ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

141

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2026 ευρώ 3,5

Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικών στην Κατερίνη







Εξισώσεις Navier-Stokes και η λύση της OpenAI



Τα Nobel του 2026

4 μετάλλια

30th JBMO
Ρουμανία
15 - 20 Ιουνίου 2026

3 μετάλλια

67th IMO
Κίνα
10-21 Ιουλίου 2026



4 μετάλλια

43th BMO
Θεσσαλονίκη
3 - 8 Μαΐου 2026



ΕΛΤΑ Hellenic Post

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ: 109868 ΚΕΜΠ.ΑΔ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 141 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2026 - Ευρώ: 3,50
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Δίον Πιερίας: Ιστορία, τέχνη, πολιτισμός και επιστήμη
Μυργιώτης Απόστολος – Τέρπου Μαρία 1
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ... 7
Homo Mathematicus, ... 25

Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Πραγματικοί Αριθμοί,
Πιτσιάβας Δημήτριος – Καραθάνα Αικατερίνη – Χρήστος Π. Τσιφάκης 31
Γεωμετρία: Ισότητα Τριγώνων
Δημήτρης Ιασονίδης – Ιωάννης Τρυψιάνης 34

Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Γραμμικά Συστήματα - Ιδιότητες Συναρτήσεων
Αναστασία Γαβρή - Άννα Καγκασίδου 39
Γεωμετρία: Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας
Δημήτριος Σ. Γραμματικόπουλος 43
Αναλυτική Γεωμετρία: Συντεταγμένες – Εσωτερικό Γινόμενο
Δημήτριος Σ. Γραμματικόπουλος 47

Γ΄ Τάξη

Ανάλυση: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης, *Κωνσταντίνος Γκούλης* 51

Γενικά Θέματα

Διαγωνιστικές διαδρομές Άλγεβρας, *Θανάσης Ντρίζος - Δημήτρης Ντρίζος* 59
Ο Ευκλείδης προτείνει... 67
Το Βήμα του Ευκλείδη: «Ανεξίσωση» Η «άλλη πλευρά» μιας εξίσωσης
Χρήστος Κουστέρης, Σπύρος Φερεντίνος 71
Το άθροισμα του ελαχίστου και το ελάχιστο του αθροίσματος,
Διονύσης Γιάνναρος 75
Τα Μαθηματικά μας Διακεδάζουν 78
Αφορμές και στιγμιότυπα 79

Γράμμα της Σύνταξης

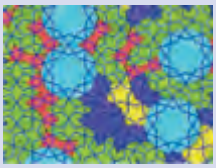
Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

...να πούμε
κάθε τι καλό

σε ότι προσπαθούμε...
σε ότι ονειρευόμαστε...

...με θετικές σκέψεις
και ελπίδες...

Καλή
σχολική χρονιά



Ο Daniel Shechtman, **Nobel Χημείας 2011**, ανακάλυψε πως τα άτομα των ημι - κρυστάλλων κατανέμονται σε **μωσαϊκά σχέδια** των οποίων το μοτίβο δεν επαναλαμβάνεται συμμετρικά, ενώ σε όλη τους την έκταση, ακολουθούν μαθηματικούς κανόνες. (χαρακτηριστικό σχήμα)

Η επιτροπή σύνταξης του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

$$2026 = [2000+20+2^2+2]=2\cdot 1013$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	6 Νοεμβρίου	2026
Ευκλείδης:	23 Ιανουαρίου	2027
Αρχιμήδης:	27 Φεβρουαρίου	2027

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Φελλούρης Ανάργυρος

Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υπεύθυνοι για το Δ.Σ
Αντωνόπουλος Νίκος
Βακαλόπουλος Κώστας
Τσιφάκης Χρήστος

Επιτροπή Έκδοσης
Αργυράκης Δημήτρης
Βακαλόπουλος Κώστας
Λουριδάς Γιάννης
Τσίτος Χρήστος
Τσιφάκης Χρήστος
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Συντακτική Επιτροπή

Αντωνόπουλος Νίκος
Αργυράκης Δημήτρης
Βακαλόπουλος Κώστας
Βλάχος Σπύρος
Γαμβρέλλης Αργύρης
Δρούτσας Παναγιώτης
Ελθίνι Ναϊρούζ
Ζέρβας Νίκος
Ζώτος Ευάγγελος
Κανάβης Χρήστος
Καρκάνης Βασίλης
Κατσούλης Γιώργος
Καρδαμίτσης Σπύρος
Κερασαρίδης Γιάννης
Κονόμης Άρτι
Κουτσούρης Λέων
Κωστοπούλου Καλλιόπη
Λαζαρίδης Χρήστος
Λουμπαρδιά Αγγελική
Λουριδάς Γιάννης
Λουρίδας Σωτήρης
Λυγάτσικας Ζήνων
Μαλαφέκας Θανάσης
Μανιατοπούλου Αμαλία
Μαυρογιαννάκης Λεωνίδας
Μήλιος Γιώργος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος
Μπερσίμης Φραγκίσκος
Μπρίνος Παναγιώτης
Μπρούζος Στέλιος
Μώκος Χρήστος
Ντόρβας Νικόλαος
Ντρίζος Δημήτριος
Πανταζή Αφροδίτη
Σίσκου Μαρία
Σκοτίδας Σωτήριος
Στεφανής Παναγιώτης
Ταπεινός Νικόλαος
Τζελέπης Αλκιβιάδης
Τουρναβίτης Στέργιος
Τσακιρτζής Στέλιος
Τσίτος Χρήστος
Τσιφάκης Χρήστος
Τσόπελας Ιωάννης
Τσουλουχάς Χάρης
Τυρλής Ιωάννης
Χριστόπουλος Θανάσης
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

• Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε. **Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50**

• **Οι συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στενλονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενέδειξη «Γιοα τον Ευκλείδη Β΄» Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. ¨ολα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Εκτύπωση: printfair **Τηλ.: 2102469799 -2102401695** **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Α. Κρέτσης

Δίον Πιερίας: Ιστορία, τέχνη, πολιτισμός και επιστήμη

Μυργιώτης Απόστολος – Τέρπου Μαρία

Ιστορικά στοιχεία

Το Δίον της Πιερίας ήταν μια από τις πλέον γνωστές μακεδονικές πόλεις της αρχαιότητας και για αιώνες αποτέλεσε την πρωτεύουσα της Πιερίας. Ο ακριβής χρόνος ίδρυσης και οι ιδρυτές της δεν είναι γνωστοί με βεβαιότητα, καθώς δεν υπάρχουν σχετικές ιστορικές μαρτυρίες. Είναι, ωστόσο, βέβαιο ότι πρόκειται για μια αρχαιότατη πόλη γνωστή από τον 5ο π.Χ. αιώνα.[4]



Εικόνα 1 Από τον αρχαιολογικό χώρο του Δίου
Πηγή: Wikipedia

Η ονομασία της συνδέεται με τον αρχαίο μυθικό θεό Δία, τον οποίο οι κάτοικοι τιμούσαν ως πολιούχο θεό. Στην πόλη υπήρχε ναός προς τιμή του, ενώ τελούνταν και εορτές, τα «Δία», από τα οποία έλαβε το όνομά του ο πρώτος μήνας του μακεδονικού έτους.[4]

Η ακμή της πόλης αρχίζει ήδη από τον 5ο π. Χ. αιώνα και κορυφώνεται την εποχή του βασιλιά της Μακεδονίας Αρχελάου (414 - 399 π.Χ.). Την περίοδο αυτή κατέστη σπουδαίο πολιτιστικό και πνευματικό κέντρο, αρχικά των Μακεδόνων και λίγο αργότερα όλων των Ελλήνων. Οι παραδόσεις που σχετίζονται με τη ζωή, τον θάνατο και την ταφή του Ορφέα, καθώς και η λατρεία των Μουσών φανερώνουν τη μεγάλη σπουδαιότητα της πόλης, ενώ πιθανολογείται ότι υπήρξε σύγχρονη με άλλες σημαντικές πόλεις, όπως η Πιερίδα, τα Λείβηθρα και η Πίμπλεια, οι οποίες αν και καταστράφηκαν νωρίς, παρέμειναν γνωστές ως τόποι κατοικίας των Μουσών. Το Δίον, ωστόσο, κατόρθωσε να επιβιώσει σχεδόν μέχρι τα ύστερα βυζαντινά χρόνια.[4]



Εικόνα 2 Από τον αρχαιολογικό χώρο του Δίου
Πηγή: Wikipedia

Ο Αρχέλαος φρόντισε να θωρακίσει στρατιωτικά το βασίλειό του, για να εξασφαλίσει την πρόοδο της Μακεδονίας και να την κάνει εφάμιλλη, πολιτιστικά και πολιτικά, των άλλων πόλεων. Γι' αυτό έστρεψε το ενδιαφέρον του στην Πιερία και ειδικότερα στο Δίον, το οποίο κατείχε ξεχωριστή θέση στη συνείδηση των Ελλήνων, λόγω της λατρείας του Δία και των Μουσών. Αναδιοργάνωσε τις θρησκευτικές εκδηλώσεις, καθιέρωσε νέους θεσμούς και προχώρησε σε σημαντικά έργα υποδομής, όπως η κατασκευή θεάτρου, σταδίου, ναών, τειχών και δρόμων. Οι μετέπειτα βασιλείς συνέχισαν το έργο του Αρχελάου ενισχύοντας περαιτέρω τη φήμη της πόλης. Οι τελετές με τους μουσικούς, γυμναστικούς και δραματικούς αγώνες απέκτησαν πανελλήνιο χαρακτήρα. Κάτοικοι διαφόρων περιοχών συνέρρεαν στο Δίον και απολάμβαναν ιδιαιτέρας τιμητικής φιλοξενίας. Έτσι το Δίον καθιερώθηκε ως ένα σημαντικό καλλιτεχνικό και πνευματικό κέντρο της Βόρειας Ελλάδας.[4]

Ο Αρχέλαος, που ήταν θαυμαστής του αθηναϊκού μεγαλείου, κάλεσε και προσέλκυσε στη Μακεδονία πλήθος λογίων και καλλιτεχνών. Ανάμεσά τους ξεχωρίζει ο Ευριπίδης, ο οποίος διατηρούσε στενή σχέση με τον βασιλιά. Πρόσκληση είχε απευθύνει και στον Σωκράτη, χωρίς όμως να γίνει αποδεκτή. Πληθώρα ποιητών διαγωνίσθηκαν στο Δίον και άνθρωποι των

γραμμάτων της εποχής φιλοξενήθηκαν και πρόσφεραν τις υπηρεσίες τους. Ιδιαίτερα σπουδαίοι ήταν και οι Ολυμπικοί ή Ολυμπιακοί αγώνες, γνωστοί και ως Ολύμπια. [4]

Κατά το πέρασμα των αιώνων το Δίον γνώρισε καταστροφές και αναγεννήσεις. Παρά τούτο, σε κάθε φάση της ελληνικής ιστορίας, δεν έπαυσε να αποτελεί ένα σημαντικό ζωντανό κύτταρο της Πιερικής και γενικότερα της Ελλαδικής γης.

Οι Πιερίδες Μούσες



Εικόνα 3 Ο χορός των Μουσών, *Joseph Paelinck, 1832.* Πηγή*: Wikipedia*

Οι Πιερίδες Μούσες κατέχουν εξέχουσα θέση στην ελληνική μυθολογία. Αναφέρονται ως θεές της ποίησης, του άσματος, της μουσικής και του χορού. Παράλληλα παρουσιάζονται και ως θεότητες - προσωποποιήσεις κάθε πνευματικής και καλλιτεχνικής δημιουργίας. Υπάρχουν αναφορές κατά τις οποίες οι Μούσες ασχολούνταν με τη μαντική, τη χρησμολογία, την ιατρική και την ιστορία. Γενικότερα ήταν προστάτιδες της μουσικής παιδείας, η οποία απαρτιζόταν από τα αντικείμενα της μελωδικής απαγγελίας ποιημάτων, της χρήσης μουσικών οργάνων και της τέχνης του χορού. [4]

Οι Μούσες ήταν εννέα (αν και ορισμένες πηγές αναφέρουν επτά ή οκτώ) και καθεμία σχετίζονταν με έναν συγκεκριμένο τομέα της επιστήμης ή της τέχνης: η Κλειώ με την ιστορία, η Θάλεια με τη γεωργία, η Ευτέρπη με τη μουσική και τη μάθηση, η Τερψιχόρη με τη παιδεία, η Ερατώ με το χορό, η Πολύμνια με τους ύμνους και τη λύρα, η Μελπομένη με το τραγωδία, η Ουρανία με την αστρονομία και η Καλλιόπη με την επική ποίηση και τη φιλοσοφία.[4]

Αξιοσημείωτες είναι και οι αναφορές για την υψηλή ηθική υπόσταση των Μουσών, καθώς και η συμβολή τους στη διατήρηση της ειρήνης, στη τιμή των νικητών στους αγώνες και στην εύρυθμη διοίκηση των πόλεων, χαρίζοντας σοφία, ευστροφία και ευγλωττία στους άρχοντες. [4]



Εικόνα 4 Η σαρκοφάγος των Μουσών (150 – 160 μ.Χ., Μουσείο του Λούβρου
ΠΗΓΗ: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Muses_sarcophagus_Louvre_MR880.jpg

Ως τόπος καταγωγής τους αναφέρεται η ευρισκόμενη κοντά στον Όλυμπο Πιερία. Γι' αυτό αρχικά είχαν το προσωνύμιο Ολυμπιάδες και αργότερα Πιερίδες. Λατρεύονταν στο Δίον, αλλά και στις πόλεις Λείβηθρα και Πίμπλεια. Οι αγώνες στο Δίον ξεκινούσαν με θυσίες προς τιμήν τους, οι οποίες διαρκούσαν εννέα ημέρες (μια για κάθε Μούσα). Βέβαια η διάδοση της λατρείας των

Μουσών σε διάφορα μέρη της Ελλάδος, όπως η Βοιωτία, οδήγησε στην δημιουργία ποικίλων μύθων γύρω από αυτές.[4]
Μύθος και ιστορία δεν ταυτίζονται, αλλά δεν είναι και εντελώς ξένα μεταξύ τους. Η ύπαρξη του μύθου των Μουσών και της άμεσης σύνδεσής του με την Πιερία επιβεβαιώνει, ότι η αρχαία Πιερία ήταν κέντρο ανάπτυξης επιστημών και τεχνών.

Ο Αρχαιολογικός Χώρος του Δίου

Σήμερα το Δίον Πιερίας αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους και πλέον γνωστούς αρχαιολογικούς χώρους της Ελλάδος. Οι ανασκαφές που ξεκίνησαν από τη Γαλλική Αρχαιολογική Σχολή Αθηνών και τον Καθηγητή του πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης Γ. Σωτηριάδη και συνεχίστηκαν με ιδιαίτερη συστηματικότητα από τον Καθηγητή Δ. Παντερμαλή, έφεραν στο φως αξιόλογα αρχαιολογικά ευρήματα που επιβεβαιώνουν τη μακραίωνη ιστορία του και την προσφορά του στην ανάπτυξη των τεχνών, των γραμμάτων και των επιστημών.

Πλειάδα των ευρημάτων εκτίθονται στο Αρχαιολογικό Μουσείο του Δίου προσφέροντας στον επισκέπτη μια ολοκληρωμένη εικόνα της ακμής και της πολιτιστικής ζωής της πόλης.

Ανάμεσα στα ευρήματα ξεχωρίζουν η περίφημη Βίλα του Διονύσου, μια πολυτελής ρωμαϊκή έπαυλη που χρονολογείται κατά τον 2ο - 3ο αιώνα μ.Χ. Η κατοικία αυτή διέθετε περιστύλιο και οργανωμένους χώρους κατοικίας και υποδοχής. Έλαβε το όνομά της από το εντυπωσιακό ψηφιδωτό δάπεδο με παράσταση του Διονύσου, το οποίο αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα δείγματα ρωμαϊκής τέχνης στον ελληνικό χώρο. Επειδή βρισκόταν σε ανοικτό χώρο και απειλούταν από τις περιβαλλοντικές συνθήκες, αποσπάστηκε με ιδιαίτερη φροντίδα και μεταφέρθηκε σε ειδικά διαμορφωμένο στεγασμένο χώρο δίπλα στο μουσείο, όπου πλέον προστατεύεται από τη φθορά και εκτίθεται με ασφάλεια στο κοινό.

Ένα ξεχωριστό εύρημα αποτελεί και η ύδραυλις, ένα αρχαίο μουσικό όργανο ιδιαίτερης τεχνολογικής και καλλιτεχνικής αξίας, που μαρτυρεί το υψηλό επίπεδο μουσικής παιδείας και τεχνικής κατάρτισης που χαρακτήριζε την περιοχή.

Η Ύδραυλις

Τον Αύγουστο του 1992, κατά τη διάρκεια των ανασκαφών που πραγματοποιούνταν στο οικοδομικό τετράγωνο δυτικά της οικίας του Διονύσου υπό τη διεύθυνση του καθηγητή Δημήτριου Παντερμαλή, έγινε μια απρόσμενη ανακάλυψη. Λεπτοί χάλκινοι σωλήνες ενωμένοι μεταξύ τους και μια επιμήκης ορθογώνια χάλκινη πλάκα εντοπίστηκαν σε βάθος περίπου 1,5 μέτρου. Με προσεκτικό καθαρισμό βρέθηκαν και άλλα τμήματα σωλήνων που είχαν αλλοιωθεί από την υγρασία και τη διάβρωση. Τα ευρήματα μεταφέρθηκαν στο εργαστήριο ανασκαφών του Δίου, όπου για μήνες πραγματοποιήθηκε καθαρισμός, συντήρηση και τεκμηρίωση. Από την πρώτη στιγμή έγινε σαφές, ότι επρόκειτο για τμήματα της υδραύλεος, ενός αρχαίου μουσικού οργάνου που λειτουργούσε με νερό και πεπιεσμένο αέρα. [3,6]



Εικόνα 5 Η Ύδραυλις στο μουσείο του Δίον
ΠΗΓΗ: Wikipedia

Η ύδραυλις εφευρέθηκε τον 3ο αιώνα π.Χ. στην Αλεξάνδρεια από τον μηχανικό και μαθηματικό, Κτησίβιο και θεωρήθηκε ένα από τα σημαντικότερα τεχνολογικά επιτεύγματα της αρχαιότητας. Είναι το αρχαιότερο γνωστό αερόφωνο όργανο με

πληκτρολόγιο στον κόσμο και θεωρείται ο πρόγονος των σημερινών εκκλησιαστικών οργάνων (pipe organs).



Εικόνα 6 Αναπαράσταση της Ύδραυλις
ΠΗΓΗ: *http://archive.noesis.edu.gr/*

Ο βασικός μηχανισμός περιλάμβανε μία αντλία με έμβολο (πυξίς με εμβολέα), μέσω της οποίας επιτυγχάνοταν η συμπίεση του αέρα. Ο πεπιεσμένος αέρας διοχετευόταν σε χάλκινο δοχείο που περιείχε νερό και σε ένα ανεστραμμένο χάλκινο ημισφαιρικό κάλυμμα, τον λεγόμενο πνιγέα. Στο εσωτερικό αυτού του θαλάμου ο αέρας, σε συνδυασμό με τη δράση του νερού, αποκτούσε σταθερή και εξισορροπημένη πίεση και κατευθυνόταν προς τον λεγόμενο μουσικό κανόνα, δηλαδή ένα επιμήκες κιβώτιο που περιείχε τον μηχανισμό διανομής του. Από εκεί, μέσω ενός συστήματος μοχλών και πλήκτρων (αγκωνίσκοι), ο εκτελεστής μπορούσε να ρυθμίζει τη ροή του αέρα προς τις εισόδους των αυλών, δηλαδή των ηχητικών σωλήνων του οργάνου. Η παραγωγή διαφορετικών μουσικών φθόγγων επιτυγχάνονταν κυρίως μέσω της διαφοροποίησης του μήκους και της διαμέτρου των αυλών, παράγοντες που επηρέαζαν άμεσα το τονικό ύψος του παραγόμενου ήχου.[3]

Η ύδραυλις που ανακαλύφθηκε στον αρχαιολογικό χώρο του Δίου, αποτελείται από δύο σύνολα αυλών τοποθετημένων σε σειρά και στερεωμένων μεταξύ δύο χάλκινων πλακών. Το πρώτο σύνολο περιλαμβάνει είκοσι τέσσερις αυλούς, κατασκευασμένους από λεπτές χάλκινες λάμες με εξωτερική διάμετρο περίπου 1,8 εκ. και εσωτερική 1,6 εκ., με μικρές αποκλίσεις. Οι αυλοί ενισχύονται σε τακτά διαστήματα με ασημένιους δακτυλίους, οι οποίοι αυξάνουν την αντοχή τους στην πίεση του αέρα. Στο κατώτερο τμήμα τους οι αυλοί φέρουν λοξή τομή που καλύπτεται εν μέρει από έλασμα, αφήνοντας ένα μικρό ορθογώνιο στόμιο στο οποίο δημιουργείται ο στροβιλισμός του πεπιεσμένου αέρα και η αρχική παραγωγή του ήχου. Οι πέντε μικρότεροι αυλοί διαθέτουν επιπλέον πλευρικό άνοιγμα που αντιστοιχεί σε κλιμακωτή εσοχή μιας από τις χάλκινες πλάκες.[3]

Το δεύτερο σύνολο περιλαμβάνει δεκαέξι αυλούς μικρότερης διαμέτρου, περίπου 1 εκ., από τους οποίους διατηρούνται κυρίως αποτυπώματα στις χάλκινες πλάκες. Συνολικά οι σαράντα αυλοί είναι στερεωμένοι μεταξύ δύο χάλκινων πλακών μήκους περίπου 70 εκ., οι οποίες φέρουν διακοσμητικές ταινίες και ένθετο πολύχρωμο γυάλινο πλακίδιο. Με βάση την τεχνοτροπία και την ποιότητα κατασκευής, η ύδραυλις χρονολογείται πιθανότατα στον 1ο αιώνα π.Χ.[3]

Η διάταξη και η κατασκευή των αυλών της υδραύλεος δεν αποτελούν μόνο ένα τεχνολογικό επίτευγμα της ελληνιστικής μηχανικής, αλλά ένα πεδίο συνύπαρξης της μαθηματικής θεωρίας των μουσικών διαστημάτων που αποδίδονται στον Πυθαγόρα με την πρακτική μουσική τεχνολογία σε αερόφωνο μηχανισμό.

Οι Πυθαγόρειοι και η μουσική

Ύστερα από συστηματική μελέτη και επανειλημμένα πειράματα, ο Πυθαγόρας κατέληξε σε συμπεράσματα που αποτελούν μέχρι σήμερα θεμελιώδη βάση της μουσικής θεωρίας. Διαπίστωσε ότι δύο ήχοι ακούγονται ευχάριστα μαζί, δηλαδή αρμονικά, όταν τα μήκη των χορδών που τους παράγουν βρίσκονται σε απλές αριθμητικές αναλογίες ακέραιων αριθμών. Με τον τρόπο αυτό οι Πυθαγόρειοι διαμόρφωσαν ένα μαθηματικό μοντέλο για την ερμηνεία της συμπεριφοράς των ήχων και της μουσικής. Παρότι δεν γνώριζαν τη φυσική αιτία του φαινομένου, το μοντέλο τους περιέγραφε με ακρίβεια τις σχέσεις μεταξύ των ήχων, αναδεικνύοντας τη σημασία των αριθμών στη δομή και την τάξη του κόσμου.[2,5]



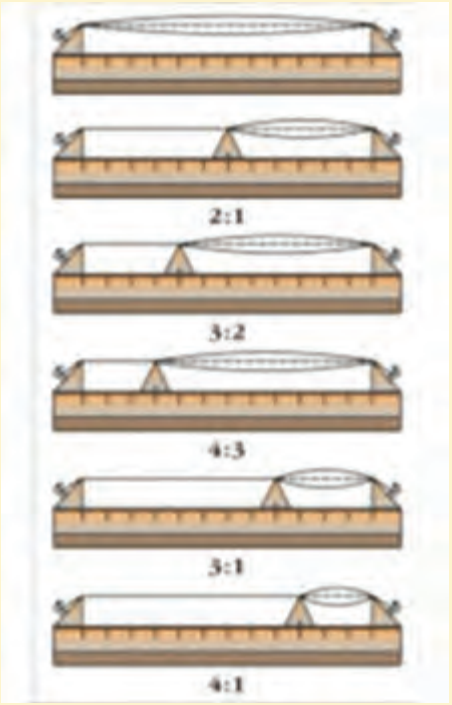
Εικόνα 7 Πυθαγόρας ό Σάμιος
Πηγή*: Wikipedia*



Εικόνα *8* Το μονόχορδο
Πηγή*: (2)*

Το πειραματικό όργανο με το οποίο ο Πυθαγόρας μελέτησε και κατέδειξε τις μαθηματικές σχέσεις των μουσικών διαστημάτων ήταν το μονόχορδο**,** γνωστό και ως «πυθαγόρειος κανόνας». Πρόκειται για ένα όργανο που αποτελούταν από ένα ξύλινο κιβώτιο πάνω στο οποίο προσαρμοζόταν μία τεντωμένη χορδή και μία κινούμενη γέφυρα (ιππέας), η οποία επέτρεπε τον διαχωρισμό της χορδής σε διαφορετικά τμήματα. Ο ήχος της χορδής μπορούσε να μεταβληθεί, είτε με την αλλαγή του πάχους ή του μήκους της, είτε με τη μεταβολή της δύναμης έλξης αυτής. Για παράδειγμα ο παραγόμενος ήχος γινόταν πιο οξύς, είτε όταν η χορδή τεντωνόταν περισσότερο, δηλαδή κατά τη διαδικασία του κουρδίσματος, είτε όταν μειώνοταν το μήκος της.[2,5]

Όταν η χορδή του μονόχορδου ηχούσε σε όλο το μήκος της, παραγόταν ένας βασικός τόνος (λόγος 1:1). Όταν χωριζόταν στο μέσο της ακουγόταν η διαπασών ή «διπλάσιον διάστημα», που αντιστοιχούσε στην απλούστερη αρμονική σχέση 2:1. Επομένως στο ταυτόχρονο άκουσμα δύο δονούμενων χορδών, ώστε η μία να δονείται ολόκληρη ενώ η άλλη κατά το ήμισυ, το μήκος της μίας χορδής είναι διπλάσιο από το μήκος της άλλης. Κατά συνέπεια ο συγχρονισμός των παραγόμενων ήχων, δηλαδή των ταλαντώσεων των χορδών, επιτυγχάνεται εύκολα, αφού όταν η μία ολοκληρώνει έναν κύκλο ταλάντωσης, η άλλη εκτελεί δύο κύκλους στο ίδιο χρονικό διάστημα.[2,5]



Εικόνα *9 Οι μαθηματικές αναλογίες των μουσικών διαστημάτων schoolpress.sch.gr/periodista/archives*

Όταν η χορδή χωριζόταν σε τρία μέρη και δονούταν τα δύο τρίτα του μήκους της, προέκυπτε το διάστημα της πέμπτης, το λεγόμενο «ημιόλιον διάστημα». Στην προκειμένη περίπτωση, οι ταλαντώσεις δύο χορδών (η μία εξ αυτών να δονείται σε όλο το μήκος της) συγχρονίζονται περιοδικά, καθώς όταν η μία χορδή εκτελεί δύο κύκλους ταλάντωσης, η άλλη ολοκληρώνει τρεις στον ίδιο χρόνο. Έτσι δημιουργείται ένα σταθερό μοτίβο συμβολής των κυμάτων.[2,5]

Τέλος με λόγο 4:3 προέκυπτε το διάστημα της τέταρτης, γνωστό ως «επίτριτον διάστημα». Στην περίπτωση αυτή, η χορδή χωριζόταν σε τέσσερα ίσα μέρη και δονούταν τα τρία τέταρτα του συνολικού μήκους της. Συνεπώς οι ταλαντώσεις δύο χορδών συγχρονίζονται, εφόσον η μία χορδή εκτελεί τρεις κύκλους ταλάντωσης, ενώ η άλλη τέσσερις. Κατά όμοιο τρόπο καθορίστηκαν και τα υπόλοιπα μουσικά διαστήματα που αποτέλεσαν τη βάση της δυτικής μουσικής θεωρίας. [2,5]

Έτσι, για μια χορδή χωρισμένη σε 12 ίσα διαστήματα, η τέταρτη ακούγεται όταν το μήκος της μειώνεται στα 9, η πέμπτη όταν φτάνει στα 8 και η διαπασών όταν γίνεται 6.[1]

Ο Πυθαγόρας δεν περιορίστηκε μόνο στην παρατήρηση, αλλά αναζήτησε και την αιτία του φαινομένου. Το αποτέλεσμα ήταν η μουσική αρμονία, ενώ το αίτιο ήταν οι λόγοι: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Δηλαδή η αρμονία δεν είναι κάτι τυχαίο ή απλώς αισθητικό, αλλά θεμελιώνεται στη βασική φιλοσοφική αντίληψη των Πυθαγορείων, ότι ο αριθμός αποτελεί την ουσία των πάντων. Με βάση αυτή την αντίληψη επιχείρησαν να συσχετίσουν τη θεωρία της μουσικής με τους αριθμούς αλλά και με τη γεωμετρία.[1]

Για τους αριθμούς 6, 8, 9 και 12 παρατηρήθηκε ότι σχετίζονται όχι μόνο με τα μουσικά διαστήματα, αλλά και με σημαντικές αριθμητικές σχέσεις. Συγκεκριμένα ο αριθμός 9 είναι ο

αριθμητικός μέσος των 6 και 12, ενώ ο 8 είναι ο αρμονικός μέσος αυτών. Δηλαδή ισχύει: $9 = \frac{6+12}{2}$ και $\frac{1}{8} = \frac{1}{2}(\frac{1}{6} + \frac{1}{12})$. 1

Ακόμη ισχύουν οι αναλογίες: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ και $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$. Αυτό στη μουσική σημαίνει, ότι οι χορδές με μήκη 12 και 9, καθώς και οι χορδές με μήκη 6 και 8, παράγουν τον ίδιο τόνο, την τέταρτη. Αντίστοιχα οι χορδές με μήκη 9 και 6 ή 8 και 12, δίνουν το διάστημα της πέμπτης. Επιπλέον ο Πυθαγόρας διαπίστωσε ότι οι αρμονικές αυτές σχέσεις αποτυπώνονται και στη γεωμετρία, συγκεκριμένα στα χαρακτηριστικά του κύβου. Ο κύβος έχει 12 ακμές, 8 κορυφές και 6 έδρες. Για το λόγο αυτό, ο κύβος ήταν για τους Πυθαγόρειους αρμονικό σώμα.1

Οι Πυθαγόρειοι ανέπτυξαν τη μουσική τους θεωρία βασισμένοι στην αριθμητική, εστιάζοντας σε διαστήματα που μπορούν να εκφραστούν ως απλοί λόγοι ακεραίων αριθμών. Τα διαστήματα που αντιστοιχούν σε μικρούς αριθμούς θεωρούνταν πιο αρμονικά, καθώς ηχούσαν πιο καθαρά και γίνονταν ευκολότερα αντιληπτά από την ακοή, ενώ πιο σύνθετοι λόγοι οδηγούσαν σε λιγότερο ευδιάκριτες αρμονικές σχέσεις. Έτσι, περιόρισαν το ενδιαφέρον τους στα πιο απλά και «σύμφωνα» διαστήματα, αγνοώντας όσα δεν μπορούσαν να αποδοθούν με τέτοιες αναλογίες. Η αριθμητική τους προσέγγιση όχι μόνο καθόρισε τη μελέτη των μουσικών διαστημάτων, αλλά επιβεβαιωνόταν και από την ίδια την ακουστική εμπειρία.[1,5]

Η αρχαία ελληνική αντίληψη διδάσκει ότι η ομορφιά, η μουσική και η τέχνη πηγάζουν από μαθηματικούς νόμους. Κάθε νότα, κάθε σχήμα, κάθε ρυθμός εκφράζει τους αριθμούς που κυβερνούν τον κόσμο. Η μαθηματική αρμονία δεν είναι θεωρία, είναι τρόπος σκέψης, που υπενθυμίζει ότι κάθε δημιουργία από τον ήχο μιας χορδής μέχρι την κίνηση των άστρων, υπόκειται σε σχέσεις, αναλογίες και τάξη. Το Δίον αποτέλεσε μία από τις πόλεις της αρχαίας Ελλάδας όπου η μουσική, η ποίηση, η τεχνολογία και η τέχνη συναντούσαν την αρμονία των αριθμών, μετατρέποντας την πόλη σε ζωντανό εργαστήρι γνώσης, όπου μύθος και μαθηματική λογική συνέθεταν ένα ενιαίο σύμπαν.

Βιβλιογραφία

1. Lucas N. H. Bunt, Philip S. Jones, Jack D. Bedient, The Historical Roots of Elementary Mathematics. Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
2. Αικατερίνη Παναγή, Η σχέση της επιστήμης των μαθηματικών και της μουσικής σύμφωνα με την Πυθαγόρεια Φιλοσοφία για τα Μαθηματικά και τη Μουσική (2019). Πανεπιστήμιο Μακεδονίας Σχολή Κοινωνικών, Ανθρωπιστικών Επιστημών και Τεχνών Τμήμα Μουσικής Επιστήμης και Τέχνης.
3. Δ. Παντερμαλής, «Ἡ ὕδραυλις τοῦ Δίου», στο: Althellenische Technologie und Technik von der prähistorischen bis zur hellenistischen Zeit mit Schwepunkt auf der prähistorischen Epoche, 21- 23.03.2003 in Ohlstadt, Weilheim 2004, 371-381.
4. Αναγνωστόπουλου Παναγιώτη, Η Αρχαία Ολυμπική Πιερία, Εστία Πιερίδων Μουσών, Θεσσαλονίκη (1971).
5. Κωνσταντίνα Λιάπη, Η Μουσική στους Πυθαγορείους (2008). ΑΠΘ Τμήμα Φιλοσοφίας και Παιδαγωγικής Τομέας Φιλοσοφίας
6. https://www.mixanitouxronou.gr/i-ydraylis-ton-archaion-ellinon-itan-to-proto-moysiko-organo-poy-leitoyrgoyse-me-pliktra-pos-akoygotan/

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Η 67η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Σαγκάη, Κίνα, 10–21 Ιουλίου 2026

Η 67η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΔΜΟ) διοργανώθηκε στη Σαγκάη από τις **10 έως τις 21 Ιουλίου 2026** με τη συμμετοχή 666 μαθητών και μαθητριών από **117 χώρες**.
Οι υψηλές επιδόσεις των τελευταίων ετών σε διεθνείς διαγωνισμούς συνεχίστηκαν και η ελληνική ομάδα κατέκτησε ένα **αργυρό μετάλλιο**, **δύο χάλκινα και δύο εύφημες μνείες** σε έναν δύσκολο και απαιτητικό διήμερο διαγωνισμό:

Μαθητής	Σχολείο	Διάκριση
Μπερκουτάκης Νεκτάριος-Ραφαήλ	3ο Γενικό Λύκειο Πύργου	Αργυρό Μετάλλιο
Καραγεωργίου Λάζαρος	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο μετάλλιο
Μελισσουργός Ιωάννης	Βαρβάκειο Πρότυπο Λύκειο	Χάλκινο μετάλλιο
Κανελλόπουλος Πέτρος	Γενικό Λύκειο Κάτω Αχαΐας	Εύφημη Μνεία
Ευσταθιάδης Φίλιππος	Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων	Εύφημη Μνεία
Τζαβούλης Σωτήρης	Homo Educandus-Αγωγή	Συμμετοχή



Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας **Ανάργυρος Φελλούρης**, ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ και υπαρχηγός ο διδάκτωρ μαθηματικός κ. **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος.** Στον Αχιλλέα Συνεφακόπουλο οφείλεται η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν.
Οι μαθητές αυτοί αναδείχθηκαν όπως κάθε χρόνο μέσα από τον Πανελλήνιο Διαγωνισμό στα Μαθηματικά που διοργανώνει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία από το **1934**, στην πρώτη φάση του οποίου (86ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ») συμμετείχαν **32.000 μαθητές** από όλη την Ελλάδα. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία προετοιμάζει και υποστηρίζει τις προσπάθειες αυτών των μαθητών, πάντα σε εθελοντική βάση, στο πλαίσιο των στόχων της για την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας και Εκπαίδευσης στη χώρα μας.
Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει όλους τους μαθητές της ελληνικής ομάδας για τη μεγάλη τους επιτυχία. Ας σημειώσουμε πως η συμμετοχή και μόνο σε έναν τέτοιο διεθνή

διαγωνισμό είναι τεράστια τιμή και επιτυχία για κάθε διαγωνιζόμενο. Ευχαριστούμε το Υπουργείο Παιδείας Θρησκευμάτων και Αθλητισμού για τη στήριξη των ελληνικών ομάδων και γενικότερα των διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Λουξεμβούργο)

Σε έναν πίνακα είναι γραμμένοι 2026 ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, όχι απαραίτητα διαφορετικοί. Σε μια κίνηση, ο Κομφούκιος επιλέγει δύο ακεραίους $m > 1$ και $n > 1$ από διαφορετικές θέσεις στον πίνακα και αντικαθιστά αυτούς τους δύο ακεραίους με τους

$$\gcd(m,n) \quad \text{και} \quad \frac{\operatorname{lcm}(m,n)}{\gcd(m,n)}$$

Συνεχίζει να κάνει κινήσεις για όσο είναι δυνατό.

(a) Να αποδείξετε ότι, ανεξάρτητα από τις επιλογές του Κομφούκιου, μετά από πεπερασμένο πλήθος κινήσεων, ακριβώς ένας ακέραιος M στον πίνακα θα είναι μεγαλύτερος του 1.

(b) Να αποδείξετε ότι η τιμή του M είναι ανεξάρτητη από τις επιλογές του Κομφούκιου.

(Σημειώνουμε ότι το $\gcd(x, y)$ συμβολίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των θετικών ακεραίων x και y, ενώ το $\operatorname{lcm}(x, y)$ συμβολίζει το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των x και y.)

Λύση. (*Παρουσιάζουμε τη λύση που έδωσε ο Ιωάννης Μελισσουργός στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.*)

Για πρώτο p και θετικό ακέραιο k συμβολίζουμε με $\nu_p(k)$ τον εκθέτη του p στην ανάλυση του k σε γινόμενο πρώτων. Από την ταυτότητα $\gcd(m,n)\cdot\operatorname{lcm}(m,n) = mn$ έχουμε $\frac{\operatorname{lcm}(m,n)}{\gcd(m,n)} = \frac{mn}{\gcd(m,n)^2} = \frac{m}{\gcd(m,n)}\cdot\frac{n}{\gcd(m,n)}$, που είναι θετικός ακέραιος· άρα όλοι οι αριθμοί του πίνακα παραμένουν πάντοτε θετικοί ακέραιοι. Επιπλέον, μια κίνηση δεν παράγει ποτέ δύο μονάδες, αφού $\gcd(m,n) = 1$ και $\operatorname{lcm}(m,n)/\gcd(m,n) = mn = 1$ θα έδιναν $m = n = 1$· άρα σε κάθε στάδιο υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Μέρος (α). Έστω P το γινόμενο όλων των αριθμών του πίνακα. Αν σε μια κίνηση επιλεγούν οι m, n, το γινόμενο των δύο νέων αριθμών είναι $\gcd(m,n)\cdot\frac{\operatorname{lcm}(m,n)}{\gcd(m,n)} = \operatorname{lcm}(m,n) \le mn$, με ισότητα αν και μόνο αν $\gcd(m,n) = 1$. Επομένως το P δεν αυξάνεται ποτέ και μειώνεται γνησίως σε κάθε κίνηση με $\gcd(m,n) > 1$· όταν $\gcd(m,n) = 1$, η κίνηση είναι $(m,n) \to (1, mn)$ και το πλήθος των μονάδων στον πίνακα αυξάνεται κατά 1.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία κινήσεων. Το πλήθος των μονάδων δεν μειώνεται ποτέ (η μονάδα δεν επιλέγεται) και φράσσεται από το 2026, άρα από κάποια κίνηση και μετά σταθεροποιείται· από εκεί και πέρα κάθε επιλεγόμενο ζεύγος έχει $\gcd > 1$, οπότε ο θετικός ακέραιος P μειώνεται γνησίως σε κάθε κίνηση, άτοπο. Άρα το παιχνίδι τερματίζει. Στην τελική θέση δεν υπάρχει διαθέσιμη κίνηση, δηλαδή το πολύ ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος του 1 και επειδή πάντοτε υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος του 1, απομένει ακριβώς ένας αριθμός $M > 1$. □

Μέρος (β). Έστω $p_1, \dots, p_r$ οι πρώτοι που διαιρούν κάποιον από τους αρχικούς αριθμούς $a_1, \dots, a_{2026}$ και $b_{i,j} = \nu_{p_j}(a_i)$. Θα αποδείξουμε ότι $M = \prod_{j=1}^{r} p_j^{d_j}$, όπου $d_j = \gcd\left(b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{2026,j}\right)$, ποσότητα που εξαρτάται μόνο από τους αρχικούς αριθμούς.

Έστω ότι σε μία κίνηση επιλέγονται οι $m = p^x\, t, n = p^y\, s$ με $p \nmid ts$ και $x \ge y$. Τότε $\gcd(m,n) = p^y\gcd(t,s)$ και $\frac{mn}{\gcd(m,n)^2} = p^{x-y}\frac{ts}{\gcd(t,s)^2}$, δηλαδή στο επίπεδο των p-αδικών αποτιμήσεων το ζεύγος (x,y) αντικαθίσταται από το $(y, x-y)$, ενώ οι υπόλοιπες αποτιμήσεις μένουν αμετάβλητες. Σταθεροποιούμε πρώτο $p = p_j$, θέτουμε $d = d_j$, και θα δείξουμε ότι $d \mid \nu_p(M)$ και $\nu_p(M) \mid d$, οπότε $\nu_p(M) = d$. Αν ένας ακέραιος διαιρεί τα x, y, τότε διαιρεί και τα $y, x-y$. Άρα η ιδιότητα «ο d διαιρεί τις p-αδικές αποτιμήσεις όλων των αριθμών του πίνακα», που ισχύει αρχικά εξ ορισμού του d, διατηρείται σε κάθε κίνηση (επαγωγή στο πλήθος των κινήσεων). Στην

τελική θέση $1, \dots, 1, M$ αυτό δίνει $d \mid \nu_p(M)$.

Αντίστροφα, αν ένας ακέραιος διαιρεί τα $y, x-y$, τότε διαιρεί και τα $x = (x-y)+y$ και y. Άρα η ιδιότητα «ο $\nu_p(M)$ διαιρεί τις p-αδικές αποτιμήσεις όλων των αριθμών του πίνακα», που ισχύει στην τελική θέση (αφού $\nu_p(M) \mid 0$ και $\nu_p(M) \mid \nu_p(M)$), μεταφέρεται από κάθε θέση στην προηγούμενή της (φθίνουσα επαγωγή, με πεπερασμένο πλήθος κινήσεων από το μέρος (α)). Στην αρχική θέση δίνει $\nu_p(M) \mid b_{i,j}$ για κάθε i, άρα $\nu_p(M) \mid d$. Επομένως $\nu_{p_j}(M) = d_j$ για κάθε j, ενώ για πρώτο p που δεν διαιρεί κανέναν αρχικό αριθμό το ίδιο επιχείρημα με $d = 0$ δίνει $\nu_p(M) = 0$. Άρα $M = \prod_{j=1}^{r} p_j^{d_j}$, που εξαρτάται μόνο από τους αρχικούς αριθμούς. □

Σχόλιο. *Η ιδέα που κάνει τη λύση αυτή διακριτή είναι ότι δεν αποδεικνύεται πρώτα κάποια αναλλοίωτη ποσότητα, αλλά κατευθείαν η διπλή διαιρετότητα $d \mid \nu_p(M)$ και $\nu_p(M) \mid d$ πάνω στην ίδια την τελική τιμή. Ο ίδιος υπολογισμός, η αντικατάσταση $(x,y) \to (y, x-y)$ στους εκθέτες, χρησιμοποιείται και στις δύο κατευθύνσεις: ευθεία επαγωγή στις κινήσεις για την πρώτη διαιρετότητα, φθίνουσα επαγωγή από την τελική θέση για τη δεύτερη. Έτσι η επαγωγική υπόθεση «ο d διαιρεί όλες τις αποτιμήσεις» καλύπτει και τους* 2026 *αριθμούς ταυτόχρονα, χωρίς χωριστό βήμα προσεταιριστικότητας για τον $\gcd$ πολλών ορισμάτων.*

Πρόβλημα 2 (Ουκρανία)

Έστω τρίγωνο *ABC* και έστω *M* και *N* τα μέσα των πλευρών *AB* και *AC*, αντίστοιχα. Θεωρούμε σημεία *K* και *L* αυστηρά στο εσωτερικό των τριγώνων *BMC* και *BNC*, αντίστοιχα, τέτοια ώστε το *K* να βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό του τριγώνου *ABL* και το *L* να βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό του τριγώνου *AKC*. Υποθέτουμε ότι

$$\angle KBA = \angle ACL, \qquad \angle LBK = \angle LNC \qquad \text{και} \qquad \angle LCK = \angle BMK.$$

Έστω *O* το περίκεντρο του τριγώνου *AKL*. Να αποδείξετε ότι *OM* = *ON*.

