watch?v=GuHyvfiCb1s&t=4s).

Το βίντεο παρουσιάστηκε στο Μαθητικό Ψηφιακό Φεστιβάλ που διοργάνωσε τον Απρίλιο του 2026 η Περιφερειακή Διεύθυνση Εκπαίδευσης Θεσσαλίας.

- Συνεργασία με το ελληνικό σχολείο του Dusseldorf με θέμα «*Από την άμμο της Μιλήτου στις Μαύρες Τρύπες*».
- Παρουσίαση των εργασιών των μαθητών στο πλαίσιο της Διεθνούς Μαθηματικής Εβδομάδας που διοργάνωσε το Μάιο η **Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.**

Οι μαθητές συμμετείχαν με έκδηλο ενθουσιασμό σε όλα τα παραπάνω σχέδια δημιουργώντας μια σημαντική γνωστική και κοινωνική παρακαταθήκη για τις επόμενες σχολικές χρονιές.

*Αρωγοί στην προσπάθεια ο μαθηματικός διευθυντής **κ. Κ. Καραμπάτσας** και ο φιλόλογος αναπληρωτής διευθυντής **κ. Ν. Στάτος**.*

## ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΡΜΕΝΙΟΥ ΛΑΡΙΣΑΣ

**ΟΜΑΔΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: Λίνα Αγραφιώτη, Ευδοξία Καρακυρίτση, Λυδία Καψούρη, μαθήτριες του Γυμνασίου**

Στο Γυμνάσιο Αρμενίου λειτουργεί τα τελευταία χρόνια εκπαιδευτικός όμιλος με επίκεντρο τα Μαθηματικά και τις προεκτάσεις τους σε άλλους τομείς των επιστημών και του πολιτισμού.

Επίκεντρο των δραστηριοτήτων ήταν κορυφαίες στιγμές της Ιστορίας των Μαθηματικών. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

- Ειδική εκδήλωση για την παγκόσμια ημέρα του αριθμού π με αναφορές στην τεράστια σημασία του αριθμού αυτού για τα μαθηματικά και γενικότερα για τον ανθρώπινο βίο.
- Θεατρική παράσταση με θέμα την ζωή και το έργο του μεγάλου Γάλλου μαθηματικού Evariste Galois η οποία παρουσιάστηκε στην Διεθνή Μαθηματική Εβδομάδα και θα προταθεί για συμμετοχή στο επερχόμενο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ στην Κατερίνη.
  Το σχετικό βίντεο είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα https://www.youtube.com/watch?v=ldTaB615PYY&t=1s



- Εκπαιδευτική δράση με θέμα το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την γνωστή μαιευτική αποδεικτική διαδικασία που βασίζεται στον περίφημο διάλογο του Σωκράτη με τον δούλο στην αρχαία Αθήνα, όπως διασώθηκε από τον Πλάτωνα στο διάσημο έργο του «Μένων».



Ως μαθήτριες του γυμνασίου με ιδιαίτερη αγάπη για τα μαθηματικά και το σχολείο μας γενικότερα αισθανόμαστε ότι μπήκαμε σε ένα όμορφο και συναρπαστικό ταξίδι προς τον κόσμο της γνώσης με κεντρικό πυρήνα των δράσεών μας τα μαθηματικά που είναι η κορωνίδα των θετικών επιστημών και ταυτόχρονα «κλειδί» για απαντήσεις σε ιστορικά και σύγχρονα προβλήματα του κόσμου μας

Η αγάπη μας για τα μαθηματικά πιστοποιείται και από τα παρακάτω:

- Συνεχής επαφή με τις εκδόσεις της ΕΜΕ και τα περιοδικά της που αφορούν μαθητές της ηλικίας μας .
- Συμμετοχή και των τριών μας στον διαγωνισμό «Θαλής» και πρόκριση στο δεύτερο γύρο στον διαγωνισμό «Ευκλείδης»
- Συμμετοχή σε δραστηριότητες της ΕΜΕ και των παραρτημάτων της ( ημερίδες , ΔΜΕ κλπ)
- Συμμετοχή στον σχεδιασμό διακρατικών δράσεων με πρόγραμμα ERASMUS που αφορά το σχολείο μας και εκπαιδευτικά ιδρύματα Γαλλίας και Γερμανίας.Η θεματολογία του σχεδιαζόμενου προγράμματος αφορά στη σχέση των Μαθηματικών με τις θεωρητικές επιστήμες. Και οι τρεις μας γνωρίζουμε άριστα αγγλικά και γαλλικά και ικανοποιητικά τα γερμανικά, κάτι που αποτελεί συγκριτικό πλεονέκτημα.
- Συμμετοχή από διετίας σε πρόγραμμα «υιοθεσίας» από το Ιόνιο Πανεπιστήμιο στην Κέρκυρα υπό την αιγίδα του διακεκριμένου Λαρισαίου Καθηγητή κ. Αθ. Ευσταθίου. Πέρα από τις δράσεις που υλοποιήθηκαν με αναφορές στην σημασία των ομηρικών επών, πραγματοποιήθηκε και ένα βιωματικό εργαστήριο με θέμα την αποδεικτική μέθοδο στο έργο του φιλοσόφου Πρωταγόρα.

Επικοινωνούμε με τον έγκριτο **«Ευκλείδη Α»** για να μεταδώσουμε με ενθουσιασμό στους αναγνώστες του όσα αποκομίσαμε από όλες αυτές τις υπέροχες επιστημονικές εμπειρίες .

Χαρακτηριστικά αναφέρουμε:

- Τη διαχρονική αξία και μαγεία των μαθηματικών, όπως αναδεικνύεται με την συνδρομή και της ιστορίας
- Αντίληψη των δυνατοτήτων και των ευκαιριών που μπορεί να προσφέρει ένα σχολείο στους μαθητές του όταν υπάρχει σωστό παιδαγωγικό κλίμα, εκπαιδευτικοί με ζήλο και μεράκι για το κάτι παραπάνω και μαθητές που μπαίνουν στον κόσμο της γνώσης με αυτές τις ιδανικές προϋποθέσεις.
- Μαθήματα προετοιμασίας για τους Μαθηματικούς διαγωνισμούς της ΕΜΕ που διεξάγονται σε καθαρά εθελοντική βάση από τους καθηγητές μας.



Εμπνευστής όλης της προσπάθειας ήταν η μαθηματικός μας κ. Μαρία Σαμπάνη (Δρ. Μαθηματικών), η οποία σχεδίασε, παρακολούθησε και ολοκλήρωσε πολλές από τις δράσεις αυτές, καθοδηγώντας μας σε κάθε μας βήμα. Αρωγός της προσπάθειας ήταν επίσης ο μαθηματικός Διευθυντής μας κ. Κώστας Καραμπάτσας.

Η ολοκλήρωση της σχολικής χρονιάς 2025-2026 μας γέμισε εμπειρίες, αισιοδοξία και αυτοπεποίθηση και σκοπεύουμε να συνεχίσουμε τις δράσεις στο Μαθηματικό όμιλο και την επόμενη σχολική χρονιά.



# Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

**Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος**

## Είμαστε φίλοι με τα Μαθηματικά;

**Α**πό μικροί μαθαίνουμε να μετράμε και με τον συμβολισμό των αριθμών να κάνουμε διάφορες πράξεις για τις ανάγκες στην καθημερινή ζωή μας. Αυτό είναι η έναρξη για τη μαθηματική σκέψη. Τα Μαθηματικά είναι το ωραιότερο ξύπνημα της νόησης, το πιο ευχάριστο παιχνίδι της λογικής, η γνωριμία της ψυχής. Είναι δημιούργημα της ανθρώπινης σκέψης, άσχετα από εξωτερικές εμπνεύσεις και πρακτικές ανάγκες άλλων επιστημών. Είναι η επιστήμη των τέλειων εννοιών και της αποκλειστικής κυριότητας του ανθρωπίνου πνεύματος, αφού τα αντικείμενά τους δεν έχουν υλική υπόσταση. Είναι μεγάλος θαυμασμός του ανθρώπου και της φιλοσοφίας του.