Λύση. (*Παρουσιάζουμε τη λύση που έδωσε ο Νεκτάριος-Ραφαήλ Μπερκουτάκης στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.*)

Θέτουμε $E = BK \cap AC$, $F = CL \cap AB$, $Q = BK \cap CL$, και Z, W, X τα μέσα των AF, AE, BF αντίστοιχα. Θα δούμε στο Βήμα 1 ότι τα B, L, N, E και τα C, K, M, F είναι ομοκυκλικά· έστω S το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου $(BLNE)$ με την ευθεία CL και T το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου $(CKMF)$ με την ευθεία BK.

Βήμα 1 (τρία εγγράψιμα τετράπλευρα). Από την υπόθεση $\angle LBK = \angle LNC$ και επειδή $E \in BK \cap AC$ *και* $N \in AC$, το τετράπλευρο $BLNE$ είναι εγγράψιμο·[1] ομοίως, από $\angle LCK = \angle BMK$, το $CKMF$ είναι εγγράψιμο. Τέλος, $\angle FBE = \angle ABK = \angle ACL = \angle FCE$ (η μεσαία ισότητα είναι η πρώτη υπόθεση), άρα τα B, C βλέπουν το τμήμα EF υπό ίση γωνία και το $BCEF$ είναι εγγράψιμο.

Βήμα 2 (τα *Z* και *W*). Επειδή τα N, Z είναι μέσα των AC, AF και το $BCEF$ είναι εγγράψιμο, $AN \cdot AE = \frac{AC \cdot AE}{2} = \frac{AB \cdot AF}{2} = AB \cdot AZ$, άρα το Z ανήκει στον κύκλο $(BLNE)$. Συμμετρικά, $AM \cdot AF = \frac{AB \cdot AF}{2} = \frac{AC \cdot AE}{2} = AC \cdot AW$, άρα το W ανήκει στον κύκλο $(CKMF)$.

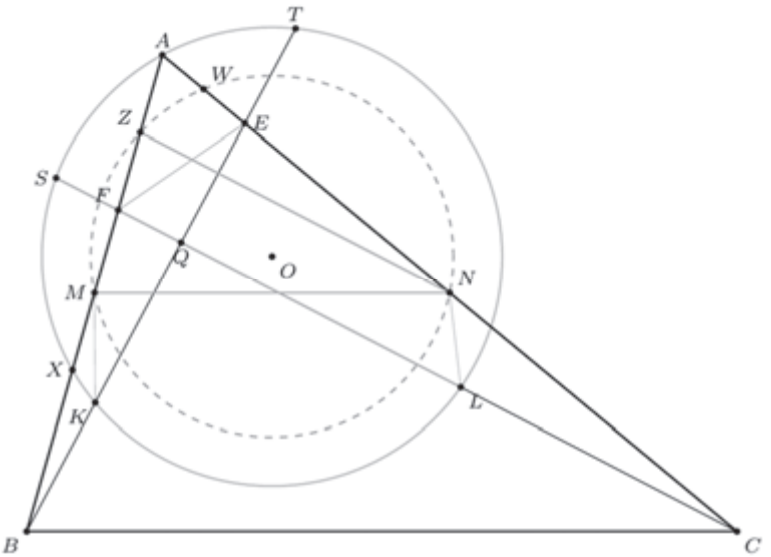
Βήμα 3 (ο κύκλος (AKL) διέρχεται από τα S, T). Η δύναμη του F ως προς τον κύκλο $(BLNE)$ (τα B, Z πάνω στην AB, τα S, L πάνω στην CL) δίνει $FS \cdot FL = FB \cdot FZ = FB \cdot \frac{FA}{2} = \frac{FB}{2} \cdot FA = FX \cdot FA$, άρα τα A, X, L, S είναι ομοκυκλικά. Το B έχει ίση δύναμη ως προς τους κύκλους $(CKMF)$ και $(AXLS)$, αφού $BM \cdot BF = \frac{BA}{2} \cdot BF = BA \cdot \frac{BF}{2} = BA \cdot BX$. Το ίδιο ισχύει και για το Q, αφού $QF \cdot QC = QB \cdot QE = QS \cdot QL$ (δυνάμεις του Q ως προς τους κύκλους $(BCEF)$ και $(BLNE)$). Άρα ο ριζικός άξονας των κύκλων $(CKMF)$, $(AXLS)$ είναι η ευθεία $BQ = BK$, και επειδή το K ανήκει στον $(CKMF)$ και στην BK, ανήκει και στον $(AXLS)$. Συνεπώς τα A, K, L, S είναι ομοκυκλικά, δηλαδή $S \in (AKL)$. Με το συμμετρικό επιχείρημα (εναλλαγή $B \leftrightarrow C$, $K \leftrightarrow L$, $M \leftrightarrow N$, $E \leftrightarrow F$, $S \leftrightarrow T$, $Z \leftrightarrow W$, και του X με το μέσο του CE) προκύπτει $T \in (AKL)$.

Βήμα 4 (δύο ισοσκελή τραπέζια). Στο τρίγωνο AFC το ZN ενώνει τα μέσα των AF, AC, άρα

1 Επιλέγουμε τη μη προσανατολισμένη διατύπωση, που είναι αυτάρκης στη συγκεκριμένη διαμόρφωση.

$ZN \parallel FC = SL$. Τα S, Z, N, L βρίσκονται όλα στον κύκλο $(BLNE)$ (Βήμα 2), οπότε το $SZNL$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο με δύο παράλληλες πλευρές, δηλαδή ισοσκελές τραπέζιο, και οι χορδές SL, ZN έχουν κοινή μεσοκάθετο.

Ο κύκλος (AKL) (μπλε συνεχής) διέρχεται από τα A, K, L, S, T. Ο κύκλος $(ZMNW)$ (πορτοκαλί διακεκομμένος) έχει κέντρο το O. Οι χορδές SL και ZN (κόκκινες) είναι οι παράλληλες πλευρές ενός ισοσκελούς τραπεζίου.



Το O είναι το κέντρο του κύκλου $(AKLS)$, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο της SL, δηλαδή και στη μεσοκάθετο της ZN: $OZ = ON$. Συμμετρικά, το $TWMK$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον $(CKMF)$ με $WM \parallel EB = TK$, οπότε $OW = OM$.

Βήμα 5 (η τελική ομοιοθεσία). Η ομοιοθεσία με κέντρο A και λόγο $\frac{1}{2}$ απεικονίζει $B \to M$, $C \to N$, $F \to Z$, $E \to W$, άρα τον κύκλο $(BCEF)$ σε κύκλο που διέρχεται από τα Z, M, N, W. Από το Βήμα 4, το O ισαπέχει από τα άκρα των χορδών ZN και WM του κύκλου αυτού, δηλαδή ανήκει στις μεσοκαθέτους τους. Οι δύο χορδές δεν είναι παράλληλες ($ZN \parallel CL$, $WM \parallel BK$ και οι CL, BK τέμνονται στο Q), οπότε οι μεσοκάθετοί τους τέμνονται σε ένα μόνο σημείο, το κέντρο του κύκλου. Άρα το O είναι το κέντρο του κύκλου $(ZMNW)$ και ειδικότερα $OM = ON$. □

Σχόλιο. *Η λύση αυτή διαφέρει ουσιωδώς από τις τέσσερις επίσημες. Οι επίσημες λύσεις που ξεκινούν όμοια (δύναμη σημείου, ριζικός άξονας) κλείνουν συγκρίνοντας δυνάμεις των M, N ως προς τον κύκλο (AKL). Η παρούσα, αντ' αυτού, αναγνωρίζει δύο ισοσκελή τραπέζια, των οποίων από μία παράλληλη πλευρά είναι χορδή του κύκλου (AKL), και κλείνει με μια ομοιοθεσία λόγου $\frac{1}{2}$, που μεταφέρει τον κύκλο $(BCEF)$ σε έναν κύκλο με κέντρο ακριβώς το O. Είναι, με μέτρο, οικονομικότερη από το επίσημο τελείωμα, και δείχνει μια πρωτότυπη γεωμετρική ματιά.*

Πρόβλημα 3 (Ρωσία)

Έστω θετικός ακέραιος n. Ο Λιου Μπανγκ και ο Σιανγκ Γιου έχουν ένα ραβδί μήκους 1 το οποίο θέλουν να μοιράσουν μεταξύ τους. Ο Λιου επιλέγει το πολύ n σημεία στο ραβδί και μετά ο Σιανγκ επιλέγει το πολύ n σημεία στο ραβδί. Όλα τα επιλεγμένα σημεία είναι διαφορετικά. Μετά, το ραβδί κόβεται στα επιλεγμένα σημεία, δημιουργώντας ορισμένα κομμάτια. Ακολούθως, με τον Λιου να ξεκινάει πρώτος, παίρνουν εναλλάξ οποιοδήποτε κομμάτι δεν έχει ήδη παρθεί. Στόχος κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό μήκος των δικών του κομματιών.

Για κάθε τιμή του n, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή του c που είναι τέτοια ώστε ο Λιου να μπορεί να εγγυηθεί ότι το συνολικό μήκος των κομματιών του είναι τουλάχιστον c, ανεξαρτήτως του πώς παίζει ο Σιανγκ.

Λύση.

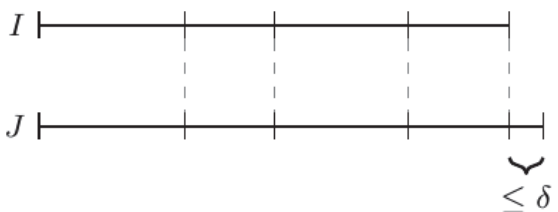
Απάντηση. Η ζητούμενη τιμή είναι $c = \frac{2^n}{2^{n+1}-1}$.

Έστω $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{2n+1}$ τα μήκη των κομματιών μετά το κόψιμο της ράβδου (αν χρησιμοποιήθηκαν λιγότερα από $2n$ σημεία, συμπληρώνουμε τη φθίνουσα ακολουθία των μηκών

με μηδενικούς όρους). Στη φάση της επιλογής η άπληστη στρατηγική, δηλαδή να παίρνει κανείς σε κάθε γύρο το μεγαλύτερο διαθέσιμο κομμάτι, είναι βέλτιστη και για τους δύο: ο Liu, που παίζει πρώτος, εξασφαλίζει στον i-οστό γύρο του τουλάχιστον d_{2i-1}, άρα συνολικά τουλάχιστον $S = d_1 + d_3 + \cdots + d_{2n+1}$, ενώ ο Xiang εξασφαλίζει τουλάχιστον $d_2 + d_4 + \cdots + d_{2n}$, αφήνοντας στον Liu το πολύ S. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2^{n+1}-1}$ και ονομάζουμε *κέρδος του Liu* τη διαφορά του συνολικού μήκους του Xiang από το συνολικό μήκος του Liu. Επειδή τα δύο μήκη αθροίζουν στο 1, το να εγγυάται ο Liu κέρδος τουλάχιστον δ ισοδυναμεί με το να εγγυάται συνολικό μήκος τουλάχιστον $\frac{1+\delta}{2} = 2^n\delta$, και αντίστοιχα το να περιορίζει ο Xiang το κέρδος του Liu στο πολύ δ ισοδυναμεί με το να εξασφαλίζει για τον εαυτό του τουλάχιστον $\frac{1-\delta}{2}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το άνω φράγμα $c \le 2^n\delta$ (στρατηγική του Xiang) και το κάτω φράγμα $c \ge 2^n\delta$ (στρατηγική του Liu).

Στρατηγική για τον Xiang. Έστω ότι τα σημεία του Liu χωρίζουν τη ράβδο σε τμήματα μηκών $a_1, \dots, a_{n+1}$ (κάποια ενδεχομένως μηδενικά). Για $I \subseteq \{1, \dots, n+1\}$ θέτουμε $S(I) = \sum_{i\in I} a_i$. Τα 2^{n+1} αθροίσματα $S(I)$ ανήκουν στο $[0,1]$· χωρίζοντας το $[0,1]$ σε $2^{n+1}-1$ ίσα υποδιαστήματα μήκους δ, από την αρχή του περιστερώνα δύο διαφορετικά υποσύνολα I, J δίνουν αθροίσματα στο ίδιο υποδιάστημα, οπότε, με κατάλληλη σειρά, $0 \le S(I) - S(J) \le \delta$. Μεταξύ όλων των τέτοιων ζευγών επιλέγουμε ένα με ελάχιστο $|I| + |J|$. Τότε $I \cap J = \emptyset$ (αλλιώς αφαιρούμε τα κοινά στοιχεία και από τα δύο χωρίς να αλλάξει η διαφορά) και $S(I \setminus \{i\}) < S(J)$ για κάθε $i \in I$ (αλλιώς το ζεύγος $(I \setminus \{i\}, J)$ θα ήταν μικρότερο, με διαφορά ακόμη στο $[0, \delta]$)· ειδικότερα, αν $J = \emptyset$ τότε $|I| = 1$.

Ο Xiang συνενώνει νοερά τα τμήματα του I σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $S(I)$, κάνει το ίδιο για το J, ευθυγραμμίζει τα αριστερά άκρα των δύο και κόβει κάθε τμήμα στα σημεία που ευθυγραμμίζονται με τα άκρα των κομματιών του άλλου. Αυτό απαιτεί το πολύ $|I| + |J| - 1$ κοψίματα και παράγει ζεύγη ίσων (ισομηκών) κομματιών, συν ένα επιπλέον κομμάτι μήκους $S(I) - S(J) \le \delta$ στο δεξιό άκρο του I· είναι ένα μόνο κομμάτι ακριβώς επειδή $S(I \setminus \{i\}) < S(J)$ για κάθε $i \in I$, οπότε κανένα άκρο τμήματος του I δεν βρίσκεται δεξιά του σημείου $S(J)$. Με τα υπόλοιπα $(n+1) - (|I| + |J|)$ κοψίματα χωρίζει καθένα από τα άλλα τμήματα σε δύο ίσα μισά.



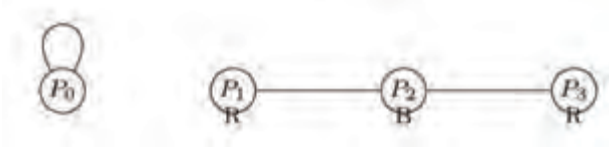
Ο Xiang ευθυγραμμίζει τα I και J και κόβει το καθένα στα σημεία που ορίζουν τα άκρα του άλλου. Προκύπτουν ζεύγη ίσων κομματιών, συν ένα επιπλέον κομμάτι μήκους ≤ δ.

Τώρα όλα τα κομμάτια χωρίζονται σε ζεύγη ίσων, συν ένα κομμάτι μήκους $\le \delta$. Ο Xiang ακολουθεί στρατηγική καθρεφτίσματος: όταν ο Liu επιλέγει ένα κομμάτι από κάποιο ισομήκες ζεύγος, ο Xiang επιλέγει αμέσως το άλλο. Αν ο Liu επιλέξει το μοναδικό ασύζευκτο κομμάτι, ο Xiang συνεχίζει κατόπιν με τον ίδιο τρόπο. Το μοναδικό κομμάτι χωρίς ζευγάρι έχει μήκος $\le \delta$, οπότε το κέρδος του Liu είναι το πολύ δ, δηλαδή $c \le 2^n\delta$.

Στρατηγική για τον Liu. Ο Liu χωρίζει τη ράβδο σε τμήματα μηκών $\delta, 2\delta, 4\delta, \dots, 2^n\delta$ (το άθροισμά τους είναι $\delta(2^{n+1}-1) = 1$). Κάθε τμήμα υπερβαίνει το άθροισμα όλων των μικρότερών του ακριβώς κατά δ, αφού $2^k\delta - (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1})\delta = \delta$. Έστω $d_1 \ge \cdots \ge d_{2n+1}$ τα κομμάτια μετά το κόψιμο του Xiang, $d_{2n+2} = 0$, και $\Delta_i = d_{2i-1} - d_{2i} \ge 0$ για $i = 1, \dots, n+1$. Με την άπληστη στρατηγική το κέρδος του Liu είναι ακριβώς $\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i \ge \delta$.

Θεωρούμε το πολυγράφημα με κορυφές τα $n+1$ τμήματα του Liu και, για κάθε $i = 1, \dots, n$, μία ακμή μεταξύ του τμήματος που περιέχει το d_{2i-1} και του τμήματος που περιέχει το d_{2i} (τα συμπληρωματικά μηδενικά κομμάτια τα θεωρούμε τοποθετημένα σε οποιοδήποτε τμήμα· επιτρέπονται βρόχοι και παράλληλες ακμές). Το γράφημα έχει $n+1$ κορυφές και n ακμές, άρα υπάρχει συνιστώσα C με περισσότερες κορυφές από ακμές· επειδή κάθε συνεκτική συνιστώσα με

v κορυφές έχει τουλάχιστον $v-1$ ακμές, η C έχει ακριβώς $v-1$ ακμές, δηλαδή είναι δέντρο (χωρίς βρόχους ή παράλληλες ακμές) και επομένως διμερής: οι κορυφές της χωρίζονται σε δύο σύνολα R και B, ώστε κάθε ακμή να ενώνει κορυφές διαφορετικών συνόλων.



Το γράφημα του Liu (παράδειγμα για $n=3$): $n+1$ κορυφές, n ακμές. Μια συνιστώσα έχει περισσότερες κορυφές από ακμές, άρα είναι δέντρο — και επομένως διμερής, με χρωματισμό R/B.

Έστω D η διαφορά του συνολικού μήκους των τμημάτων του B από το συνολικό μήκος των τμημάτων του R, όπου το R περιέχει το μεγαλύτερο τμήμα της C. Επειδή το μεγαλύτερο τμήμα της C υπερβαίνει κατά τουλάχιστον δ το άθροισμα όλων των υπόλοιπων τμημάτων της, έχουμε $D \geq \delta$. Από την άλλη, τα δύο κομμάτια κάθε ζεύγους (d_{2i-1}, d_{2i}), $i \leq n$, βρίσκονται είτε και τα δύο σε τμήματα της C, σε κορυφές διαφορετικού χρώματος (αφού η αντίστοιχη ακμή ανήκει στη C), είτε και τα δύο εκτός της C (αλλιώς η ακμή θα ένωνε τη C με άλλη συνιστώσα)· άρα το ζεύγος συνεισφέρει στο D ποσότητα $\pm\Delta_i$ ή 0, ενώ το μονό κομμάτι d_{2n+1} συνεισφέρει $\pm\Delta_{n+1}$ ή 0. Επομένως $\delta \leq D \leq \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i$, όπως θέλαμε: ο Liu εγγυάται κέρδος τουλάχιστον δ, δηλαδή $c \geq 2^n\delta$. Συνδυάζοντας τα δύο φράγματα, $c = \frac{2^n}{2^{n+1}-1}$. □

Σχόλιο. *Οι δύο πλευρές του επιχειρήματος έχουν έναν κοινό, «μετρητικό» χαρακτήρα. Για τον Xiang, τα 2^{n+1} αθροίσματα υποσυνόλων που στριμώχνονται στο $[0,1]$ αναγκάζουν, μέσω της αρχής του περιστερώνα, την ύπαρξη δύο σχεδόν ίσων υποσυνόλων, και αυτή η σχεδόν ισότητα μετατρέπεται σε στρατηγική καθρεφτίσματος. Για τον Liu, η γεωμετρική διαμέριση $\delta, 2\delta, \dots, 2^n\delta$ κωδικοποιεί μια σχέση «κάθε όρος μεγαλύτερος από το άθροισμα των προηγουμένων», που μεταφράζεται σε ένα γράφημα με λίγες ακμές, άρα σε μια διμερή συνιστώσα-δέντρο, από όπου προκύπτει το φράγμα. Η κομψότητα του προβλήματος βρίσκεται ακριβώς στο ότι το ίδιο μέγεθος $\delta = \frac{1}{2^{n+1}-1}$ εμφανίζεται ως βέλτιστο και για τους δύο παίκτες.*

Πρόβλημα 4 (Ελβετία)

Ο Σαν Γιου και η Μουλάν παίζουν ένα παιγνίδι. Έστω θ μία γωνία, με $0 < \theta < 180^o$, η οποία είναι γνωστή και στους δύο παίκτες. Αρχικά, ο Σαν Γιου κατασκευάζει ένα χάρτινο τρίγωνο T της επιλογής του. Μετά, εκτελούν επανειλημμένα τα ακόλουθα βήματα:

- **Αν το T έχει τουλάχιστον μία γωνία του ίση με θ, τότε το παιγνίδι τερματίζεται και κερδίζει η Μουλάν.**
- **Αλλιώς, η Μουλάν επιλέγει ένα σημείο P στην περίμετρο του T, διαφορετικό από τις τρεις κορυφές. Στη συνέχεια κάνει μία ευθεία τομή από το P προς την απέναντι κορυφή του T, χωρίζοντάς το σε δύο τρίγωνα.**
- **Ο Σαν Γιου απορρίπτει το ένα από τα δύο τρίγωνα. Το τρίγωνο που παραμένει γίνεται το καινούργιο τρίγωνο T.**

Για ποιες πραγματικές τιμές του θ, μπορεί η Μουλάν σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων να εγγυηθεί τη νίκη της, ανεξαρτήτως του πως παίζει ο Σαν Γιού;

Απάντηση. Η Μουλάν μπορεί να εγγυηθεί τη νίκη της ακριβώς για τις γωνίες $\theta = \frac{180^\circ}{v}$, όπου $v \geq 2$ ακέραιος.

Λύση.

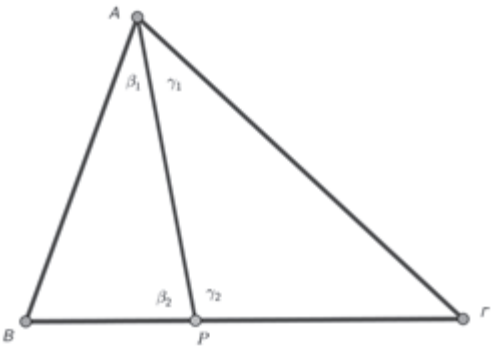
(α) Η στρατηγική της Μουλάν. Έστω $\theta = \frac{180^\circ}{v}$ με $v \geq 2$ ακέραιο. Δείχνουμε πρώτα ότι η Μουλάν μπορεί να εξασφαλίσει τρίγωνο με μία γωνία ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο του θ. Αν $v = 2$ ($\theta = 90^\circ$) και το τρίγωνο δεν έχει ήδη ορθή γωνία, ονομάζουμε A την κορυφή της μεγαλύτερης γωνίας· τότε οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ είναι οξείες, το ίχνος του ύψους από την κορυφή A βρίσκεται στο εσωτερικό της πλευράς $B\Gamma$ και η Μουλάν, επιλέγοντάς το ως σημείο P, χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ορθογώνια, οπότε κερδίζει αμέσως. Έστω $v \geq 3$ και A η κορυφή της μεγαλύτερης γωνίας, οπότε $B\hat{A}\Gamma \geq 60^\circ$. Αν $v = 3$ και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, η Μουλάν έχει ήδη κερδίσει ($60^\circ = \theta$) σε κάθε άλλη περίπτωση $B\hat{A}\Gamma > \theta$. Καθώς το P διατρέχει το εσωτερικό της πλευράς $B\Gamma$, η γωνία $\beta =$

$A\hat{P}\Gamma$ διατρέχει το διάστημα $(A\hat{B}\Gamma, 180° - A\hat{\Gamma}B)$, μήκους $B\hat{A}\Gamma > \theta$· άρα υπάρχει θέση του P με $\beta = \kappa\theta$ για κάποιον ακέραιο κ. Τότε και $A\hat{P}B = 180° - \beta = (\nu - \kappa)\theta$, οπότε, όποιο από τα δύο τρίγωνα κι αν κρατήσει ο Σαν Γιου, αυτό έχει γωνία ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο του θ.

Έστω τώρα ότι το τρίγωνο T έχει γωνία $\kappa\theta$ με $\kappa \geq 2$. Η Μουλάν κόβει από την κορυφή της γωνίας αυτής προς σημείο P της απέναντι πλευράς, ώστε η γωνία να χωριστεί σε θ και $(\kappa - 1)\theta$· και τα δύο τρίγωνα που προκύπτουν έχουν γωνία ίση με θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του θ, με συντελεστή μικρότερο του κ. Επαναλαμβάνοντας, ο συντελεστής μειώνεται γνησίως σε κάθε γύρο, οπότε μετά από πεπερασμένο πλήθος γύρων προκύπτει τρίγωνο με γωνία ίση με θ και η Μουλάν κερδίζει.

(β) Η στρατηγική του Σαν Γιου. Έστω $\theta \neq \frac{180°}{\nu}$ για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$. Ονομάζουμε «περίπλοκο» ένα τρίγωνο του οποίου καμία γωνία δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του θ· ένα τέτοιο τρίγωνο δεν έχει γωνία ίση με θ. Ο Σαν Γιου επιλέγει αρχικά ένα «περίπλοκο» τρίγωνο· τέτοιο υπάρχει, αφού μπορούμε να επιλέξουμε δύο θετικές γωνίες, καθώς και την τρίτη που συμπληρώνει τις $180°$, έξω από το πεπερασμένο σύνολο των ακέραιων πολλαπλασίων του θ στο διάστημα $(0°, 180°)$. Αρκεί να δείξουμε ότι, όποιο σημείο P κι αν επιλέξει η Μουλάν στο εσωτερικό μιας πλευράς, έστω της $B\Gamma$, ενός «περίπλοκου» τριγώνου $AB\Gamma$, ένα τουλάχιστον από τα τρίγωνα APB, $AP\Gamma$ είναι «περίπλοκο»· τότε ο Σαν Γιου κρατά πάντοτε «περίπλοκο» τρίγωνο και η Μουλάν δεν κερδίζει ποτέ.

Υποθέτουμε ότι ένα «*περίπλοκο*» τρίγωνο T μπορεί με κάποια επιλογή του σημείου P να χωριστεί σε δύο μη «*περίπλοκα*» τρίγωνα, σχήμα 1.Επειδή τα τρίγωνα APB *και* $AP\Gamma$ είναι μη «*περίπλοκα*» και οι δύο γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια του θ, έπεται ότι μία από τις γωνίες β_1, β_2 και μία από τις γωνίες γ_1, γ_2 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του θ. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: Αν οι β_1 και γ_1 είναι ακέραια πολλαπλάσια του θ, τότε το ίδιο ισχύει για τη γωνία $B\hat{A}\Gamma = \beta_1 + \gamma_1$, που αντιφάσκει με το ότι το $AB\Gamma$ είναι «περίπλοκο».



Σχήμα 1

Αν οι β_2 και γ_2 είναι ακέραια πολλαπλάσια του θ, τότε το $\beta_2 + \gamma_2 = 180°$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του θ, αντίθετα με την υπόθεση. Αν, τέλος, οι β_2 και γ_1 (αντίστοιχα οι β_1 και γ_2) είναι ακέραια πολλαπλάσια του θ, τότε το ίδιο ισχύει για τη γωνία $A\hat{\Gamma}B = \beta_2 - \gamma_1$ (αντίστοιχα $A\hat{B}\Gamma = \gamma_2 - \beta_1$), που αντιφάσκει πάλι με το ότι το $AB\Gamma$ είναι «περίπλοκο». Επομένως, αν $\theta \neq \frac{180°}{\nu}$ για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$, η Μουλάν δεν μπορεί να εξασφαλίσει τη νίκη. □

Πρόβλημα 5 (Λετονία)

Έστω $\mathbb{R}_{>0}$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ που είναι τέτοιες ώστε

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)},$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Απάντηση. Οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι $f(x) = x + c$, όπου $c \geq 0$ σταθερά.

Λύση (1ος τρόπος).

Γράφουμε f^k για τη σύνθεση της f με τον εαυτό της k φορές ($f^0(x) = x$) και θέτουμε $\Delta(x) = f(x) - x$.

Λήμμα 1. $\Delta \circ f = \Delta$ και $\Delta \geq 0$. *Απόδειξη.* Θέτοντας $x = f(y)$ στη δεδομένη σχέση, τα δύο ακραία μέλη γίνονται ίσα με $f(y)$, οπότε $f(y) \geq \frac{f^2(y)+y}{2} \geq f(y)$, δηλαδή $f^2(y) + y = 2f(y)$ για κάθε $y > 0$, (1)

που σημαίνει $\Delta(f(y)) = \Delta(y)$. Επαγωγικά, $\Delta(f^n(y)) = \Delta(y)$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, και αθροίζοντας, $f^n(y) - y = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(f^k(y)) = n\Delta(y)$. (2)

Επειδή $f^n(y) > 0$, έπεται $\Delta(y) > -\frac{y}{n}$ για κάθε $n \geq 1$, άρα $\Delta(y) \geq 0$. ■

Λήμμα 2. Όλες οι μη μηδενικές τιμές της Δ συμπίπτουν. *Απόδειξη.* Έστω $\Delta(x) \geq \Delta(y) > 0$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη από τις δεδομένες ανισότητες το x με $f^n(x)$ και το y με $f^{m-1}(y)$, όπου $m, n \geq 1$, και χρησιμοποιώντας τις $f^{n+1}(x) = f^n(x) + \Delta(x)$, $f^{m-1}(y) = f^m(y) - \Delta(y)$, παίρνουμε

$$\sqrt{\frac{f^n(x)^2 + f^m(y)^2}{2}} \geq \frac{f^{n+1}(x) + f^{m-1}(y)}{2} = \frac{f^n(x) + f^m(y) + \Delta(x) - \Delta(y)}{2}.$$

Θέτοντας $a = f^n(x)$, $b = f^m(y)$ και χρησιμοποιώντας την (2), έπεται

$$0 \leq \Delta(x) - \Delta(y) \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} - a - b = \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + a + b} < \frac{(a-b)^2}{a}$$
$$= \frac{(n\Delta(x) - m\Delta(y) + x - y)^2}{n\Delta(x) + x}.$$

Για κάθε $n \geq 1$ επιλέγουμε $m \geq 1$ με $|n\Delta(x) - m\Delta(y)| \leq \Delta(y)$ (δυνατόν, αφού $\Delta(x) \geq \Delta(y) > 0$)· τότε ο αριθμητής του δεξιού μέλους φράσσεται από $(\Delta(y) + |x - y|)^2$, ενώ ο παρονομαστής τείνει στο άπειρο. Άρα $\Delta(x) = \Delta(y)$. ■

Λήμμα 3. Η Δ είναι σταθερή. *Απόδειξη.* Αν όχι, από το Λήμμα 2 η Δ παίρνει ακριβώς τις τιμές 0 και c, για κάποιο $c > 0$. Έστω x με $\Delta(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = x$. Για $y < x$ η δεύτερη ανισότητα δίνει $\sqrt{xf(y)} \leq \frac{x+y}{2} < x$, άρα $f(y) < x$, δηλαδή $y < x - \Delta(y)$. Για $y > x$ η πρώτη ανισότητα, με τους ρόλους των x, y εναλλαγμένους, δίνει $\frac{x+f(y)}{2} \leq \sqrt{\frac{y^2+x^2}{2}} < y$, άρα $f(y) < 2y - x$, δηλαδή $y > x + \Delta(y)$. Επομένως κάθε y με $\Delta(y) = c$ βρίσκεται έξω από το $[x - c, x + c]$, δηλαδή η Δ μηδενίζεται σε ολόκληρο το $[x - c, x + c] \cap (0, +\infty)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το ίδιο επιχείρημα με αφετηρία τα σημεία $x \pm c, x \pm 2c, \ldots$ (όσα είναι θετικά), η Δ μηδενίζεται παντού, άτοπο. ■

Άρα $f(x) = x + c$ για κάποια σταθερά $c \geq 0$. Οι συναρτήσεις αυτές πράγματι ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση, αφού από τις ανισότητες των μέσων $\sqrt{\frac{x^2+(y+c)^2}{2}} \geq \frac{x+(y+c)}{2} = \frac{(x+c)+y}{2} \geq \sqrt{x(y+c)}$.

Λύση (2ος τρόπος).

Όπως πριν, θέτοντας $x = f(y)$ παίρνουμε $f(f(y)) = 2f(y) - y$ για κάθε $y > 0$. Αντικαθιστώντας το x με $f(x)$ στην πρώτη από τις δεδομένες ανισότητες (το δεξί μέλος $\frac{f(f(x))+y}{2}$ είναι θετικό, οπότε η ύψωση στο τετράγωνο επιτρέπεται) παίρνουμε $f(y)^2 \geq f(x)^2 + 2(y - x)f(x) + \frac{(y-x)^2}{2}$ και, διαιρώντας με $f(y) + f(x) > 0$, $f(y) - f(x) \geq \frac{2(y-x)f(x)}{f(y)+f(x)} + \frac{(y-x)^2}{2(f(y)+f(x))}$. (3)

Αντικαθιστώντας το x με $f(x)$ στη δεύτερη από τις δεδομένες ανισότητες και διαιρώντας με $\sqrt{f(x)}$, παίρνουμε $\sqrt{f(y)} \leq \sqrt{f(x)} + \frac{y-x}{2\sqrt{f(x)}}$, (4)

και, πολλαπλασιάζοντας την $\sqrt{f(y)} - \sqrt{f(x)} \leq \frac{y-x}{2\sqrt{f(x)}}$ με $\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)} > 0$,

$$f(y) - f(x) \leq \frac{(y-x)\left(\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}\right)}{2\sqrt{f(x)}}. \quad (5)$$

Από την (4), για y σε μια αρκετά μικρή περιοχή του x οι τιμές $f(y)$ είναι άνω φραγμένες, ενώ $f(y) > 0$· άρα για $y \to x$ τα δύο ακραία μέλη των (3), (5) τείνουν στο 0, οπότε $f(y) \to f(x)$: η f είναι συνεχής. Διαιρώντας τις (3), (5) με $y - x$ (για $y > x$· για $y < x$ οι ανισότητες

αντιστρέφονται και το όριο που ακολουθεί προκύπτει με τον ίδιο τρόπο) παίρνουμε

$$\frac{2f(x)}{f(y)+f(x)}+\frac{y-x}{2(f(y)+f(x))}\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}{2\sqrt{f(x)}},$$

και, λόγω της συνέχειας της f, τα δύο ακραία μέλη τείνουν στο 1 για $y\to x$. Άρα $f'(x)=1$ για κάθε $x>0$, οπότε $f(x)=x+c$, με $c\ge 0$ αφού $f>0$. Η επαλήθευση έγινε στο τέλος του 1ου τρόπου. □

Πρόβλημα 6 (Ταϊβάν)

Έστω $a_1,a_2,a_3,\dots$ μία άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων μεγαλύτερων του 1. Υποθέτουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n, ο αριθμός a_{n+1} είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον a_n και είναι τέτοιος ώστε $gcd(a_{n+1},a_i)>1$, για κάθε $i=1,2,\dots,n$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι T και L που είναι τέτοιοι ώστε $a_{n+T}=a_n+L$, για κάθε θετικό ακέραιο n. (Σημειώνουμε ότι το $gcd(x,y)$ συμβολίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των θετικών ακεραίων x και y.)

Λύση.

Λήμμα 1. Έστω $n\ge 2$ και m θετικός ακέραιος με $a_1<m\le a_n$ και $\gcd(m,a_i)>1$ για $i=1,\dots,n-1$. Τότε $m=a_i$ για κάποιο $i\in\{2,\dots,n\}$. *Απόδειξη.* Επιλέγουμε $i\in\{2,\dots,n\}$ με $a_{i-1}<m\le a_i$. Ο m είναι μεγαλύτερος του a_{i-1} και έχει κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1 με καθέναν από τους $a_1,\dots,a_{i-1}$, οπότε από τον ορισμό του a_i έχουμε $a_i\le m$, άρα $a_i=m$. ■

Έστω L το γινόμενο όλων των πρώτων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του a_1 και $f(m)=\gcd(m,L)$ για κάθε θετικό ακέραιο m. Σημειώνουμε ότι $f(a_i)>1$, αφού $\gcd(a_i,a_1)>1$ και κάθε πρώτος διαιρέτης του a_1 διαιρεί τον L. Η ουσία του προβλήματος είναι το επόμενο λήμμα, που μας επιτρέπει να αγνοήσουμε τους πρώτους που είναι μεγαλύτεροι του a_1.

Λήμμα 2. $\gcd(f(a_i),f(a_j))>1$ για όλους τους θετικούς ακέραιους i,j. *Απόδειξη.* Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει ζεύγος (s,t) με $s<t$ και $\gcd(f(a_s),f(a_t))=1$, και ας το επιλέξουμε ελάχιστο λεξικογραφικά, ώστε $\gcd(f(a_i),f(a_j))>1$ για κάθε ζεύγος $i<j$ με $i<s$, ή με $i=s$ και $j<t$. Έστω p πρώτος διαιρέτης του $\gcd(a_s,a_t)>1$. Αν $p\le a_1$, τότε $p\mid L$ και ο p θα διαιρούσε και τους $f(a_s),f(a_t)$, άτοπο· άρα $p>a_1$, και ειδικότερα $\gcd(p,f(a_s))=1$. Επομένως ο $pf(a_s)$ διαιρεί τον a_s, οπότε $a_1<pf(a_s)\le a_s$, ενώ για $i<s$ ισχύει $\gcd(pf(a_s),a_i)\ge\gcd(f(a_s),f(a_i))>1$. Από το Λήμμα 1, $pf(a_s)=a_{s'}$ για κάποιο $s'\le s$. Επειδή $p\nmid L$, έχουμε $f(a_{s'})=f(a_s)$, άρα $\gcd(f(a_{s'}),f(a_t))=1$, και η ελαχιστότητα του (s,t) δίνει $s'=s$, δηλαδή $a_s=pf(a_s)$.

Έστω $k\ge 0$ ακέραιος με $f(a_s)^k\le a_1<f(a_s)^{k+1}$. Αν $f(a_s)^{k+1}\le a_t$, τότε για $i<t$ έχουμε $\gcd(f(a_s)^{k+1},a_i)\ge\gcd(f(a_s),f(a_i))>1$, οπότε από το Λήμμα 1 υπάρχει $t'\le t$ με $a_{t'}=f(a_s)^{k+1}$. Όμως κάθε πρώτος διαιρέτης του $\gcd(a_{t'},a_t)$ διαιρεί τον $f(a_s)$, άρα και τον L, άρα και τον $f(a_t)$, οπότε διαιρεί τον $\gcd(f(a_s),f(a_t))=1$· συνεπώς $\gcd(a_{t'},a_t)=1$, άτοπο: αν $t'<t$ αυτό αντιβαίνει στον ορισμό του a_t, ενώ αν $t'=t$ δίνει $a_t=1$. Άρα $f(a_s)^{k+1}>a_t$, οπότε $pf(a_s)=a_s<a_t<f(a_s)^{k+1}$, δηλαδή $p<f(a_s)^k\le a_1$, που αντιφάσκει με το $p>a_1$. ■

Έστω $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}\subseteq[a_1,\infty)$ και $F=\{f(a):a\in A\}$. Ισχυριζόμαστε ότι, για θετικό ακέραιο $m\ge a_1$, ισχύει $m\in A\Leftrightarrow f(m)\in F$. Το ευθύ προκύπτει από τον ορισμό του F. Αντίστροφα, έστω $f(m)=f(a_j)$ για κάποιο j. Τότε, για κάθε i, από το Λήμμα 2, $\gcd(m,a_i)\ge\gcd(f(m),f(a_i))=\gcd(f(a_j),f(a_i))>1$. Αν $m=a_1$ τελειώσαμε· αλλιώς, επειδή η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία ακεραίων, άρα μη φραγμένη, επιλέγουμε n με $m\le a_n$, και το Λήμμα 1 δίνει $m=a_i$ για κάποιο $i\le n$. Συνεπώς $m\in A$.

Επειδή $f(m+L)=\gcd(m+L,L)=\gcd(m,L)=f(m)$, ο χαρακτηρισμός αυτός δίνει $m\in A\Leftrightarrow m+L\in A$ για κάθε $m\ge a_1$· η χαρακτηριστική συνάρτηση του A στο $[a_1,\infty)$ είναι περιοδική με περίοδο L. Αν T είναι το πλήθος των στοιχείων του A σε οποιοδήποτε διάστημα L διαδοχικών ακεραίων μέσα στο $[a_1,\infty)$, τότε $T>0$ (αφού $a_1\in A$) και η μετατόπιση κατά L μεταφέρει το n-οστό στοιχείο του A στο $(n+T)$-οστό. Επομένως $a_{n+T}=a_n+L$ για κάθε $n\ge 1$, όπως θέλαμε. □

43η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Θεσσαλονίκη, 3–8 Μαΐου 2026

Η **43η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα** διοργανώθηκε με μεγάλη επιτυχία στη Θεσσαλονίκη στις **3 - 8 Μαΐου 2026** από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία με τη συμμετοχή **150 μαθητών/τριών** από **11 (έντεκα) χώρες** της Νοτιοανατολικής Ευρώπης καθώς και από **13 (δεκατρείς)** φιλοξενούμενες χώρες από την **Ευρώπη,** την **Ασία**, την **Αφρική** και της αναπληρωματικής ομάδας από την Ελλάδα.

Πρόκειται για τον σπουδαιότερο μαθηματικό διαγωνισμό παγκοσμίως, μετά τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Η διοργάνωση τελούσε υπό την αιγίδα της Περιφέρειας Κεντρικής Μακεδονίας. Η Ελληνική ομάδα κατέκτησε **ένα αργυρό και τρία χάλκινα μετάλλια**:

Μπερκουτάκης Νεκτάριος-Ραφαήλ	3ο Γενικό Λύκειο Πύργου	Αργυρό Μετάλλιο
Καραγεωργίου Λάζαρος	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο μετάλλιο
Μελισσουργός Ιωάννης	Βαρβάκειο Πρότυπη Λύκειο	Χάλκινο μετάλλιο
Αργυρόπουλος Κωνσταντίνος	2ο Πρότυπο Γενικό Λύκειο Αθηνών	Χάλκινο μετάλλιο
Κανελλόπουλος Πέτρος	Λύκειο Κάτω Αχαΐας	Συμμετοχή
Τζαβούλης Σωτήριος	Homo Educandus-Αγωγή	Συμμετοχή



Χάλκινο μετάλλιο κατέκτησε και ο **Ευσταθιάδης Φίλιππος**, Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων, που συμμετείχε ως μέλος της αναπληρωματικής ομάδας. Συμμετοχή με την Ελληνική αναπληρωματική ομάδα είχαν και οι μαθητές: **Ευάγγελος-Αντώνιος Μπελιάς, Πέτρος Δαγρές, Παναγιώτης Γιόφτσος, Παναγιώτης Τσιμπλής και ο Μιχαήλ Τσουρέκας.**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Δημήτριος Διαμαντίδης**, ειδικός γραμματέας του ΔΣ της ΕΜΕ και προϊστάμενος του αυτοτελούς τμήματος Προτύπων και Πειραματικών Σχολείων του Υ.ΠΑΙ.Θ.Α. και υπαρχηγός η μαθηματικός **Αικατερίνη Λυζάρδου**.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία προετοιμάζει και υποστηρίζει τις προσπάθειες αυτών των μαθητών, πάντα σε εθελοντική βάση, στο πλαίσιο των στόχων της για την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας και Εκπαίδευσης στη χώρα μας. Την επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν έχει ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος**.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1. **Ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών S ονομάζεται *Αριστοτέλειο* αν για κάθε $x, y, z \in S$, με $x < y < z$, ισχύει**

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Να προσδιορίσετε όλους τους ακεραίους $n \geq 4$ για τους οποίους υπάρχει Αριστοτέλειο σύνολο με ακριβώς n στοιχεία.

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι η μοναδική δυνατή τιμή είναι $n = 4$. Για $n = 4$, το σύνολο $S = \left\{\frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{11}{9}\right\}$ είναι Αριστοτέλειο, αφού $\frac{1-\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$, $\frac{\frac{11}{9}-\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}} = 1$ και $\frac{\frac{11}{9}-\frac{5}{9}}{1} = \frac{2}{3}$, $\frac{\frac{11}{9}-\frac{2}{3}}{1} = \frac{5}{9}$.

Υποθέτουμε στο εξής ότι $n \geq 5$ και γράφουμε $S = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$.

Από την υπόθεση, οι ακόλουθοι αριθμοί ανήκουν στο S:

$$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1}} < \frac{x_n - x_{n-3}}{x_{n-1}} < \cdots < \frac{x_n - x_1}{x_{n-1}} < \cdots < \frac{x_n - x_1}{x_3} < \frac{x_n - x_1}{x_2}.$$

Οι αριθμοί αυτοί είναι $2n-5$, επομένως $2n - 5 \leq n$,

οπότε $n \leq 5$. Άρα δεν υπάρχουν τέτοια σύνολα με τουλάχιστον έξι στοιχεία.

Μένει να αποκλείσουμε την περίπτωση $n = 5$. Τότε $2n - 5 = n$, οπότε οι παραπάνω αριθμοί είναι ακριβώς τα στοιχεία του S. Συνεπώς

$$x_1 = \frac{x_5 - x_3}{x_4}, \quad x_2 = \frac{x_5 - x_2}{x_4}, \quad x_3 = \frac{x_5 - x_1}{x_4}, \quad x_4 = \frac{x_5 - x_1}{x_3}, \quad x_5 = \frac{x_5 - x_1}{x_2}.$$

Από την πρώτη και την τέταρτη ισότητα παίρνουμε $x_5 = x_1x_4 + x_3 = x_3x_4 + x_1$,

άρα $$(x_3 - x_1)(x_4 - 1) = 0.$$

Επειδή $x_1 \neq x_3$, έπεται ότι $x_4 = 1$. Θέτουμε $t := x_2 > 0$. Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει

$$x_1 = 2t(1-t), \qquad x_3 = 2t^2, \qquad x_5 = 2t.$$

Από $x_3 < x_4$ έχουμε $2t^2 < 1$, άρα $$t < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Επιπλέον, $$\frac{x_3 - x_1}{x_2} < \frac{x_4 - x_1}{x_2} < \frac{x_5 - x_1}{x_2} = x_5.$$

Και οι τρεις αριθμοί ανήκουν στο S. Εφόσον ο τελευταίος είναι ο x_5, ο πρώτος δεν μπορεί να είναι ο x_4 ή ο x_5. Άρα $$\frac{x_3 - x_1}{x_2} \in \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Όμως $$\frac{x_3 - x_1}{x_2} = \frac{2t^2 - 2t(1-t)}{t} = 4t - 2,$$

Οπότε $$4t - 2 \in \{2t(1-t), t, 2t^2\}.$$

Οι τρεις περιπτώσεις δίνουν, αντίστοιχα, $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $t = \frac{2}{3}$, $t = 1$.

Λόγω του $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$, απομένουν οι δύο πρώτες τιμές. Αν $t = \frac{2}{3}$, τότε $S = \left\{\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, 1, \frac{4}{3}\right\}$,

Αλλά $\frac{x_4 - x_2}{x_3} = \frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8} \notin S$, άτοπο. Αν $t = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$, τότε $t^2 = 1 - t$ και $\frac{x_4 - x_2}{x_3} = \frac{1-t}{2t^2} = \frac{1}{2}$.

Επίσης $$x_1 = 2t(1-t) = 2t^3 = 2\sqrt{5} - 4 < \frac{1}{2} < t = x_2,$$

άρα $½ \notin S$, πάλι άτοπο. Επομένως $n = 5$ είναι αδύνατο και η μοναδική δυνατή τιμή είναι $\boxed{n = 4}$.

Πρόβλημα 2. **Έστω θετικός ακέραιος n. Ένα $2n \times 2n$ πλέγμα είναι καλυμμένο με ντόμινο 2×1 και 1×2. Ονομάζουμε *περιστροφή* ενός ντόμινο την επιλογή ενός από τα δύο μοναδιαία τετράγωνά του και τη στροφή του ντόμινο γύρω από το κέντρο αυτού του τετραγώνου κατά $90°$ δεξιόστροφα, κατά $90°$ αριστερόστροφα ή κατά $180°$. Να αποδείξετε ότι είναι πάντοτε δυνατό να γίνει από μία περιστροφή σε κάθε ντόμινο, ώστε τα ντόμινο να εξακολουθούν να καλύπτουν το πλέγμα. Σε κάθε κάλυψη τα ντόμινο πρέπει να καλύπτουν όλα τα κελιά του πλέγματος, χωρίς να αλληλοεπικαλύπτονται και χωρίς να εξέχουν από τα όριά του.**

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός. Για κάθε δοσμένη κάλυψη του πίνακα $2n \times 2n$ με ντόμινο, υπάρχει μία δεύτερη κάλυψη η οποία δεν έχει κανένα κοινό ντόμινο με την αρχική.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Χωρίζουμε τον πίνακα σε τετράγωνα 2×2. Κάθε τέτοιο τετράγωνο μπορεί να καλυφθεί είτε με δύο κατακόρυφα είτε με δύο οριζόντια ντόμινο. Η αρχική κάλυψη δεν μπορεί να περιέχει

συγχρόνως ένα κατακόρυφο και ένα οριζόντιο ντόμινο που να βρίσκονται εξ ολοκλήρου μέσα στο ίδιο τετράγωνο 2×2, διότι αυτά θα αλληλοεπικαλύπτονταν. Επομένως, για κάθε τετράγωνο 2×2, τουλάχιστον μία από τις δύο επιλογές δεν χρησιμοποιεί κανένα ντόμινο της αρχικής κάλυψης. Επιλέγοντας ανεξάρτητα μία τέτοια κάλυψη σε κάθε τετράγωνο 2×2, παίρνουμε τη ζητούμενη δεύτερη κάλυψη. ▫

Θεωρούμε τώρα ένα διμερές γράφημα G με σύνολα κορυφών $X=\{x_1,\dots,x_{2n^2}\}$, $Y=\{y_1,\dots,y_{2n^2}\}$, όπου τα x_i παριστάνουν τα ντόμινο της αρχικής κάλυψης και τα y_j τα ντόμινο της δεύτερης κάλυψης. Ενώνουμε τα x_i και y_j με ακμή όταν τα αντίστοιχα ντόμινο έχουν κοινό ένα μοναδιαίο τετράγωνο. Από τον ισχυρισμό, δύο τέτοια ντόμινο έχουν είτε κανένα είτε ακριβώς ένα κοινό τετράγωνο.

Κάθε κορυφή του G έχει βαθμό 2, άρα το G αναλύεται σε ξένους κύκλους. Επειδή είναι διμερές, όλοι αυτοί οι κύκλοι έχουν άρτιο μήκος. Επιλέγοντας εναλλάξ τις ακμές κάθε κύκλου, παίρνουμε ένα τέλειο ταίριασμα του G. Έστω ότι σε αυτό το ταίριασμα το x_i αντιστοιχίζεται με το $y_{\sigma(i)}$.

Τα ντόμινο x_i και $y_{\sigma(i)}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό τετράγωνο και δεν είναι το ίδιο ντόμινο. Επομένως, περιστρέφοντας το x_i γύρω από το κέντρο του κοινού τετραγώνου κατά 90° ή 180°, μπορούμε να το μεταφέρουμε στη θέση του $y_{\sigma(i)}$. Κάνοντας το ίδιο για όλα τα ντόμινο της αρχικής κάλυψης, τα μεταφέρουμε ταυτόχρονα στη δεύτερη κάλυψη. Άρα η ζητούμενη επιλογή περιστροφών υπάρχει.

Πρόβλημα 3. **Έστω παραλληλόγραμμο $ABCD$ με $\angle DAB<90^\circ$ και $AB<AD$. Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου BCD και H' το συμμετρικό του H ως προς την ευθεία BD. Η ευθεία AH τέμνει τις ευθείες BD, CD, BC στα E, F, G, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων HEH' και CFG εφάπτονται.**

Λύση. Χρησιμοποιούμε κατευθυνόμενες γωνίες modulo 180°, που συμβολίζονται με $\measuredangle$. Έτσι η απόδειξη δεν εξαρτάται από τη διάταξη του σχήματος. Γράφουμε $\Gamma=(HEH')$, $\omega=(CFG)$, $\Omega=(BCD)$. Έστω P το σημείο Miquel των τεσσάρων ευθειών BC, CD, DB, AH. Τότε

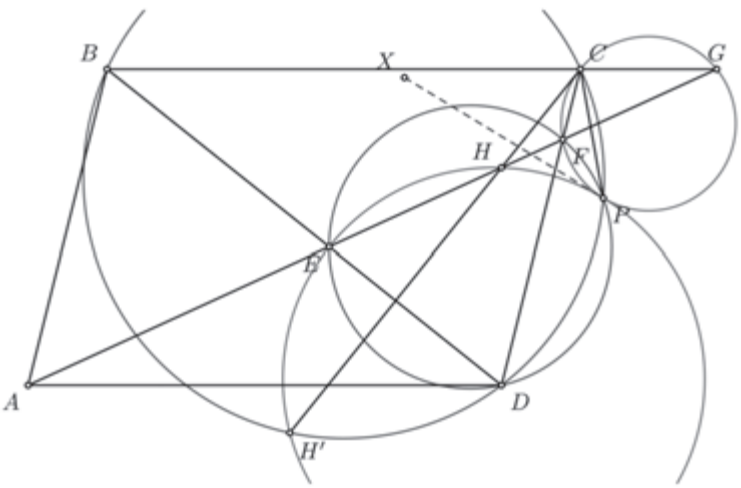
$$P\in\Omega,\qquad P\in(DEF),\qquad P\in(BEG),\qquad P\in\omega.$$

Επίσης, $H'\in\Omega$, ως συμμετρικό του ορθοκέντρου ως προς την πλευρά BD, και τα C, H, H' είναι συνευθειακά, στην κάθετη προς την BD από το C.

Ισχυρισμός 1. Το P ανήκει στον κύκλο Γ. Από τις παραπάνω ομοκυκλικότητες και συνευθειακότητες έχουμε $\measuredangle PEH=\measuredangle PEF=\measuredangle PDF=\measuredangle PDC=\measuredangle PH'C=\measuredangle PH'H$. Άρα τα P, E, H, H' είναι ομοκυκλικά.

Ισχυρισμός 2. Τα σημεία A, B, H, D είναι ομοκυκλικά.

Επειδή $BH\perp CD$, $DH\perp BC$, $AB\parallel CD$ και $AD\parallel BC$, έχουμε $BH\perp AB$ και $DH\perp AD$. Επομένως τα A, B, H, D ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο AH.



Ισχυρισμός 3. Ισχύει $\measuredangle H'EB=\measuredangle H'DC$.

Από τον Ισχυρισμό 2 έχουμε $\measuredangle(AH,AB)=\measuredangle(DH,DB)$.

Χρησιμοποιώντας επιπλέον την παραλληλία $AB\parallel DC$ και τη συμμετρία των H, H' ως προς την BD, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\measuredangle HEB&=\measuredangle(AH,BD)=\measuredangle(AH,AB)+\measuredangle(AB,BD)=\measuredangle(DH,DB)+\measuredangle(DC,DB)\\&=\measuredangle(DB,DH')+\measuredangle(DC,DB)=\measuredangle(DB,DH')+\measuredangle(DC,DB)\end{aligned}$$

Η ανάκλαση ως προς την BD δίνει $\measuredangle H'EB=-\measuredangle HEB$. Αντιστρέφοντας επίσης τη γωνία $\measuredangle CDH'$, καταλήγουμε στη ζητούμενη ισότητα.

Ολοκλήρωση της απόδειξης. Έστω t η εφαπτομένη του Γ στο P και $X\in t$, $X\neq P$. Θα δείξουμε ότι η ίδια ευθεία εφάπτεται στον ω στο P.

Από το θεώρημα εφαπτομένης–χορδής στον Γ έχουμε $\measuredangle H'PX=\measuredangle H'EP$.

Από το $P, H', D, C\in\Omega$ και τον Ισχυρισμό 3, $\measuredangle H'PC=\measuredangle H'DC=\measuredangle H'EB$.

Αφαιρώντας, προκύπτει $\measuredangle CPX=\measuredangle H'PX-\measuredangle H'PC=\measuredangle H'EP-\measuredangle H'EB=\measuredangle BEP$.

Τέλος, επειδή τα B, E, P, G είναι ομοκυκλικά και τα B, C, G συνευθειακά,

$$\measuredangle BEP = \measuredangle BGP = \measuredangle CGP.$$

Άρα $\measuredangle CPX = \measuredangle CGP$. Από το αντίστροφο του θεωρήματος εφαπτομένης–χορδής, η PX εφάπτεται στον ω στο P. Συνεπώς οι κύκλοι Γ και ω έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο P και εφάπτονται εκεί.

Πρόβλημα 4. Έστω ακέραιος $n \geq 2$. Αρχικά, ο αριθμός 1 είναι γραμμένος n φορές σε έναν πίνακα. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε δύο αριθμούς a, b του πίνακα, όχι και τους δύο μηδενικούς, και τους αντικαθιστούμε με $\frac{(a-b)^2}{a+b}$ και $\frac{4ab}{a+b}$.

Να προσδιορίσετε όλους τους ακεραίους n για τους οποίους ο αριθμός n μπορεί να εμφανιστεί στον πίνακα ύστερα από πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Λύση. Η απάντηση είναι ακριβώς οι δυνάμεις του 2.

Το άθροισμα των αριθμών παραμένει αναλλοίωτο. Αρχικά είναι ίσο με n. Αν ο αριθμός n εμφανιστεί στον πίνακα, τότε, επειδή όλοι οι αριθμοί είναι μη αρνητικοί, η τελική κατάσταση πρέπει να είναι

$$\{n, 0, \dots, 0\}.$$

Για έναν μη μηδενικό ρητό αριθμό x και έναν περιττό πρώτο p, συμβολίζουμε με $v_p(x)$ τον εκθέτη του p στην παραγοντοποίηση του x. Για ένα πολυσύνολο ρητών αριθμών S θέτουμε

$$V_p(S) \coloneqq \min_{\substack{s \in S \\ s \neq 0}} v_p(s).$$

Ισχυρισμός. Αν για κάποια κατάσταση S ισχύει $V_p(S) < 0$ για έναν περιττό πρώτο p, τότε για κάθε κατάσταση S' που μπορεί να προκύψει από την S ισχύει επίσης $V_p(S') < 0$.

Απόδειξη. Έστω $u, v \in S$ οι αριθμοί που αντικαθίστανται από $u' = \frac{(u-v)^2}{u+v}$, $v' = \frac{4uv}{u+v}$, και έστω $k = V_p(S) < 0$. Αν ένας από τους u, v είναι μηδέν, το πολυσύνολο δεν μεταβάλλεται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι είναι και οι δύο μη μηδενικοί.

Αν $v_p(u) \neq v_p(v)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_p(u) < v_p(v)$. Τότε $v_p(u+v) = v_p(u)$ και

$$v_p(u') = 2v_p(u-v) - v_p(u+v) = v_p(u).$$

Άρα διατηρείται ένα στοιχείο με την ίδια αποτίμηση.

Αν $v_p(u) = v_p(v) = j$, τότε $v_p(u+v) \geq j$ και $v_p(v') = v_p(4uv) - v_p(u+v) = 2j - v_p(u+v) \leq j$.

Ειδικότερα, ακόμη και αν οι u, v ήταν τα μόνα στοιχεία με ελάχιστη αποτίμηση $j = k$, το v' έχει αποτίμηση το πολύ k. Σε κάθε περίπτωση το ελάχιστο δεν αυξάνεται, οπότε η ιδιότητα $V_p(S) < 0$ διατηρείται. ▫

Η τελική κατάσταση $T = \{n, 0, \dots, 0\}$ ικανοποιεί $V_p(T) = v_p(n) \geq 0$ για κάθε περιττό πρώτο p. Άρα, σε μία επιτυχημένη ακολουθία, δεν μπορεί να εμφανιστεί κατάσταση με $V_p < 0$ για κανέναν περιττό πρώτο p.

Εξετάζουμε τώρα ένα βήμα κατά το οποίο όλοι οι μη μηδενικοί αριθμοί είναι δυνάμεις του 2. Έστω ότι επιλέγουμε τους a, b.

- Αν ένας από τους a, b είναι μηδέν, το πολυσύνολο δεν μεταβάλλεται.
- Αν $a = b = 2^k$, τότε $\frac{(2^k - 2^k)^2}{2^{k+1}} = 0$, $\frac{4 \cdot 2^{2k}}{2^{k+1}} = 2^{k+1}$.
  Άρα το ζεύγος $\{2^k, 2^k\}$ αντικαθίσταται από $\{0, 2^{k+1}\}$.
- Αν $a = 2^k \neq b = 2^m$, με $k < m$, τότε $a + b = 2^k\left(1 + 2^{m-k}\right)$,
  όπου $1 + 2^{m-k}$ είναι περιττός ακέραιος μεγαλύτερος του 1. Έστω p ένας περιττός πρώτος διαιρέτης του. Τότε $v_p(a+b) > 0$, ενώ $v_p(4ab) = 0$, και άρα
  $$v_p\left(\frac{4ab}{a+b}\right) = -v_p(a+b) < 0.$$
  Αυτό είναι αδύνατο σε μία επιτυχημένη ακολουθία.

Συνεπώς, το μόνο ουσιαστικό βήμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μία επιτυχημένη ακολουθία είναι

$$\{2^k, 2^k\} \mapsto \{0, 2^{k+1}\}.$$

Ξεκινώντας από n αντίγραφα του $1 = 2^0$, έπεται επαγωγικά ότι σε κάθε κατάσταση μιας επιτυχημένης ακολουθίας όλοι οι μη μηδενικοί αριθμοί του πίνακα είναι δυνάμεις του 2. Αφού ο n εμφανίζεται στον πίνακα, είναι και αυτός δύναμη του 2.

Αντίστροφα, αν $n = 2^r$, εφαρμόζουμε επανειλημμένα το παραπάνω βήμα: από 2^r αντίγραφα του 1 παίρνουμε 2^{r-1} αντίγραφα του 2, κατόπιν 2^{r-2} αντίγραφα του 4 και ούτω καθεξής. Τελικά προκύπτει ένα αντίγραφο του $2^r = n$ και όλοι οι άλλοι αριθμοί είναι μηδέν.

Άρα οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι ακριβώς $\boxed{n = 2^r \quad (r \geq 1)}$.

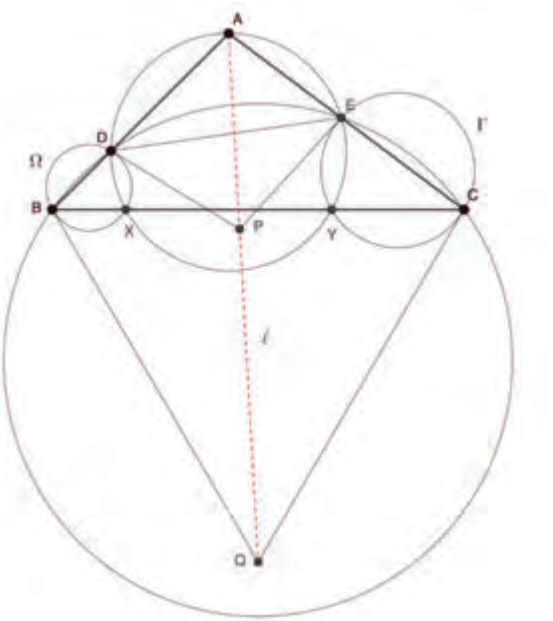
ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

2 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1. **Έστω ABC τρίγωνο τέτοιο ώστε η γωνία $\angle A$ να είναι αμβλεία. Έστω D και E σημεία στις πλευρές AB και AC, αντίστοιχα, έτσι ώστε τα σημεία B, D, E, C να είναι ομοκυκλικά. Υποθέτουμε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ADE τέμνει την πλευρά BC σε δύο σημεία X και Y, όπου τα σημεία B, X, Y, C βρίσκονται με αυτή τη σειρά πάνω στην BC. Έστω Ω και Γ οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDX και CEY, αντίστοιχα. Έστω P σημείο τέτοιο ώστε η PD να εφάπτεται στον Ω και η PE να εφάπτεται στον Γ. Έστω Q σημείο τέτοιο ώστε η QB να εφάπτεται στον Ω και η QC να εφάπτεται στον Γ. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, P, Q είναι συνευθειακά.**



Λύση. Έστω ℓ ο ριζικός άξονας των κύκλων Ω και Γ Ένα σημείο ανήκει στην ℓ ακριβώς όταν έχει ίση δύναμη ως προς τους δύο κύκλους. Θα δείξουμε ότι $A, P, Q \in \ell$. Στις ισότητες γωνιών που ακολουθούν χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες θετικές γωνίες της διάταξης του σχήματος.

Το $A \in \ell$. Αφού το $BDEC$ είναι εγγράψιμο, $AB \cdot AD = AC \cdot AE$, δηλαδή οι δυνάμεις του A ως προς τους Ω και Γ είναι ίσες. Άρα $A \in \ell$.

Ισότητα $AX = AY$. Επειδή τα σημεία A, D, E, X, Y και B, D, E, C είναι ομοκυκλικά, $\angle \mathrm{AXD} = \angle \mathrm{AED} = \angle \mathrm{CBD} = \angle \mathrm{XBD}$, άρα η AX εφάπτεται στον Ω στο X. Ομοίως $\angle \mathrm{AYE} = \angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{BCE} = \angle \mathrm{YCE}$, άρα η AY εφάπτεται στον Γ στο Y. Αφού $A \in \ell$, τα εφαπτόμενα τμήματα από το A είναι ίσα: $AX = AY$, οπότε $\angle AXY = \angle AYX$.

Το $Q \in \ell$. Από το θεώρημα εφαπτομένης–χορδής στον Ω και το εγγράψιμο $ADXY$, $\angle QBC = \angle BDX = \angle AYX$. Ομοίως, στον Γ και στο εγγράψιμο $AXYE$, $\angle QCB = \angle CEY = \angle AXY$. Άρα $\angle QBC = \angle QCB$, δηλαδή $QB = QC$, και αφού τα QB, QC είναι εφαπτόμενα τμήματα προς τους Ω, Γ, έπεται ότι $Q \in \ell$.

Το $P \in \ell$. Από εφαπτομένη–χορδή στον Ω, $\angle PDA = \angle DXB$, και από το εγγράψιμο $DXYE$, $\angle DXB = \angle DEY$. Επίσης $\angle ADE = \angle ECB$ (εγγράψιμο $BDEC$) και $\angle PEY = \angle ECY$ (εφαπτομένη–χορδή στον Γ). Επομένως $\angle PDE = \angle PDA - \angle ADE = \angle DEY - \angle PEY = \angle DEP$, άρα $PD = PE$ και, όπως πριν, $P \in \ell$. Τα A, P, Q ανήκουν στην ευθεία ℓ, άρα είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 2. **Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να ισχύει**

$$f\big(xy + f(x)\big) + xf(y) = x + 2f(xy).$$

Λύση. Έστω $P(x, y)$ η δοθείσα σχέση και $a = f(1)$, $b = f(0)$. Η $P(1, y)$ δίνει

$$f(y + a) = f(y) + 1 \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ειδικότερα $a \neq 0$ (αλλιώς η (1) θα έδινε $0 = 1$), και για $y = 1$ παίρνουμε $f(1 + a) = 1 + a$. Η $P(x, 0)$ δίνει

$$f\big(f(x)\big) + bx = x + 2b \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Για $x = 1 + a$ η (2) γίνεται $(1 + a) + (1 + a)b = (1 + a) + 2b$, δηλαδή $(a - 1)b = 0$. Αν $a = 1$, τότε $f\big(f(1)\big) = f(1) = 1$ και η (2) με $x = 1$ δίνει $1 + b = 1 + 2b$, άρα $b = 0$. Επομένως σε κάθε περίπτωση

$$f(0) = 0. \tag{3}$$

Έστω τώρα $x \neq 0$. Στην $P(x,\ y + a/x)$ τα ορίσματα $xy + a + f(x)$ και $xy + a$ διαφέρουν κατά a από τα αντίστοιχα της $P(x, y)$, οπότε από την (1) η $P(x,\ y + a/x)$ γράφεται

$$f\big(xy + f(x)\big) + 1 + xf(y + a/x) = x + 2f(xy) + 2.$$

Αφαιρώντας την $P(x, y)$ προκύπτει $x[f(y + a/x) - f(y)] = 1$, και για $y = 0$, λόγω της (3),

$$f(a/x) = 1/x \quad \text{για κάθε } x \neq 0. \tag{4}$$

Για $x = a$ η (4) δίνει $a = f(1) = 1/a$, άρα $a^2 = 1$, δηλαδή $a = \pm 1$. Τέλος, θέτοντας $t = a/x$ (που διατρέχει όλους τους μη μηδενικούς πραγματικούς), η (4) δίνει $f(t) = 1/x = t/a = at$ για κάθε $t \neq 0$, και η ίδια σχέση ισχύει για $t = 0$ λόγω της (3). Άρα $f(x) = x$ για κάθε x, ή $f(x) = -x$ για κάθε x.
Επαλήθευση. Για $f(x) = x$: $(xy + x) + xy = x + 2xy$. Για $f(x) = -x$: $-(xy - x) - xy = x - 2xy$. Και οι δύο ικανοποιούν τη σχέση, άρα οι λύσεις είναι ακριβώς οι

$$\boxed{f(x) = x} \qquad \text{και} \qquad \boxed{f(x) = -x}.$$

Πρόβλημα 3. **Έστω $n \geq 2$ θετικός ακέραιος. Να προσδιοριστούν όλοι οι ακέραιοι k με $1 \leq k \leq 2n$, για τους οποίους ισχύουν τα εξής:**
(α) Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $a_1, a_2, \dots, a_k$ τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{2^n - 1 \mid 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k}.} \qquad \mathbf{(1)}$$

(β) Για κάθε επιλογή θετικών ακεραίων $a_1, a_2, \dots, a_k$ που ικανοποιεί την (1), τουλάχιστον τρεις από τους $a_1, a_2, \dots, a_k$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο κατά τη διαίρεση με το n.
Λύση. Απάντηση: ακριβώς οι k με $n < k < 2n$.
Αναγωγή στα υπόλοιπα. Για κάθε i γράφουμε $a_i = q_i n + r_i$ με $0 \leq r_i \leq n - 1$. Αφού $2^n \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$, είναι $2^{a_i} \equiv 2^{r_i} \pmod{2^n - 1}$. Αν c_j είναι το πλήθος των a_i με υπόλοιπο j, τότε $\sum_{j=0}^{n-1} c_j = k$ και η (1) ισοδυναμεί με

$$2^n - 1 \mid S := \sum_{j=0}^{n-1} c_j\, 2^j. \qquad (2)$$

Λήμμα. Αν $a_1, \dots, a_k \geq 0$ είναι ακέραιοι με $2^n - 1 \mid 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$, τότε $k \geq n$.
Απόδειξη. Εφαρμόζουμε στο άθροισμα, όσο γίνεται, τις εξής κινήσεις: (i) αν κάποιος εκθέτης είναι $\geq n$, τον μειώνουμε κατά n, (ii) αν δύο εκθέτες είναι ίσοι, αντικαθιστούμε τους όρους $2^a + 2^a$ με τον έναν όρο 2^{a+1}. Και οι δύο κινήσεις διατηρούν τη διαιρετότητα του αθροίσματος από το $2^n - 1$ και δεν αυξάνουν το πλήθος των όρων Σε κάθε κίνηση μειώνεται λεξικογραφικά το ζεύγος «αριθμητική τιμή του αθροίσματος, πλήθος όρων»: η (i) μειώνει την πρώτη συνιστώσα, ενώ η (ii) διατηρεί την πρώτη και μειώνει τη δεύτερη. Επομένως η διαδικασία τερματίζει. Στο τέλος οι εκθέτες είναι ανά δύο διαφορετικοί και ανήκουν στο $\{0,1, \dots, n - 1\}$, άρα το άθροισμα είναι θετικό, μικρότερο από 2^n και πολλαπλάσιο του $2^n - 1$.
Συνεπώς ισούται με $2^n - 1 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$, και από τη μοναδικότητα της δυαδικής γραφής έχει ακριβώς n όρους. Άρα το αρχικό πλήθος όρων είναι $k \geq n$.
Αναγκαιότητα. Αν $k < n$, από το Λήμμα η (1) δεν ικανοποιείται από καμία επιλογή, άρα η (α) αποτυγχάνει. Για $k = n$, η επιλογή $(a_1, \dots, a_n) = (1,2, \dots, n - 1, n)$ δίνει άθροισμα $(2^n - 2) + 2^n = 2(2^n - 1)$, οπότε η (α) ισχύει, ενώ τα υπόλοιπα $1,2, \dots, n - 1,0$ είναι ανά δύο διαφορετικά, οπότε η (β) αποτυγχάνει. Για $k = 2n$, παίρνουμε καθέναν από τους εκθέτες $1,2, \dots, n$ δύο φορές: το άθροισμα είναι $4(2^n - 1)$ και κάθε υπόλοιπο εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές, οπότε η (β) αποτυγχάνει πάλι. Άρα αναγκαστικά $n < k < 2n$.

Επάρκεια. Έστω $k = n + d$ με $1 \le d \le n-1$.
Για την (α): οι k θετικοί εκθέτες $1,2,\dots,n-1$ και $n-1, n-2, \dots, n-d, n-d$ δίνουν άθροισμα

$$(2^n - 2) + \left(2^{n-1} + \cdots + 2^{n-d} + 2^{n-d}\right) = (2^n - 2) + 2^n = 2(2^n - 1),$$

άρα η (1) ικανοποιείται.
Για τη (β): έστω επιλογή που ικανοποιεί την (1) και ας υποθέσουμε ότι $c_j \le 2$ για κάθε j. Τότε $0 < S \le 2(2^n - 1)$, οπότε από τη (2)

$$S = t\,(2^n - 1) = t\,(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) \quad \text{για κάποιο } t \in \{1,2\}.$$

Αν δεν είναι όλα τα c_j ίσα με t, έστω j ο μέγιστος δείκτης με $c_j \ne t$. Οι όροι με δείκτη $> j$ ταυτίζονται στα δύο μέλη, άρα

$$\sum_{i=0}^{j} c_i\, 2^i = t\left(2^{j+1} - 1\right).$$

Αν $t = 1$: για $c_j = 0$ το αριστερό μέλος είναι $\le 2\left(2^j - 1\right) = 2^{j+1} - 2 < 2^{j+1} - 1$, ενώ για $c_j = 2$ είναι $\ge 2^{j+1} > 2^{j+1} - 1$.
Αν $t = 2$: τότε $c_j \le 1$ και το αριστερό μέλος είναι $\le 2^j + 2\left(2^j - 1\right) = 3 \cdot 2^j - 2 < 2^{j+2} - 2$.
Σε κάθε περίπτωση άτοπο. Άρα $c_j = t$ για κάθε j, οπότε $k = \sum c_j = tn \in \{n, 2n\}$, που αντιβαίνει στο $n < k < 2n$. Επομένως κάποιο $c_j \ge 3$, δηλαδή τουλάχιστον τρεις από τους a_i έχουν το ίδιο υπόλοιπο modulo n.
Συμπέρασμα. Οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι ακριβώς οι $\boxed{n+1 \le k \le 2n-1}$.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε έναν πίνακα με m γραμμές και 22 στήλες. Κάθε κελί του πίνακα περιέχει έναν αριθμό από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$ (οι αριθμοί μπορούν να επαναλαμβάνονται), έτσι ώστε για κάθε ζεύγος διαφορετικών αριθμών του A να υπάρχει μία γραμμή που να περιέχει ακριβώς έναν από αυτούς τους δύο αριθμούς. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του m.

Λύση. Απάντηση: $m_{\min} = 176$.
Για κάθε $p \in A$ έστω $R(p)$ το σύνολο των γραμμών που περιέχουν τον p. Μια γραμμή περιέχει ακριβώς έναν από τους p, q αν και μόνο αν ανήκει σε ένα μόνο από τα $R(p), R(q)$. Άρα η συνθήκη της εκφώνησης ισοδυναμεί με το ότι τα σύνολα $R(p)$, $p \in A$, είναι ανά δύο διαφορετικά.
Κάτω φράγμα. Αφού τα $R(p)$ είναι ανά δύο διαφορετικά, το πολύ ένας αριθμός έχει $R(p) = \varnothing$ και το πολύ m αριθμοί έχουν $|R(p)| = 1$ (τα μόνα δυνατά μονοσύνολα είναι τα $\{1\}, \dots, \{m\}$). Έστω x το πλήθος των p με $|R(p)| = 1$ και y το πλήθος των p με $|R(p)| \ge 2$. Τότε

$$x + y \ge 2024, \qquad x \le m, \qquad x + 2y \le \sum_{p \in A} |R(p)| \le 22m,$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή κάθε γραμμή περιέχει το πολύ 22 διαφορετικούς αριθμούς.
Επομένως

$$2 \cdot 2024 \le 2(x+y) = x + (x+2y) \le m + 22m = 23m,$$

άρα $m \ge \frac{4048}{23} = 176$.
Κατασκευή για $m = 176$. Έστω G το γράφημα με κορυφές $v_0, v_1, \dots, v_{175}$ (δείκτες modulo 176), στο οποίο η v_i συνδέεται με τις $v_{i\pm1}, v_{i\pm2}, \dots, v_{i\pm10}$ και v_{i+88}. Το G είναι απλό και 21-κανονικό, με $\frac{176 \cdot 21}{2} = 1848$ ακμές, τις οποίες αριθμούμε $1,2,\dots,1848$. Στη γραμμή i ($i = 0, \dots, 175$) γράφουμε τους αριθμούς των 21 ακμών που προσπίπτουν στην v_i και τον αριθμό $1849 + i$. Έτσι κάθε γραμμή έχει 22 κελιά με αριθμούς του A, και ο 2025 δεν χρησιμοποιείται.
Τότε $R(2025) = \varnothing$, $R(1849 + i) = \{i\}$ για $i = 0, \dots, 175$, και για κάθε ακμή e το $R(e)$ είναι το δισύνολο των άκρων της. Τα σύνολα αυτά είναι ανά δύο διαφορετικά: το κενό, 176 διαφορετικά μονοσύνολα, και 1848 διαφορετικά δισύνολα (διαφορετικές ακμές απλού γραφήματος έχουν διαφορετικά ζεύγη άκρων). Άρα ο πίνακας ικανοποιεί τη συνθήκη, και η ελάχιστη τιμή είναι $\boxed{176}$.

Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 140

Γ74. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. Έστω Χ και Υ τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΒΓ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχουν τα σημεία Γ και Α, αντίστοιχα. Έστω ΒΛ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, όπου Λ σημείο της πλευράς ΑΓ. Αν δίνεται ότι $X\hat{\Lambda}Y = 90^0$, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση.

Επειδή η ευθεία ΒΛ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε: $A\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{B}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}B$,

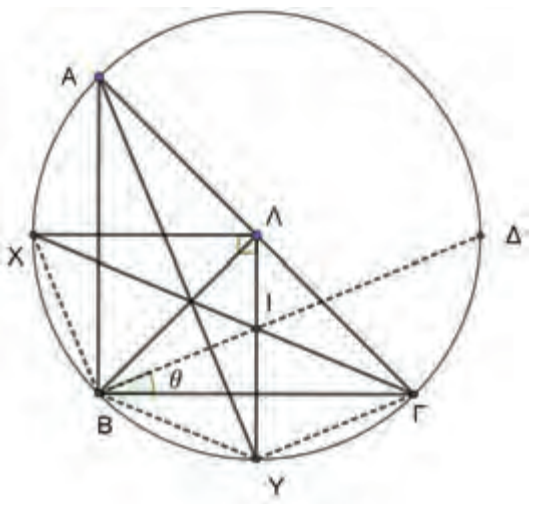
οπότε το τρίγωνο ΛΒΓ είναι ισοσκελές με

$$\Lambda B = \Lambda\Gamma. \qquad (1)$$

Επειδή το Υ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ που δεν περιέχει το Α, έπεται ότι τα τόξα ΒΥ και ΥΓ είναι ίσα, οπότε θα είναι και $B\Upsilon = \Upsilon\Gamma$. (2)

Από τις (1) και (2) έπεται ότι η ευθεία ΛΥ είναι μεσοκάθετη της πλευρά ΒΓ, οπότε θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Lambda}\Gamma$.

Επειδή το Χ είναι το μέσο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το Γ, έπεται ότι η ευθεία ΓΧ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Lambda\hat{\Gamma}B$. Επομένως το σημείο τομής των ευθειών ΛΥ και ΓΧ, έστω Ι, είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΒΛΓ, οπότε η ευθεία ΒΙ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Lambda\hat{B}\Gamma$.



Σχήμα 1

Επειδή η ευθεία ΛΥ είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Lambda}\Gamma$ και από την υπόθεση έχουμε ότι $X\hat{\Lambda}Y = 90^o$, έπεται ότι η ευθεία ΛΧ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Lambda}\Gamma$, οπότε το σημείο Χ είναι το παράκεντρο του τριγώνου ΒΛΓ που αντιστοιχεί στην κορυφή Γ.

Άρα η ευθεία ΧΒ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\Lambda\hat{B}\Gamma$, με συνέπεια την καθετότητα ΧΒ ⊥ ΒΙ, οπότε $X\hat{B}I = 90^o$.

Έστω ότι η ευθεία ΒΙ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Δ και έστω $I\hat{B}\Gamma = I\hat{B}\Lambda = \theta$. Τότε θα είναι $A\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{B}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}B = 2\theta$ και $\Lambda\hat{\Gamma}X = X\hat{\Gamma}B = \theta$.

Επομένως το μέτρο του τόξου ΑΔ είναι ίσο με

$$2 \cdot A\hat{B}\Delta = 2 \cdot \left(A\hat{B}\Lambda + \Lambda\hat{B}\Delta\right) = 2 \cdot (2\theta + \theta) = 6\theta,$$

το μέτρο του τόξου ΑΧ είναι $2 \cdot A\hat{\Gamma}X = 2\theta$, οπότε το μέτρο του τόξου ΔΧ είναι ίσο με 8θ.

Όμως το μέτρο του τόξου ΔΧ ισούται με $2 \cdot X\hat{B}\Delta = 2 \cdot X\hat{B}\Delta = 180^o$, οπότε έχουμε:

$$8\theta = 180^o \Leftrightarrow \theta = 22{,}5^o.$$

Άρα είναι $A\hat{\Gamma}B = 2\theta = 45^o$ και $A\hat{B}\Gamma = 90^o$ και έτσι $B\hat{A}\Gamma = 45^o$.

Α91. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί m, n, a, b, c είναι τέτοιοι ώστε $m > n$ και

$$|ma - nb| \le c(m-n),\ |mb - nc| \le a(m-n),\ |mc - na| \le b(m-n).$$

Να αποδείξετε ότι: $a = b = c$.

Λύση. Με πρόσθεση των δεδομένων ανισοτήτων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$|ma - nb| + |mb - nc| + |mc - na| \le c(m-n) + a(m-n) + b(m-n) \Rightarrow$$
$$|ma - nb| + |mb - nc| + |mc - na| \le (m-n)(a+b+c) = |(m-n)(a+b+c)| \Rightarrow$$
$$|ma - nb| + |mb - nc| + |mc - na| \le |(ma - nb) + (mb - nc) + (mc - na)|.$$

Έστω $x = ma - nb, y = mb - nc, z = mc - na$. Τότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$|x| + |y| + |z| \le |x + y + z| \le |x| + |y| + |z| \Rightarrow |x + y + z| = |x| + |y| + |z|, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι οι αριθμοί x, y, z είναι ομόσημοι.

Πράγματι, από την ισότητα (1) με ύψωση στο τετράγωνο προκύπτει τελικά η ισότητα

$$xy + yz + zx = |xy| + |yz| + |zx|. \qquad (2)$$

Αν, για παράδειγμα, ήταν $x > 0, y > 0, z < 0$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$|xy| + |yz| + |zx| = xy - yz - zx > xy + yz + zx,$$

που είναι αντίθετο με τη σχέση (2). Οι περιπτώσεις που κάποιοι από τους x, y, z είναι ίσοι με το 0, εξετάζονται χωριστά.

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $x \le 0, y \le 0, z \le 0$, τότε $ma \le nb, mb \le nc, mc \le na$, από τις οποίες με πολλαπλασιασμό, κατά μέλη προκύπτει: $m^3abc \le n^3abc \Rightarrow m^3 \le n^3$, άτοπο.
- Αν $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$, τότε
  $x = ma - nb \le c(m-n), y = mb - nc \le a(m-n), z = mc - na \le b(m-n)$.
  Αν κάποια από τις τρεις ανισότητες είναι γνήσια, τότε με πρόσθεσή τους κατά μέλη λαμβάνουμε:
  $$(m-n)(a+b+c) < (m-n)(a+b+c) \Rightarrow a+b+c < a+b+c, \text{άτοπο.}$$
  Άρα πρέπει
  $$ma - nb = c(m-n), mb - nc = a(m-n), mc - na = b(m-n) \Rightarrow$$
  $$m(a-c) = n(b-c), m(b-a) = n(c-a), m(c-b) = n(a-b). \quad (3)$$
  Αν όλα τα στοιχεία εντός των παρενθέσεων είναι διαφορετικά από το μηδέν, τότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει η ισότητα
  $$m^3(a-c)(b-a)(c-b) = n^3(b-c)(c-a)(a-b) \Rightarrow m^3 = -n^3, \text{άτοπο.}$$
  Επομένως, μία τουλάχιστον από τις διαφορές εντός παρενθέσεων ισούται με μηδέν, έστω $a - c = 0 \Rightarrow a = c$, οπότε άμεσα προκύπτει και η ισότητα $b = c$.

Α92. Να προσδιορίσετε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ που είναι τέτοιοι ώστε

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 80 \quad \text{και} \quad \alpha + \frac{\beta}{1+\alpha} + \frac{\gamma}{1+\alpha+\beta} + \frac{\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma} = 8.$$

Λύση. Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη της δεύτερης σχέσης, οπότε έχουμε:

$$1+\alpha+1+\frac{\beta}{1+\alpha}+1+\frac{\gamma}{1+\alpha+\beta}+1+\frac{\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma} = 12 \Leftrightarrow$$

$$1+\alpha+\frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha}+\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta}+\frac{1+\alpha+\beta+\gamma+\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma} = 12.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$1+\alpha+\frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha} \ge 2 \cdot \sqrt{(1+\alpha)\cdot\frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha}} = 2\sqrt{1+\alpha+\beta},$$

$$\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta}+\frac{1+\alpha+\beta+\gamma+\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma} \ge 2\sqrt{\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta}\cdot\frac{1+\alpha+\beta+\gamma+\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma}} = 2\sqrt{\frac{81}{1+\alpha+\beta}}$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη και νέα εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου λαμβάνουμε:

$$12 = 1+\alpha+\frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha}+\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta}+\frac{1+\alpha+\beta+\gamma+\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\ge 2\sqrt{1+\alpha+\beta}+2\sqrt{\frac{81}{1+\alpha+\beta}} = 2\left(\sqrt{1+\alpha+\beta}+\frac{9}{\sqrt{1+\alpha+\beta}}\right) \ge 12.$$

Επομένως, πρέπει να ισχύει η ισότητα σε κάθε εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού- γεωμετρικού μέσου, οπότε έχουμε: $\sqrt{1+\alpha+\beta} = \frac{9}{\sqrt{1+\alpha+\beta}}, 1+\alpha = \frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha}, \frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta} = \frac{1+\alpha+\beta+\gamma+\delta}{1+\alpha+\beta+\gamma}$.

Από την πρώτη ισότητα προκύπτει ότι $\alpha+\beta = 8$, οπότε από τις επόμενες εξισώσεις έχουμε:

$$(1+\alpha)^2 = 9 \text{ και } (1+\alpha+\beta+\gamma)^2 = 9\cdot 81 \overset{\alpha,\beta,\gamma,\delta>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 2, \beta = 6, \gamma = 18, \delta = 54.$$

Ασκήσεις για λύση

Γ75. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ >ΑΒ και έστω Δ το μέσο του τόξου ΒΓ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχει το Α. Η κάθετη ευθεία από το σημείο Β προς την ευθεία ΑΔ τέμνει την παράλληλη από το Γ προς την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ε. Η παράλληλη ευθεία προς την ΑΒ από το σημείο Ε τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{B}\Delta = 90^o$. **(ΜΟ Ιταλίας 2026)**

Ν62. Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους α, β, γ που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 13(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha). \quad \textbf{(ΜΟ Σιγκαπούρης 2026)}$$

Ν63. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots, \nu \in \mathbb{N}$, με $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu-1}^2 = \alpha_{\nu-2}\alpha_\nu - 2$, για κάθε $\nu \ge 2$. Να αποδείξετε ότι κάθε όρος της ακολουθίας (α_ν) είναι ακέραιος. **(ΜΟ Ολλανδίας 2026)**



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

A_2. ΑΠΟΨΕΙΣ διαφόρων ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΩΝ Μαθηματικών

(από εργασία του Βασίλη Λιόση)

Τα Μαθηματικά, κατά τον Πυθαγόρα ***[590-495 π.Χ.]***

Η σχολή του Πυθαγόρα, δεν μπορούσε παρά να είναι φορέας του μυστικισμού του αιγυπτιακού ιερατείου, στην υπηρεσία του οποίου ανδρώθηκε ο ιδρυτής της. Το πιστεύω τους για τα Μαθηματικά ήταν:

«Τα Μαθηματικά είναι υπερβατικά κι ενδεδυμένα με ένα μυστικισμό, είναι ένας μετακώδικας, υπάρχουν έξω από εμάς και άρα δεν αποτελούν προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας»

Τα Μαθηματικά, κατά τον Πλάτωνα ***[427-347 π.Χ.]***

Ο Πλάτωνας, συνεπής προς το φιλοσοφικό του πιστεύω (αντικειμενικός ιδεαλισμός), θεωρούσε:

α) την ύπαρξη των αντικειμένων γνώσης ανεξάρτητα από το υποκείμενο-γνώστη καθώς και ανεξάρτητα από τον τρόπο γνώσης τους.

β) ότι αυτά τα αντικείμενα γνώσης ήταν αντίγραφα των ιδεατών οντοτήτων, δηλαδή των ιδεών.

γ) ότι οι μαθηματικές οντότητες ήταν ένα υποσύνολο των ιδεών.

Δηλ. οι μαθηματικές ιδέες είναι μέρος του κόσμου των ιδεών και πρώτα και κύρια πρέπει να τα βλέπουμε υπό αυτό το πρίσμα.

Τα Μαθηματικά, κατά τον Αριστοτέλη ***[384-322 π.Χ.]***

Η άποψη του Αριστοτέλη για το τι είναι Μαθηματικά, προσεγγίζει σε σημαντικό βαθμό τον ορισμό που δόθηκε στην αρχή της μελέτης μας (στο: "Ένας ορισμός"). Τα Μαθηματικά προκύπτουν από την παρατήρηση των αντικειμένων και των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ τους και μάλιστα μέσα από την αφαιρετική διαδικασία. Οι ομοιότητες είναι προφανείς. Ο ρεαλισμός του Αριστοτέλη σε αυτό το σημείο είναι διαφορετικός από του Πλάτωνα. Είναι ρεαλισμός υλιστικής φύσης και όχι ιδεαλιστικής και μεταφυσικού προσανατολισμού.

Η κριτική που ασκεί σε άλλα σημεία του έργου του στις απόψεις του Πλάτωνα είναι οξεία, σχεδόν ειρωνική.: «…[οι υπέρμαχοι των ειδών] τοποθετούν τα Μαθηματικά αντικείμενα ανάμεσα στα είδη και τα αισθητά πράγματα ως μια τρίτη κατηγορία πραγμάτων πέρα από τα



είδη και τα πράγματα του κόσμου τούτου, *πλην μια τρίτη κατηγορία πραγμάτων πέρα από τα είδη και τα πράγματα του κόσμου τούτου, πλην όμως δεν υπάρχει τρίτος άνθρωπος και τρίτος ίππος παράλληλα με τον καθ' αυτό και τους εξατομικευμένους ανθρώπους και ίππους».*

τα Μαθηματικά, κατά τον Γαλιλαίο ***[1564-1642]***

Ο Γαλιλαίος ήταν αντι-Αριστοτελικός και πιθανόν πρέπει να ενταχθεί στην πλατωνική παράδοση. Κατά τον Γαλιλαίο: «η φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του σύμπαντος, το οποίο... είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών και οι γλωσσικοί χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μια λέξη. Χωρίς αυτά κανείς περιπλανιέται σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο».

Επειδή ο αριθμός των φιλοσόφων και των μαθηματικών που "σημάδεψαν" την επιστήμη των

Μαθηματικών, είναι τεράστιος, εμείς θα παραθέσουμε, σχεδόν "συνθηματικά" την άποψη ορισμένων. Η παράθεση των ονομάτων δεν σημαίνει πως οι άλλοι είναι "κατώτεροι":

Τα Μαθηματικά, κατά τους Nikołaj Kopernik [1473-1543]– Johannes Kepler [1571-1630]

Κατά την εποχή του Κοπέρνικου και του Κέπλερ πραγματοποιείται μια επιστημονική επανάσταση της οποίας ένα χαρακτηριστικό είναι «η γεωμετρικοποίηση του χώρου....». Έτσι, τα Μαθηματικά μπορεί να χρησιμοποιούνται για να ερμηνεύουν, ωστόσο η βάση πάνω στην οποία εδράζονται είναι θεολογική.

Τα Μαθηματικά, κατά τον René Descartes [1596-1650]

Ο Καρτέσιος υιοθετεί μια ρεαλιστική άποψη για την ύπαρξη των Μαθηματικών, βλέποντας ότι εφαρμοσμένα και θεωρητικά Μαθηματικά επικοινωνούν μέσω συγκοινωνούντων δοχείων, αλλά δεν την φτάνει μέχρι τέλους. Το ένα δοχείο είναι ο νους μέσα στον οποίο ανασύρονται οι έμφυτες ιδέες των θεωρητικών Μαθηματικών, το άλλο δοχείο είναι η πραγματικότητα όπου τα θεωρητικά Μαθηματικά μεταφράζουν αυτή την πραγματικότητα και μετατρέπονται σε εφαρμοσμένα.

Τα Μαθηματικά, κατά τον Isaac Newton [1642-1726]

Χωρίς να είναι ρητά διατυπωμένο από την πλευρά του Νεύτωνα, προκύπτει αβίαστα από τη γενικότερη άποψή του ότι τα Μαθηματικά μπορούν να περιγράφουν τα πάντα στη φύση και μάλιστα φαίνεται ότι τα Μαθηματικά εκείνης της εποχής θεωρούνται επαρκή.



Τα Μαθηματικά, κατά τον Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716]

Τα Μαθηματικά θεωρήθηκαν από τον Leibniz ως το τέλειο παράδειγμα της λογικής απόδειξης. Σε όλα τα πράγματα οφείλουμε να εφαρμόσουμε τη μαθηματική μορφή. Ο Leibnitz πίστευε ότι μπορεί όλη η ανθρώπινη σκέψη να τυποποιηθεί.

Τα Μαθηματικά, κατά τον George Berkeley [1685-1753]

Ο (επίσκοπος) Berkeley είναι συνεπής με το φιλοσοφικό του πλαίσιο, δηλ. του υποκειμενικού ιδεαλισμού. Επιδιώκει να δείξει ότι τα Μαθηματικά αναφέρονται σε ανύπαρκτα αντικείμενα, κάτι που το θεωρεί σαν συνέπεια του ότι η ύλη δεν υπάρχει, άρα πώς θα μπορούσαν τα Μαθηματικά να έχουν μια οντολογική δικαίωση;

Τα Μαθηματικά, κατά τον David Hume [1711-1776]

Ο αγνωστικιστής Hume πίστευε ότι: «οι αποδείξεις δεν είναι σαν τις πιθανότητες, όπου μπορούν να ανακύψουν δυσκολίες και το ένα επιχείρημα να αντικρούει το άλλο και να μειώσει την ισχύ του. Μια απόδειξη αν είναι ορθή, δεν επιδέχεται καμία αμφισβήτηση. Εάν, πάλι, η απόδειξη δεν είναι ορθή, τότε αποτελεί καθαρή σοφιστεία, συνεπώς δεν μπορεί να γίνεται λόγος για δυσκολία απάντησης σε αυτήν. Είναι είτε ακαταμάχητη είτε τελείως ανίσχυρη...».

Τα Μαθηματικά, κατά τον Immanuel Kant ***[1724-1804]***

Ο Kant, ένας από τους πιο μεγάλους φιλοσόφους, ιδρυτής του γερμανικού ιδεαλισμού ,έγραφε για τα Μαθηματικά: «Ο χώρος και ο χρόνος είναι εκείνες οι εποπτείες, τις οποίες τα καθαρά Μαθηματικά θέτουν ως βάση όλων των γνώσεων και κρίσεων τους, οι οποίες θεωρούνται ως αποδεικτικές και συνάμα αναγκαίες· γιατί τα Μαθηματικά οφείλουν να παρουσιάζουν, δηλαδή να κατασκευάζουν, όλες τις έννοιές τους πρώτα μέσα στην εποπτεία, και τα καθαρά Μαθηματικά μέσα στην καθαρή εποπτεία…».

Τα Μαθηματικά, κατά τον Jules Henri Poincaré (Πουανκαρέ) [1854-1912]

Για τα Μαθηματικά ο Poincaré υποστηρίζει ότι: «οι μαθηματικές αλήθειες προκύπτουν από μικρό αριθμό προφανών προτάσεων μέσω μιας αλυσίδας ανεπίληπτων συλλογισμών που επιβάλλονται όχι μόνο σε εμάς αλλά και στην ίδια τη φύση. Δεσμεύουν, σαν να λέμε, το δημιουργό κι επιτρέπουν σε αυτόν να εκλέξει μόνο μεταξύ κάποιων λύσεων σχετικώς ευαρίθμων».

Τα Μαθηματικά, κατά τον Godfrey Harold Hardy [1877-1947]

Κατά τον Hardy, τα καθαρά και τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά διαχωρίζονται με ένα σινικό τείχος, παραπέμποντας κατά ένα τρόπο στην πλατωνική θεώρηση των θεωρητικών κι εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά, κατά τον* Phillip J. Davis *[1927–2020] and **Reuben Hersh *[1923–2018]***

Οι Davis και Hersh.ισχυρίζονται ότι: «τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη της ποσότητας και του χώρου. Επεκτείνοντας λιγάκι αυτόν τον ορισμό θα μπορούσε να προστεθεί ότι τα Μαθηματικά ασχολούνται επίσης με το συμβολισμό που σχετίζεται με την ποσότητα και το χῶρο...».

Τα Μαθηματικά, κατά τον Danilovich Aleksandrov [1912-1999]

«Το αντικείμενο των Μαθηματικών, είναι οι μορφές εκείνες και οι σχέσεις της πραγματικότητας, που αντικειμενικά κατέχουν τέτοιο βαθμό αδιαφορίας απέναντι στο περιεχόμενο,ώστε μπορούν ολοκληρωτικά να αποσπαστούν από αυτό και να προσδιοριστούν γενικά, με τέτοια σαφήνεια και ακρίβεια, με τη διατήρηση τέτοιου πλούτου συνδέσεων, με σκοπό να αποτελέσουν τη βάση για καθαρά λογική ανάπτυξη της θεωρίας».

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ

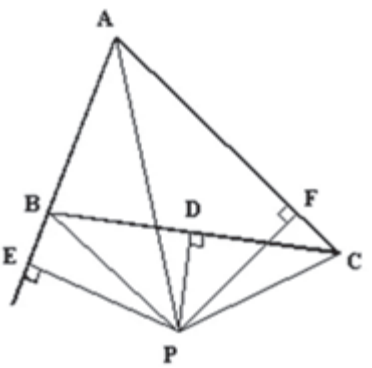
***του Φίλωνος Βασιλείου* (της Ακαδημίας Αθηνών)**

«Είναι δύσκολο για τους πολλούς να κατανοήσουν την ύπαρξη οποιασδήποτε συγγένειας ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Αισθητική. Κι' αυτό γιατί ο κοινός άνθρωπος θεωρεί τα Μαθηματικά σαν μια επιστήμη σκοτεινή και ψυχρή, που περισσότερο αποκρούει παρά θέλγει και που γι' αυτό κάθε αισθητικό στοιχείο της είναι ξένο και απρόσιτο. Ο ίδιος ακόμα συναρτά την ύπαρξη του Ωραίου μόνο με τη Φύση και την Καλλιτεχνία. Δεν ημπορεί λοιπόν να σκεφθεί με ποιο μια τόσο έκδηλα νοητική δραστηριότητα, όπως εκείνη του μαθηματικού, είναι δυνατό να σχετίζεται με τον συναισθηματικό κόσμο, μέσα στον οποίο πολλές φορές ο καλλιτέχνης κινείται και δημιουργεί.

Ωστόσο, αν δε σταθεί κανείς στην απλοϊκή αυτή αντίληψη και αν ζητήσει, ακόμη και ως μη ειδικός, να ερευνήσει για βαθύτερες αναλογίες, δεν θ' αργήσει να εντυπωσιαστεί από πολύ στενές ομοιότητες, που υπάρχουν στις επιφανειακά τόσο διαφορετικές λειτουργίες του μαθηματικού και του καλλιτεχνικού νου. Δεν αποκλείεται, η έκπληξη να οδηγήσει ακόμα και στην ακραία άποψη, πως δηλ. τα Μαθηματικά πρέπει κι αυτά να θεωρηθούν ως μία Καλή Τέχνη.

Οι ομοιότητες, για τις οποίες έγινε λόγος, αφορούν είτε στον τρόπο λειτουργίας του δημιουργικού νου, στις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις, είτε σε κοινές βασικές έννοιες που χρησιμοποιεί τόσον ο μαθηματικός όσον και ο καλλιτέχνης. Εξ΄ άλλου η θεώρηση καθ' εαυτή οποιασδήποτε μαθηματικής δομής μαζί με τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο δόμησή της παρέχει πραγματικά μια καθαρά αισθητική απόλαυση με τη θαυμαστή αρμονία αρχιτεκτονικής και την κομψότητα στην έκθεση των θεωριών της. Ο,τι συντελεί στην μαθηματική, και γενικότερα στην επιστημονική, δημιουργία μας είναι γνωστό από τον ίδιο τον H. Poincaré (1854-1913) είναι η συνθετική σκέψη σε συνεργασία με εκείνο που ονομάζουμε Υποσυνείδητο.

Την πρόβαση της μαθηματικής σύνθεσης, που οδηγεί σε μια καινούργια επινόηση, την αντιλαμβάνεται κανείς, αν σκεφθεί ότι διάφορες παραστάσεις γενικές ή μη, καθώς και ιδέες ή εξαγόμενα από ορισμένη θεωρία βρίσκονται αποθηκευμένες και λησμονημένες στο Υποσυνείδητο. Ξαφνικά, κατά την διάρκεια μιας έρευνας που απασχολεί το νου, έρχεται στην επιφάνεια εκείνο από τα λησμονημένα στοιχεία, πού σε σύνθεση με τα στοιχεία της συνειδητής σκέψης δίνει τη ζητούμενη ερμηνεία, απόδειξη ή λύση.



Παραβάλλοντας την νοητική αυτή πρόβαση του μαθηματικού νου με εκείνη που συντελείται στον εγκέφαλο ενός δημιουργού καλλιτέχνη, συνειδητοποιεί κανείς την υφιστάμενη αναλογία ανάμεσα στις δύο αυτές δραστηριότητες, ίσως μάλιστα ο τόσο σημαντικός και μυστηριώδης ρόλος του 'Υποσυνείδητου να είναι πολύ πιο φανερός στην περίπτωση του καλλιτέχνη, μια και γι΄ αυτόν το

Υποσυνείδητο δεν εκδηλώνεται μόνο τη στιγμή της σύλληψης ενός καλλιτεχνήματος, άλλα και σ' όλη την κατοπινή εξέλιξη της δημιουργικής διεργασίας του. Η συνεργασία αυτή Υποσυνειδήτου και ενσυνείδητης σκέψης είναι περισσότερο έκδηλη στις σύγχρονες τάσεις των Καλών Τεχνών.

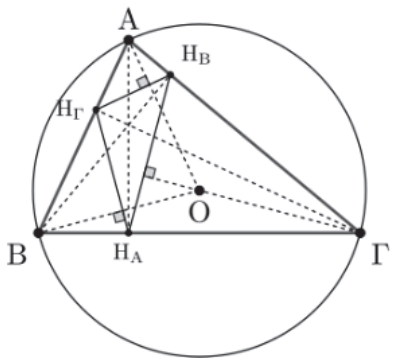
Μια βασική τώρα έννοια, κοινή στα Μαθηματικά και την Καλλιτεχνία, εκτός από τις γνωστές σε όλους χρυσή τομή και συμμετρία, είναι εκείνη του συμπλέγματος, αλλιώς ομάδας, που πηγάζει απ' αυτή την έννοια της συμμετρίας.

Σ' ένα γεωμετρικό σχήμα συμμετρία είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση των σημείων του σχήματος επάνω στα ίδια αυτά σημεία με διατήρηση της απόστασής τους ανά δύο. Η πράξη της αλλεπάλληλης εφαρμογής δύο τέτοιων απεικονίσεων, που έχει ορισμένες ιδιότητες, παρέχει ένα σύστημα από απεικονίσεις. Γενίκευση του συστήματος αυτού σε οποιαδήποτε αφηρημένα στοιχεία – στη θέση απεικονίσεων – για τα οποία ορίζεται μια μονοσήμαντη διμελής πράξη που υπακούει σε ίδιες ιδιότητες όπως οι απεικονίσεις, αποτελεί αυτό που ονομάζουμε σύστημα συμπλεγμάτων. Η έννοια του συμπλέγματος εισέρχεται σε κάθε σχεδόν κλάδο των σύγχρονων Μαθηματικών. Ιδιαίτερα μια από τις πιο βασικές και ωραίες μαθηματικές θεωρίες, η λεγόμενη θεωρία του E. Galois (1811-1832), έχει τις ρίζες της στα συμπλέγματα. Στις Καλές Τέχνες, ιδιαίτερα στη Μουσική, η έννοια του συμπλέγματος παίζει επίσης σπουδαιότατο ρόλο. "Έτσι, η "Τέχνη της Φούγκας" του J.S.Bach (1685-1750) δείχνει πόσο βαθειά εισδύουν στη μουσική σύνθεση μαθηματικές έννοιες. "Άλλωστε η σημασία της επίδρασης καταφαίνεται και από το γεγονός, ότι το έργο αυτό θεωρείται ως το πιο μεγαλεπήβολο δείγμα σύνθεσης στη Μουσική της Δύσεως. Δεν ημπορεί φυσικά να υποστηριχθεί ότι ο συνθέτης του υπόψη έργου καθοδηγείτο ενσυνείδητα από κάποια μαθηματική θεωρία. Ακριβώς όμως η σύνθεση αυτή καταδεικνύει μια στενή συγγένευα ανάμεσα στη Μουσική και στα Μαθηματικά.

Από μουσικοκριτικές αναλύσεις της Σονάτας 15, αρ.28 για πιάνο του L.van Beethoven (1770-1827) συμπεραίνομαι ακόμα, ότι το έργο αυτό έχει συντεθεί, φυσικά με τρόπο μη συνειδητό, απάνω σε μαθηματικά πρότυπα, συγκεκριμένα στη θεωρία των συμπλεγμάτων. Το ίδιο μπορεί να ειπωθεί και για άλλες μουσικές συνθέσεις όπως για μερικά όχι τόσο γνωστά έργα του ***W.A.Mozart*** (1756-1791) και του ***J.Haydn*** (1732-1809).

Αλλά και σχετικά με την ίδια τη δομή της μαθηματικής θεωρίας υπάρχει υψηλή αισθητική απόλαυση, που για να τη δοκιμάσει όμως κανείς απαιτείται – όπως και στην Τέχνη- προηγούμενη καλλιέργεια αυτού που ονομάζουμε μαθηματικό γούστο, ανάλογο με το καλλιτεχνικό. Την αισθητική απόλαυση, στην περίπτωση μιας μαθηματικής θεωρίας, τη δίνει η τελειότητα στις αποδείξεις, η αρμονία ανάμεσα στα διάφορα μέρη και η αυστηρή αρχιτεκτονική του Όλου. Στην αρμονία αυτή, τη συμμετρία και την πλήρη ισορρόπηση των μερών, αποδίδει ο H. Poincaré την αίσθηση της κομψότητας, που χαρακτηρίζει τα Μαθηματικά.

Αναφορικά με τη μέθοδο δομήσεως σημειώνουμε, ότι ένα από τα κύρια εφόδια στα Μαθηματικά είναι οι συμβολικοί τύποι, που αντιπροσωπεύουν αυτές τις ίδιες τις μαθηματικές ιδέες. Ώστε, η ακολουθούμενη αξιωματική μεθοδολογία για τον χειρισμό των τύπων αυτών εμφανίζει ένα πρόσθετο τομέα, άξιο να εξεταστεί για τον αισθητικό του χαρακτήρα.



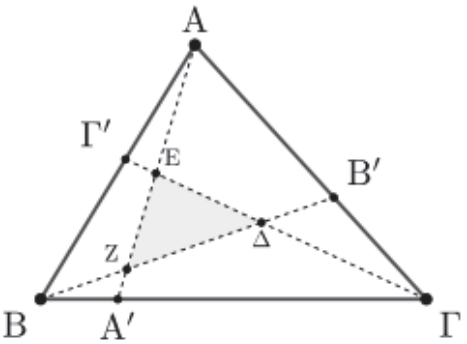
Μια από τις σύγχρονες Σχολές, που θέλει να ερμηνεύσει, την ίδρυση των Μαθηματικών, είναι η "Φορμαλιστική Σχολή" που οφειλόταν στον D. Hilbert (1862-1943). Πρόκειται για την θεώρηση εκείνη των Μαθηματικών, που τα βλέπει κανείς πρώτα ως ένα σύστημα από τύπους, χωρίς οποιαδήποτε σημασία, και από πράξεις επάνω στους τύπους αυτούς πράξεις που εκτελούνται σύμφωνα με ορισμένους κανόνες. Στο σύστημα αυτό ξεκινά κανείς από ορισμένους τύπους-αξιώματα και απ' αυτά συνάγει τούς λοιπούς τύπους του συστήματος με βάση τις δοθείσες τυπικές πράξεις. Έπειτα η εφαρμογή μιας άλλης ,εποπτικής τη φορά αυτή, θεωρίας που φέρει το όνομα Μεταμαθηματικά- συμπληρώνει αυτό που ονομάζουμε, κατά τον Hilbert, Μαθηματικά. Είναι πολύ προσφυής ο παραλληλισμός της φορμαλιστικής θεωρίας με το γνωστό παιγνίδι του σκακιού. Ο παραλληλισμός αυτός πραγματοποιείται, αν αντιστοιχήσουμε τους τύπους-αξιώματα με την αρχική θέση που έχουν οι φιγούρες στο παιγνίδι, τον τρόπο παράγωγης των τύπων με τους κανόνες κινήσεων στις φιγούρες και τις αποδείξεις με τις σειρές κινήσεων του παιγνιδιού.

Όσα είπαμε πιο πάνω για τον φορμαλιστικό τρόπο δόμησης των Μαθηματικών νομίζουμε ότι αποκαλύπτουν με ενάργεια τον αισθητικό' χαρακτήρα της μεθόδου αυτής , μεθόδου που σε αδρές γραμμές μας δίνει μια πλήρη εποπτική εικόνα της

λειτουργίας σε ένα τόσο εκτεταμένο και πολυδαίδαλο οικοδόμημα.

Ας σημειωθεί εδώ, ότι το λεγόμενο μαθηματικό κάλλος δεν υμνήθηκε λιγότερο από το καλλιτεχνικό η και το ίδιο το λογοτεχνικό. Ό J. Sylvester (1814-1897), λόγου χάρη, έλεγε: «Ο κόσμος των ιδεών, που αποκαλύπτουν η που φωτίζουν τα Μαθηματικά, η ενατένιση του θεϊκού κάλλους και της τάξης που απεργάζονται, καθώς και η αρμονική συνοχή των μερών τους... είναι ο πιο ασφαλής τίτλος των Μαθηματικών». Με τους χαρακτηρισμούς "υπέροχο" και "ευγενικό" για το μαθηματικό κάλλος, εκφράζεται επίσης ο B. Russell (1872-1971). "Όταν μιλούμε βέβαια για το μαθηματικό κάλλος, δεν το ταυτίζουμε με εκείνο στις άλλες δραστηριότητες του ανθρώπου. Γιατί, παρά τις ομοιότητες που τονίσαμε, υπάρχουν και σημαντικές διαφορές στα διάφορα *είδη* πνευματικής και καλλιτεχνικής δημιουργίας που, μεταξύ άλλων, οφείλονται και στα διαφορετικά μέσα που χρησιμοποιούνται σ' αυτές. ἐκεῖνο που θα μπορούσε να ερωτήσει, κανείς είναι αν υπάρχουν αντικειμενικά κριτήρια για την αξιολόγηση και την συγκριτική αποτίμηση των αισθητικών αξιών μέσα σε μια και την ίδια μαθηματική δημιουργία η στις αισθητικές αξίες διαφόρων δημιουργιών. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν είναι καθόλου εύκολη, για να μη πούμε πως στην ουσία είναι αρνητική. Είναι φανερό ότι η ύπαρξη αντικειμενικού κριτηρίου αποτίμησης των μαθηματικών αξιών ισοδυναμεί με την εύρεση κανόνων για τη δημιουργία αισθητικών αριστουργημάτων. Ούτε ακόμα είναι, δυνατή η συγχώνευση σε ένα κανόνα των διαφόρων γνωρισμάτων για καθένα χωριστά μαθηματικό επίτευγμα, που έχει. αισθητική αξία.

Το βέβαιο είναι, ότι κάθε μαθηματικό επίτευγμα έχει, τη δική του αισθητική αξία και ότι, κατά κάποιο τρόπο μπορούσε κανείς να το αντιμετωπίσει ως ένα έργο τέχνης. Στο σημείο αυτό ας μη ξεχνούμε, ότι ό H. Weyl (1885-1955) παρομοιάζει την μαθηματική με την μουσική δημιουργία. "Υπάρχουν αν και σπανιότερα, μαθηματικοί πού αισθάνονται την ανάγκη να προσφύγουν στον καλλιτέχνη για την αισθητική αξιολόγηση του έργου τους. Δεν θα ήταν άραγε επιθυμητό να βρίσκονταν κάποτε και καλλιτέχνες που θα συμβουλεύονταν τους μαθηματικούς για τον ίδιο λόγο;



Ένα τελευταίο ερώτημα αφορά στο κατά πόσον η συγκίνηση, η ευαισθησία και γενικά ο συναισθηματικός κόσμος του μαθηματικού, ασκεί οποιαδήποτε επίδραση στο δημιουργικό του έργο, ανάλογα με ότι συμβαίνει στον καλλιτέχνη. Θέλουμε να πιστεύομε, ότι και στο σημείο αυτό υπάρχει αναλογία ανάμεσα στο έργο ενός καλλιτέχνη και ενός μαθηματικού, αφού άλλωστε η αγάπη και το πάθος για την επιστήμη του οδηγούν τον μαθηματικό στο δημιουργικό του έργο.

Φίλων ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
της Ακαδημίας Αθηνών

*Ανατύπωση, με μικρές αλλαγές, από το περιοδικό «Ευθύνη» του 1976.

Ο Μπέρτραντ Ράσελ και το όριο της λογικής…Το παράδοξο του Ράσελ

Φανταστείτε ότι ζείτε σε ένα χωριό, όπου ισχύει ένας πολύ περίεργος νόμος. Ο νόμος λέει:

***1)** Όλοι οι άρρενες κάτοικοι πρέπει να κυκλοφορούν καλοξυρισμένοι*

***2)** Οι κάτοικοι δεν πρέπει να ξυρίζονται μόνοι τους, αλλά από τον κουρέα του χωριού.*

Αμέσως αμέσως, έχουμε το εξής παράδοξο: ***Ποιος θα ξυρίσει τον κουρέα;*** Δεν μπορεί να ξυριστεί μόνος του, γιατί απαγορεύεται από τον κανονισμό, αλλά δεν μπορεί να κυκλοφορήσει και αξύριστος.

Αυτό το παράδειγμα αναφέρεται ένα από τα γνωστότερα σφάλματα της λογικής και είναι γνωστό σαν ***παράδοξο του Ράσελ.*** Ο Μπέρτραντ Ράσελ γνωστός μαθηματικός και φιλόσοφος, ήταν από τους πρωτεργάτες, της θεμελίωσης της Λογικής ως ξεχωριστής επιστήμης. Δημοσίευσε το εν λόγω παράδοξο στη μαθηματική

του μορφή το 1901, και έβαλε βόμβα στη θεωρία των συνόλων του Καντόρ. Αναφέρεται ότι είχε ανακαλυφθεί ένα χρόνο νωρίτερα από τον Έρνστ Ζερμέλο, ο οποίος όμως δεν το δημοσίευσε και έχασε και τη δόξα.

Λίγο πολύ αυτό που λέει αυτό το παράδοξο είναι ότι είναι προβληματικό να μιλάμε για σύνολα πραγμάτων, που περιέχουν τον εαυτό τους, δηλαδή την αυτοαναφορικότητα. Για παράδειγμα ας πάρουμε τον κατάλογο όλων των βιβλίων που δεν έχουν αναφορά προς τον εαυτό τους. Αυτός ο κατάλογος θα συμπεριελάμβανε τον εαυτό του; ***Αν τον συμπεριελάμβανε, θα δημιουργούσε παράδοξο,***

όπως επίσης και αν δεν τον συμπεριελάμβανε. Μια βασική απόρροια είναι ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για ένα σύνολο όλων των συνόλων, τουτέστιν για το άπειρο….

Το παράδοξο του Ράσελ βάζει ένα σαφές όριο, σε αυτό που καλούμε ανθρώπινη λογική. Το τελειωτικό κτύπημα όμως το έδωσε ο Κουρτ Γκέντελ, με τα δύο θεωρήματα του, της μη πληρότητας. Με αυτά αποδεικνύει με απλά λόγια, ότι πάντα σε οποιοδήποτε λογικό οικοδόμημα πάμε να χτίσουμε, πρέπει να πάρουμε κάποιες προτάσεις σαν αξιώματα, δηλαδή αναπόδεικτες, και πάνω εκεί θα θεμελιώσουμε. Αντιστρόφως αν τα αξιώματα αποδεικνύονται εντός του συστήματος, υπάρχουν προτάσεις, οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχθούν!

Πράγματα, για τα οποία δεν μπορούμε να μιλήσουμε, πράγματα τα οποία δεν μπορούμε να αποδείξουμε. Και όλα αυτά στην καθαρότερη των επιστημών…τα μαθηματικά! Και όμως ήδη από τις αρχές του αιώνα έχουν αποδειχτεί τα ανθρώπινα όρια της λογικής. Αντιστοίχως στη φυσική έχουν μετατοπιστεί τα όρια από τον ντετερμινισμό, προς την στοχαστικότητα, με την κβαντική φυσική. Στη φύση, η θέση και η ταχύτητα ενός σωματιδίου, δεν μπορεί να καθοριστούν ποτέ με ακρίβεια ταυτόχρονα, όπως μας είπε και ο Χάιζενμπεργκ. Αλλά και η συμπεριφορά του είναι μυστηριώδης, άλλοτε σαν κύμα, άλλοτε σαν σωματίδιο, άλλες φορές και τα δυο ταυτόχρονα.

Σε όλα τα φάσματα της επιστήμης πια η στροφή έχει γίνει προς στη στοχαστικότητα. Αυτό είναι το νέο πεδίο δόξας. Οι πιθανότητες. Η βεβαιότητα είναι κάτι, που δεν μπορούμε πια να αναζητούμε, από την επιστήμη. Οι βεβαιότητες είναι ίδιον θρησκειών.

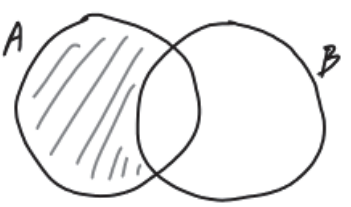
Επομένως για τον επόμενο που θα δηλώσει απολύτως σίγουρος, για κάτι, δεν είναι σωστό να είμαστε καχύποπτοι;

Το «μηδέν» κι η «μονάδα»

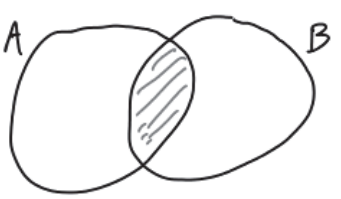
Θα διασαφηνίσουμε αν στην "Άλγεβρα των συνόλων" υπάρχει το στοιχείο 0 (μηδέν) που η πρόσθεσή του σε οποιοδήποτε σύνολο Α *δε μεταβάλλει* το σύνολο αυτό. Είναι φανερό ότι το τελευταίο μπορεί να γίνει μοναχά στην περίπτωση που το "σύνολο 0" δεν περιέχει καθόλου στοιχεία, δηλ. Είναι το "κενό". Αλλά στην περίπτωση αυτή πώς μπορούμε να κάνουμε έστω και λόγο για "σύνολο", γιατί τί είδους σύνολο είναι αυτό που το αποτελούν ξεχωριστά στοιχεία, αφού τα στοιχεία αυτά δεν υπάρχουν καθόλου;

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset, \\
1 &= \{\emptyset\}, \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
&\vdots \\
n &= \{0, 1, \ldots, n-1\}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Στη θεωρία των συνόλων μολαταύτα είναι σκόπιμο να προσλάβουμε το σύνολο αυτό που εξετάζουμε και το *κενό σύνολο* που δεν περιέχει καθόλου στοιχεία. Σε αντίθετη περίπτωση δεν θα μπορούμε να μιλάμε για σύνολο, χωρίς να ξεκαθαρίσουμε προκαταβολικά αν αυτό υπάρχει ή όχι. Έτσι, προτού πούμε: «το σύνολο των αριστούχων της Θ΄ τάξης του 13ου Σχολείου των Τρικάλων», θα χρειασθεί να πάμε στο Σχολείο, να βεβαιωθούμε για την επίδοση των μαθητών αυτής της τάξης. Πολύ πιο άνετα και ήρεμα μπορούμε να μιλάμε γι΄ αυτό το σύνολο, με την επιφύλαξη μοναχά πως αυτό μπορεί να είναι και ενό, δηλ. Να μη έχει κανένα στοιχείο. Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να πούμε από πριν πως τούτο ή το άλλο σύνολο δεν είναι κενό.



Έτσι, δεν είναι κενό, εννοείται, το σύνολο των πιο ψηλών μαθητών της τάξης (το σύνολο αυτό μπορεί να περιλαμβάνει κάποτε και παραπάνω από έναν μαθητή). Σε άλλες περιπτώσεις θα πούμε αμέσως πως το σύνολο για το οποίο μιλάμε είναι κενό.



Έτσι φυσικά κενό είναι το σύνολο των ζωντανών ελεφάντων που διδάσκονται στην τάξη σας ή το σύνολο των μαθητών που το ανάστημά τους ξεπερνάει τα 2,5 μέτρα. Ωστόσο στις περισσότερες περιπτώσεις, μοναχά μια πιο επιμελής εξέταση επιτρέπει να δείξουμε, αν τούτο ή το άλλο σύνολο είναι κενό ή όχι. Έτσι π.χ. το σύνολο των μαθητών με το όνομα Οδυσσέας ή το σύνολο των αριστοχέρηδων της τάξης σας μπορεί να αποδειχθεί κενό ή όχι κενό.

Πιτσιάβας Δημήτριος – Καραθάνα Αικατερίνη – Χρήστος Π. Τσιφάκης

Άσκηση 1

Αν $x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ και $y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, να υπολογίσετε τη παράσταση $A=x^4-x^3y-xy^3+y^4$.

Λύση: $A=x^4-x^3y-xy^3+y^4=x^3(x-y)-y^3(x-y)=$

$=(x-y)(x^3-y^3)=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)=$

$=(x-y)^2\left[(x+y)^2-xy\right]\overset{(1),(2)}{\underset{(3)}{=}}$

$=1\cdot\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-\frac{1}{2}\right]=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$

Αφού έχουμε ότι:

$x+y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{3}$ (1),

$x-y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=1$ (2),

και $xy=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ (3).

Άσκηση 2

Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η

$$A=\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\gamma\alpha^2+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma$$

Λύση

$A=\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\gamma\alpha^2+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=$

$=(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma)+(\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)+$

$+(\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma)+(\alpha\gamma^2+\alpha\beta\gamma)=$

$=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha\beta(\beta+\gamma)+$

$+\alpha\gamma(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)=$

$=(\beta+\gamma)\left[(\alpha^2+\alpha\gamma)+(\beta\gamma+\alpha\beta)\right]=$

$=(\beta+\gamma)\left[\alpha(\alpha+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)\right]=$

$=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha).$

Άσκηση 3

Αν είναι $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, τότε

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}=$$

$$=\frac{\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\ldots+\kappa_\nu\alpha_\nu}{\kappa_1\beta_1+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu},$$ **με**

$\beta_1\neq0,\beta_2\neq0,\ldots,\beta_\nu\neq0$, $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu\neq0$,

$\kappa_1\beta_1+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu\neq0$.

Λύση: Ονομάζουμε με λ τους ν ίσους λόγους

$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\lambda$ και τότε έχουμε:

$\alpha_1=\lambda\cdot\beta_1,\alpha_2=\lambda\cdot\beta_2,\ldots,\alpha_\nu=\lambda\cdot\beta_\nu$, δηλαδή

$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=\lambda\beta_1+\lambda\beta_2+\ldots+\lambda\beta_\nu=$

$=\lambda(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)$, οπότε $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}=\lambda.$

Όμοια $\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\ldots+\kappa_\nu\alpha_\nu=$

$=\kappa_1\lambda\beta_1+\kappa_2\lambda\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\lambda\beta_\nu=$

$=\lambda(\kappa_1\beta_1+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu)$, οπότε

$\frac{\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\ldots+\kappa_\nu\alpha_\nu}{\kappa_1\beta_1+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu}=\lambda$, ο.ε.δ.

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι ο $A=2^{10}+5^{12}$ δεν είναι πρώτος.

Υπόδειξη:

$$\alpha^4+4\beta^4=(\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta)$$

(Ταυτότητα Sophie Germain)

Λύση: Γνωρίζουμε ότι, ένας αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας είναι πρώτος, όταν διαιρείται μόνο με τον εαυτόν του και τη μονάδα. Έτσι προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον αριθμό Α σε γινόμενο παραγόντων.

Απόδειξη της ταυτότητας ***Sophie Germain.***

$\alpha^4+4\beta^4=\alpha^4+4\beta^4+4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\beta^2=$

$=(\alpha^2+2\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2==(\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta)$

Έτσι προσπαθούμε να φέρουμε τον αριθμό Α στη μορφή της ταυτότητας Germain:

$2^{10}=2^2\cdot(2^2)^4=4\cdot4^4$, $5^{12}=(5^3)^4=(125)^4$

Από Germain ο $A=(125)^4+4\cdot4^4$ γίνεται

$\alpha=125$ και $\beta=4$, οπότε έχουμε:

$A=(125^2+2\cdot4^2+2\cdot125\cdot4)\cdot$

$\cdot(125^2+2\cdot4^2-2\cdot125\cdot4)=$

$=(15625+32+1000)\cdot(15625+32-1000)=$

$=16657\cdot14657$

Αφού ο αριθμός Α γράφεται ως γινόμενο δύο φυσικών αριθμών που είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 1, ο αριθμός Α είναι σύνθετος.

Άσκηση 5

Έστω α,β,γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

ii) Τι είδους τρίγωνο είναι το παραπάνω, ως προς τις πλευρές;

Λύση: **i)** Έχουμε ότι:

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, ή

$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$, ή

$\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=0$, ή

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$.

ii) Αφού $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$ προκύπτει ότι $\alpha-\beta=0$ και $\beta-\gamma=0$ και $\gamma-\alpha=0$, δηλαδή $\alpha=\beta=\gamma$. Άρα ΑΒΓ ισόπλευρο.

Άσκηση 6

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=14$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=36$

να υπολογίσετε το γινόμενο $\alpha\beta\gamma$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα Eüler.

Λύση

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma=$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$. Οπότε:

$36=14+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$, ή $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=11$.

Από Eüler $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$

έχουμε: $36-3\alpha\beta\gamma=6\cdot(14-11)$, ή $\alpha\beta\gamma=6$.

Άσκηση 7

Να αποδείξετε ότι, το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων αριθμών αυξημένο κατά 1, είναι τετράγωνο ακεραίου.

Λύση: Έστω x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ οι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε έχουμε:

$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1=$

$=x\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x+2)+1=$

$=(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)+1=$

$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1=(x^2+3x+1)^2$,

ο.ε.δ. αφού ο αριθμός x^2+3x+1 είναι ακέραιος.

Άσκηση 8

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει ότι

i) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}\geq\dfrac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$

(Αριθμητικός, Γεωμετρικός, Αρμονικός Μέσος)

ii) Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ **να αποδείξετε ότι:**

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha\gamma}\right)\cdot\left(\beta+\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\cdot\left(\gamma+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\geq 8$$

Λύση: **i)** Αρκεί: $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$, ή $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, ή

$\sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2\geq 2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, ή $\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2\geq 0$,

αρκεί $\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\geq 0$, που ισχύει (1).

Όμοια $\sqrt{\alpha\beta}\geq\dfrac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$, ή $\sqrt{\alpha\beta}\geq\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$,

ή $1\geq\dfrac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}$, ή $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, που ισχύει (2).

Από (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

ii) Από την ανισότητα ΑΜ – ΓΜ έχουμε:

$\alpha+\dfrac{\beta}{\alpha\gamma}\geq 2\sqrt{\alpha\cdot\dfrac{\beta}{\alpha\gamma}}=2\sqrt{\dfrac{\beta}{\gamma}}$ ομοίως

$\beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\geq 2\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}$, $\gamma+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}\geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Άρα, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha\gamma}\right)\cdot\left(\beta+\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\cdot\left(\gamma+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\geq 8\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}=8$$

Άσκηση 9

i) Αν x,y **θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:** $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^4}\leq\dfrac{1}{xy}$

ii) Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y **ισχύει** $x+y=4$**, να αποδείξετε ότι:**

$\dfrac{(2x+1)^2}{x}+\dfrac{(2y+1)^2}{y}\geq 25$**, Πότε ισχύει η ισότητα;**

Λύση: **i)** Γνωρίζουμε ότι $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$x^4+y^2=(x^2)^2+y^2\geq 2x^2y\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{x^4+y^2}\leq\dfrac{1}{2x^2y}\overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{x}{x^4+y^2}\leq\dfrac{1}{2xy}$ (1)

Όμοια $x^2+y^4=x^2+(y^2)^2\geq 2xy^2\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x^2+y^4}\le\frac{1}{2xy^2}\overset{\cdot y>0}{\Leftrightarrow}\frac{y}{x^2+y^4}\le\frac{1}{2xy}\quad(2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) προκύπτει $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}\le\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{1}{xy}$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{4x^2+4x+1}{x}+\frac{4y^2+4y+1}{y}\ge 25,$$

δηλαδή αρκεί $4x+4+\frac{1}{x}+4y+4+\frac{1}{y}\ge 25$,

αρκεί $4(x+y)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+8\ge 25$,

αρκεί $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 1$, αρκεί $\frac{x+y}{xy}\ge 1$, αρκεί $xy\le 4$,

αρκεί $x(4-x)\le 4$, αρκεί $x^2-4x+4\ge 0$, αρκεί $(x-2)^2\ge 0$, που ισχύει. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η ισότητα ισχύει, όταν $x=y=2$.

Άσκηση 10

Στον άξονα των πραγματικών αριθμών παίρνουμε τα $A(-1)$ και $B(5)$. Ένα σημείο $M(x)$ κινείται στο εσωτερικό του τμήματος AB.

i) Αν ισχύει $|x+1|=|x-5|$, να βρεθεί η θέση του Μ.

ii) Να βρεθεί η θέση του σημείου Μ που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο $\lambda=\frac{2}{3}$

iii) Αν $|x-1|=|2x+1|$, να βρεθεί γεωμετρικά η θέση του σημείου Μ. Να επιβεβαιώσετε την απάντησή σας αλγεβρικά.

Λύση: i) Η σχέση $|x+1|=|x-5|$ εκφράζει ότι, η απόσταση του σημείου Μ από το Α ισούται με την απόσταση του Μ από το σημείο Β. Άρα το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή το σημείο με τετμημένη 2.

ii) Πρέπει $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{2}{2+3}\Leftrightarrow$

$\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow AM=\frac{2}{5}AB\Leftrightarrow|x+1|=\frac{2}{5}|5-(-1)|\Leftrightarrow$

$|x+1|=\frac{12}{5}\Leftrightarrow x+1=\frac{12}{5}$ ή $x+1=-\frac{12}{5}\Leftrightarrow$

$x=-\frac{17}{5}$ ή $x=\frac{7}{5}\Leftrightarrow x=\frac{7}{5}\in(-1,5)$ (δεκτή).

Άρα το σημείο $M\left(\frac{7}{5}\right)$.

iii) Η σχέση γίνεται:

$|x-1|=|2x+1|\Leftrightarrow|x-1|=\left|2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right|\Leftrightarrow$

$|x-1|=2\left|x+\frac{1}{2}\right|\Leftrightarrow|x-1|=2\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$

Δηλαδή η απόσταση του σημείου Μ από το $K(1)$ είναι διπλάσια από την απόσταση του Μ από το σημείο $\Lambda\left(-\frac{1}{2}\right)$. Άρα το Μ είναι το σημείο $O(0)$.

Αλγεβρικά έχουμε: $|x-1|=|2x+1|\Leftrightarrow$

$x-1=2x+1$ ή $x-1=-2x-1\Leftrightarrow$

$x=-2$ (απορρίπτεται) ή $x=0$ (δεκτή).

Άσκηση 11

Δίνεται η παράσταση, με τύπο $A(x)=\frac{9x^2+\alpha|x|+1}{3|x|-1}$

για την οποία ισχύει ότι $A(-1)=2$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha=-6$.

ii) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η $A(x)$

iii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A(x)$

iv) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $\frac{A(x)}{2}=|x|$;

v) Να λυθεί η ανίσωση: $A(x)\le 3$

Λύση: i) $A(-1)=2\Leftrightarrow\frac{9+\alpha+1}{3-1}=2\Leftrightarrow\alpha=-6$.

ii) Πρέπει και αρκεί:

$3|x|-1\ne 0\Leftrightarrow 3|x|\ne 1\Leftrightarrow|x|\ne\frac{1}{3}\Leftrightarrow x\ne\pm\frac{1}{3}$.

Άρα $x\in\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$.

iii) Η παράσταση $A(x)$ γίνεται:

$$A(x)=\frac{9x^2-6|x|+1}{3|x|-1}\overset{x^2=|x|^2}{=}=\frac{(3|x|-1)^2}{3|x|-1}=3|x|-1$$

iv) Με $x\in\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$ έχουμε ότι:

$\frac{A(x)}{2}=|x|\Leftrightarrow\frac{3|x|-1}{2}=|x|\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=\pm1$

v) $A(x)\le 3\Leftrightarrow 3|x|-1\le 3\Leftrightarrow 3|x|\le 4\Leftrightarrow$

$|x|\le\frac{4}{3}\Leftrightarrow-\frac{4}{3}\le x\le\frac{4}{3}$. Άρα $x\in\left[-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right]-\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$.

Τάξη: Α΄

Ισότητα Τριγώνων

Δημήτρης Ιασονίδης – Ιωάννης Τρυψιάνης

Άσκηση 1

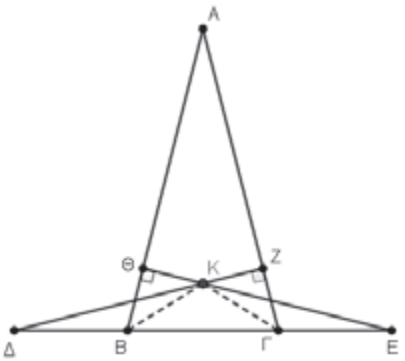
Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το Β και το Γ αντίστοιχα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Φέρνουμε τις $\Delta Z\perp A\Gamma$ και $E\Theta\perp AB$ που τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:

i) $\Delta Z=E\Theta$ **ii)** $K\Delta=KE$

iii) $AK\perp\Theta Z$ **και** $AK\perp B\Gamma$

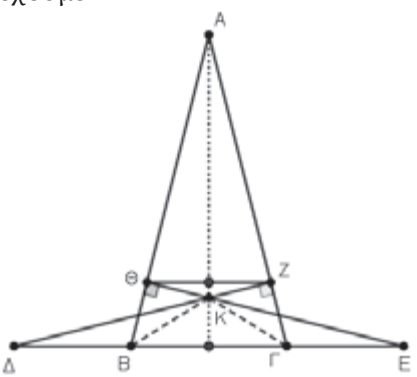
iv) $\Theta Z//\Delta E$ **και** $\Delta\Theta=ZE$

Λύση: **i)** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΖΓ και ΕΘΒ είναι ίσα γιατί: $\hat{Z}=\hat{\Theta}=90^o$, $\Delta\hat{\Gamma}Z=\Theta\hat{B}E$ (ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ) και $B\Delta=\Gamma E\Rightarrow B\Gamma+B\Delta=B\Gamma+\Gamma E\Rightarrow\Delta\Gamma=BE$. Άρα $\Delta Z=E\Theta$.

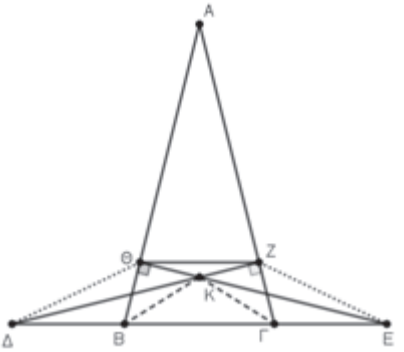


ii) Αφού τα τρίγωνα ΔΖΓ και ΕΘΒ είναι ίσα θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, οπότε έχουμε $\Theta B=Z\Gamma$ και $K\hat{\Delta}\Gamma=K\hat{E}B$, δηλαδή στο τρίγωνο ΚΔΕ οι γωνίες της βάσης είναι ίσες, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $K\Delta=KE$.

iii) Από ii) προκύπτει ότι $A\Theta=AZ$ και $K\Theta=KZ$, άρα τα σημεία Α και Κ βρίσκονται στην μεσοκάθετο του ΖΘ, οπότε $AK\perp\Theta Z$. Ακόμη τα τρίγωνα $\Theta\overset{\Delta}{K}B=Z\overset{\Delta}{K}\Gamma$ (γιατί;), οπότε $KB=K\Gamma$ δηλαδή το σημείο Κ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ και αφού και το Α είναι στη μεσοκάθετο του ΒΓ, έχουμε $AK\perp B\Gamma$



iv) Αφού $AK\perp\Theta Z$ και $AK\perp B\Gamma$, έχουμε ότι $\Theta Z//B\Gamma$ άρα και $\Theta Z//\Delta E$.



Ακόμη τα τρίγωνα $\Delta\overset{\Delta}{\Theta}B=Z\overset{\Delta}{\Gamma}E$ (γιατί;) οπότε $\Delta\Theta=ZE$.

Άσκηση 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρνουμε ημιευθείες Βx και Γy κάθετες στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Από την κορυφή Α φέρνουμε ευθεία $(\varepsilon)//(B\Gamma)$ που τέμνει τις Βx και Γy στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Αν τα σημεία Κ, Λ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

i) Τα $AH\Gamma$, ΓZA **και** $A\Delta B$, AHB **είναι ίσα.**

ii) Τα τρίγωνα $AZ\Lambda$ **και** $\Gamma H\Lambda$ **είναι ίσα.**

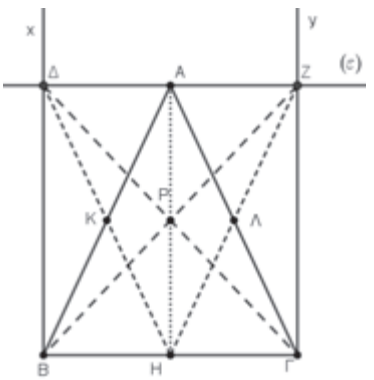
iii) Τα σημεία Z,Λ,H **είναι συνευθειακά.**

iv) Οι (ΔK) **και** $(Z\Lambda)$ **τέμνονται πάνω στην ΒΓ.**

v) $\Delta\Gamma=ZB$.

vi) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των $\Delta\Gamma,ZB$ **τότε τα σημεία** A,P,H **είναι συνευθειακά.**

Λύση: **i)** Το ΑΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $A\overset{\Delta}{H}\Gamma=A\overset{\Delta}{\Gamma}Z$ είναι ίσα, (ΑΓ κοινή πλευρά και $A\hat{\Gamma}H=Z\hat{A}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των $AZ//H\Gamma$ που τέμνονται από την ΑΓ). Όμοια, τα ορθογώνια τρίγωνα $A\overset{\Delta}{\Delta}B=A\overset{\Delta}{H}B$



ii) Τα τρίγωνα $A\hat{Z}\Lambda = \Gamma\hat{H}\Lambda$ γιατί έχουν, $AZ = \Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$, $A\Lambda = \Lambda\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$ και $A\hat{\Gamma}H = Z\hat{A}\Gamma$

iii) Από το ii) προκύπτει ότι $A\hat{\Lambda}Z = \Gamma\hat{\Lambda}H$ και αφού $A\hat{\Lambda}Z + Z\hat{\Lambda}\Gamma = 180^o$ έχουμε ότι $\Gamma\hat{\Lambda}H + Z\hat{\Lambda}\Gamma = 180^o$, άρα τα σημεία Z, Λ, H είναι συνευθειακά.

iv) Όμοια αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}K = B\hat{H}K$, οπότε προκύπτει ότι τα σημεία Δ, K, H είναι συνευθειακά. Άρα το σημείο Η είναι κοινό σημείο των $\Delta K, Z\Lambda, B\Gamma$.

v) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\hat{B}\Gamma = Z\hat{B}\Gamma$ γιατί έχουν, $B\Gamma$ κοινή πλευρά και $B\Delta = \Gamma Z$ γιατί; Άρα $\Delta\Gamma = BZ$.

vi) Από το v) προκύπτει ότι $\Delta\hat{\Gamma}B = Z\hat{B}\Gamma$ άρα το τρίγωνο $PB\Gamma$ έχει τις γωνίες της βάσης ίσες άρα είναι ισοσκελές, οπότε $PB = P\Gamma$ δηλαδή το σημείο Ρ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$ και άρα πάνω στην ΑΗ.

Άσκηση 3

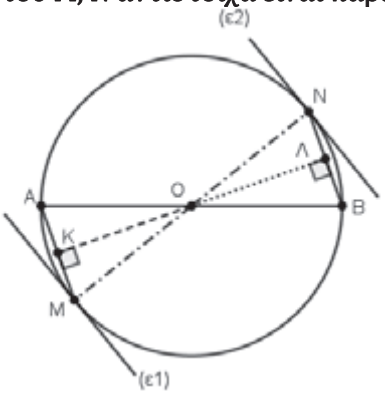
Δίνεται κύκλος (O,R) και AB μία διάμετρος του. Θεωρούμε τα σημεία Μ, Ν του κύκλου, εκατέρωθεν της ΑΒ τέτοια ώστε $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BN}$. Φέρνουμε τα αποστήματα $OK, O\Lambda$ των χορδών AM, BN αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα $OKA, O\Lambda B$ είναι ίσα.

ii) $AM // BN$.

iii) Τα σημεία M, O, N είναι συνευθειακά.

iv) Οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ του κύκλου στα σημεία του Μ, Ν αντίστοιχα είναι παράλληλες.



Λύση:

i) Αφού $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BN}$ τότε οι χορδές $AM = BN$, οπότε και τα αποστήματα $OK = O\Lambda$. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $O\hat{K}A = O\hat{\Lambda}B$.

ii) Από το i) ερώτημα έχουμε ότι: $O\hat{A}K = O\hat{B}\Lambda$ και $A\hat{O}K = B\hat{O}\Lambda$. Αυτές είναι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν οι AM, BN τεμνόμενες από την AB είναι ίσες οπότε $AM // BN$.

Β΄ τρόπος: Τα σημεία Α, Ο, Β είναι συνευθειακά, άρα $A\hat{O}K + K\hat{O}B = 180^o$. Οπότε έχουμε $B\hat{O}\Lambda + K\hat{O}B = 180^o \Rightarrow K\hat{O}\Lambda = 180^o$, άρα τα σημεία Κ, Ο, Λ είναι συνευθειακά, οπότε $AM // BN$ γιατί είναι κάθετες στην $K\Lambda$.

iii) Στα ίσα ισοσκελή τρίγωνα AOM, BON τα ύψη $OK, O\Lambda$ είναι και διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}M, B\hat{O}N$ αντίστοιχα. Άρα $A\hat{O}M = B\hat{O}N$ και $A\hat{O}M + M\hat{O}B = 180^o \Rightarrow B\hat{O}N + M\hat{O}B = 180^o \Rightarrow$ $M\hat{O}N = 180^o$, άρα τα σημεία Μ, Ο, Ν είναι συνευθειακά.

iv) Αφού οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (O,R) στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα, έχουμε ότι $OM \perp (\varepsilon_1)$ και $ON \perp (\varepsilon_2)$ δηλαδή $MN \perp (\varepsilon_1)$ και $MN \perp (\varepsilon_2)$. Άρα $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$.

Άσκηση 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Ο εκτός αυτού. Αν Δ, E, Z είναι τα συμμετρικά σημεία των κορυφών A, B, Γ ως προς το Ο αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι:

i) $AB = \Delta E$

ii) Τα τρίγωνα $AB\Gamma, \Delta EZ$ είναι ίσα

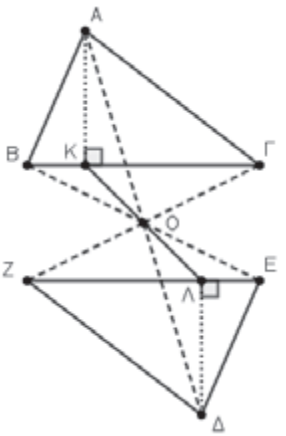
iii) Αν K, Λ είναι οι προβολές των σημείων A, Δ πάνω στις $B\Gamma, EZ$ αντίστοιχα, τότε

α) $AK = \Delta\Lambda$ β) $AK // \Delta\Lambda$

γ) Τα σημεία Κ, Λ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Ο

iv) Τα ορθόκεντρα Η και Θ των τριγώνων $AB\Gamma, \Delta EZ$ αντίστοιχα, είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Ο.

Λύση:



i) Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{O}B = \Delta\overset{\triangle}{O}E$ γιατί έχουν: $AO = O\Delta$, $BO = OE$ και $A\hat{O}B = \Delta\hat{O}E$. Άρα $AB = \Delta E$.

ii) Όμοια με i) ερώτημα αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{O}\Gamma = \Delta\overset{\triangle}{O}Z$ και $B\overset{\triangle}{O}\Gamma = E\overset{\triangle}{O}Z$. Άρα $A\Gamma = \Delta Z$ και $B\Gamma = EZ$, οπότε τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma = \Delta\overset{\triangle}{E}Z$.

iii) α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}K = \Delta\overset{\triangle}{E}\Lambda$ γιατί έχουν: $AB = \Delta E$ και $A\hat{B}K = \Delta\hat{E}\Lambda$, αφού $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$. Άρα $AK = \Delta\Lambda$.

β) Αφού $B\overset{\triangle}{O}\Gamma = E\overset{\triangle}{O}Z$ προκύπτει ότι $O\hat{B}\Gamma = O\hat{E}Z$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ των $B\Gamma, EZ$ τεμνόμενες από την BE. Άρα $B\Gamma // EZ$. Αφού $AK \perp B\Gamma$ και $\Delta\Lambda \perp EZ$ έχουμε ότι $AK // \Delta\Lambda$.

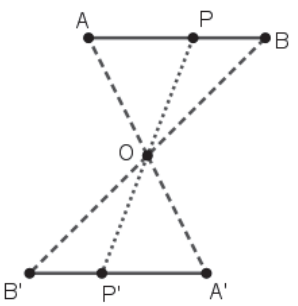
γ) Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{K}O = \Delta\overset{\triangle}{\Lambda}O$ γιατί έχουν: $AK = \Delta\Lambda$ (από iiiα) ερώτημα) $OA = O\Delta$ και $K\hat{A}O = \Lambda\hat{\Delta}O$ ως εντός εναλλάξ των $AK // \Delta\Lambda$ που τέμνονται από την $A\Delta$. Έτσι έχουμε $OK = O\Lambda$ και $K\hat{O}A = \Lambda\hat{O}\Delta$. Αφού τα σημεία A, O, Δ είναι συνευθειακά έχουμε:

$A\hat{O}\Delta = 180^o \Rightarrow K\hat{O}A + K\hat{O}\Delta = 180^o \Rightarrow$

$\Lambda\hat{O}\Delta + K\hat{O}\Delta = 180^o \Rightarrow K\hat{O}\Lambda = 180^o$. Άρα τα σημεία K, O, Λ είναι συνευθειακά και αφού $OK = O\Lambda$, τα σημεία K, Λ θα είναι συμμετρικά ως προς το O.

iv) ***Λήμμα:*** *Έστω* A', B' *συμμετρικά σημεία των* A, B *ως προς ένα σημείο* O. *Αν* P *τυχαίο σημείο του τμήματος* AB, *να αποδείξετε ότι, το συμμετρικό του σημείου* P *ως προς το* O, *θα ανήκει στο τμήμα* $A'B'$.

Απόδειξη



Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{O}B = A'\overset{\triangle}{O}B'$ *γιατί έχουν:* $OA = OA'$ $OB = OB'$ *και* $O\hat{A}B = OA\hat{'}B'$. *Άρα* $A\overset{\triangle}{O}B = OA\hat{'}B'$. *Έστω ότι η προέκταση της* PO *τέμνει την* $A'B'$ *στο σημείο* P'. *Τότε* $OA = OA'$, $O\hat{A}P = OA\hat{'}P'$ *και* $A\hat{O}P = A\hat{O}P'$. *Άρα τα τρίγωνα* $A\overset{\triangle}{P}O = A'\overset{\triangle}{P}'O$, *οπότε* $OP' = OP$. *Άρα το σημείο* P' *είναι συμμετρικό του* P *ως προς το* O.

Αφού τα σημεία Δ, Λ είναι συμμετρικά των A, K αντίστοιχα ως προς το σημείο O, αποδεικνύουμε εύκολα ότι το τμήμα $\Delta\Lambda$ είναι συμμετρικό του τμήματος AK ως προς το O, (δηλαδή το συμμετρικό ως προς το O ενός σημείου του τμήματος AK θα ανήκει στο τμήμα $\Delta\Lambda$). Το ορθόκεντρο H του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σημείο τομής των τριών υψών του $AB\Gamma$. Επομένως το συμμετρικό του H ως προς το O θα ανήκει στα συμμετρικά ως προς το O, τμήματα των υψών του $AB\Gamma$, άρα στα τρία ύψη του τριγώνου ΔEZ, δηλαδή θα είναι το ορθόκεντρο Θ του ΔEZ. Άρα τα σημεία H, Θ είναι συμμετρικά σημεία ως προς το σημείο O.

Άσκηση 5

Δίνεται σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E και την ευθεία (ε) στο K. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z. Από τα Z και E φέρουμε παράλληλες προς την $B\Gamma$ που τέμνουν την $A\Delta$ στα σημεία M και H αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta$

ii) Είναι τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{E}K$ και $\Delta\overset{\triangle}{E}\Gamma$ ίσα;

iii) Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μια προς μία και μια τουλάχιστον πλευρά ίση είναι ίσα;

iv) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = \Delta Z = ZA$.

v) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $Z\overset{\triangle}{\Delta}M$ και $E\overset{\triangle}{A}H$ είναι ίσα.

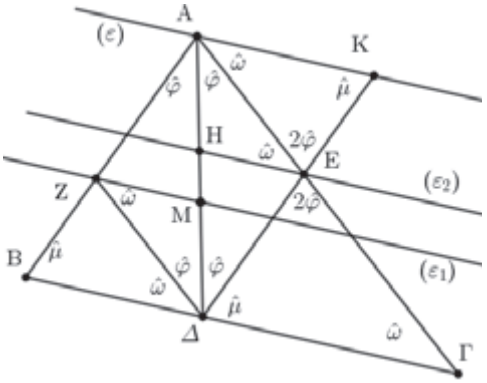
vi) Μπορεί στο τρίγωνο $AB\Gamma$ να ισχύει $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 2^\nu$, $\hat{\Gamma} = 2^\kappa$, με $\nu, \kappa \in \mathbb{N}^*$ και $\nu \neq \kappa$;

Λύση

i) Αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$ έχουμε: $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma = \varphi$.

Οι $AB // \Delta E$ τέμνονται από την $A\Delta$, οπότε έχουμε: $A\hat{\Delta}E = B\hat{A}\Delta = \varphi$, ως εντός εναλλάξ,

$\left.\begin{matrix} A\hat{\Delta}E = \varphi \\ E\hat{A}\Delta = \varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\hat{\Delta}E = E\hat{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με $AE = E\Delta$.



ii) Θέτουμε $\hat{B}=\mu$ και $\hat{\Gamma}=\omega$. Οι ευθείες $AK//\Delta\Gamma$ τέμνουν την $A\Gamma$, οπότε έχουμε:

$\Gamma\hat{A}K=A\hat{\Gamma}\Delta=\omega$, ως εντός εναλλάξ.

Οι ευθείες $AB//\Delta K$ τέμνουν την $B\Gamma$, οπότε έχουμε: $K\hat{\Delta}\Gamma=A\hat{B}\Gamma=\mu$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Οι ευθείες $AK//\Delta\Gamma$ τέμνουν την $K\Delta$, οπότε έχουμε: $\Delta\hat{K}A=K\hat{\Delta}\Gamma=\mu$, ως εντός εναλλάξ.

Έστω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AEK}$ και $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ είναι ίσα. Επειδή $AE=E\Delta$ και $A\hat{E}K=\Delta\hat{E}\Gamma$, η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την AE στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AEK}$ είναι ίση με τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από την $E\Delta$ στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$. Όμως η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την AE στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AEK}$ είναι ίση με μ και η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την $E\Delta$ στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ είναι ίση με ω. Οπότε θα ισχύει $\mu=\omega\Rightarrow\hat{B}=\hat{\Gamma}$, που είναι άτοπο, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι σκαληνό.

iii) Οι παράλληλες ευθείες $AB//\Delta K$ τέμνουν την AE, οπότε έχουμε: $A\hat{E}K=E\hat{A}B=2\varphi$, ως εντός εναλλάξ και $\Delta\hat{E}\Gamma=A\hat{E}K=2\varphi$, ως κατακορυφήν.

Επομένως για τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AEK}$ και $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ έχουμε

1. $AE=E\Delta$, 2. $\Delta\hat{E}\Gamma=A\hat{E}K$, 3. $K\hat{A}E=E\hat{\Gamma}\Delta$,

4. $A\hat{K}E=E\hat{\Delta}\Gamma$, 5. $\overset{\Delta}{AEK}\neq\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$

Άρα, δύο τρίγωνα μπορεί να έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μια προς μία και μια τουλάχιστον πλευρά ίση, χωρίς να είναι ίσα.

iv) Οι ευθείες $Z\Delta//AE$ τέμνουν την $A\Delta$, οπότε έχουμε: $Z\hat{\Delta}A=\Delta\hat{A}E=\varphi$, ως εντός εναλλάξ.

$$\left.\begin{matrix}Z\hat{\Delta}A=\varphi\\ Z\hat{A}\Delta=\varphi\end{matrix}\right\}\Rightarrow Z\hat{\Delta}A=Z\hat{A}\Delta.$$

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AZ\Delta}$ έχουμε $Z\hat{\Delta}A=Z\hat{A}\Delta$, οπότε θα είναι $AZ=Z\Delta$, αφού βρίσκονται στο ίδιο τρίγωνο απέναντι από ίσες γωνίες.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ZA\Delta}$ και $\overset{\Delta}{EA\Delta}$. Αυτά έχουν $A\Delta$ κοινή, $Z\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}E=\varphi$, $Z\hat{\Delta}A=A\hat{\Delta}E=\varphi$

Επομένως $\overset{\Delta}{ZA\Delta}=\overset{\Delta}{EA\Delta}$ (Γ – Π – Γ), οπότε και $Z\Delta=\Delta E$, αφού σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες υπάρχουν ίσες πλευρές.

$$\left.\begin{matrix}Z\Delta=\Delta E\\ AE=\Delta E\\ AZ=Z\Delta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}Z\Delta=AE=\Delta E\\ AZ=Z\Delta\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$AZ=Z\Delta=AE=\Delta E$.

v) Οι ευθείες $Z\Delta//A\Gamma$ τέμνουν την $B\Gamma$, οπότε έχουμε: $Z\hat{\Delta}B=\hat{\Gamma}=\omega$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οι ευθείες $B\Delta//ZM$ τέμνουν την $Z\Delta$, οπότε έχουμε: $M\hat{Z}\Delta=Z\hat{\Delta}B=\omega$, ως εντός εναλλάξ. Οι ευθείες $HE//\Delta\Gamma$ τέμνουν την $A\Gamma$, οπότε έχουμε: $A\hat{E}H=\hat{\Gamma}=\omega$, ως εντός εναλλάξ.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{Z\Delta M}=\overset{\Delta}{EAH}$ γιατί έχουν

$Z\Delta=AE$, $Z\hat{\Delta}M=E\hat{A}H=\varphi$, $M\hat{Z}\Delta=A\hat{E}H=\omega$

Επομένως $\overset{\Delta}{Z\Delta M}=\overset{\Delta}{EAH}$ (Γ – Π – Γ).

iv) Έστω υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=60^\circ$, $\hat{B}=2^\nu$, $\hat{\Gamma}=2^\kappa$, με $\nu,\kappa\in\mathbb{N}^*$ και $\nu\neq\kappa$, τότε θα έχουμε

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ\Leftrightarrow 60+2^\nu+2^\kappa=180\Leftrightarrow$

$2^\nu=180-60-2^\kappa\Leftrightarrow\boxed{2^\nu=120-2^\kappa}\ (1)$

$2^\nu>0\Leftrightarrow 120-2^\kappa>0\Leftrightarrow$

$-2^\kappa>-120\Leftrightarrow 2^\kappa<120<128$.

Επειδή $128=2^7$ έχουμε $2^\kappa<2^7\Leftrightarrow\kappa<7$.

Επειδή $\kappa<7$ και $\kappa\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\kappa\leq 6$, οπότε $\kappa\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Αν $\kappa=1$, από τη σχέση (1) έχουμε: $2^\nu=120-2=118=2\cdot 59$, που είναι άτοπο αφού το $2\cdot 59$ δεν είναι δύναμη του 2 επειδή το 2 δεν διαιρεί το 59.

Αν $\kappa=2$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$2^\nu=120-4=116=2\cdot 58=2\cdot 2\cdot 29=2^2\cdot 29$, που είναι άτοπο αφού το $2^2\cdot 29$ δεν είναι δύναμη του 2 επειδή το 2 δεν διαιρεί το 29.

Αν $\kappa=3$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$2^\nu=120-8=112=2\cdot 56=2\cdot 2\cdot 28=$

$=2^2\cdot 2\cdot 14=2^3\cdot 2\cdot 7=2^4\cdot 7$, που είναι άτοπο αφού το $2^4\cdot 7$ δεν είναι δύναμη του 2 επειδή το 2 δεν διαιρεί το 7.

Αν $\kappa=4$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$2^{\nu}=120-16=104=2\cdot 52=2\cdot 2\cdot 26=$

$=2^2\cdot 2\cdot 13=2^3\cdot 13$, που είναι άτοπο αφού το $2^3\cdot 13$ δεν είναι δύναμη του 2 επειδή το 2 δεν διαιρεί το 13.

Αν $\kappa=5$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$2^{\nu}=120-32=88=2\cdot 44=2\cdot 2\cdot 22=$

$=2^2\cdot 2\cdot 11=2^3\cdot 11$, που είναι άτοπο αφού το $2^3\cdot 11$ δεν είναι δύναμη του 2 επειδή το 2 δεν διαιρεί το 11.

Αν $\kappa=6$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$2^{\nu}=120-64=56=2\cdot 28=2\cdot 2\cdot 14=$

$=2^2\cdot 2\cdot 7=2^3\cdot 7$, που είναι άτοπο αφού το $2^3\cdot 7$ δεν είναι δύναμη του 2 επειδή το 2 δεν διαιρεί το 7.

Άσκηση 6

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<B\Gamma$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ φέρνουμε κύκλο που τέμνει την ΒΓ στο Ε. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα $\Delta Z=\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

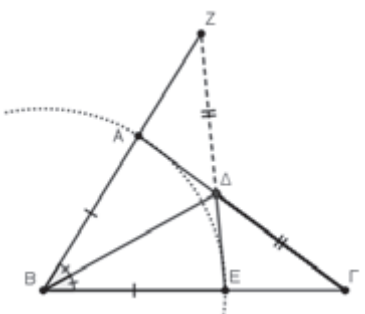
i) $AZ=E\Gamma$.

ii) Τα σημεία Β, Α, Ζ είναι συνευθειακά.

iii) $B\Delta\perp\Gamma Z$.

Λύση

i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}=\overset{\triangle}{EB\Delta}$ (γιατί;), οπότε έχουμε $A\Delta=\Delta E$, επιπλέον είναι $\Delta\Gamma=\Delta Z$ (από εκφώνηση) και $\hat{A\Delta Z}=\hat{E\Delta\Gamma}$, άρα $\overset{\triangle}{A\Delta Z}=\overset{\triangle}{E\Delta\Gamma}$ και συνεπώς $AZ=E\Gamma$.



ii) Από τα $\overset{\triangle}{A\Delta Z}=\overset{\triangle}{E\Delta\Gamma}$ προκύπτει ότι $\hat{ZA\Delta}=\hat{\Gamma E\Delta}$ και από τα $\overset{\triangle}{AB\Delta}=\overset{\triangle}{EB\Delta}$ ότι $\hat{BA\Delta}=\hat{BE\Delta}$ και αφού $\hat{BE\Delta}+\hat{\Delta E\Gamma}=180^{\circ}$ έχουμε ότι $\hat{BA\Delta}+\hat{\Delta AZ}=180^{\circ}$, άρα τα σημεία Β, Α, Ζ είναι συνευθειακά.

iii) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ διχοτόμο της γωνίας κορυφής. Άρα είναι και ύψος, δηλαδή $B\Delta\perp Z\Gamma$.

Άσκηση 7

Είναι γνωστό ότι αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, τότε θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή τα αντίστοιχα: ύψη $A\Delta=A'\Delta'$, οι διχοτόμοι $BE=B'E'$ και οι διάμεσοι $\Gamma Z=\Gamma' Z'$. Να αποδείξετε ότι:

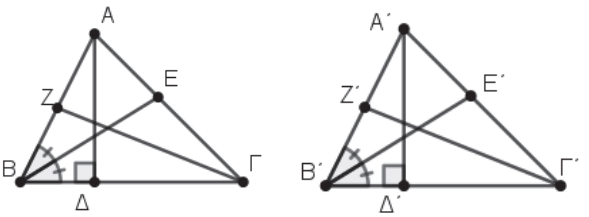
i) $B\Delta=B'\Delta'$

ii) $AE=A'E'$

iii) $EZ=E'Z'$

iv) Τα τρίγωνα $\Delta EZ=\Delta' E' Z'$

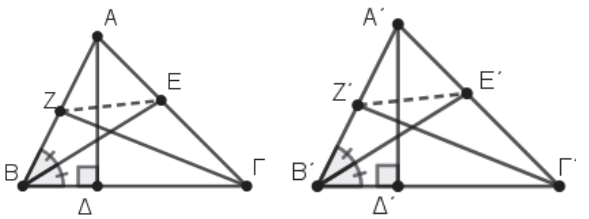
Λύση



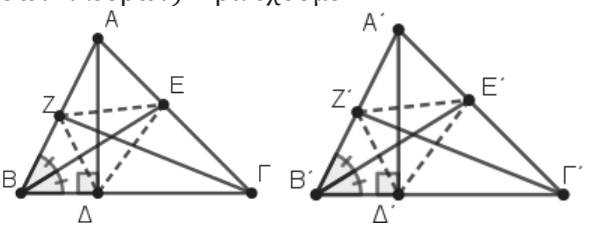
i) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}=\overset{\triangle}{A'B'\Delta'}$ γιατί έχουν $AB=A'B'$ και $\hat{B}=\hat{B'}$, οπότε $B\Delta=B'\Delta'$.

ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABE}=\overset{\triangle}{A'B'E'}$ γιατί έχουν $\hat{A}=\hat{A'}$, $AB=A'B'$ και $\hat{ABE}=\hat{A'B'E'}$, οπότε $AE=A'E'$.

iii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AEZ}=\overset{\triangle}{A'E'Z'}$ γιατί έχουν $\hat{A}=\hat{A'}$, $AE=A'E'$ και $AZ=A'Z'$, οπότε $EZ=E'Z'$.



iv) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}=\overset{\triangle}{\Gamma'\Delta'E'}$ γιατί έχουν: $\Gamma\Delta=\Gamma'\Delta'$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma'}$ και $\Gamma E=\Gamma' E'$ (ως υπόλοιπα ίσων πλευρών). Άρα έχουμε $\Delta E=\Delta' E'$.



Όμοια τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ZB\Delta}=\overset{\triangle}{Z'B'\Delta'}$ (γιατί;) οπότε προκύπτει ότι $Z\Delta=Z'\Delta'$.

Άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta EZ}=\overset{\triangle}{\Delta' E' Z'}$ γιατί έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες.

Τάξη: Β΄ Γραμμικά Συστήματα - Ιδιότητες Συναρτήσεων

Αναστασία Γαβρή - Άννα Καγκασίδου

Με αφορμή τα πρώτα δύο κεφάλαια της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου δίνουμε μερικά προβλήματα αλλά και ασκήσεις για εξάσκηση και εμπέδωση της αντίστοιχης ύλης.

Πρόβλημα 1

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει δύο είδη οικολογικών τσαντών ταξιδιού: το μοντέλο «standard» και το μοντέλο «premium». Για την κατασκευή κάθε τσάντας «standard» απαιτούνται 2m υφάσματος ενώ για την κατασκευή κάθε τσάντας «premium» απαιτούνται 5m υφάσματος. Σε μια ημέρα, η βιοτεχνία χρησιμοποίησε συνολικά 220 m ύφασμα για να κατασκευάσει συνολικά 80 τσάντες και από τα δύο είδη.

α) Να σχηματίσετε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους x το πλήθος των τσαντών «standard» και y το πλήθος των τσαντών«premium» που κατασκευάστηκαν. Στη συνέχεια, να το επιλύσετε για να βρείτε την ποσότητα από κάθε μοντέλο.

β) Την επόμενη ημέρα, η βιοτεχνία αποφάσισε να αλλάξει τη σχεδίαση του μοντέλου «standard», με αποτέλεσμα να απαιτούνται πλέον 20% λιγότερο ύφασμα για κάθε τέτοια τσάντα. Αν η βιοτεχνία διαθέσει πάλι 220m υφάσματος και θέλει να κατασκευάσει συνολικά 100 τσάντες, να εξετάσετε αν αυτός ο στόχος είναι εφικτός.

Λύση

Α) Έστω x το πλήθος των τσαντών **«standard»** και y το πλήθος των τσαντών«**premium»** από τα δεδομένα θα έχουμε τις εξισώσεις:

- Συνολικό πλήθος τσαντών: $x+y=80$
- Συνολικά μέτρα υφάσματος: $2x+5y=220$

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και έχουμε:

$$\begin{cases} x+y=80 \\ 2x+5y=220 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=80 \\ -2(x+y)+2x+5y=-2\cdot 80+220 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=80 \\ 3y=60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=60 \\ y=20 \end{cases}$$

Άρα κατασκευάστηκαν 60 τσάντες **«standard»** και 20 τσάντες **«premium»**

Β) (νέες απαιτήσεις υφάσματος)

Η νέα ποσότητα υφάσματος για το μοντέλο **«standard»** είναι μειωμένη κατά 20% δηλαδή $2\cdot 80\% = 1{,}6\text{m}$.

Έστω x΄ και y΄ οι νέες ποσότητες.

Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x'+y'=80 \\ 1{,}6x'+5y'=220 \end{cases}$. Έχουμε:

$$\begin{cases} x'+y'=80 \\ 1{,}6x'+5y'=220 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'=80 \\ -5(x'+y')+1{,}6x'+5y'=-5\cdot 80+220 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'=80 \\ -3{,}4x'=-280 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'=80 \\ x'=\dfrac{1400}{17}\simeq 82{,}35 \end{cases}$$

Συμπέρασμα:

Επειδή ο αριθμός $x'=\frac{1400}{17}$ αντιστοιχεί σε αριθμό τσαντών και πρέπει να είναι θετικός ακέραιος αριθμός, ο στόχος της βιοτεχνίας να παράγει 100 τσάντες με την χρήση και των 220m υφάσματος δεν είναι εφικτός.

Πρόβλημα 2

Σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό που αποτελείται από 25 ερωτήσεις, η βαθμολόγηση ορίζεται ως εξής:

- **Για κάθε σωστή απάντηση, ο μαθητής κερδίζει 4 βαθμούς.**
- **Για κάθε λανθασμένη απάντηση, στο μαθητή αφαιρούνται 2 βαθμοί.**

Ένας μαθητής απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις και συγκέντρωσε συνολικά 70 βαθμούς.
α) Να βρείτε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και πόσες λανθασμένα ο μαθητής, σχηματίζοντας και επιλύοντας το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα.
β) Είναι δυνατόν ένας μαθητής που απάντησε επίσης σε όλες τις ερωτήσεις να συγκέντρωσε 65 βαθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Ένας μαθητής αποφασίζει να απαντήσει σε όλες τις ερωτήσεις του διαγωνισμού.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός σωστών απαντήσεων που πρέπει να δώσει, ώστε η τελική του βαθμολογία να είναι τουλάχιστον 40 βαθμοί;

Λύση

α) Έστω x ο αριθμός των σωστών απαντήσεων και y ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων. Από τα δεδομένα έχουμε:

- Συνολικές ερωτήσεις $x+y=25$
- Συνολική βαθμολογία $4x-2y=70$

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 4x-2y=70 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ 4(25-y)-2y=70 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ -6y=-30 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=5 \end{cases}$$

Ο μαθητής απάντησε σωστά σε 20 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 5 ερωτήσεις.

β) Έστω ότι ένας μαθητής απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις και συγκέντρωσε βαθμολογία 65.

Τότε θα έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x+y=25 \\ 4x-2y=65 \end{cases}$, οπότε

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 4x-2y=65 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ 4(25-y)-2y=65 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ -6y=-35 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ y=\dfrac{35}{6} \end{cases}$$

Ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων y πρέπει να είναι φυσικός αριθμός και συγκεκριμένα $y\in\{0,1,2,3,4,\ldots,25\}$.

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{35}{6}$ δεν είναι φυσικός προκύπτει πως δεν είναι δυνατόν ο μαθητής να συγκεντρώσει βαθμολογία 65.
Επίσης παρατηρούμε πως στη δεύτερη εξίσωση $4x-2y=2\cdot(2x-y)$ είναι πάντα άρτιος αριθμός δεν θα μπορούσε να προκύψει βαθμολογία 65.

γ) Για να λύσουμε αυτό το ερώτημα, θα χρησιμοποιήσουμε τη μαθηματική έκφραση της βαθμολογίας που βρήκαμε προηγουμένως.
Η συνολική βαθμολογία δίνεται από τον τύπο $4x-2y$ και αντικαθιστώντας το $y=25-x$ έχουμε

$$4x-2y=4x-2(25-x)=6x-50.$$

Αφού θέλουμε βαθμολογία τουλάχιστον 40 βαθμούς θα ισχύει

$$6x-50\geq 40 \Leftrightarrow 6x\geq 90 \Leftrightarrow x\geq 15$$

Ο μαθητής πρέπει να απαντήσει σωστά σε τουλάχιστον 15 ερωτήσεις για να συγκεντρώσει βαθμολογία ίση ή μεγαλύτερη των 40 μονάδων.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τις ευθείες

$$\varepsilon_1: x-y=0,\ \varepsilon_2: x+y=4 \text{ και } \varepsilon_3: y=0$$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών ανά δύο. Να σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες στο επίπεδο.
Έστω Α το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, Β το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_2,\varepsilon_3$ και Γ το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_3$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

γ) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα του κύκλου R που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β και Γ του τριγώνου. Στη συνέχεια, να εξετάσετε αν το σημείο Μ(3,1) ανήκει στον κύκλο αυτό.

Λύση

α) Εύρεση των σημείων τομής των ευθειών ανά δύο:

Για το σημείο Α (τομή των ε_1 και ε_2) λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=4 \end{cases}$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ (x-y)+(x+y)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}.$$

Άρα $A(2,2)$

Για το σημείο Β (τομή των ε_2 και ε_3) λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x+y=4 \\ y=0 \end{cases}$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}.$$

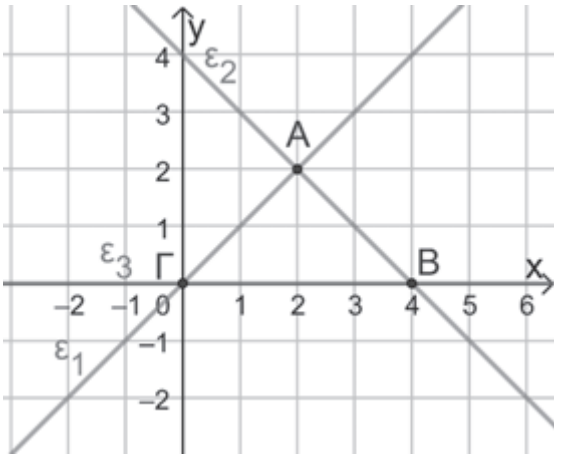
Άρα $B(4,0)$

Για το σημείο Γ (τομή των ε_1 και ε_3) λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} x-y=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Άρα $\Gamma(0,0)$



β) Έχουμε,

$$(AB)=\sqrt{(4-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Άρα $(AB)^2=8$

$$(A\Gamma)=\sqrt{(0-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Άρα $(A\Gamma)^2=8$

$$(B\Gamma)=\sqrt{(0-4)^2+(0-0)^2}=4$$

Άρα $(B\Gamma)^2=16$.

Όμως $(AB)^2+(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2$, αφού $8+8=16$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την γωνία $\hat{A}$.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$E=\frac{1}{2}(AB)\cdot(A\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4 \text{ τ.μ.}$$

γ) Από το ερώτημα (β) αποδείξαμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **ορθογώνιο** στην κορυφή Α.

- Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός ορθογωνίου τριγώνου έχει ως διάμετρο την **υποτείνουσα** του τριγώνου.
- Εδώ η υποτείνουσα είναι η πλευρά ΒΓ, η οποία βρίσκεται πάνω στον άξονα x′x με άκρα τα σημεία Β(4,0) και Γ(0,0).

Κέντρο:

Είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ δηλαδή το σημείο Κ(2,0) και

Ακτίνα:

$$R=\frac{(B\Gamma)}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Επειδή

$$(KM)=\sqrt{(3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}<2=R$$

το σημείο Μ ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου και όχι στον κύκλο.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(|\lambda|-3)x+5$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε $|\lambda|-3>0$. Όμως,

$$|\lambda|-3>0\Leftrightarrow|\lambda|>3\Leftrightarrow\lambda<-3\ \text{ή}\ \lambda>3.$$

Άσκηση 5

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)-(2\lambda+1)x=\lambda^2x+1$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)-(2\lambda+1)x=\lambda^2x+1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=\lambda^2x+(2\lambda+1)x+1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=(\lambda^2+2\lambda+1)x+1=(\lambda+1)^2x+1.$$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα τότε $(\lambda+1)^2<0$ που είναι άτοπο αφού για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda+1)^2\geq0$.

Συνεπώς η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα για καμία τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

Άσκηση 6

Δίνεται η περιττή και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[\kappa,\lambda]\to R$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $f(\kappa+2)=0$ να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ και λ.

Λύση

Αφού η συνάρτηση f είναι περιττή το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό διάστημα ως προς το μηδέν, συνεπώς $\kappa=-\lambda$ με $\kappa<0<\lambda$. Αφού η συνάρτηση f είναι περιττή για $x=0$ ισχύει:

$$f(0)=-f(0)\Leftrightarrow2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα είναι «1-1» οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Συνεπώς

$$f(\kappa+2)=0\Leftrightarrow\kappa+2=0\Leftrightarrow\kappa=-2$$

Άρα $\lambda=-\kappa=2$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3+\lambda x$, $x\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,-10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-1$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

δ) Αν $\alpha\neq\beta$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\alpha^2+\beta^2)$ και $f(2\alpha\beta)$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $(5x+1)^3<(x^2+7)^3-(x-1)(x+6)$.

Λύση

α) $A(2,-10)\in C_f\Leftrightarrow f(2)=-10\Leftrightarrow-2^3+\lambda\cdot2=-10$
$\Leftrightarrow-8+2\lambda=-10\Leftrightarrow2\lambda=-2\Leftrightarrow\lambda=-1$.

β) Για $\lambda=-1$ είναι $f(x)=-x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ και

$$f(-x)=-(-x)^3-(-x)=x^3+x=-(-x^3-x)=-f(x),$$

άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3<x_2^3\\-x_1>-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1^3>-x_2^3\\-x_1>-x_2\end{cases}$$
$$\Rightarrow-x_1^3-x_1>-x_2^3-x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Για $\alpha\neq\beta$ ισχύει $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$.

Άρα:

$$\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta\overset{f:2}{\Rightarrow}f(\alpha^2+\beta^2)<f(2\alpha\beta).$$

ε) $(5x+1)^3<(x^2+7)^3-(x-1)(x+6)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(5x+1)^3<(x^2+7)^3-(x^2+5x-6)$

$\Leftrightarrow-(x^2+7)^3<-(5x+1)^3-x^2-5x+6$

$\Leftrightarrow-(x^2+7)^3-(-x^2+7)<-(5x+1)^3-(5x+1)$

$\Leftrightarrow f(x^2+7)<f(5x+1)\Leftrightarrow x^2-5x+6>0$

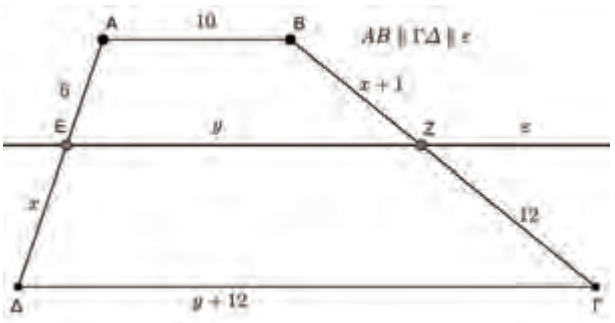
$\Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Δημήτριος Σ. Γραμματικόπουλος - Παράρτημα ΕΜΕ Πιερίας

Άσκηση 1

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ $(AB//\Gamma\Delta)$. Φέρουμε μια ευθεία ε παράλληλη προς τις βάσεις του, η οποία τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν $AB=10$, $\Gamma\Delta=y+12$ $AE=6, E\Delta=x$, $BZ=x+1, Z\Gamma=12$ και $EZ=y$ να βρείτε τα x και y.



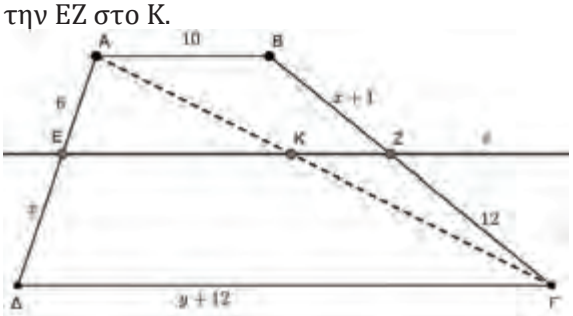
Λύση

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ||ΓΔ||ε, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AE}{BZ}=\frac{E\Delta}{Z\Gamma}\Leftrightarrow\frac{6}{x+1}=\frac{x}{12}\Leftrightarrow x(x+1)=6\cdot12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-72=0\Leftrightarrow x=8 \text{ ή } x=-9 \overset{x=E\Delta>0}{\Leftrightarrow} x=8$$

Για να βρούμε την τιμή του y φέρουμε βοηθητικά μία διαγώνιο, έστω την ΑΓ που τέμνει την ΕΖ στο Κ.



Έτσι τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΔΓ είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία καθώς $\hat{EAK}=\hat{\Delta A\Gamma}$ (κοινή γωνία) και $\hat{AEK}=\hat{A\Delta\Gamma}$ (εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες). Οπότε είναι

$$\frac{AE}{A\Delta}=\frac{EK}{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\frac{AE}{AE+E\Delta}=\frac{EK}{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\frac{6}{6+8}=\frac{EK}{y+12}\Leftrightarrow$$

$$\frac{6}{14}=\frac{EK}{y+12}\Leftrightarrow EK=\frac{6(y+12)}{14}\Leftrightarrow EK=\frac{3(y+12)}{7}.$$

Τα τρίγωνα ΚΖΓ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία $(\hat{K\Gamma Z}=\hat{A\Gamma B}$ (κοινή γωνία), $\hat{KZ\Gamma}=\hat{AB\Gamma}$ (εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες)). Οπότε είναι

$$\frac{Z\Gamma}{B\Gamma}=\frac{KZ}{AB}\Leftrightarrow\frac{Z\Gamma}{BZ+Z\Gamma}=\frac{KZ}{AB}\Leftrightarrow\frac{12}{9+12}=\frac{KZ}{10}\Leftrightarrow$$

$$\frac{12}{21}=\frac{KZ}{10}\Leftrightarrow\frac{4}{7}=\frac{KZ}{10}\Leftrightarrow KZ=\frac{40}{7}.$$

Όμως $EK+KZ=EZ\Leftrightarrow\frac{3(y+12)}{7}+\frac{40}{7}=y\Leftrightarrow$

$3(y+12)+40=7y\Leftrightarrow 3y+36+40=7y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y=76\Leftrightarrow y=19$ δεκτή, διότι τότε

$EZ=y=19$ και $\Delta\Gamma=y+12=31$.

Άσκηση 2

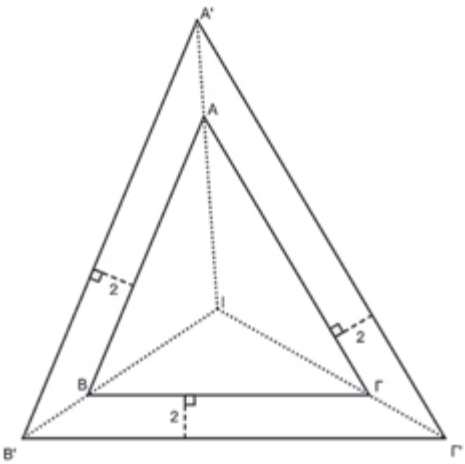
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι πλευρές του τριγώνου μετατοπίζονται παράλληλα προς το εξωτερικό του κατά απόσταση d=2 μονάδες, σχηματίζοντας ένα νέο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν το ίδιο έκκεντρο Ι.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια.

γ) Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας λ του τριγώνου Α'Β'Γ' ως προς το ΑΒΓ συναρτήσει της ακτίνας ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο Π΄ του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ συναρτήσει της περιμέτρου Π και της ακτίνας ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Έστω Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε αυτό ως κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ ισαπέχει από τις πλευρές του απόσταση ίση με την ακτίνα του ρ. Δεδομένου ότι το τρίγωνο Α'Β'Γ' κατασκευάστηκε με ίση μετατόπιση των πλευρών του ΑΒΓ τριγώνου

κατά δύο μονάδες, άρα το σημείο Ι ισαπέχει από τις πλευρές του Α'Β'Γ' απόσταση ίση με $\rho'=\rho+2$. Οπότε είναι κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου και του τριγώνου $A'B'\Gamma'$, άρα είναι και το έκκεντρο αυτού.

β) Η διχοτόμος Β'Ι διέρχεται από το Β, γιατί το σημείο Β ισαπέχει από τις Β'Α' και Β'Γ' (απόσταση 2 μονάδες). Επειδή εκ κατασκευής $B\Gamma // B'\Gamma'$ και Β'Ι τέμνουσα, άρα $I\hat{B}'\Gamma' = I\hat{B}\Gamma$ ως εντός εκτός επί τα αυτά. Επιπλέον Β΄Ι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}'$ και $\hat{B}$, άρα τελικά

$$I\hat{B}'\Gamma' = I\hat{B}\Gamma \Rightarrow 2\cdot I\hat{B}'\Gamma' = 2\cdot I\hat{B}\Gamma \Rightarrow \hat{B}' = \hat{B}.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$, άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια.

γ) Ο λόγος ομοιότητας λ του τριγώνου Α'Β'Γ' ως προς το ΑΒΓ είναι ίσος με $\lambda = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma}$.

Επιπλέον $I\hat{B}'\Gamma' = I\hat{B}\Gamma$ και $I\hat{\Gamma}'B' = I\hat{\Gamma}B$ (από το παραπάνω ερώτημα), άρα τα τρίγωνα ΒΙΓ και Β΄ΙΓ΄ είναι επίσης όμοια και τα ύψη τους που φέρουμε από το Ι είναι ουσιαστικά οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων που αναφέρονται στο α ερώτημα. Δεδομένου ότι ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους, άρα

$$\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\rho'}{\rho} \Rightarrow \lambda = \frac{\rho+2}{\rho} = \frac{\rho}{\rho}+\frac{2}{\rho} = 1+\frac{2}{\rho}.$$

δ) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους, άρα

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \lambda = 1+\frac{2}{\rho} \Rightarrow \frac{\Pi'}{\Pi} = 1+\frac{2}{\rho} \Rightarrow \Pi' = \Pi\cdot\left(1+\frac{2}{\rho}\right).$$

Άσκηση 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\gamma = 20, \beta = 21$ και $\alpha = 29$.

α) Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Αν $A\Delta = \upsilon_\alpha$, να το υπολογίσετε.

γ) Να βρείτε τη ΔΓ.

Λύση

α) $\gamma^2+\beta^2 = 20^2+21^2 = 841 = 29^2 = \alpha^2$, άρα σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία την Α.

β) Αφού ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία την Α είναι

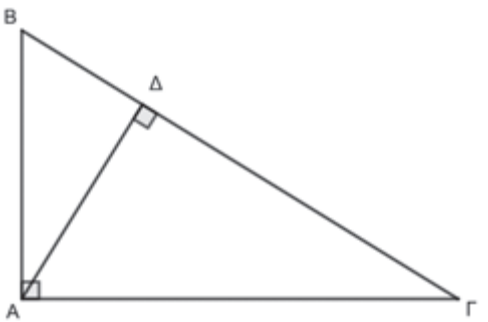
$$\alpha\cdot\upsilon_\alpha = \beta\cdot\gamma \Leftrightarrow 29\cdot\upsilon_\alpha = 21\cdot 20 \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \frac{420}{29}$$

γ) Είναι $\beta^2 = \alpha\cdot\Delta\Gamma \Leftrightarrow 21^2 = 29\cdot\Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \dfrac{441}{29}$.

Άσκηση 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{A}=90^\circ\right)$. Φέρουμε το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου. Αν $B\Gamma = A\Delta^2+1$ και $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{A\Delta}{\Delta B}$ να βρείτε το $A\Delta$.

Λύση



Έστω ότι $A\Delta = x > 0$. Τότε $B\Gamma = A\Delta^2+1 = x^2+1$.

Είναι $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{A\Delta}{\Delta B} \Leftrightarrow A\Delta^2 = AB\cdot\Delta B$.

Όμως

$$A\Delta^2 = \Delta\Gamma\cdot\Delta B \Leftrightarrow AB\cdot\Delta B = \Delta\Gamma\cdot\Delta B \overset{\Delta B\neq 0}{\Leftrightarrow} AB = \Delta\Gamma.$$

Άρα $A\Delta^2 = \Delta\Gamma\cdot\Delta B \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta\Gamma\cdot\left(B\Gamma-\Delta\Gamma\right) \Leftrightarrow$

$$x^2 = AB\cdot\left(x^2+1-AB\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2AB - AB + AB^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-AB)\left(x^2-AB\right) = 0 \Leftrightarrow AB = 1 \text{ ή } AB = x^2$$

- Αν $AB = 1$, τότε

$$\Delta\Gamma = AB = 1 \Rightarrow \Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = x^2+1-1 = x^2$$

και εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι

$$A\Delta^2+\Delta B^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2+\left(x^2\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^4+x^2-1 = 0.$$

Θέτοντας $\kappa = x^2 > 0$ η εξίσωση γίνεται

$\kappa^2+\kappa-1=0$, με ρίζες $\kappa_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (δεκτή) και

$\kappa_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (απορρίπτεται).

Οπότε $x^2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \overset{(x>0)}{\Rightarrow} x = A\Delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

- Αν $AB = x^2$, τότε $\Delta\Gamma = AB = x^2 \Rightarrow$

$$\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = x^2+1-x^2 = 1$$

και εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι

$$A\Delta^2+\Delta B^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2+1^2 = \left(x^2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$x^4-x^2-1=0$. Θέτοντας $\lambda = x^2 > 0$ (το x είναι μήκος) η εξίσωση γίνεται

$\lambda^2-\lambda-1=0$ με ρίζες $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (δεκτή) και $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ (απορρίπτεται).

Οπότε $x^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overset{(x>0)}{\Rightarrow} x=A\Delta=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Σχόλιο: Στην άσκηση αυτή, το ύψος ΑΔ που υπολογίσαμε στη δεύτερη περίπτωση που $AB=x^2$ συνδέεται άμεσα με το λόγο της χρυσής τομής ϕ, μία διάσημη μαθηματική σταθερά. Ο αριθμός $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ προκύπτει όταν χωρίζουμε ένα τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε ο λόγος του τμήματος προς το μεγαλύτερο μέρος του να είναι ίσος με τον λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο. Είναι η μαθηματική έκφραση της απόλυτης αρμονίας. Όπως είδαμε στη λύση μας (στην περίπτωση $AB=x^2$), το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ που προκύπτει έχει πλευρές $A\Delta=x=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\phi}$, $AB=x^2=\phi$ και $\Delta B=1$ που αποτελούν με τη σειρά $1,\sqrt{\phi},\phi$ διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Αυτό το ιδιαίτερο τρίγωνο ονομάζεται **"Τρίγωνο του Kepler"** (από τον αστρονόμο Johannes Kepler). Είναι το μοναδικό ορθογώνιο τρίγωνο που συνδυάζει τα δύο εργαλεία της Γεωμετρίας:

1. **Το Πυθαγόρειο Θεώρημα**
$\left(1^2+\left(\sqrt{\phi}\right)^2=\phi^2\Leftrightarrow 1+\phi=\phi^2\right)$.
2. **Τη Χρυσή Τομή** (ϕ).

Έτσι, μια απλή άσκηση μετρικών σχέσεων μας αποκαλύπτει τη βαθύτερη μαθηματική ισορροπία που κρύβεται πίσω από τα γεωμετρικά σχήματα!

Άσκηση 5

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\alpha=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$ τότε:

α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$.

Λύση

α. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η α αφού $\alpha,\beta,\gamma>0$ και επιπλέον

$$\alpha=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}>\sqrt{\beta^2}=\beta \text{ και}$$
$$\alpha=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}>\sqrt{\gamma^2}=\gamma.$$

Οπότε επειδή

$\alpha^2=\left(\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}\right)^2=\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma>\beta^2+\gamma^2$, η $\hat{A}>90^o$, και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε ότι

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A\Rightarrow$

$\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A\Rightarrow$

$\beta\gamma=-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A\Rightarrow\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{\beta\gamma}{-2\beta\gamma}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu A=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=120^o$.

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha=\sqrt{6}\lambda$, $\beta=2\lambda$ και $\gamma=\lambda+\sqrt{3}\lambda$, όπου λ παράμετρος με $\lambda>0$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

Λύση

Για να υπάρχει τρίγωνο, αρκεί να ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι η μεγαλύτερη πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο μικρότερων.

Οι πλευρές είναι: $\alpha=\sqrt{6}\lambda$, $\beta=2\lambda=\sqrt{4}\lambda$ και $\gamma=\lambda+\sqrt{3}\lambda=\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda$. Δεδομένου ότι $\lambda>0$, και $\sqrt{6}>\sqrt{4}$, αποκλείεται η πλευρά β να είναι η μεγαλύτερη. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha<\gamma$, δηλαδή αρκεί $\sqrt{6}\lambda<\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda$, αφού $\lambda>0$ αρκεί $\sqrt{6}<\left(1+\sqrt{3}\right)$, αρκεί $\left(\sqrt{6}\right)^2<\left(1+\sqrt{3}\right)^2$, αρκεί $6<1^2+2\cdot1\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$, αρκεί $6<4+2\sqrt{3}$, αρκεί $2<2\sqrt{3}$, δηλαδή $1<\sqrt{3}$, που ισχύει. Οπότε η μεγαλύτερη πλευρά είναι η γ.

Τώρα έχουμε

$\gamma<\alpha+\beta\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda<\sqrt{6}\lambda+2\lambda\Leftrightarrow$

$\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda<\left(\sqrt{6}+2\right)\lambda\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}1+\sqrt{3}<\sqrt{6}+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}<1+\sqrt{6}\overset{(>0)}{\Leftrightarrow}\left(\sqrt{3}\right)^2<\left(1+\sqrt{6}\right)^2\Leftrightarrow$

$3<1^2+2\cdot1\cdot\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2\Leftrightarrow3<7+2\sqrt{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-4<2\sqrt{6}\Leftrightarrow-2<\sqrt{6}$, που ισχύει.

Άρα ισχύει και η τριγωνική ανισότητα, οπότε υπάρχει τρίγωνο με αυτές τις πλευρές. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A\Rightarrow\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=$$
$$=\frac{(2\lambda)^2+\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda\right]^2-\left(\sqrt{6}\lambda\right)^2}{2\cdot2\lambda\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda}=$$

$$=\frac{\lambda^2\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2\right]}{4\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda^2}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{3}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \hat{A}=60^o.$$

$$\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B\Rightarrow \sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{6}\lambda\right)^2+\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda\right]^2-(2\lambda)^2}{2\cdot\left(\sqrt{6}\lambda\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda}=$$

$$=\frac{\lambda^2\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2\right]}{2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)\lambda^2}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2}{2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2\cdot3\sqrt{2}}=\frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \hat{B}=45^o.$$

Άρα $\hat{\Gamma}=180^o-\hat{A}-\hat{B}=180^o-60^o-45^o=75^o.$

Άσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha=2\beta$, $\beta=\sqrt{10}$ και $\gamma=3\sqrt{2}$.

α) Να βρεθεί

i. το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

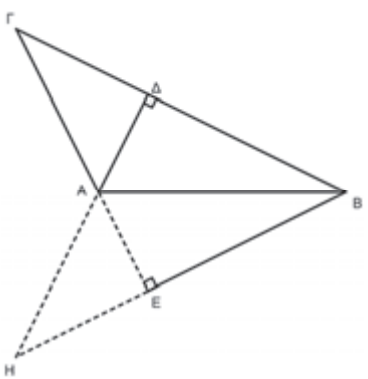
ii. η προβολή της πλευράς α πάνω στη β.

iii. η προβολή της πλευράς γ πάνω στην α.

β) Αν Η το ορθόκεντρο του ΑΒΓ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης HB^2-HA^2.

Λύση

α) i.



Είναι $\beta=\sqrt{10}$, $\alpha=2\beta=2\sqrt{10}=\sqrt{40}$ και $\gamma=3\sqrt{2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{18}$.

Η μεγαλύτερη πλευρά είναι προφανώς η α και $\alpha^2=40>28=10+18=\beta^2+\gamma^2$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A}>90^o$.

ii. Σχεδιάζουμε το τρίγωνο και το ορθόκεντρό του για το ερώτημα β. Η προβολή της πλευράς $\alpha=B\Gamma$ πάνω στη $\beta=A\Gamma$ είναι η ΓΕ.

Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ ,η γωνία $\hat{A}>90^o$ από ΓΠΘ έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot AE\Leftrightarrow$

$$40=10+18+2\sqrt{10}\cdot AE\Leftrightarrow AE=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\Gamma E=A\Gamma+AE=\sqrt{10}+\frac{3\sqrt{10}}{5}=\frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

iii. Η προβολή της πλευράς $\gamma=AB$ πάνω στην $\alpha=B\Gamma$ είναι η $B\Delta$. Επειδή η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία, άρα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου είναι οξείες. Χρησιμοποιούμε τη γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος για οξεία γωνία στο τρίγωνο ΑΒΓ. Έτσι είναι $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\cdot B\Delta\Leftrightarrow$

$$10=40+18-2\cdot2\sqrt{10}\cdot B\Delta\Leftrightarrow B\Delta=\frac{6\sqrt{10}}{5}$$

β) Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα σε καθένα από τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΕΑ και ΒΕΑ. Έτσι είναι αντίστοιχα $HA^2=HE^2+EA^2$ και $AB^2=EB^2+EA^2$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις είναι $HA^2-AB^2=HE^2-EB^2$. Άρα

$$HB^2-HA^2=\left(HE+EB\right)^2-HA^2=$$

$$HE^2+2\cdot HE\cdot EB+EB^2-\left(HE^2+EA^2\right)=$$

$$2\cdot HE\cdot EB+EB^2-EA^2$$

Επίσης από τη σχέση $AB^2=EB^2+EA^2$ έχουμε ότι $EB^2=AB^2-EA^2$ και

$$HB^2-HA^2=2\cdot HE\cdot EB+EB^2-EA^2=$$
$$2\cdot HE\cdot EB+AB^2-EA^2-EA^2=$$
$$2\cdot HE\cdot EB+AB^2-2EA^2$$

Οι γωνίες $H\hat{A}E$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες ως κατακορυφήν οπότε στα ορθογώνια τρίγωνα ΗΑΕ και ΑΔΓ οι γωνίες $\hat{H}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων $H\hat{A}E$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ και ΒΕΓ έχουμε δύο γωνίες τους μία προς μία (τις ορθές και τις $\hat{H}$ και $\hat{\Gamma}$), άρα τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια. Επομένως

$$\frac{AE}{EB}=\frac{HE}{\Gamma E}\Leftrightarrow AE\cdot\Gamma E=EB\cdot HE.$$

Επίσης από τη σχέση $AB^2=EB^2+EA^2$ έχουμε ότι $EB^2=AB^2-EA^2$. Άρα τελικά είναι

$$HB^2-HA^2=2\cdot HE\cdot EB+AB^2-2EA^2=$$
$$2\cdot AE\cdot\Gamma E+AB^2-2EA^2=$$
$$2\cdot AE\cdot\left(\Gamma E-AE\right)+AB^2=2\cdot AE\cdot\beta+\gamma^2=$$

$$2\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}\cdot\sqrt{10}+\left(3\sqrt{2}\right)^2=\frac{6\cdot10}{5}+9\cdot2=30.$$

Τάξη: Β΄

Συντεταγμένες – Εσωτερικό Γινόμενο

Δημήτριος Σ. Γραμματικόπουλος - Παράρτημα ΕΜΕ Πιερίας

Άσκηση 1: **Δίνονται τα σημεία Α(-3,-1), Β(2,-1) και Γ(-3,9).**
i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
ii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
iii) Αν ΑΔ ύψος του τριγώνου ΑΒΓ να βρείτε το σημείο Δ.

Λύση: **i)** $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=$
$(2-(-3),-1-(-1))=(2+3,-1+1)=(5,0)$
$\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A,y_\Gamma-y_A)=$
$(-3-(-3),9-(-1))=(-3+3,9+1)=(0,10)$
$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\overrightarrow{A\Gamma}} & y_{\overrightarrow{A\Gamma}} \end{vmatrix}=$
$x_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{A\Gamma}}-x_{\overrightarrow{A\Gamma}}\cdot y_{\overrightarrow{AB}}=5\cdot 10-0\cdot 0=50\neq 0$.
Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα, άρα τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{A\Gamma}}+y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{A\Gamma}}=$
$5\cdot 0+0\cdot 10=0+0=0\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$,
άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.
iii) $\overrightarrow{B\Gamma}=(x_\Gamma-x_B,y_\Gamma-y_B)=$
$(-3-2,9-(-1))=(-5,9+1)=(-5,10)$
Για το σημείο $\Delta(x_\Delta,y_\Delta)$ είναι
$\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A,y_\Delta-y_A)=$
$(x_\Delta-(-3),y_\Delta-(-1))=(x_\Delta+3,y_\Delta+1)$
$\overrightarrow{B\Delta}=(x_\Delta-x_B,y_\Delta-y_B)=$
$(x_\Delta-2,y_\Delta-(-1))=(x_\Delta-2,y_\Delta+1)$
και ισχύουν
$$\begin{cases}\overrightarrow{A\Delta}\perp\overrightarrow{B\Gamma}\\ \overrightarrow{B\Delta}\,||\,\overrightarrow{B\Gamma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0\\ \det\left(\overrightarrow{B\Delta},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x_{\overrightarrow{A\Delta}}\cdot x_{\overrightarrow{B\Gamma}}+y_{\overrightarrow{A\Delta}}\cdot y_{\overrightarrow{B\Gamma}}=0\\ \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{A\Delta}} & y_{\overrightarrow{A\Delta}} \\ x_{\overrightarrow{B\Gamma}} & y_{\overrightarrow{B\Gamma}} \end{vmatrix}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}(x_\Delta+3)\cdot(-5)+(y_\Delta+1)\cdot 10=0\\ (x_\Delta-2)\cdot 10-(-5)\cdot(y_\Delta+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}-5x_\Delta-15+10y_\Delta+10=0\\ 10x_\Delta-20+5y_\Delta+5=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}-5x_\Delta+10y_\Delta=5\\ 10x_\Delta+5y_\Delta=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10x_\Delta+20y_\Delta=10\\ 10x_\Delta+5y_\Delta=15\end{cases}\oplus$$
$$25y_\Delta=25\Leftrightarrow y_\Delta=1$$
$-5x_\Delta+10y_\Delta=5\Leftrightarrow -5x_\Delta+10\cdot 1=5\Leftrightarrow$
$-5x_\Delta=-5\Leftrightarrow x_\Delta=1$, άρα $\Delta(1,1)$.

Άσκηση 2: **Δίνονται τα σημεία Α και Β, όπου Β(3,7). Αν το μέσο του (ΑΒ) είναι το Μ(2, 5) να βρείτε:**
i) Τις συντεταγμένες του σημείου Α.
ii) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
iii) Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
iv) Τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε για το διάνυσμα $\vec{u}=(\kappa^2,2\kappa+12)$ να ισχύει $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{u}$.
v) Το σημείο Κ(x, x-1), όπου $x\in\mathbb{R}$, ώστε $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{MK}$.

Λύση: **i)** Για το Μ, μέσο του (ΑΒ) έχουμε:
$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\Leftrightarrow 2=\frac{x_A+3}{2}\Leftrightarrow$
$x_A+3=2\cdot 2\Leftrightarrow x_A+3=4\Leftrightarrow x_A=1$
$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Leftrightarrow 5=\frac{y_A+7}{2}\Leftrightarrow$
$y_A+7=10\Leftrightarrow y_A=3$, άρα Α(1,3).
ii) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=$
$(3-1,7-3)=(2,4)$
iii) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^{\,2}+y_{\overrightarrow{AB}}^{\,2}}=\sqrt{2^2+4^2}=$
$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$
iv) Αφού $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{u}\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{AB},\vec{u})=0\Leftrightarrow$
$\begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\vec{u}}-x_{\vec{u}}\cdot y_{\overrightarrow{AB}}=0\Leftrightarrow$
$4\kappa+24-4\kappa^2=0\Leftrightarrow\kappa^2-\kappa-6=0\Leftrightarrow$
$\kappa=3$ ή $\kappa=-2$
► Για $\kappa=-2$ είναι
$\vec{u}=(\kappa^2,2\kappa+12)=\left((-2)^2,2\cdot(-2)+12\right)=$
$(4,-4+12)=(4,8)$.
Τότε $\overrightarrow{AB}=(2,4)=\frac{1}{2}(4,8)=\frac{1}{2}\vec{u}$
οπότε το $\kappa=-2$ δεκτή τιμή.
► Για $\kappa=3$ είναι
$\vec{u}=(\kappa^2,2\kappa+12)=(3^2,2\cdot 3+12)=$
$(9,6+12)=(9,18)$.

Τότε $\overrightarrow{AB}=(9,18)=9(2,4)=\frac{9}{2}\vec{u}$.

Οπότε το $\kappa=3$ δεκτή τιμή.

v) $\overrightarrow{MK}=(x_K-x_M,y_K-y_M)=$
$(x-2,x-1-5)=(x-2,x-6)$.

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{MK}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MK}=0\Leftrightarrow$
$x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{MK}}+y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{MK}}=0\Leftrightarrow$
$2\cdot(x-2)+4\cdot(x-6)=0\Leftrightarrow$
$2x-4+4x-24=0\Leftrightarrow x=\frac{14}{3}$,
άρα $K(x,x-1)\equiv K\left(\frac{14}{3},\frac{11}{3}\right)$.

Άσκηση 3: **Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(4\mu,3\mu)$ και $\vec{v}=(12\mu,9\mu)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε (συναρτήσει του μ όπου είναι απαραίτητο):**
i) Το μέτρο του $\vec{u}$. ii) Το μέτρο του $\vec{v}$.
iii) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
iv) Το συν$\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)$. v) Τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Λύση: **i)** $|\vec{u}|=\sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}}=\sqrt{(4\mu)^2+(3\mu)^2}=$
$\sqrt{16\mu^2+9\mu^2}=\sqrt{25\mu^2}=5|\mu|$.

ii) $|\vec{v}|=\sqrt{x_{\vec{v}}^{\,2}+y_{\vec{v}}^{\,2}}=\sqrt{(12\mu)^2+(9\mu)^2}=$
$\sqrt{144\mu^2+81\mu^2}=\sqrt{225\mu^2}=15|\mu|$.

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_{\vec{u}}\cdot x_{\vec{v}}+y_{\vec{u}}\cdot y_{\vec{v}}=$
$4\mu\cdot12\mu+3\mu\cdot9\mu=48\mu^2+27\mu^2=75\mu^2$.

iv) Για κάθε $\mu\in\mathbb{R}^*$ είναι
$\text{συν}\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{75\mu^2}{5|\mu|\cdot15|\mu|}=\frac{75\mu^2}{75|\mu|^2}=\frac{\mu^2}{\mu^2}=1$.

v) $\text{συν}\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)=1\Leftrightarrow\text{συν}\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\text{συν}0°$ και
$0°\le\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)\le180°$, άρα $\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)=0°$.

(Επιπλέον θα μπορούσαμε να πούμε ότι
$\vec{u}\cdot\vec{v}=75\mu^2=75|\mu|^2=5|\mu|\cdot15|\mu|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
$\Rightarrow\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}\Leftrightarrow\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)=0°$).

Άσκηση 4: **Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=2$.**

Αν $\left(\hat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=150°$ να βρείτε:

i) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.
ii) Το μέτρο του $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.
iii) Το μέτρο του $\vec{v}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.
iv) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
v) Το συν$\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
vi) Αν $\vec{w}=\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ να βρεθεί το $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε $\vec{v}\perp\vec{w}$.

Λύση: **i)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}\left(\hat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sqrt{3}\cdot2\cdot\text{συν}150°=$
$2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(\sqrt{3}\right)^2=-3$.

ii) $|\vec{u}|^2=\vec{u}^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=$
$|\vec{\alpha}|^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=3-6+4=1$,
άρα $|\vec{u}|^2=1\Leftrightarrow|\vec{u}|=1$.

iii) $|\vec{v}|^2=\vec{v}^2=(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=$
$\vec{\alpha}^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot2\vec{\beta}+(2\cdot\vec{\beta})^2=|\vec{\alpha}|^2+4\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\cdot\vec{\beta}^2=$
$|\vec{\alpha}|^2+4\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\cdot|\vec{\beta}|^2=3-12+16=7$,
άρα $|\vec{v}|^2=7\Leftrightarrow|\vec{v}|=\sqrt{7}$.

iv) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=$
$\vec{\alpha}^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\cdot|\vec{\beta}|^2=$
$\left(\sqrt{3}\right)^2+3\cdot(-3)+2\cdot2^2=3-9+8=2$.

v) $\text{συν}\left(\hat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2}{1\cdot\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

vi) $\vec{v}\perp\vec{w}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{w}=0\Leftrightarrow(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})=0\Leftrightarrow$
$\kappa\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\kappa\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}+2\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$
$\kappa|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\kappa\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$
$\kappa\left(\sqrt{3}\right)^2+(-3)+2\kappa\cdot(-3)+2\cdot2^2=0\Leftrightarrow$
$3\kappa-3-6\kappa+8=0\Leftrightarrow3\kappa=5\Leftrightarrow\kappa=\frac{5}{3}$.

Άσκηση 5: **Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-2,14-2|\vec{\alpha}|\right)$ και $\vec{\beta}=(\lambda,6)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.**

Αν επιπλέον $|\vec{\alpha}|>|\vec{\beta}|$,

i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

Λύση: i) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_{\vec{\alpha}}^2+y_{\vec{\alpha}}^2}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2=x_{\vec{\alpha}}^2+y_{\vec{\alpha}}^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2=\left(|\vec{\alpha}|-2\right)^2+\left(14-2|\vec{\alpha}|\right)^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2=|\vec{\alpha}|^2-4|\vec{\alpha}|+4+196-56|\vec{\alpha}|+4|\vec{\alpha}|^2\Leftrightarrow$

$4|\vec{\alpha}|^2-60|\vec{\alpha}|+200=0\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2-15|\vec{\alpha}|+50=0\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|=5$ ή $|\vec{\alpha}|=10$.

Όμως $|\vec{\beta}|=\sqrt{x_{\vec{\beta}}^2+y_{\vec{\beta}}^2}=\sqrt{\lambda^2+36}\geq\sqrt{36}=6>5$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα δεκτή $|\vec{\alpha}|>|\vec{\beta}|>5$, δηλαδή η τιμή $|\vec{\alpha}|=10$ και η $|\vec{\alpha}|=5$ απορρίπτεται.

Τότε $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-2{,}14-2|\vec{\alpha}|\right)=$

$\left(10-2{,}14-2\cdot10\right)=\left(8,-6\right)$.

ii) α΄ τρόπος: Έστω ότι

$\vec{\beta}//\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\beta}=\mu\cdot\vec{\alpha}\Leftrightarrow(\lambda,6)=\mu\cdot(8,-6)\Leftrightarrow$

$(\lambda,6)=(8\mu,-6\mu)\Leftrightarrow\lambda=8\mu$ και $6=-6\mu\Leftrightarrow$

$\lambda=8\mu$ και $\mu=-1\Leftrightarrow\lambda=-8$ και $\mu=-1$.

Άρα $\vec{\beta}=(-8,6)=-\vec{\alpha}\Rightarrow|\vec{\beta}|=|-\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|$, άτοπο αφού $|\vec{\alpha}|>|\vec{\beta}|$. Άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, δεν είναι παράλληλα.

β΄ τρόπος: Έστω ότι

$\vec{\beta}//\vec{\alpha}\Leftrightarrow\det(\vec{\beta},\vec{\alpha})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda & 6\\ 8 & -6\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

$-6\cdot\lambda-6\cdot8=0\Leftrightarrow-6\cdot\lambda=48\Leftrightarrow\lambda=-8$.

Άρα $\vec{\beta}=(-8,6)=-\vec{\alpha}\Rightarrow|\vec{\beta}|=|-\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|$, άτοπο αφού $|\vec{\alpha}|>|\vec{\beta}|$. Άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, δεν είναι παράλληλα.

Άσκηση 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\beta}|-13{,}14-|\vec{\beta}|\right)$ και $\vec{\beta}=\left(|\vec{\alpha}|-11{,}2|\vec{\alpha}|-2\right)$, όπου $|\vec{\alpha}|\in\mathbb{N}$. Δίνεται ότι $\sqrt{3510}\cong59{,}25$.

i) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. είναι ομόρροπα.

iii) Αν για διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει $\left(\hat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)=60°$ και επιπλέον $10\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}^2+4\cdot\vec{\gamma}^2=5\cdot|\vec{\beta}|$, να βρεθεί το $|\vec{\gamma}|$.

Λύση: i) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_{\vec{\alpha}}^2+y_{\vec{\alpha}}^2}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2=x_{\vec{\alpha}}^2+y_{\vec{\alpha}}^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2=\left(|\vec{\beta}|-13\right)^2+\left(14-|\vec{\beta}|\right)^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2=|\vec{\beta}|^2-26|\vec{\beta}|+169+196-28|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2=2|\vec{\beta}|^2-54|\vec{\beta}|+365$.

$|\vec{\beta}|=\sqrt{x_{\vec{\beta}}^2+y_{\vec{\beta}}^2}\Leftrightarrow|\vec{\beta}|^2=x_{\vec{\beta}}^2+y_{\vec{\beta}}^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\beta}|^2=\left(|\vec{\alpha}|-11\right)^2+\left(2|\vec{\alpha}|-2\right)^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2-22|\vec{\alpha}|+121+4|\vec{\alpha}|^2-8|\vec{\alpha}|+4\Leftrightarrow$

$|\vec{\beta}|^2=5|\vec{\alpha}|^2-30|\vec{\alpha}|+125$.

Οπότε $|\vec{\alpha}|^2=2|\vec{\beta}|^2-54|\vec{\beta}|+365=$

$2\left(5|\vec{\alpha}|^2-30|\vec{\alpha}|+125\right)-54|\vec{\beta}|+365=$

$10|\vec{\alpha}|^2-60|\vec{\alpha}|+250-54|\vec{\beta}|+365=$

$10|\vec{\alpha}|^2-60|\vec{\alpha}|-54|\vec{\beta}|+615\Rightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2=10|\vec{\alpha}|^2-60|\vec{\alpha}|-54|\vec{\beta}|+615\Rightarrow$

$54|\vec{\beta}|=10|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\alpha}|^2-60|\vec{\alpha}|+615\Rightarrow$

$54|\vec{\beta}|=9|\vec{\alpha}|^2-60|\vec{\alpha}|+615\Rightarrow$

$18|\vec{\beta}|=3|\vec{\alpha}|^2-20|\vec{\alpha}|+205\Rightarrow|\vec{\beta}|=\dfrac{3|\vec{\alpha}|^2-20|\vec{\alpha}|+205}{18}$.

Άρα $|\vec{\beta}|^2=5|\vec{\alpha}|^2-30|\vec{\alpha}|+125\Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{3|\vec{\alpha}|^2-20|\vec{\alpha}|+205}{18}\right)^2=5|\vec{\alpha}|^2-30|\vec{\alpha}|+125\Leftrightarrow$

$\dfrac{\left(3|\vec{\alpha}|^2-20|\vec{\alpha}|+205\right)^2}{18^2}=5|\vec{\alpha}|^2-30|\vec{\alpha}|+125\Leftrightarrow$

$\dfrac{\left(3|\vec{\alpha}|^2-20|\vec{\alpha}|+205\right)^2}{324}=5|\vec{\alpha}|^2-30|\vec{\alpha}|+125\overset{\cdot324}{\Leftrightarrow}$

$9|\vec{\alpha}|^4+400|\vec{\alpha}|^2+42025-120|\vec{\alpha}|^3-$

$-8200|\vec{\alpha}|+1230|\vec{\alpha}|^2=1620|\vec{\alpha}|^2-9720|\vec{\alpha}|+40500\Leftrightarrow$

$9|\vec{\alpha}|^4-120|\vec{\alpha}|^3+10|\vec{\alpha}|^2+1520|\vec{\alpha}|+1525=0$ (1).

Αναζητούμε λοιπόν $|\vec{\alpha}|\in\mathbb{N}$, ώστε να επαληθεύει την (1). Αρχικά είναι $|\vec{\alpha}|\neq 0$, γιατί αν $|\vec{\alpha}|=0$, τότε $(1)\Leftrightarrow 9\cdot 0^4-120\cdot 0^3+10\cdot 0^2+$ $+1520\cdot 0+1525=0\Leftrightarrow 1525=0$, άτοπο. Άρα από $(1)\Leftrightarrow 9|\vec{\alpha}|^4-120|\vec{\alpha}|^3+10|\vec{\alpha}|^2+1520|\vec{\alpha}|+1525=0\Leftrightarrow$

$9|\vec{\alpha}|^4-120|\vec{\alpha}|^3+10|\vec{\alpha}|^2=-1520|\vec{\alpha}|-1525\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2\left(9|\vec{\alpha}|^2-120|\vec{\alpha}|+10\right)=-1520|\vec{\alpha}|-1525$.

Επειδή λοιπόν $|\vec{\alpha}|^2>0$ και $-1520|\vec{\alpha}|-1525<0$, πρέπει και $9|\vec{\alpha}|^2-120|\vec{\alpha}|+10<0$. Θέτουμε $\kappa=|\vec{\alpha}|>0$, οπότε έχουμε $9\kappa^2-120\kappa+10<0$,

$\Delta=14400-360=14040$, άρα $\kappa=\dfrac{120\pm\sqrt{14040}}{18}$

δηλαδή $\kappa\simeq 0{,}083$ ή $\kappa\simeq 13{,}25$.

Έτσι έχουμε

κ	$-\infty$	$0{,}083$	$13{,}25$	$+\infty$
$9\kappa^2-120\kappa+10$	$+$	0	$-$	0 $+$

$9\kappa^2-120\kappa+10<0\Leftrightarrow\kappa\in(0{,}083\ ,\ 13{,}25)$.

Άρα τελικά αναζητούμε φυσικό αριθμό

$|\vec{\alpha}|=\kappa\in(0{,}083\ ,\ 13{,}25)\Rightarrow$

$|\vec{\alpha}|\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$.

Για να μην επαληθεύουμε όλους τους παραπάνω αριθμούς για την εύρεση λύσης, παρατηρούμε επίσης το εξής:

$(1)\Leftrightarrow 9|\vec{\alpha}|^4-120|\vec{\alpha}|^3+10|\vec{\alpha}|^2+1520|\vec{\alpha}|+1525=0\Leftrightarrow$

$9|\vec{\alpha}|^4-120|\vec{\alpha}|^3+10|\vec{\alpha}|^2+1520|\vec{\alpha}|=-1525\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|\left(9|\vec{\alpha}|^3-120|\vec{\alpha}|^2+10|\vec{\alpha}|+1520\right)=-1525.$

Επειδή το ζητούμενο $|\vec{\alpha}|\in\mathbb{N}$, άρα και $9|\vec{\alpha}|^3-120|\vec{\alpha}|^2+10|\vec{\alpha}|+1520\in\mathbb{Z}$.

Άρα το $|\vec{\alpha}|$ διαιρεί το -1525.

Οπότε αρχικά το $|\vec{\alpha}|$ δεν είναι άρτιος αριθμός $\Rightarrow|\vec{\alpha}|\in\{1,3,5,7,9,11,13\}$. Από αυτούς τους αριθμούς οι μόνοι που διαιρούν το -1525 είναι οι 1 και 5. Άρα το $|\vec{\alpha}|$ θα είναι ίσο με 1 ή 5 (αν κάποιο από αυτά επαληθεύει την (1)).

Αν $|\vec{\alpha}|=5$, τότε $(1)\Leftrightarrow$

$9|\vec{\alpha}|^4-120|\vec{\alpha}|^3+10|\vec{\alpha}|^2+1520|\vec{\alpha}|+1525=0\Leftrightarrow$

$9\cdot 5^4-120\cdot 5^3+10\cdot 5^2+1520\cdot 5+1525=$
$5625-15000+250+7600+1525=0$. Ισχύει, άρα $|\vec{\alpha}|=5$ δεκτή. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, τότε $(1)\Leftrightarrow$

$9|\vec{\alpha}|^4-120|\vec{\alpha}|^3+10|\vec{\alpha}|^2+1520|\vec{\alpha}|+1525=0\Leftrightarrow$

$9\cdot 1^4-120\cdot 1^3+10\cdot 1^2+1520\cdot 1+1525=$
$9-120+10+1520+1525=1419$, Άτοπο, άρα $|\vec{\alpha}|=1$ απορρίπτεται. Οπότε τελικά είναι $|\vec{\alpha}|=5$

και $|\vec{\beta}|=\dfrac{3|\vec{\alpha}|^2-20|\vec{\alpha}|+205}{18}=\dfrac{3\cdot 5^2-20\cdot 5+205}{18}=$

$\dfrac{3\cdot 5^2-20\cdot 5+205}{18}=\dfrac{180}{18}=10$, δεκτή.

Άρα $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\beta}|-13{,}14-|\vec{\beta}|\right)=$

$(10-13{,}14-10)=(-3{,}4)$ και

$\vec{\beta}=\left(|\vec{\alpha}|-11{,}2|\vec{\alpha}|-2\right)=$

$(5-11{,}2\cdot 5-2)=(-6,8)$.

ii) α΄ τρόπος: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(-3{,}4)\cdot(-6,8)=(-3)\cdot(-6)+4\cdot 8=$

$18+32=50=5\cdot 10=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Rightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

β΄ τρόπος: $\vec{\beta}=(-6,8)=2\cdot(-3{,}4)=2\cdot\vec{\alpha}\Rightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

iii) Αφού $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\left(\hat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)=60^\circ\Rightarrow\left(\hat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=60^\circ$.

Άρα $10\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}^2+4\cdot\vec{\gamma}^2=5\cdot|\vec{\beta}|\Leftrightarrow$

$10\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\text{συν}\left(\hat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)+|\vec{\alpha}|^2+4\cdot|\vec{\gamma}|^2=5\cdot 10\Leftrightarrow$

$10\cdot 10\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\dfrac{1}{2}+5^2+4\cdot|\vec{\gamma}|^2=50\Leftrightarrow$

$50\cdot|\vec{\gamma}|+25+4\cdot|\vec{\gamma}|^2-50=0\Leftrightarrow 4|\vec{\gamma}|^2+50|\vec{\gamma}|-25=0.$

Θέτουμε $\omega=|\vec{\gamma}|\geq 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$4\omega^2+50\omega-25=0$. $\Delta=50^2+400=2900$

Άρα $\omega=\dfrac{-50\pm\sqrt{2900}}{8}\Rightarrow\omega=\dfrac{5\left(\sqrt{29}-5\right)}{4}>0$

Άρα $|\vec{\gamma}|=\omega=\dfrac{5\left(\sqrt{29}-5\right)}{4}$

Τάξη: Γ΄

Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

Κωνσταντίνος Γκούλης – Παράρτημα ΕΜΕ Πιερίας

Άσκηση 1η

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x)=e^{e^x}+e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x,\ x>0$

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h\circ g$.

Έστω $f(x)=(h\circ g)(x)=e^x+\ln x+x-1,\ x>0$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ. Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την εξίσωση:

$$e^{3x^2+5}-e^{2x^2+6x}=\ln(2x^2+6x)-\ln(3x^2+5)-x^2+6x-5$$

δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)>0$

Λύση

α.

- $D_{h\circ g}=\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_h\}=$
  $\{x>0\ /\ \ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$
- $f(x)=(h\circ g)(x)=h(g(x))=e^{e^{\ln x}}+e^{\ln x}+\ln x-1=$
  $=e^x+x+\ln x-1$

β. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}e^{x_1}<e^{x_2}\\ \ln x_1<\ln x_2\\ x_1-1<x_2-1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{x_1}+\ln x_1+x_1-1<e^{x_2}+\ln x_2+x_2-1$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε είναι και $1-1$, δηλαδή αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα έχει σύνολο τιμών το

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+\ln x+x-1\right)=-\infty$, αφού
  $\lim\limits_{x\to0^+}e^x=e^0=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+\ln x+x-1\right)=+\infty$, αφού
  $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Άρα $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε:

$$e^{3x^2+5}+\ln(3x^2+5)=e^{2x^2+6x}+\ln(2x^2+6x)-x^2+6x-5$$

$$\Leftrightarrow e^{3x^2+5}+\ln(3x^2+5)+(3x^2+5)-1$$

$$=e^{2x^2+6x}+\ln(2x^2+6x)+(2x^2+6x)-1$$

$$\Leftrightarrow f(2x^2+6x)=f(3x^2+5)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}3x^2+5=2x^2+6x$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow x=1\ \text{ή}\ x=5$$

δ. Για κάθε $x\geq1$ έχουμε:

$$e^x>0,\ \ln x\geq0\ \text{και}\ x-1\geq0$$

Άρα $f(x)=e^x+\ln x+x-1>0$.

Άσκηση 2η

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\eta\mu x}{x^2-x}=0\ \text{και}\ f^2(x)-2xf(x)=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0)=-1$.

β. Η f έχει τύπο $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ. $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x^2}-\dfrac{\ln(x^2+1)}{x-2}=0$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

Λύση

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{xf(x)+\eta\mu x}{x^2-x},\ x\neq0$$

και έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ και

$$(x^2-x)g(x)=xf(x)+\eta\mu x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x^2-x)g(x)-\eta\mu x}{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x(x-1)g(x)-\eta\mu x}{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x(x-1)}{x}g(x)-\frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)g(x)-\frac{\eta\mu x}{x}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$, οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left((x-1)g(x)-\frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)\cdot\lim_{x\to 0}g(x)-\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$$
$$=-1\cdot 0-1=-1.$$

β. Είναι:

$$f^2(x)-2xf(x)=1\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1$$
$$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+1$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(f(x)-x)^2}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+1}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επιπλέον,

$$h(0)=f(0)-0\Leftrightarrow h(0)=-1 \text{ και}$$
$$|h(x)|=\sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

Ισχύει: $\sqrt{x^2+1}\neq 0\Leftrightarrow |h(x)|\neq 0\Leftrightarrow h(x)\neq 0$

Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $h(0)=-1<0$, οπότε $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς $|h(x)|=-h(x)=-f(x)+x$.

Άρα από τη σχέση **(1)** προκύπτει ότι:

$$-f(x)+x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow \boxed{f(x)=x-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}}$$

γ. 1ος τρόπος: Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=0$, οπότε

$$f^2(x_0)-2x_0f(x_0)=1\Rightarrow 0-2x_0\cdot 0=1\Rightarrow 0=1,$$

άτοπο. Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=-1<0$, οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$x^2+1>x^2\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\geq x.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\sqrt{x^2+1}>x\Rightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0\Rightarrow f(x)<0$$

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$w(x)=(x-2)f(x)-x^2\cdot\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $w(x)=0$ έχει ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

Η w είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[0,2]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Επιπλέον,

$$w(0)=-2\cdot f(0)-0\cdot\ln 1=-2(-1)=2>0$$
$$w(2)=(2-2)f(2)-4\cdot\ln 5=-4\cdot\ln 5<0$$

οπότε $w(0)\cdot w(2)<0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $w(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

Άσκηση 3η

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{2}{x}-2,\ x\in\mathbb{R}^* \text{ και } g(x)=3\ln x,\ x>0.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, f^{-1}.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση $w=g\circ f^{-1}$.

Έστω $$w(x)=3\ln\left(\frac{2}{x+2}\right),\ x\in(-2,+\infty).$$

γ. Να μελετήσετε την w ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g-f$ και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Λύση

α. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Ισχύει:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{2}{x_1}-2=\frac{2}{x_2}-2\Rightarrow\frac{2}{x_1}=\frac{2}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1»

Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, θεωρούμε την εξίσωση

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{2}{x}-2\Leftrightarrow\frac{2}{x}=y+2\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{y+2}{2}.$$

Με $y+2\neq 0\Leftrightarrow y\neq -2$ έχουμε:

$$\frac{1}{x}=\frac{y+2}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2}{y+2}\neq 0.$$

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{2}{y+2}$, $y\neq -2$ ή

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{2}{x+2},\ x\neq -2}.$$

β.

- $D_w=\left\{x\in D_{f^{-1}}/\ f^{-1}(x)\in D_g\right\}=$
$$\left\{x\neq -2/\ \frac{2}{x+2}>0\right\}=(-2,+\infty)$$
- $w(x)=\left(g\circ f^{-1}\right)(x)\Rightarrow w(x)=g\left(f^{-1}(x)\right)$
$$\Rightarrow\boxed{w(x)=3\ln\left(\frac{2}{x+2}\right),\ x>-2}$$

γ. Έστω $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+2<x_2+2\Rightarrow\frac{1}{x_1+2}>\frac{1}{x_2+2}$$
$$\Rightarrow\frac{2}{x_1+2}>\frac{2}{x_2+2}\Rightarrow w(x_1)>w(x_2).$$

Άρα η w είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
Η w είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$w((-2,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty} w(x), \lim_{x\to-2^+} w(x)\right).$$

- Για το $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\ln\left(\frac{2}{x+2}\right)\right]$,

θέτουμε $u=\frac{2}{x+2}$ και έχουμε:

$$u_0=\lim_{x\to+\infty} u=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2}=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x)=\lim\limits_{u\to 0}(3\ln u)=-\infty$

- Για το $\lim\limits_{x\to-2^+} w(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left[3\ln\left(\frac{2}{x+2}\right)\right]$, θέτουμε

$h=\frac{2}{x+2}$ και έχουμε:

$$h_0=\lim_{x\to-2^+} h=\lim_{x\to-2^+}\frac{2}{x+2}=+\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-2^+} w(x)=\lim\limits_{h\to+\infty}(3\ln h)=+\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της w είναι το

$$w((-2,+\infty))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

δ. Το πεδίο ορισμού της h είναι το

$$A_h=A_g\cap A_f=(0,+\infty)\cap\mathbb{R}^*=(0,+\infty)$$

Ο τύπος της h είναι :

$$h(x)=(g-f)(x)=g(x)-f(x)=3\ln x-\frac{2}{x}+2\,,\ x>0$$

Παρατηρούμε ότι

$$h(1)=3\ln 1-\frac{2}{1}+2=0-2+2=0$$

Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ρίζα την $x=1$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}\ln x_1<\ln x_2\\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\ln x_1<3\ln x_2\\ -\frac{2}{x_1}<-\frac{2}{x_2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\ln x_1-\frac{2}{x_1}<3\ln x_2-\frac{2}{x_2}$$

$$\Rightarrow 3\ln x_1-\frac{2}{x_1}+2<3\ln x_2-\frac{2}{x_2}+2\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι και $1-1$, άρα η ρίζα $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

Για το πρόσημο έχουμε:

- αν $0<x<1$, τότε $h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$
- αν $x>1$, τότε $h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0$.

Άσκηση 4η

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\frac{2\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}$$

με $0<\alpha\neq 1$, $0<\beta\neq 1$ και $\alpha<\beta$.

α. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x^{2026}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

δ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α. Είναι:

$0<\alpha<\beta\Rightarrow 0<\frac{\alpha}{\beta}<1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+2}$$

$$=\frac{2\cdot 0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$$

β. Ισχύει:

$\beta>\alpha\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\frac{\beta}{\alpha}>1$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x=0$ και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x}{1+2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

γ. Η εξίσωση $f(x)=2x^{2026}$ γράφεται:

$$\frac{2\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}-2x^{2026}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{2\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}-2x^{2026},\ x\in\mathbb{R}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και

$$g(0)=\frac{2\cdot1+1}{1+2\cdot1}-0=1>0$$

$$g(1)=\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}-2=\frac{2\alpha+\beta-2\alpha-4\beta}{\alpha+2\beta}=\frac{-3\beta}{\alpha+2\beta}<0$$

οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

δ. Είναι:

$$f(x)=\frac{2\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}=\frac{2\alpha^x+4\beta^x-3\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}=2-\frac{3\beta^x}{\alpha^x+2\beta^x}$$

$$=2-\frac{3\frac{\beta^x}{\beta^x}}{\frac{\alpha^x}{\beta^x}+2\frac{\beta^x}{\beta^x}}=2-\frac{3}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+2},\ \text{με } 0<\frac{\alpha}{\beta}<1.$$

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1}>\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2}\Rightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1}+2>\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2}+2$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1}+2}<\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2}+2}\Rightarrow\frac{-3}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1}+2}>\frac{-3}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2}+2}$$

$$\Rightarrow 2-\frac{3}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1}+2}>2-\frac{3}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2}+2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5η

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x^3+x-2+e^x.$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της f.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=0$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-e^x-1-3x^2}{\eta\mu(x-3)}$$

Λύση

α. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3<x_2^3\\x_1-2<x_2-2\\e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^3+x_1-2+e^{x_1}<x_2^3+x_2-2+e^{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς και "1-1".

β. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

διότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

γ. Το $f^{-1}(x)$ και το 0 ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f, οπότε

$$f^{-1}(x)=0\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(f^{-1}(x))=f(0)\Leftrightarrow x=-2+1\Leftrightarrow x=-1$$

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-e^x-1-3x^2}{\eta\mu(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x^3+x-2+e^x-e^x-1-3x^2}{\eta\mu(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^3-3x^2+x-3}{\eta\mu(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+1)}{\eta\mu(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+1}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}}=\frac{9+1}{1}=10$$

διότι $\lim\limits_{x\to3}\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}\overset{x-3=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

Άσκηση 6η

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)\le\eta\mu x-3x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\ell$, $\ell\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι $\ell=-2$.

β. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

γ. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\eta\mu x-e^x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

α. Είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\ell\Leftrightarrow\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\ell$$

- Για $x>0$ έχουμε

$$f(x)\le\eta\mu x-3x\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}-3$$

Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\le\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-3\right)\Rightarrow\ell\le1-3\Rightarrow\ell\le-2$

• Για $x<0$ έχουμε

$$f(x)\le \eta\mu x-3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x}\ge \frac{\eta\mu x}{x}-3$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\ge \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-3\right)\Rightarrow \ell\ge 1-3\Rightarrow \ell\ge -2$

Επομένως $\ell=-2$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\ne 0$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\ell$ και $f(x)=xg(x)$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\big(x\cdot g(x)\big)=0\cdot\ell=0$$

Άρα $f(0)=0$.

γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)\le \eta\mu x-3x\le 1-3x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-3x)=-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

δ. Είναι: $f(x)=\eta\mu x-e^x\Leftrightarrow f(x)-\eta\mu x+e^x=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-\eta\mu x+e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, άρα και στο διάστημα $[0,1]$. Επίσης,

- $h(0)=f(0)-\eta\mu 0+e^0+1=1>0$
- $h(1)=f(1)-\eta\mu 1+e<0$ διότι:

$f(1)\le \eta\mu 1-3\Rightarrow f(1)-\eta\mu 1\le -3\Rightarrow f(1)-\eta\mu 1+e<0$

οπότε $h(0)\cdot h(1)<0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7η

Έστω η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)>0,\ f(x)=f\big(\ln(f(x))\big)+\frac{e^x}{4}$$

Επιπλέον ισχύουν

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x^2-1}=2 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=\ell,\ \ell>0$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι $f(1)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

γ. Να υπολογίσετε τον αριθμό ℓ.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=5-e^x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Λύση

α. Ισχύει: $f\big(\ln(f(x))\big)-f(x)=-\frac{e^x}{4}$

Η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, οπότε ας υποθέτουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}\ln(f(x_1))>\ln(f(x_2))\\ -f(x_1)<-f(x_2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f\big(\ln(f(x_1))\big)<f\big(\ln(f(x_2))\big)\\ -f(x_1)<-f(x_2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f\big(\ln(f(x_1))\big)-f(x_1)<f\big(\ln(f(x_2))\big)-f(x_2)$$

$$\Rightarrow -\frac{e^{x_1}}{4}<-\frac{e^{x_2}}{4}\Rightarrow e^{x_1}>e^{x_2}\Rightarrow x_1>x_2$$

που είναι αδύνατο, αφού $x_1<x_2$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε η f αφού είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Με x κοντά στο 1 θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=\frac{f(x)-x}{x^2-1}$$

και έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}h(x)=2 \text{ και } f(x)=(x^2-1)h(x)+x$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}[(x^2-1)h(x)+x]=0+1=1$$

Με $x>0$ θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$w(x)=\frac{f(x)}{e^x}$$

και έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}w(x)=\ell \text{ και } f(x)=e^x\cdot w(x)$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[e^x\cdot w(x)]=+\infty$$

γ. Είναι:

$$\frac{f\big(\ln(f(x))\big)}{e^x}-\frac{f(x)}{e^x}=-\frac{1}{4}$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{f\big(\ln(f(x))\big)}{e^x}-\frac{f(x)}{e^x}\right\}=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{f\big(\ln(f(x))\big)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{e^x}-\frac{f(x)}{e^x}\right\}=-\frac{1}{4}$$

Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\big(\ln(f(x))\big)}{f(x)}$

θέτουμε $u=\ln(f(x))\Leftrightarrow f(x)=e^u$ και έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x))=+\infty$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\ln(f(x)))}{f(x)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{e^u}=\ell$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{f(\ln(f(x)))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{e^x}-\frac{f(x)}{e^x}\right\}=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \ell\cdot\ell-\ell=-\frac{1}{4}\Rightarrow(2\ell-1)^2=0\Rightarrow\ell=\frac{1}{2}$$

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)+e^x-5,\ x\in\mathbb{R}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0>1$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \text{ και } e^{x_1}<e^{x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_1)+e^{x_1}<f(x_2)+e^{x_2}\Rightarrow g(x_1)+5<g(x_2)+5$$

$$\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1 − 1.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα

$$g(1)=\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}[f(x)+e^x-5]=1+e-5=e-4$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+e^x-5]=+\infty$$

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$, οπότε έχει σύνολο τιμών στο διάστημα αυτό το

$$g((1,+\infty))=\left(\lim_{x\to1}g(x),\ \lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(e-4,+\infty)$$

Ο αριθμός 0 περιέχεται στο $g((1,+\infty))$, άρα υπάρχει $x_0>1$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

Η g είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

Άσκηση 8η

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει η σχέση: $f^3(x)+f(x)=x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

β. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f^{-1} και f είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^{2026})<1$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu2026x}{f^{-1}(x)+1}$

ε. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\alpha x^2+x-1}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

στ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1-2x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση

α. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Ισχύει:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f^3(x_1)=f^3(x_2)\\ f(x_1)=f(x_2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1+1=x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση "1-1", δηλαδή αντιστρέφεται. Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Επομένως από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$f^3(f^{-1}(y))+f(f^{-1}(y))=f^{-1}(y)+1$$

$$\Rightarrow y^3+y=f^{-1}(y)+1$$

οπότε

$$f^{-1}(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

β. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3<x_2^3\Rightarrow x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\\ x_1<x_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x_1)-1<f^{-1}(x_2)-1\Rightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow f^{-1}(f(x_1))<f^{-1}(f(x_2))\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x^{2026})<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}(f(x^{2026}))<f^{-1}(1)\Leftrightarrow x^{2026}<1$$

$$\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow-1<x<1$$

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu2026x}{f^{-1}(x)+1}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu2026x}{x^3+x-1+1}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu2026x}{x^3+x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\eta\mu2026x}{x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right\}=2026\cdot\lim_{x\to0}\left\{\frac{\eta\mu2026x}{2026x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right\}$$

$$=2026\cdot1\cdot\frac{1}{1}=2026$$

διότι

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu2026x}{2026x}\overset{2026x=u}{=}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

ε. Κοντά στο $-\infty$ θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$w(x)=\frac{f^{-1}(x)}{\alpha x^2+x-1}=\frac{x^3+x-1}{\alpha x^2+x-1}$$

και διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις

- Αν $\alpha=0$, τότε $w(x)=\dfrac{x^3+x-1}{x-1}$ οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} w(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x-1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

- Αν $\alpha\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to-\infty} w(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x-1}{\alpha x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{\alpha x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\alpha}x\right)$$

$$=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \alpha>0\\ +\infty, & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$$

στ. Είναι: $f(x)=1-2x\Leftrightarrow f(x)+2x-1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-1,1)$.

Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$$f(x_1)<f(x_2) \text{ και } 2x_1<2x_2$$

οπότε

$$f(x_1)+2x_1<f(x_2)+2x_2\Rightarrow g(x_1)+1<g(x_2)+1$$

$$\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και «1-1».

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και ισχύουν:

- $g(-1)=f(-1)-2-1=f(-1)-3$

Η δοσμένη ισότητα με $x=-1$ δίνει:

$$f^3(-1)+f(-1)=1-1\Rightarrow f(-1)\left(f^2(-1)+1\right)=0$$

$$\Rightarrow f(-1)=0$$

Άρα $g(-1)=-3<0$. Επιπλέον,

$$g(1)=f(1)+2-1=f(1)+1$$

Αν $f(1)=\kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}$, τότε έχουμε:

$$f^{-1}(\kappa)=1\Leftrightarrow f^{-1}(\kappa)=f^{-1}(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\kappa=1$$

οπότε $g(1)=2>0$

Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$. Επειδή η g είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Άσκηση 9η

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{f^3(x)+f(x)=x^3}$$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την οποία να βρείτε.

γ. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)<x$

δ. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$

ε. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}$

στ. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$, $\ell\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον αριθμό ℓ.

Λύση

α. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Ισχύει

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f^3(x_1)=f^3(x_2)\\ f(x_1)=f(x_2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)\Rightarrow x_1^3=x_1^3\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι "1-1", οπότε αντιστρέφεται.

Για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

Από την δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$f^3(f^{-1}(y))+f(f^{-1}(y))=(f^{-1}(y))^3$$

$$\Leftrightarrow y^3+y=(f^{-1}(y))^3$$

- Αν $y^3+y\geq 0\Leftrightarrow y(y^2+1)\geq 0\Leftrightarrow y\geq 0$, τότε

$$f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y^3+y}$$

- Αν $y^3+y<0\Leftrightarrow y(y^2+1)<0\Leftrightarrow y<0$, τότε

$$f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{-(y^3+y)}$$

Επομένως,

$$f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y^3+y}, & y\geq 0\\ -\sqrt[3]{-(y^3+y)}, & y<0\end{cases}$$

Άρα η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3+x}, & x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-(x^3+x)}, & x<0\end{cases}$$

β. Από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$f(x)(f^2(x)+1)=x^3\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{f^2(x)+1},\ (1)$$

αφού $f^2(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{f^2(x)+1}=0\Leftrightarrow x=0$$

οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.

γ. Έχουμε:

$$x>0\Rightarrow x^3>0\Rightarrow\frac{x^3}{f^2(x)+1}>0\Rightarrow f(x)>0\overset{f(x)=x^3-f^3(x)}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow x^3 - f^3(x) > 0 \Rightarrow f^3(x) < x^3 \Rightarrow f(x) < x$

δ. Με $x > 0$ έχουμε:

$$x^3 > 0,\ f(x) > 0 \text{ και } f(x) < x$$

οπότε

$$0 < \frac{f(x)}{x^3} < \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x^3}\right| < \frac{1}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < \frac{f(x)}{x^3} < \frac{1}{x^2}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3} = 0$

ε. Με $x > 0$ έχουμε:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3+x}{x^3}} = 1$

στ. Για $x > 0$ από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow \frac{f^3(x)}{x^3} = 1 - \frac{f(x)}{x^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 = 1 - \frac{f(x)}{x^3}$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{f(x)}{x^3}\right) \Rightarrow \ell^3 = 1 - 0 \Rightarrow \ell = 1$$

Άσκηση 10η

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^4 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 4$$

και $f(0) = 4$

α. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο να βρείτε.

β. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$$

διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

δ. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 2,\ x\in\mathbb{R}$$

ε. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2} + x^2\cdot\eta\mu\frac{7}{x^2}\right)$$

Λύση

α. Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Από τη δοσμένη ισότητα για $x = x_0$ παίρνουμε:

$$f^2(x_0) - 2f(x_0)\cdot\sigma\upsilon\nu x_0 = \sigma\upsilon\nu^4 x_0 + 3\sigma\upsilon\nu^2 x_0 + 4$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^4 x_0 + 3\sigma\upsilon\nu^2 x_0 + 4 = 0$$

που είναι άτοπο αφού $\sigma\upsilon\nu^4 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 4 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\neq 0$, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι: $f(0) = 4 > 0$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Η δοσμένη ισότητα με $x = \frac{\pi}{2}$ γράφεται:

$$f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{2} + 3\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2} + 4$$

$$\Rightarrow f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

διότι $f(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ. Ισχύει:

$$f^2(x) - 2f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu^4 x + 4\sigma\upsilon\nu^2 x + 4$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x) - \sigma\upsilon\nu x\right)^2 = (\sigma\upsilon\nu^2 x + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x) - \sigma\upsilon\nu x\right| = \sigma\upsilon\nu^2 x + 2 \Leftrightarrow |h(x)| = \sigma\upsilon\nu^2 x + 2$$

όπου $h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu^2 x + 2 \neq 0, \text{ οπότε } h(x)\neq 0.$$

Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και

$$h(0) = f(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 4 - 1 = 3 > 0$$

οπότε $h(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι:

$$h(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + 2 \Rightarrow f(x) - \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 x + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 2,\ x\in\mathbb{R}$$

ε. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2} + x^2\cdot\eta\mu\frac{7}{x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 2}{x^2} + x^2\cdot\frac{7}{x^2}\frac{\eta\mu\frac{7}{x^2}}{\frac{7}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)^2 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + 7\cdot\frac{\eta\mu\frac{7}{x^2}}{\frac{7}{x^2}}\right]$$

$$= 0 + 0\cdot 0 + 0 + 7\cdot 1 = 7$$

διότι όπως εύκολα προκύπτει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{7}{x^2}}{\frac{7}{x^2}} = 1$$

Διαγωνιστικές Διαδρομές Άλγεβρας

Δεύτερο Μέρος

Θανάσης Ντρίζος - Δημήτρης Ντρίζος, Τρίκαλα

Το άρθρο αυτό εντάσσεται στην ίδια λογική με προηγούμενο που δημοσιεύτηκε στο τεύχος 140, στη στήλη *Το Βήμα του Ευκλείδη* με τον ίδιο τίτλο *Διαγωνιστικές Διαδρομές Άλγεβρας*. Οι ασκήσεις και αυτού του άρθρου εμπλουτίζουν και επεκτείνουν δημιουργικά την ύλη της Άλγεβρας Α΄ και Β΄ Λυκείου, και προσφέρονται για την υποστήριξη παιδιών με αυξημένο ενδιαφέρον προς τα Μαθηματικά. Με αυτήν την έννοια, οι ασκήσεις των άρθρων αυτών προσφέρονται και για την προετοιμασία μαθητών για τη συμμετοχή τους σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.
Προτείνουμε στους αναγνώστες μαθητές να προσπαθούν να λύνουν πρώτα μόνοι τους τις ασκήσεις και να μην προσφεύγουν εξαρχής στις προσφερόμενες λύσεις. Έτσι εξασκούν τη μαθηματική τους ικανότητα· εμπλουτίζουν την εμπειρία τους και, κάποιες φορές, μπορεί να επινοήσουν και άλλους, νέους τρόπους λύσης.

Άσκηση 1

Θεωρούμε την παράσταση $S=x^4+y^4+z^4-4xyz$, όπου οι x,y,z διατρέχουν το σύνολο $\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης S καθώς και όλες τις τριάδες (x,y,z) για τις οποίες η S παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση (1ος τρόπος)

$$S=x^4+y^4+z^4-4xyz=\left[\left(x^2\right)^2-2x^2y^2+\left(y^2\right)^2\right]+2x^2y^2+\left[\left(z^2\right)^2-2z^2+1\right]+2z^2-1-4xyz=$$
$$=\left(x^2-y^2\right)^2+\left(z^2-1\right)^2+2\left(x^2y^2-2xyz+z^2\right)-1\Rightarrow$$

$$S=\left(x^2-y^2\right)^2+\left(z^2-1\right)^2+2\left(xy-z\right)^2-1$$

Είναι $\begin{cases}\left(x^2-y^2\right)^2\geq 0\\ \left(z^2-1\right)^2\geq 0\\ 2\left(xy-z\right)^2\geq 0\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}\left(x^2-y^2\right)^2+\left(z^2-1\right)^2+2\left(xy-z\right)^2\geq 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(x^2-y^2\right)^2+\left(z^2-1\right)^2+2\left(xy-z\right)^2-1\geq -1\Rightarrow S\geq -1$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης S ισούται με -1.

Προφανώς η ελάχιστη τιμή της παράστασης S προκύπτει αν και μόνο αν ισχύει

$$\left(x^2-y^2\right)^2+\left(z^2-1\right)^2+2\left(xy-z\right)^2=0,$$

οπότε όλες οι τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) για τις οποίες η παράσταση S παίρνει την ελάχιστη τιμή της προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος $\begin{cases}x^2-y^2=0\\ z^2-1=0\\ xy-z=0\end{cases}$,

που μας δίνει τις τριάδες: $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$.

Λύση (2ος τρόπος)

Προκαταρκτικά

Από την Άλγεβρα της Α' Λυκείου γνωρίζουμε ότι, για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς α_1 και α_2 ισχύει $0\le\left(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2}\right)^2=\alpha_1+\alpha_2-2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ και ισοδύναμα $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\ge\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$, (1)

Η ανισότητα (1) γενικεύεται και ισχύει για ν προσθετέους (ν θετικός ακέραιος), ως εξής:

Αν $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\ge 0$, τότε ισχύει $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu}\ge\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$, (2)

Την (2) τη λέμε *ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού Μέσου (AM – GM)*.

Σχόλιο: Η ισότητα στη σχέση (2) ισχύει μόνο αν $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_\nu$

Δίνουμε τώρα τη λύση με 2ο τρόπο:

Θα βρούμε πρώτα την ελάχιστη τιμή της παράστασης $S=x^4+y^4+z^4-4xyz$ καθώς οι x,y,z διατρέχουν το $\mathbb{R}$. Για τους αριθμούς $x^4,y^4,z^4,1$ εφαρμόζουμε την ανισότητα AM – GM και παίρνουμε $\frac{x^4+y^4+z^4+1}{4}\ge\sqrt[4]{x^4\cdot y^4\cdot z^4\cdot 1}\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+1\ge 4|xyz|$, (3)

Ισχύει όμως $|xyz|\ge xyz$, (4), ιδιότητα απόλυτης τιμής.

Οπότε από την (3), λόγω της (4), προκύπτει $x^4+y^4+z^4+1\ge 4xyz$ και ισοδύναμα

$x^4+y^4+z^4-4xyz\ge -1\Leftrightarrow S\ge -1$, άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης S ισούται με -1.

Θα προσδιορίσουμε τώρα όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) για τις οποίες η παράσταση S παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Σύμφωνα με το παραπάνω *Σχόλιο* για την ανισότητα AM – GM, η (3) θα ισχύει ως ισότητα μόνο αν $x^4=y^4=z^4=1$, δηλαδή αν $|x|=|y|=|z|=1$. Επίσης, η (4) ισχύει ως ισότητα μόνο αν $xyz>0$, και αυτό συμβαίνει όταν δύο ακριβώς από τους x,y,z είναι ομόσημοι. Συνδυάζοντας τις σχέσεις $|x|=|y|=|z|=1$ με το ότι δύο ακριβώς από τους x,y,z είναι ομόσημοι, βρίσκουμε ότι όλες οι τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) για τις οποίες η παράσταση S παίρνει την ελάχιστη τιμή της είναι οι: $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x,y) που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mathbf{9x^2+4y^2-9x^2y^2+6xy+2=0}$$

Λύση

Διαδοχικά έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
&9x^2+4y^2-9x^2y^2+6xy+2=0\Leftrightarrow (3x)^2+(2y)^2+6xy=(3xy)^2-2\\
&\Leftrightarrow (3x)^2+(2y)^2+6xy+6xy=(3xy)^2+6xy+1-3\\
&\Leftrightarrow (3x)^2+(2y)^2+2(3x\cdot 2y)=\left[(3xy)^2+2(3xy)\cdot 1+1\right]-3\\
&\Leftrightarrow (3xy+1)^2-(3x+2y)^2=3,\qquad (1)
\end{aligned}$$

Θέτουμε $3xy+1=\alpha$ και $3x+2y=\beta$, οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$\alpha^2-\beta^2=3\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=3,\qquad (2)$$

Το δεξιό μέλος της εξίσωσης (2) είναι ο πρώτος 3, οπότε όλες οι δυνατές επιλογές για τους παράγοντες $(\alpha-\beta),(\alpha+\beta)$ είναι οι εξής:

$$(\Sigma_1):\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha-\beta=1\end{cases}\Rightarrow(\alpha,\beta)=(2,1),\qquad (\Sigma_2):\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}\Rightarrow(\alpha,\beta)=(-2,-1)$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha-\beta=3\end{cases}\Rightarrow(\alpha,\beta)=(2,-1),\quad (\Sigma_4):\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha-\beta=-3\end{cases}\Rightarrow(\alpha,\beta)=(-2,1)$$

Τα ζητούμενα ζεύγη ακεραίων (x,y) θα προκύψουν από την επίλυση του συστήματος $(\Sigma):\begin{cases}3xy+1=\alpha\\ 3x+2y=\beta\end{cases}$ για όλα τα παραπάνω ζεύγη τιμών (α,β). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για τις λύσεις (α,β) των συστημάτων (Σ_1) και (Σ_3) το (Σ) δεν έχει καμιά ακέραια λύση (x,y). Για τη λύση $(\alpha,\beta)=(-2,-1)$, του (Σ_2), διαπιστώνουμε ότι το (Σ) έχει μία ακέραια λύση, την $(x,y)=(-1,1)$. Επίσης και για τη λύση $(\alpha,\beta)=(-2,1)$, του (Σ_4), διαπιστώνουμε ότι το (Σ) έχει μία ακέραια λύση, την $(x,y)=(1,-1)$.

Τελικά, υπάρχουν δύο ζεύγη ακεραίων (x,y) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$9x^2+4y^2-9x^2y^2+6xy+2=0,\ \text{τα}\ (x,y)=(-1,1)\ \text{και}\ (x,y)=(1,-1).$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακεραίου x, για την οποία ο καθένας από τους αριθμούς $581-x$ και $513-x$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Έστω x ακέραιος για τον οποίο ισχύουν $\begin{cases}581-x=\alpha^2 & (1)\\ 513-x=\beta^2 & (2)\end{cases}$, όπου οι α και β είναι θετικοί ακέραιοι.

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$\alpha^2-\beta^2=68\ \text{και ισοδύναμα}\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=68,\ (3)$$

Από τη σχέση (3) λόγω των υποθέσεων παίρνουμε $0<\beta<\alpha$ και $\alpha-\beta<\alpha+\beta$.

Επιπλέον, έχουμε ότι $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=2\beta$, άρτιος, οπότε οι αριθμοί $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί. Όμως, η περίπτωση να είναι και οι δύο περιττοί απορρίπτεται γιατί σε αυτήν την περίπτωση, ενώ το δεξιό μέλος της (3) είναι ο άρτιος 68, το αριστερό της μέλος θα ήταν ο περιττός $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ (άτοπο).

Οπότε οι αριθμοί $(\alpha-\beta)$, $(\alpha+\beta)$ είναι και οι δύο άρτιοι.

Η σχέση (3) γίνεται $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=68\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=2^2\cdot17$, από την οποία, επειδή οι $(\alpha-\beta)$, $(\alpha+\beta)$ είναι και οι δύο άρτιοι, προκύπτει μόνο το ζεύγος $(\alpha-\beta,\ \alpha+\beta)=(2,\ 2\cdot17)$.

Δηλαδή $\alpha-\beta=2$ και $\alpha+\beta=34$, από τις οποίες βρίσκουμε $\alpha=18$ και $\beta=16$.

Με αυτές τις τιμές των α και β από την εξίσωση (1) ή την (2) βρίσκουμε $x=257$.

Επισήμανση

Δύο ακέραιοι είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί αν και μόνο αν η διαφορά τους είναι άρτιος.

Άσκηση 4

Έστω πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+4\alpha x+64$, $\alpha\in\mathbb{R}$, οι ρίζες του οποίου είναι τρεις διαφορετικοί μεταξύ τους διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να προσδιορίσετε τις ρίζες του $P(x)$ και την τιμή του α.

Λύση

Για το πολυώνυμο $P(x)$ έχουμε:

$P(x)=(x^3+4^3)+\alpha x(x+4)=(x+4)(x^2-4x+16)+\alpha x(x+4)=(x+4)\left[x^2+(\alpha-4)x+16\right]$, δηλαδή

$P(x)=(x+4)\left[x^2+(\alpha-4)x+16\right]$, (1)

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η μία από τις τρεις ρίζες του $P(x)$ είναι το -4, ενώ οι άλλες δύο είναι οι ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου $x^2+(\alpha-4)x+16$.

Οι αριθμοί -4, x_1 και x_2 από την υπόθεση είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διαφορετικοί μεταξύ τους, άρα με διαφορά $\omega\neq 0$.

Για τις ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου $x^2+(\alpha-4)x+16$, από τύπο του Vieta για το γινόμενο των ριζών βρίσκουμε $x_1\cdot x_2=16$.

Χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα στα παρακάτω θεωρούμε $x_1<x_2$.

Για τη θέση του -4 ως προς τους x_1 και x_2 διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω $x_1<-4<x_2$. Τότε $x_1=-4-\omega$ και $x_2=-4+\omega$, οπότε από τη σχέση $x_1\cdot x_2=16$ παίρνουμε $(-4-\omega)(-4+\omega)=16$ και βρίσκουμε $\omega=0$, που απορρίπτεται.
- Έστω $-4<x_1<x_2$. Τότε $x_1=-4+\omega$ και $x_2=-4+2\omega$, οπότε από τη σχέση $x_1\cdot x_2=16$ παίρνουμε $(-4+\omega)(-4+2\omega)=16$ και βρίσκουμε $\omega=0$ ή $\omega=6$ (η τιμή $\omega=0$ απορρίπτεται). Προφανώς η περίπτωση $x_1<x_2<-4$ μας οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα.

Με $\omega=6$ από την $x_1=-4+\omega$ βρίσκουμε $x_1=2$ και από την $x_2=-4+2\omega$ βρίσκουμε $x_2=8$.

Επομένως, οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ είναι οι αριθμοί -4, 2 και 8 (διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega=6$).

Τέλος, από την $P(2)=0$ ή την $P(8)=0$ βρίσκουμε $\alpha=-6$.

Σημείωση

Η άσκηση αντιμετωπίζεται ανάλογα, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Vieta για το άθροισμα x_1+x_2, αντί του γινομένου $x_1.x_2$ των ριζών του τριωνύμου $x^2+(\alpha-4)x+16$.

Άσκηση 5

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές τέτοιο, ώστε οι αριθμοί $P(2026)$ και $P(2027)$ να είναι περιττοί. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Λύση

Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραια ρίζα, έστω την ρ.

Τότε θα ισχύει $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$, (1), όπου το $\pi(x)$ είναι πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Με $x=2026$ και $x=2027$ από τη σχέση (1) αντίστοιχα παίρνουμε:

$$P(2026)=(2026-\rho)\cdot\pi(2026),\ (2)\ \text{και}\ P(2027)=(2027-\rho)\cdot\pi(2027),\ (3)$$

Επειδή οι ακέραιοι $P(2026)$ και $P(2027)$ είναι περιττοί, οι ισότητες (2) και (3) θα ισχύουν αν και μόνο αν το δεξιό τους μέλος είναι γινόμενο περιττών. Τότε οι ακέραιοι $(2026-\rho)$ και $(2027-\rho)$, δηλαδή οι διαδοχικοί ακέραιοι $(2026-\rho)$ και $(2026-\rho)+1$, θα έπρεπε να είναι και οι δύο περιττοί. Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή αν δύο ακέραιοι είναι διαδοχικοί, τότε ο ένας από αυτούς είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

Επομένως, το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Άσκηση 6

Για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β και γ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\beta^2+2\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma^2+2\alpha\beta}\geq 1\geq \frac{\beta\gamma}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2+2\gamma\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2+2\alpha\beta}$$

Λύση

Επειδή $\beta^2+\gamma^2\geq 2\beta\gamma$, άρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq \alpha^2+2\beta\gamma$, οπότε $\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma}\geq\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

Επομένως, $\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\beta\gamma}\geq\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, (1).

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε $\frac{\beta^2}{\beta^2+2\alpha\gamma}\geq\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, (2) και $\frac{\gamma^2}{\gamma^2+2\alpha\beta}\geq\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, (3)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1), (2), (3) και παίρνουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\beta^2+2\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma^2+2\alpha\beta}\geq 1,\quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\beta^2+2\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma^2+2\alpha\beta}+2\cdot\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2+2\gamma\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2+2\alpha\beta}\right)=$

$$=\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2+2\beta\gamma}\right)+\left(\frac{\beta^2}{\beta^2+2\gamma\alpha}+\frac{2\gamma\alpha}{\beta^2+2\gamma\alpha}\right)+\left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2+2\alpha\beta}+\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2+2\alpha\beta}\right)=3$$

Επομένως, $2\cdot\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2+2\gamma\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2+2\alpha\beta}\right)=3-\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\beta^2+2\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma^2+2\alpha\beta}\right)$, (5)

Από την (5) λόγω της (4) προκύπτει

$$2\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2+2\gamma\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2+2\alpha\beta}\right)\leq 2\Leftrightarrow\frac{\beta\gamma}{\alpha^2+2\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2+2\gamma\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2+2\alpha\beta}\leq 1,\quad (6)$$

Από τις (4) και (6) προκύπτει ακριβώς η αποδεικτέα διπλή ανισότητα.

Άσκηση 7

Αν α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1}\geq\frac{3}{2}$$

Λύση

Η ανισότητα Andreescou για τρεις προσθετέους:

Αν β_1,β_2,β_3 πραγματικοί αριθμοί και $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\frac{\beta_1^{\,2}}{\alpha_1}+\frac{\beta_2^{\,2}}{\alpha_2}+\frac{\beta_3^{\,2}}{\alpha_3}\geq\frac{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

Στην υπόθεση $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$ εφαρμόζουμε την ανισότητα Andreescu και παίρνουμε:

$$3=\frac{\alpha^2}{1}+\frac{\beta^2}{1}+\frac{\gamma^2}{1}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{1+1+1}\Rightarrow 9\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2,\ \text{άρα}\ \alpha+\beta+\gamma\leq 3,\quad (1)$$

Από το αριστερό μέλος της αποδεικτέας με την ανισότητα Andreescu έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1}\geq\frac{(1+1+1)^2}{\alpha+\beta+\gamma+3}=\frac{9}{\alpha+\beta+\gamma+3}\Rightarrow\ \frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1}\geq\frac{9}{\alpha+\beta+\gamma+3},\quad (2)$$

Από την (1) παίρνουμε $\alpha+\beta+\gamma+3\le 6 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma+3}\ge\dfrac{1}{6}$, οπότε $\dfrac{9}{\alpha+\beta+\gamma+3}\ge\dfrac{3}{2}$, (3)

Από την (2) λόγω της (3) προκύπτει $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}+\dfrac{1}{\gamma+1}\ge\dfrac{3}{2}$, που είναι το ζητούμενο.

Σχόλιο: Η ισότητα στην αποδεικτέα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Υπόδειξη 2ης Λύσης: Αποδείξτε ότι $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}+\dfrac{1}{\alpha+1}\ge 2\left(\dfrac{1}{\alpha^2+3}+\dfrac{1}{\beta^2+3}+\dfrac{1}{\gamma^2+3}\right)$ και

εφαρμόστε την ανισότητα $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9$ για $x=\alpha^2+3$, $y=\beta^2+3$, $z=\gamma^2+3$.

Άσκηση 8

Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}+\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}\ge 2^{\nu+1}$$

Λύση

Για όλους τους $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+y^2\ge 2xy$, (1)

Αν στην (1) θέσουμε $x=\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}$ και $y=\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\nu}{2}}$ παίρνουμε

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}+\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}\ge 2\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}\cdot\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\nu}{2}}\Leftrightarrow\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}+\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}\ge 2\left[\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]^{\frac{\nu}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}+\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}\ge 2\left(2+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\nu}{2}},\quad(2)$$

Επειδή οι α,β είναι ομόσημοι (θετικοί) ισχύει $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\ge 2\Leftrightarrow 2+\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\ge 2+2=2^2$,

οπότε $\left(2+\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\nu}{2}}\ge\left(2^2\right)^{\frac{\nu}{2}}=2^{\nu}$ και από την (2) προκύπτει $\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}+\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}\ge 2^{\nu+1}$

Σχόλιο: Η ισότητα στην αποδεικτέα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta$.

Άσκηση 9

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{y-7}+\sqrt{z+12}\ge\frac{x+y+z+3}{2}$$

Λύση

Με $x\ge 5$, $y\ge 7$ και $z\ge -12$ η σχέση $\sqrt{x-5}+\sqrt{y-7}+\sqrt{z+12}\ge\dfrac{x+y+z+3}{2}$ γράφεται:

$$2\sqrt{x-5}+2\sqrt{y-7}+2\sqrt{z+12}\ge x+y+z+3$$

$$\Leftrightarrow(x-5)+(y-7)+(z+12)-2\sqrt{x-5}-2\sqrt{y-7}-2\sqrt{z+12}+3\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(\sqrt{x-5}\right)^2-2\sqrt{x-5}+1\right]+\left[\left(\sqrt{y-7}\right)^2-2\sqrt{y-7}+1\right]+\left[\left(\sqrt{z+12}\right)^2-2\sqrt{z+12}+1\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-7}-1\right)^2+\left(\sqrt{z+12}-1\right)^2\le 0,\quad(1)$$

Η σχέση (1) είναι η τελικά ισοδύναμη γραφή της υπόθεσης της άσκησης.

Θα προσδιορίσουμε τώρα τους αριθμούς x, y και z με τη μέθοδο της *απαγωγής σε άτοπο*: Έστω ότι κάποιος από τους $\sqrt{x-5}-1$, $\sqrt{y-7}-1$, $\sqrt{z+12}-1$ ήταν διάφορος από το μηδέν. Τότε θα είχαμε $\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-7}-1\right)^2+\left(\sqrt{z+12}-1\right)^2>0$, που είναι *άτοπο*, καθώς έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση (1) της άσκησης. Επομένως, θα είναι:

$$\sqrt{x-5}-1=0 \text{ και } \sqrt{y-7}-1=0 \text{ και } \sqrt{z+12}-1=0,$$

από τις οποίες βρίσκουμε $x=6$, $y=8$ και $z=-11$ (τιμές αποδεκτές).

Μια δεύτερη προσέγγιση:

Για όλους τους x,y,z με $x\geq 5$, $y\geq 7$ και $z\geq -12$, καθένας από τους τρεις προσθετέους του αριστερού μέλους της (1) είναι μη αρνητικός αριθμός, οπότε και το άθροισμά τους είναι μη αρνητικό. Επομένως, κατ' ανάγκη, η (1) θα ισχύει μόνο ως ισότητα. Δηλαδή, θα ισχύει

$$\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-7}-1\right)^2+\left(\sqrt{z+12}-1\right)^2=0$$

Η τελευταία αληθεύει αν και μόνο αν μηδενίζεται καθένας από τους τρεις προσθετέους του αριστερού της μέλους. Βρίσκουμε: $x=6$, $y=8$ και $z=-11$.

Άσκηση 10

Αν x,y,z,w είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{16\left(xyz+yzw+zwx+wxy\right)^4\leq\left[\left(x+w\right)\left(w+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\right]^3}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $16\left(xyz+yzw+zwx+wxy\right)^4=\left[4\left(xyz+yzw+zwx+wxy\right)^2\right]^2$

Με κατάλληλη ομαδοποίηση και εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου (AM-GM), διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
&4\left(xyz+yzw+zwx+wxy\right)^2=\\
&=4\left[yz\left(x+w\right)+xw\left(y+z\right)\right]^2\\
&=4\left[\sqrt{yz}\cdot\sqrt{yz}\left(x+w\right)+\sqrt{xw}\cdot\sqrt{xw}\left(y+z\right)\right]^2\\
&=\left[\sqrt{yz}\left(2\sqrt{yz}\right)\left(x+w\right)+\sqrt{xw}\left(2\sqrt{xw}\right)\left(y+z\right)\right]^2, && \left(2\sqrt{yz}\leq y+z,\ 2\sqrt{xw}\leq x+w\right)\\
&\leq\left[\sqrt{yz}\left(y+z\right)\left(x+w\right)+\sqrt{xw}\left(x+w\right)\left(y+z\right)\right]^2\\
&=yz\left(y+z\right)^2\left(x+w\right)^2+xw\left(x+w\right)^2\left(y+z\right)^2+2\sqrt{xyzw}\left(y+z\right)^2\left(x+w\right)^2\\
&=\left(x+w\right)^2\left(y+z\right)^2\left[yz+xw+\left(2\sqrt{xyzw}\right)\right], && \left(2\sqrt{xyzw}\leq xy+zw\right)\\
&\leq\left(x+w\right)^2\left(y+z\right)^2\left(yz+xw+xy+zw\right)\\
&=\left(x+w\right)^2\left(y+z\right)^2\left[y\left(x+z\right)+w\left(x+z\right)\right]\\
&=\left(x+w\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+x\right)\left(w+y\right)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$4\left(xyz+yzw+zwx+wxy\right)^2\leq\left(x+w\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+x\right)\left(w+y\right),\qquad (1)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι η προς απόδειξη ανισότητα της άσκησης θα προέκυπτε αν ίσχυε και $4\left(xyz+yzw+zwx+wxy\right)^2\leq\left(x+w\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)^2\left(w+y\right)^2$, οπότε με τον πολλαπλασιασμό της κατά μέλη με την (1) θα παίρναμε την προς απόδειξη ανισότητα της άσκησης.

Είναι,

$$\begin{aligned}
&4(xyz+yzw+zwx+wxy)^2 = \\
&=4\left[xz(y+w)+yw(x+z)\right]^2 \\
&=4\left[\sqrt{xz}\cdot\sqrt{xz}(y+w)+\sqrt{yw}\cdot\sqrt{yw}(x+z)\right]^2 \\
&=\left[\sqrt{xz}\left(2\sqrt{xz}\right)(y+w)+\sqrt{yw}\left(2\sqrt{yw}\right)(x+z)\right]^2, \qquad \left(2\sqrt{xz}\le x+z\,,\,2\sqrt{yw}\le y+w\right) \\
&\le\left[\sqrt{xz}(x+z)(y+w)+\sqrt{yw}(y+w)(x+z)\right]^2 \\
&=xz(x+z)^2(y+w)^2+yw(y+w)^2(x+z)^2+2\sqrt{xyzw}(x+z)^2(y+w)^2 \\
&=(x+z)^2(y+w)^2\left[xz+yw+\left(2\sqrt{xyzw}\right)\right], \qquad \left(2\sqrt{xyzw}\le xy+zw\right) \\
&\le(x+z)^2(y+w)^2(xz+yw+xy+zw) \\
&=(x+z)^2(y+w)^2\left[x(y+z)+w(y+z)\right] \\
&=(x+z)^2(y+w)^2(x+w)(y+z)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$4(xyz+yzw+zwx+wxy)^2\le(x+w)(y+z)(z+x)^2(w+y)^2, \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) παίρνουμε την ζητούμενη:

$$16(xyz+yzw+zwx+wxy)^4\le\left[(x+w)(w+y)(y+z)(z+x)\right]^3$$

Ασκήσεις για λύση

1. Να προσδιορίσετε τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x,y) που ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις:
$x+y+\sqrt{xy}=19$, $x^2+y^2+xy=133$ (Crux Mathematicorum, 1999)

2. Να προσδιορίσετε τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) που ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις: $x^4-3z^3-27y+81=0$, $y^4-3x^3-27z+81=0$, $z^4-3y^3-27x+81=0$

3. Αν για τους μη μηδενικούς και διαφορετικούς ανά δύο πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει $|\alpha+\beta|=|\gamma|$ με $\alpha+\beta\neq\gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{1}{2\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{1}{2\gamma^2+\alpha\beta}=0$$

4. Αν x,y,z είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x+y+z=1$, να αποδείξετε ότι:

$$xy+yz+zx-xyz\le\frac{8}{27}$$

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Δημήτρης Ντρίζος, *Μαθηματικές Διαγωνιστικές Διαδρομές – Θέματα για μια Εισαγωγή στα Διαγωνιστικά Μαθηματικά*, Εκδόσεις Ζανταρίδης – Τηλέγραφος, 2025.

[2] Θανάσης Ντρίζος, *Θέματα Άλγεβρας Α΄ & Β΄ Λυκείου* (αδημοσίευτες σημειώσεις).

[3] Περιοδικό *Crux Mathematicorum*, Published by the Canadian Mathematical Society.

[4] Περιοδικό *Quantum*, Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[5] The Mathematical Grammar School Cup.



Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

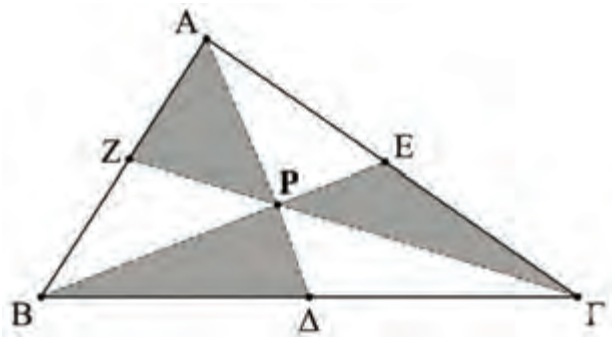
Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 461 (ΤΕΥΧΟΣ 139)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στο εσωτερικό του. Οι ευθείες ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν τα τρίγωνα ΑΡΖ, ΒΡΔ και ΓΡΕ έχουν ίσα εμβαδά, να αποδείξετε ότι το Ρ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου.

Καρτσακλής Δημήτριος - Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Χασάπης Γιώργος – Ρόδος)



Αν θέσουμε $S=(ABΓ)$ και

$$u=\frac{(PBΓ)}{S}, v=\frac{(PΓA)}{S}, w=\frac{(PAB)}{S}$$

τότε έχουμε: $u+v+w=1.$

Οι προεκτάσεις των AP, BP και $ΓP$ τέμνουν τις πλευρές $BΓ, ΓA$ και AB στα σημεία $Δ, E$ και Z αντίστοιχα. Ισχύει: $\frac{w}{v}=\frac{(PAB)}{(PΓA)}=\frac{BΔ}{ΔΓ}$ και με παρόμοιο τρόπο $\frac{u}{w}=\frac{ΓE}{EA}$ και $\frac{v}{u}=\frac{AZ}{ZB}$.

Τα τρίγωνα ΡΒΓ και ΑΒΓ έχουν την ΒΓ κοινή.

Συνεπώς $\frac{(PBΓ)}{S}=\frac{υ_P}{υ_A}$.

Από την ομοιότητα τριγώνων ο λόγος $\frac{υ_P}{υ_A}$ ισούται με $\frac{PΔ}{AΔ}$. Έτσι: $\frac{PΔ}{AΔ}=\frac{(PBΓ)}{S}=u.$ Ομοίως

$$\frac{PE}{BE}=v \text{ και } \frac{PZ}{ΓZ}=w.$$

Τώρα θα εκφράσουμε το εμβαδόν του τριγώνου APZ ως συνάρτηση του S. Είναι:

$$(APZ)=(APB)\cdot\frac{AZ}{AB}=(APB)\cdot\frac{AZ}{AZ+ZB}=wS\cdot\frac{\frac{v}{u}}{\frac{v}{u}+1}=\frac{Swv}{v+u}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(BPΔ)=\frac{Suw}{v+w} \text{ και } (ΓPE)=\frac{Suv}{u+w}.$$

Από την ισότητα $(APZ)=(BPΔ)=(ΓPE)$ προκύπτει ότι $\frac{wv}{v+u}=\frac{uw}{v+w}=\frac{uv}{u+w}$.

Έτσι, για τους θετικούς αριθμούς u, v, w έχουμε:

$$\frac{wv}{v+u}=\frac{uw}{v+w}=\frac{uv}{u+w} \text{ και } u+v+w=1.$$

Από την $\frac{wv}{v+u}=\frac{uw}{v+w}$ έχουμε

$$\frac{v}{v+u}=\frac{u}{v+w}\Rightarrow v^2+vw-vu-u^2=0$$

$$\Rightarrow v^2-u^2+v(1-u-v)-vu=0\Rightarrow v=\frac{u^2}{1-2u}.$$

Από την $\frac{wv}{v+u}=\frac{uv}{u+w}$ έχουμε

$$\frac{w}{v+u}=\frac{u}{u+w}\Rightarrow w^2+uw-uv-u^2=0$$

$$\Rightarrow(1-u-v)^2+u(1-u-v)-uv-u^2=0\Rightarrow u^2+u=(v-1)^2$$

$$\Rightarrow u^2+u=\left(\frac{u^2}{1-2u}-1\right)^2$$

Μετά από πράξεις και αφού παρατηρήσουμε (με το θεώρημα των ρητών ριζών) ότι το $\frac{1}{3}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης που προκύπτει καταλήγουμε στην

$$(3u-1)(u^3-u^2-2u+1)=0.$$

Το πολυώνυμο u^3-u^2-2u+1 έχει δύο αρνητικές ρίζες και μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Αλλά $0<u<1$, άρα $u=\frac{1}{3}$. Είναι:

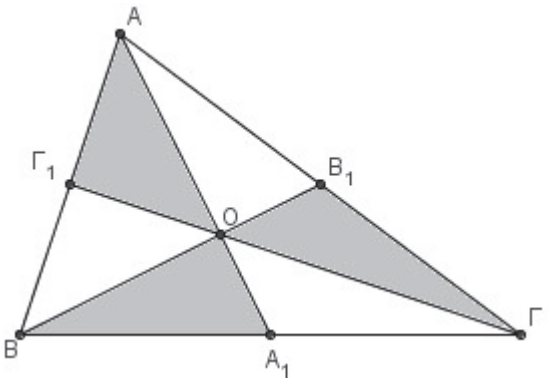
$$v=\frac{u^2}{1-2u}=\frac{3^{-2}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{3},\ \text{οπότε}$$

$$w=1-u-v=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Επομένως $u=v=w=\frac{1}{3}$ και συνεπώς το Ρ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

2η Λύση (συνοπτική παρουσίαση)

(Τασσόπουλος Γεώργιος – Αθήνα)



Ονομάζουμε Ε το καθένα από τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά και

$$(OB\Gamma_1)=E_1,\ (O\Gamma A_1)=E_2,\ (OAB_1)=E_3$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{OA}{OA_1}=\frac{O\Gamma}{O\Gamma_1}=2$, διότι απ' αυτή προκύπτει $A_1\Gamma_1\,//\,A\Gamma$ και $A_1\Gamma_1=\frac{A\Gamma}{2}$ οπότε τελικά τα A_1, Γ_1 είναι μέσα των πλευρών.

Θέτουμε

$$\frac{E_1}{E}=x,\ \frac{E_2}{E}=y,\ \frac{E_3}{E}=z$$

και από το Θ. Μενελάου στο AA_1B με τέμνουσα την $\Gamma\Gamma_1$ έχουμε:

$$\frac{OA}{OA_1}\cdot\frac{\Gamma A_1}{\Gamma B}\cdot\frac{\Gamma_1 B}{\Gamma_1 A}=1\Rightarrow\frac{E+E_1}{E}\cdot\frac{E_2}{E_2+E}\cdot\frac{E_1}{E}=1$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x^2+x-1=\frac{1}{y}$, **(α)**

Ομοίως από τα τρίγωνα $BB_1\Gamma$, $\Gamma\Gamma_1A$ με τέμνουσες AA_1, BB_1 αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι

$$y^2+y-1=\frac{1}{z},\ \textbf{(β)}\ \text{και}\ z^2+z-1=\frac{1}{x},\ \textbf{(γ)}$$

Από τις (α), (β), (γ) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}xy(x+1)=y+1 & (1)\\ yz(y+1)=z+1 & (2)\\ zx(z+1)=x+1 & (3)\end{cases}$$

Με πολλαπλασιασμό τους κατά μέλη βρίσκουμε ότι $xyz=1\Rightarrow z=\frac{1}{xy}$ και με αντικατάσταση στην (3) καταλήγουμε στην $1+y=x^2y^2+xy^2$

Η (1) δίνει $1+y=x^2y+xy$ οπότε εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη καταλήγουμε στην $y=1$. Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι $x=z=1$ οπότε $E_1=E_2=E_3=E$ απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{O\Gamma}{O\Gamma_1}=2$$

Ο ίδιος ο συνάδελφος διατυπώνει την επόμενη

Παρατήρηση

Η αντικατάσταση $z=\frac{1}{xy}$ στην (3) δίνει την $\frac{1}{y}\left(\frac{1}{xy}+1\right)=x+1$ στην οποία αν αντικαταστήσουμε $\frac{1}{y}=x^2+x-1$ βρίσκουμε

$$(x-1)(x^3+4x^2+3x-1)=0$$

Αφήνουμε ως ανοικτό πρόβλημα την επίλυση της εξίσωσης $x^3+4x^2+3x-1=0$, ή την απόδειξη του αδυνάτου της στο $(0,+\infty)$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός.

ΑΣΚΗΣΗ 462 (ΤΕΥΧΟΣ 139)

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+1}}}}=x^{15}$$

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

- Αν $x\geq 1$, τότε το δεξιό μέλος της εξίσωση είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1, ενώ το αριστερό είναι μικρότερο της μονάδας. Επομένως αν η εξίσωση έχει ρίζα, τότε αυτή θα είναι μικρότερη της μονάδας.

- Αν $x \le 0$ τότε το δεξιό μέλος της εξίσωσης θα είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός, ενώ το αριστερό μέλος αυτής θα είναι θετικό λόγω του ότι

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^2+1}}} > |x| = -x$$

Συνεπώς οποιαδήποτε ρίζα της εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

Έστω $x \in (0, 1)$. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με x, οπότε ισοδύναμα λαμβάνουμε την $\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+1}}}} = x^{16}$

Διαιρούμε με x τους όρους του κλάσματος οπότε έχουμε την

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^8}}}}} = x^{16} \Leftrightarrow 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^8}}}} = \frac{1}{x^{16}}$$

Θέτουμε $\dfrac{1}{x^{16}} = t > 0$ και λαμβάνουμε την εξίσωση $1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{t}}} = t, (1)$.

Θεωρούμε τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(t) = 1+\sqrt{t}$, $t > 0$, οπότε η (1) γράφεται

$$f(f(f(f(t)))) = t$$

και όπως εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο, αυτή είναι ισοδύναμη με την $f(t) = t$ δηλαδή $t-\sqrt{t}-1 = 0$ που έχει μοναδική θετική ρίζα την $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Συνεπώς

$$\frac{1}{x^8} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x^8 = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Άρα $x = \sqrt[8]{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και Χατζηελανίδης Πέτρος. (Από παραδρομή στο προηγούμενο τεύχος ο συνάδελφος Χατζηελανίδης δεν αναφέρθηκε και ως λύτης της άσκησης **459**).

ΑΣΚΗΣΗ 463 (ΤΕΥΧΟΣ 139)

Έστω (O_1, R_1), (O_2, R_2) με $R_1 > R_2$ δυο τεμνόμενοι κύκλοι και θ η γωνία τους. Να αποδείξετε ότι το κοινό μέρος των δυο κύκλων έχει εμβαδόν

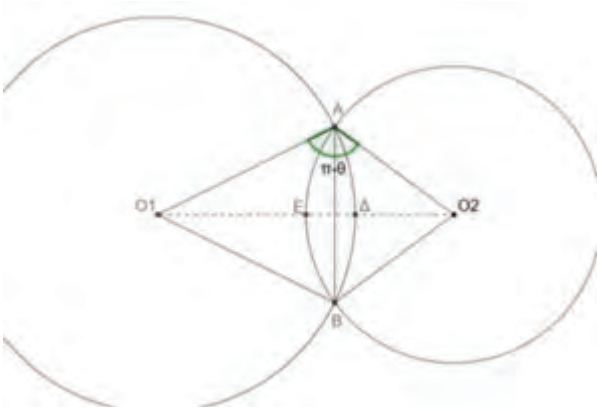
$$E = (R_1^2 - R_2^2)\text{τοξεφ}\frac{R_2\eta\mu\theta}{R_1+R_2\sigma\upsilon\nu\theta} + \theta R_2^2 - R_1R_2\eta\mu\theta$$

Υπενθυμίζουμε ότι ως γωνία μεταξύ δύο τεμνόμενων κύκλων ορίζεται η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των κύκλων σε οποιοδήποτε από τα δύο κοινά σημεία τομής τους.

Τσιώλης Γεώργιος- Τρίπολη

ΛΥΣΗ

(Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο)



Έστω Α, Β τα σημεία τομής των δύο κύκλων και έστω ότι η διάκεντρος O_1O_2 τέμνει τα τόξα του κοινού μέρους των (O_1, R_1), (O_2, R_2) στα Δ και Ε αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Ισχύουν:

$$OA_1 = R_1, \quad OA_2 = R_2, \quad O_1\hat{A}O_2 = \pi - \theta$$

διότι, σύμφωνα με τον ορισμό της θ, οι πλευρές της είναι κάθετες προς τις αντίστοιχες της $O_1\hat{A}O_2$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα συνημιτόνου το τρίγωνο AO_1O_2 ως προς τη γωνία $O_1\hat{A}O_2$ και με τα βοήθεια των παραπάνω ισοτήτων έχουμε:

$$O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2 - 2O_1A\cdot O_2A\sigma\upsilon\nu O_1\hat{A}O_2$$

$$\Rightarrow O_1O_2^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\sigma\upsilon\nu\theta$$

Εφαρμόζοντας στο ίδιο τρίγωνο το θεώρημα για τη γωνία $A\hat{O}_1O_2$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A\hat{O}_1O_2 = \frac{O_1O_2^2 + R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2R_1} = \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\sigma\upsilon\nu\theta + R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2R_1}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu A\hat{O}_1O_2 = \frac{R_1 + R_2\sigma\upsilon\nu\theta}{O_1O_2}, \ (1)$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο AO_1O_2 έχουμε:

$$\frac{\eta\mu O_1\hat{A}O_2}{O_1O_2}=\frac{\eta\mu A\hat{O}_1O_2}{AO_2}\Rightarrow\frac{\eta\mu\theta}{O_1O_2}=\frac{\eta\mu A\hat{O}_1O_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \eta\mu A\hat{O}_1O_2=\frac{R_2\eta\mu\theta}{O_1O_2},\ (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi A\hat{O}_1O_2=\frac{R_2\eta\mu\theta}{R_1+R_2\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow A\hat{O}_1O_2=\tau\circ\xi\varepsilon\varphi\frac{R_2\eta\mu\theta}{R_1+R_2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

και

$$A\hat{O}_2O_1=\pi-O_1\hat{A}O_2-A\hat{O}_1O_2,$$

οπότε

$$A\hat{O}_2O_1=\theta-\tau\circ\xi\varepsilon\varphi\frac{R_2\eta\mu\theta}{R_1+R_2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Από το σχήμα προκύπτει

$$(AEB\Delta A)=(AO_1B\Delta A)+(AO_2BEA)-2(AO_1O_2),\ (3)$$

Είναι:

$$(AO_1B\Delta A)=R_1^2\cdot A\hat{O}_1O_2=R_1^2\cdot\tau\circ\xi\varepsilon\varphi\frac{R_2\eta\mu\theta}{R_1+R_2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$(AO_2BEA)=R_2^2\cdot A\hat{O}_2O_1=R_2^2\theta-R_2^2\cdot\tau\circ\xi\varepsilon\varphi\frac{R_2\eta\mu\theta}{R_1+R_2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$2(AO_1O_2)=O_1A\cdot O_2A\eta\mu O_1\hat{A}O_2=R_1R_2\eta\mu\theta$$

Αντικαθιστώντας τις τρείς τελευταίες ισότητες στην (3) προκύπτει το ζητούμενο:

$$E=(R_1^2-R_2^2)\tau\circ\xi\varepsilon\varphi\frac{R_2\eta\mu\theta}{R_1+R_2\sigma\upsilon\nu\theta}+\theta R_2^2-R_1R_2\eta\mu\theta$$

όπου $E=(AEB\Delta A)$.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός.

ΑΣΚΗΣΗ 464 (ΤΕΥΧΟΣ 139)

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ με:

$$\alpha_1=2\ \text{και}\ \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu^2-\alpha_\nu+1$$

Να αποδείξετε ότι ανά δυο οι όροι της είναι σχετικά πρώτοι.

Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

Είναι:

$$\alpha_{\nu+1}-1=\alpha_\nu(\alpha_\nu-1)=\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}(\alpha_{\nu-1}-1)$$

$$=\ldots=\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}\ldots\alpha_1(\alpha_1-1)=\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}\ldots\alpha_1$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι δυο τυχαίοι όροι α_κ, α_λ της ακολουθίας με $\kappa>\lambda$ έχουν κοινό διαιρέτη δ, τότε έχουμε:

$$\delta\,|\,\alpha_\kappa\ \text{και}\ \delta\,|\,\alpha_\lambda$$

οπότε

$$\delta\,|\,\alpha_\kappa-\alpha_\lambda\Rightarrow\delta\,|\,\alpha_{\kappa-1}\ldots\alpha_\lambda\ldots\alpha_2\alpha_1+1-\alpha_\lambda$$

$$\Rightarrow\delta\,|\,\alpha_\lambda(\alpha_{\kappa-1}\ldots\alpha_{\lambda+1}\alpha_{\lambda-1}\ldots\alpha_2\alpha_1-1)+1$$

με τον αριθμό δ να είναι προφανώς διαιρέτης του γινομένου

$$\alpha_\lambda(\alpha_{\kappa-1}\ldots\alpha_{\lambda+1}\alpha_{\lambda-1}\ldots\alpha_2\alpha_1-1).$$

Έτσι, αναγκαστικά ο αριθμός δ θα είναι διαιρέτης της μονάδας οπότε $\delta=1$ και οι όροι α_κ, α_λ είναι σχετικά πρώτοι.

Λύση έστειλαν επίσης οι Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο, Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα και Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός .

Προτεινόμενα Θέματα

469. Αν $\alpha\in[0,1)$ και $\nu\in\mathbb{N}$, να αποδείξετε, χωρίς την χρήση παραγώγων, ότι

$$\frac{\alpha^{2\nu+3}-1}{\alpha^{2\nu+1}-1}>\frac{2\nu+3}{2\nu+1}$$

Τασσόπουλος Γεώργιος – Αθήνα

470. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Ι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου. Οι ΑΙ, ΒΙ, ΓΙ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{AB}{A_1B_1^2}+\frac{A\Gamma}{\Gamma_1A_1^2}+\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1^2}\le\frac{R\sqrt{3}}{\rho^2}$$

Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο.

471. Να λύσετε το σύστημα

$$2x=z+\frac{2}{z},\ 2y=x+\frac{2}{x},\ 2z=y+\frac{2}{y}$$

Σταματιάδης Ευάγγελος – Νέα Ιωνία.

472. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^{10}-3x^6-x^4+6x^2-3=0$$

Χρήστος Τσόλκας - Αγρίνιο

(Επίσης λάβαμε: Από τον Χρήστο Α. Τσόλκα εργασία για τη «Η Γενικευμένη Γεωμετρία, (Βασικές έννοιες- Ορισμοί – Θεωρήματα – Παραδείγματα) με πολλές αναφορές στην Γεωμετρία των Ευκλείδειων χώρων και μη Ευκλείδειων χώρων (παραλληλίες)**)**

Το βήμα του Ευκλείδη

"Ανεξίσωση„

Η "άλλη πλευρά„ μιας εξίσωσης

Χρήστος Κουστέρης, Σπύρος Φερεντίνος

Στα Μαθηματικά (και όχι μόνο) πολλές φορές δεν μας ενδιαφέρει ποιες τιμές μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, αλλά και ποιες τιμές αποκλείονται στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης σχέσης.

Για παράδειγμα, για να δηλώσουμε ότι μια πραγματική μεταβλητή x δεν επιτρέπεται, στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης άσκησης, να πάρει την τιμή 1,

$$\text{γράφουμε } x \neq 1 \text{ και διαβάζουμε « } x \text{ διάφορο του } 1 \text{ ».}$$

*Το σύμβολο ≠ είναι γνωστό σε όλους. Το συναντάμε κυρίως στους περιορισμούς μιας ρητής παράστασης, στα πεδία ορισμού συναρτήσεων όπου η μεταβλητή βρίσκεται στον παρονομαστή και στον ορισμό της **1-1** συνάρτησης. Ενώ μελετάμε συστηματικά τις εξισώσεις και τις ανισώσεις, τη σχέση $A(x) \neq B(x)$ συνήθως την αντιμετωπίζουμε μόνο περιστασιακά. Μήπως αξίζει να της δώσουμε όνομα και να τη μελετήσουμε ως ξεχωριστή μορφή;*

Από το «είναι» στο «δεν είναι»

Στα Μαθηματικά συναντάμε συχνά δύο συμπληρωματικές έννοιες.
Δύο υποσύνολα Α, Β ενός συνόλου αναφοράς Ω είναι συμπληρωματικά όταν

$$A \cup B = \Omega \text{ και } A \cap B = \varnothing$$

- Όταν συμβαίνει το ένα τότε δεν συμβαίνει το άλλο.
- Αποκλείεται να μη συμβεί κάποιο από τα δύο.
- Αποκλείεται να συμβούν και τα δύο.

(α) Γνωρίζουμε ότι ένα στοιχείο είτε ανήκει σε ένα σύνολο είτε δεν ανήκει.

(β) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός είναι είτε ρητός είτε άρρητος. Δεν υπάρχει τρίτη επιλογή.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το $\sqrt{2}$ δεν ανήκει στους ρητούς, δεν χρειάζεται να εισάγουμε ένα τελείως νέο σύμβολο. Παίρνουμε το $\in$ και το διαγράφουμε με μια γραμμή και γράφουμε $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Το ίδιο συμβαίνει με την ισότητα.
Η γραφή $\alpha \neq \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αποτελεί άρνηση της πρότασης $\alpha = \beta$. Στους πραγματικούς αριθμούς, χάρη στην τριχοτομία, έχουμε:

$$\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ ή } \alpha > \beta$$

Επομένως το ≠ μάς πληροφορεί ότι τα δύο μέλη δεν είναι ίσα, χωρίς όμως να μας λέει ποιο είναι μεγαλύτερο. Γι' αυτό δεν πρέπει να το ταυτίζουμε με μια συγκεκριμένη ανίσωση.

Ποιες ιδιότητες έχει το ≠;

Εδώ βρίσκεται ένα ενδιαφέρον διδακτικό σημείο. Μερικές ιδιότητες της ισότητας μεταφέρονται στη μη ισότητα, ενώ άλλες όχι.

Ιδιότητες που ισχύουν

1. Η σχέση $\alpha \neq \beta$ είναι συμμετρική, δηλαδή
$$\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \beta \neq \alpha$$
2. Αν $\alpha \neq \beta$, τότε μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον ίδιο πραγματικό αριθμό γ, δηλαδή $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \neq \beta + \gamma$
3. Αν $\alpha \neq \beta$, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό γ, δηλαδή
$$\alpha \neq \beta \text{ και } \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma \neq \beta \cdot \gamma$$
Η προϋπόθεση $\gamma \neq 0$ είναι απαραίτητη.
Αν $\gamma = 0$, τότε και τα δύο γινόμενα γίνονται μηδέν.
4. Ισχύει $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha^{2\nu+1} \neq \beta^{2\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή μπορούμε να υψώσουμε και τα δύο μέλη στον ίδιο περιττό εκθέτη.

5. $|\alpha| \neq |\beta| \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$ και $\alpha \neq -\beta$

6. $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} \neq \sqrt{\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$

7. $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu \neq 0 \Leftrightarrow$
$\alpha_1 \neq 0$ και $\alpha_2 \neq 0$ και ... και $\alpha_\nu \neq 0$

Ιδιότητες που δεν ισχύουν

1) Η σχέση ≠ δεν είναι μεταβατική.

Από $\alpha \neq \beta$ και $\beta \neq \gamma$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\alpha \neq \gamma$.
Πράγματι: $1 \neq 2$ και $2 \neq 1$, αλλά $1 = 1$

2) Δεν προσθέτουμε γενικά κατά μέλη δύο μη ισότητες.
Για παράδειγμα:
$3 \neq 5$ και $4 \neq 2$ αλλά $3 + 4 = 5 + 2$

3) Δεν πολλαπλασιάζουμε γενικά κατά μέλη δύο μη ισότητες.
Για παράδειγμα:
$-2 \neq 6$ και $-9 \neq 3$, αλλά $(-2)(-9) = 6 \cdot 3$

4) Δεν μπορούμε να υψώσουμε σε άρτια δύναμη δύο ποσότητες διαφορετικές

Δηλαδή αν $\alpha \neq \beta$ δεν προκύπτει πάντοτε ότι $\alpha^{2\nu} \neq \beta^{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$

Για παράδειγμα: $-3 \neq 3$ όμως $(-3)^2 = 3^2$.

Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες άρτιες δυνάμεις.

5) Από $\alpha \neq \beta$ δεν ισχύει πάντοτε $|\alpha| \neq |\beta|$

Δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί δεν έχουν πάντα διαφορετικές απόλυτες τιμές
Για παράδειγμα: $-5 \neq 5$ ενώ $|-5| = |5|$

Τα αντιπαραδείγματα αυτά είναι χρήσιμα, επειδή θυμίζουν ότι ένα σύμβολο δεν κληρονομεί αυτομάτως όλες τις ιδιότητες ενός άλλου.

Μια πρόταση ονομασίας

Ορισμός

Έστω δύο παραστάσεις $A(x), B(x)$ οι οποίες ορίζονται σε ένα κοινό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}$.

Κάθε σχέση της μορφής $: A(x) \neq B(x), \ x \in D$ προτείνεται να ονομάζεται **ανεξίσωση ως προς τη μεταβλητή x.**

Η λέξη επιλέγεται ώστε να δηλώνει φυσικά την άρνηση μιας εξίσωσης.

Σε ξενόγλωσσες πηγές συναντώνται όροι όπως disequation και, με διαφορετικές σημασιολογικές αποχρώσεις, inequation. Η παρούσα πρόταση αφορά τη συστηματική διδακτική αξιοποίηση του ελληνικού όρου «ανεξίσωση».

Πώς λύνεται μια ανεξίσωση;

Μια ανεξίσωση λύνεται απευθείας, με τρόπο **ανάλογο** με εκείνον μιας εξίσωσης. Εφαρμόζουμε διαδοχικά ισοδύναμους μετασχηματισμούς, με σκοπό να απομονώσουμε τη μεταβλητή.
Η διαφορά βρίσκεται στο τελικό αποτέλεσμα: αντί να προσδιορίζουμε τις τιμές που επαληθεύουν μια ισότητα, προσδιορίζουμε τις τιμές για τις οποίες τα δύο μέλη είναι διαφορετικά.
Κατά την επίλυση μπορούμε:

- Να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε την ίδια παράσταση και από τα δύο μέλη.
- Να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με την ίδια ποσότητα, εφόσον έχει εξασφαλιστεί ότι αυτή είναι διαφορετική από το μηδέν για όλες τις τιμές που εξετάζουμε .
- Να εκτελέσουμε πράξεις και να κάνουμε τις απαραίτητες απλοποιήσεις.
- Να υψώσουμε και τα δύο μέλη σε περιττό εκθέτη.

Σε κάθε περίπτωση πρέπει πρώτα να προσδιορίζουμε το κοινό πεδίο ορισμού των δύο μελών.

Παραδείγματα

1. Γραμμική ανεξίσωση

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $3(x+1) - 2x \neq 4 - 5(1-2x)$

Απάντηση

$$3(x+1) - 2x \neq 4 - 5(1-2x)$$
$$\Leftrightarrow 3x + 3 - 2x \neq 4 - 5 + 10x$$
$$\Leftrightarrow 3x - 2x - 10x \neq 4 - 5 - 3$$
$$\Leftrightarrow -9x \neq -4 \Leftrightarrow x \neq \frac{4}{9}$$

Άρα η ανεξίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από το $\frac{4}{9}$, δηλαδή $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{9}\right\}$

2. Κλασματική ανεξίσωση

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\frac{2x+1}{x+1} \neq 3$

Απάντηση

Πρέπει και αρκεί $x+1\neq 0$ δηλαδή $\boxed{x\neq -1}$

$\frac{2x+1}{x+1}\neq 3\Leftrightarrow (x+1)\frac{2x+1}{x+1}\neq 3(x+1)\Leftrightarrow$

$2x+1\neq 3x+3\Leftrightarrow \boxed{x\neq -2}$

Λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό και το αποτέλεσμα η ανεξίσωση ισχύει για κάθε $x\in R-\{-1,-2\}$

Γενικά αν $A(x),B(x),\Gamma(x)$ και $\Delta(x)$ είναι παραστάσεις με μεταβλητή το x ισχύει

$\frac{A(x)}{B(x)}\neq\frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)}\Leftrightarrow A(x)\cdot\Delta(x)\neq B(x)\cdot\Gamma(x)$ με την προϋπόθεση $B(x)\neq 0$ και $\Delta(x)\neq 0$

3. Πολυωνυμική ανεξίσωση δευτέρου βαθμού

Για να λύσουμε την ανεξίσωση

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma\neq 0,\alpha\neq 0,$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- αν $\Delta>0$, τότε $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ άρα

  $\alpha x^2+\beta x+\gamma\neq 0,\alpha\neq 0\ \Leftrightarrow x\in R-\{x_1,x_2\}$

- αν $\Delta=0$, τότε $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$ δηλαδή

  $\alpha x^2+\beta x+\gamma\neq 0,\alpha\neq 0\Leftrightarrow x\in R-\left\{-\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$

- αν $\Delta<0$, τότε η ανεξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma\neq 0,\alpha\neq 0$ ισχύει για κάθε $x\in R$

4. Η ανεξίσωση $x^\nu\neq\alpha$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $\alpha\in R$

- Αν ν άρτιος και $\alpha>0$ τότε $x^\nu\neq\alpha\Leftrightarrow x\neq\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $x\neq-\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Αν ν άρτιος και $\alpha<0$ τότε $x^\nu\neq\alpha\Leftrightarrow x\in R$
- Αν ν περιττός και $\alpha>0$ τότε $x^\nu\neq\alpha\Leftrightarrow x\neq\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Αν ν περιττός και $\alpha<0$ τότε $x^\nu\neq\alpha\Leftrightarrow x\neq-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$
- Αν ν άρτιος ή περιττός και $\alpha=0$ τότε $x^\nu\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$

5. Ανεξισώσεις με απόλυτα

Παράδειγμα

Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ ισχύει $|x-1|\neq 3$

Απάντηση

$|x-1|\neq 3\Leftrightarrow x-1\neq 3$ και $x-1\neq -3\Leftrightarrow$ $x\neq 4$ και $x\neq 2$. Άρα $x\in R-\{4,-2\}$

Παράδειγμα

Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ ισχύει $2|x|+8\neq 0$

Απάντηση

$2|x|+8\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq -4$, το οποίο ισχύει για κάθε $x\in R$ αφού $|x|\geq 0$ για κάθε $x\in R$

6. Τριγωνομετρικές ανεξισώσεις

(α) Η ανεξίσωση $\eta\mu x\neq\alpha$, $x\in R$ και $\alpha\in R$

- Αν $\alpha<-1$ ή $\alpha>1$ η ανεξίσωση ισχύει για κάθε $x\in R$ αφού $-1\leq\eta\mu x\leq 1$
- Αν $\alpha\in[-1,1]$ υπάρχει $\theta\in R$ τέτοιος ώστε $\eta\mu\theta=\alpha$ οπότε:

  $\eta\mu x\neq\alpha\Leftrightarrow\eta\mu x\neq\eta\mu\theta\Leftrightarrow$

  $x\neq\kappa\cdot 2\pi+\theta$ και $x\neq\kappa\cdot 2\pi+(\pi-\theta)$, $\kappa\in Z$

(β) Η ανεξίσωση $\sigma\upsilon\nu x\neq\alpha$, $x\in R$ και $\alpha\in R$

- Αν $\alpha<-1$ ή $\alpha>1$ η ανεξίσωση ισχύει για κάθε $x\in R$ αφού $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$
- Αν $\alpha\in[-1,1]$ υπάρχει $\theta\in R$ τέτοιος ώστε $\sigma\upsilon\nu\theta=\alpha$ οπότε :

  $\sigma\upsilon\nu x\neq\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$

  $x\neq\kappa\cdot 2\pi+\theta$ και $x\neq\kappa\cdot 2\pi+(-\theta)$, $\kappa\in Z$

7. Ορισμός της 1-1 συνάρτησης

Μια συνάρτηση $f:A\to B$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$ τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$

Ο ορισμός της συνάρτησης 1–1 αποτελεί χαρακτηριστική χρήση μιας ανεξίσωσης.

Διαφορετικές τιμές της μεταβλητής πρέπει να έχουν διαφορετικές εικόνες

7.1 Εκθετική ανεξίσωση

Ισχύει $x_1\neq x_2\Leftrightarrow e^{x_1}\neq e^{x_2}$ για κάθε $x_1,x_2\in R$ αφού η συνάρτηση e^x είναι 1-1

Παραδείγματα

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{2x+1}{e^x-1}$

Απάντηση

Για κάθε $x\in R$,

$e^x-1\neq 0\Leftrightarrow e^x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\ln 1\Leftrightarrow x\neq 0$, επομένως $D_f=R^*$

(β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x}{4e^x+1}$$

Απάντηση

Για κάθε $x\in R$ $4e^x+1\neq 0 \overset{x\in R}{\Leftrightarrow} 4e^x\neq -1\Leftrightarrow e^x\neq -\frac{1}{4}$,

το οποίο ισχύει για κάθε $x\in R$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in R$. Επομένως $D_f=R$

7.2 Λογαριθμική ανεξίσωση

Ισχύει $x_1\neq x_2\Leftrightarrow \ln x_1\neq \ln x_2$ για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ αφού η συνάρτηση $\ln x$ είναι 1-1

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{\ln x-1}$$

Απάντηση

Αρχικά πρέπει $x>0$ και επιπλέον ισχύει:

$$\ln x\neq 1\Leftrightarrow \ln x\neq \ln e\Leftrightarrow x\neq e$$

Επομένως: $D_f=(0,e)\cup(e,+\infty)$.

7.3 Ισχύει $x_1\neq x_2\Leftrightarrow \sqrt{x_1}\neq\sqrt{x_2}$ για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ αφού η $\sqrt{x}$ είναι 1-1

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

Απάντηση

Αρχικά πρέπει $x\geq 0$ και επιπλέον ισχύει:

$$\sqrt{x}-2\neq 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\neq 2\Leftrightarrow x\neq 4$$

Επομένως: $x\in[0,4)\cup(4,+\infty)$

Μπορεί μια ανεξίσωση να είναι αδύνατη;

Ναι. Για παράδειγμα η ανεξίσωση $x^2+1\neq x^2+1$ δεν έχει καμία πραγματική λύση, επειδή τα δύο μέλη είναι ίσα για κάθε $x\in R$

Μπορεί μια ανεξίσωση να ισχύει ταυτοτικά;

Ναι. Για παράδειγμα η ανεξίσωση $3(x+2)\neq 3x+5$ είναι ταυτότητα, επειδή τα δύο μέλη είναι διαφορετικά για κάθε $x\in R$

Γενικότερα:

Μια ανεξίσωση είναι αδύνατη όταν η αντίστοιχη εξίσωση είναι ταυτότητα στο πεδίο ορισμού. Αντίστροφα, όταν η αντίστοιχη εξίσωση είναι αδύνατη, η ανεξίσωση ισχύει για κάθε αριθμό του πεδίου ορισμού.

Ποια είναι η σχέση μεταξύ

Εξίσωσης και ανεξίσωσης;

Μια ανεξίσωση επιλύεται με τους ίδιους ισοδύναμους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μιας εξίσωσης. Η λύση της αποτελεί το συμπλήρωμα, μέσα στο κοινό πεδίο ορισμού, του συνόλου λύσεων της αντίστοιχης εξίσωσης.

Ισχύει η παρακάτω αρχή :

Αρχή του συμπληρώματος.

Οι λύσεις της ανεξίσωσης $A(x)\neq B(x)$ είναι οι επιτρεπτές τιμές του x εκτός από τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης $A(x)=B(x)$. Η αρχή αυτή περιγράφει τη σχέση των δύο συνόλων λύσεων· δεν αποτελεί αναγκαίο τρόπο επίλυσης της ανεξίσωσης, η οποία **μπορεί να επιλυθεί απευθείας**.

Τελικά, χρειαζόμαστε τον όρο;

Η ανεξίσωση δεν απαιτεί άγνωστες αλγεβρικές τεχνικές· οργανώνει, όμως, τις ήδη γνωστές τεχνικές σε μια αυτοτελή διαδικασία επίλυσης σχέσεων με σύμβολο $\neq$.

Έτσι, ο μαθητής δεν περιορίζεται στο να αναγνωρίζει περιστασιακά μια απαγορευμένη τιμή, αλλά μαθαίνει να επιλύει συστηματικά μια νέα κατηγορία μαθηματικών σχέσεων.

Όπως μια εξίσωση ή μια ανίσωση, έτσι και μια ανεξίσωση μπορεί να έχει καμία, μία, πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος λύσεων και να επιλύεται με κατάλληλους ισοδύναμους μετασχηματισμούς.

Το σημαντικότερο ίσως είναι ότι αναδεικνύει την άλλη πλευρά μιας εξίσωσης. Η εξίσωση αναζητά τις τιμές που εξισώνουν δύο παραστάσεις. Η ανεξίσωση κρατά όλες τις υπόλοιπες επιτρεπτές τιμές.

Αξίζει, λοιπόν, η σχέση $A(x)\neq B(x)$ να αποκτήσει ξεχωριστό όνομα στην ελληνική σχολική μαθηματική γλώσσα; Η πρόταση κατατίθεται ως αφορμή για συζήτηση.

Η παρούσα εργασία δεν προτείνει την εισαγωγή μιας νέας μαθηματικής έννοιας.

Η σχέση $A(x)\neq B(x)$, οι ιδιότητές της και η σύνδεσή της με την αντίστοιχη εξίσωση είναι ήδη γνωστές. Προτείνεται, όμως, η συστηματική διδακτική εισαγωγή του όρου «ανεξίσωση», ώστε οι διαφορετικές εμφανίσεις της σχέσης μη ισότητας στη σχολική Άλγεβρα να αποκτήσουν κοινή ονομασία και να οργανωθούν σε ενιαίο πλαίσιο αναγνώρισης, μετασχηματισμού και επίλυσης.

Το άθροισμα του ελαχίστου και το ελάχιστο του αθροίσματος

Διονύσης Γιάνναρος

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε μια γενική μέθοδο, με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να αποδείξουμε πολλές γνωστές ανισότητες. Η