Ο Πλάτωνας υμνεί τα μαθηματικά για τη δύναμη, την ανάταση και την γαλήνη που προσφέρουν στην ψυχή. Η δυσκολία τους οφείλεται συνήθως στην άγνοια της στοιχειώδους γνώσεως τους, δηλαδή τι είναι τελικά τα μαθηματικά, και αφετέρου η ορθή διδασκαλία τους, η οποία πρέπει να συμβιβάζεται με τον χαρακτήρας τους.

Πρέπει να αντιστραφεί ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας. Ο μαθηματικός δάσκαλος να πηγαίνει στην τάξη με μία διάθεση και αυτός μαθητείας βλέποντας τους μαθητές να απολαμβάνουν και αυτοί την χαρά της ανακάλυψης. Να μη μεταφέρει συγκεκριμένες γνώσεις και να τις δέχονται παθητικά οι μαθητές, να τους ερωτά έτσι ώστε να τις βρίσκουν και να τις ανακαλύπτουν οι ίδιοι οι μαθητές. Τα μαθηματικά υπνώττουν μέσα τους και μπορούν να φτάσουν στην απεραντοσύνη του απείρου, στη μεγαλύτερη δύναμη της ανθρώπινης σκέψης. (Οι γρίφοι μας ωθούν στη μαθηματική σκέψη).

**… Λίγα λόγια για ένα παιδί που ήταν «γεννημένος Μαθηματικός»**

## Ο Γάλλος Évariste Galois (Εβαρίστ Γκαλουά) (25.10.1811-31.5.1832).

«Τον έχει καταλάβει ένα απέραντο πάθος για τα μαθηματικά. Νομίζω θα ήταν καλύτερο, αν συμφωνούν οι γονείς του, να σπουδάσει μόνο αυτή την επιστήμη: ως σπουδαστής στην τάξη ρητορικής σπαταλά τον χρόνο του, ενοχλεί τους καθηγητές και επισύρει την οργή και την τιμωρία.» Έγραψε ο καθηγητής του M. Vernier.

Ήταν ριζοσπάστης Δημοκρατικός και σκοτώθηκε σε ηλικία είκοσι ενός ετών σε μονομαχία (*). Πριν από τη μονομαχία πέρασε τη νύχτα γράφοντας μαθηματικά. Εκείνη τη νύχτα έγραψε τα πιο σημαντικά. Ο Εβαρίστ Γκαλουά προσδιόρισε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να γνωρίζουμε αν ένα πολυώνυμο είναι επιλύσιμο με ριζικά, πρόβλημα που βασάνιζε τους μαθηματικούς για αρκετούς αιώνες. Επίσης έκανε και μεταφράσεις ελληνικών κειμένων για τις οποίες βραβεύτηκε.



(*) Οι μονομαχίες γίνονταν για λόγους τιμής μέχρι και τον 20ο αιώνα. Στην Ελλάδα η τελευταία μονομαχία έγινε στις 18 Ιουνίου 1904 με αιτία το ρουσφέτι. Μονομάχοι ο Υπουργός Παιδείας Σπύρος Στάης και ο βουλευτής Τρικάλων Κωνσταντίνος Χατζηπέτρος (σκοτώθηκε ο δεύτερος. Έκτοτε απαγορεύτηκαν με νόμο. (Το πρώτο ήμισυ του 19ου αιώνα το Ναυτικό των ΗΠΑ έχασε σε μονομαχίες τα 2/3 των αξιωματικών του).

# ΓΡΙΦΟΙ

## Παράξενα

$1^3+ 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$

Ο αριθμός $3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$

$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$

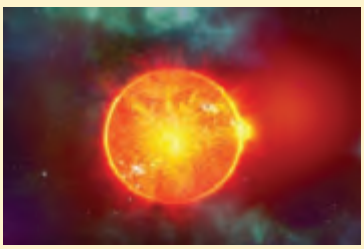
## Οι πλανήτες από τη Γη




Το 1772 ο **Johann Daniel Titius** και **ο Johann Elert Bode** έδωσαν τις θέσεις των πλανητών με την αριθμητική σειρά 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, … που είναι Γεωμετρική πρόοδος. Αν σε κάθε αριθμό προσθέσουμε 4 και το άθροισμα διαιρέσουμε με 10 έχουμε τις αποστάσεις των πλανητών από τη Γη σε αστρονομικές μονάδες (απόσταση Γης – Ηλίου=1α.μ.=150 εκατομμύρια χιλιόμετρα). Είναι με σχετικά μεγάλη ακρίβεια μέχρι τον Ουρανό, διαφέρει λίγο ο Ποσειδώνας.

**Ερώτηση:** Ποια είναι η απόσταση σε χιλιόμετρα του Διός από τη ΓΗ;

## Η μεγάλη έκρηξη



Το ηλιακό σύστημα δημιουργήθηκε με τη μεγάλη έκρηξη η οποία κατά την εκτίμηση των επιστημόνων έγινε πριν από 14 δισεκατομμύρια χρόνια.

**Ερώτηση:** Πόσους αιώνες πριν έγινε η μεγάλη έκρηξη;

## Η περιφορά και η περιστροφή



Σε έναν πλανήτη το έτος του είναι 548 μέρες και το ημερόνυχτο(η μέρα-νύχτα) 16 ώρες.

**Ερώτηση:**

**α)** Αν ζούσατε σε αυτόν τον πλανήτη, αριθμητικά η ηλικία σας θα ήταν η ίδια;

**β)** Ένας νέος 15 ετών σήμερα στη Γη, ποια ηλικία θα είχε σε αυτόν τον πλανήτη;

## Οι πέντε κύκλοι



Πόσα εκατοστά είναι το άθροισμα των περιμέτρων και των 5 κύκλων αν η περίμετρος του μεγάλου είναι 20 εκατοστά.

## 100 τα 100




Σε ένα μουσείο τα εισιτήρια είναι 10€ για ενήλικες, 3€ για φοιτητές και 0,5€ για μαθητές. Αγοράστηκαν με 100 Ευρώ 100 εισιτήρια. Πόσα άτομα πήγαν στο μουσείο από κάθε κατηγορία;

## Η βρύση



Μια χαλασμένη βρύση στάζει 150 σταγόνες κάθε δύο λεπτά.

Οι 500 σταγόνες είναι το 1/10 του λίτρου. Πόσο νερό θα χαθεί σε δύο μήνες.

# Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

## Ολυμπιάδες




**Νέα τιμή** βιβλίου: 15€




**Νέα τιμή** βιβλίου: 10€




Τιμή βιβλίου: 25€

## Προσφορές

## Βιβλία της ΕΜΕ

**Νέο Βιβλίο**




Τιμή βιβλίου: 25€

**Νέο Βιβλίο**




Τιμή βιβλίου: 25€

**Νέο Βιβλίο**




Τιμή βιβλίου: 20€

**Νέο Βιβλίο**




Τιμή βιβλίου: 15€

**Νέο Βιβλίο**

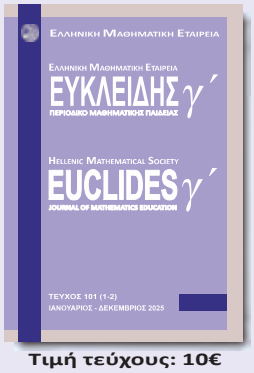



Τιμή βιβλίου: 15€

## Περιοδικά




Τιμή τεύχους: 10€




Τιμή τεύχους: 10€




Τιμή τεύχους: 10€


Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr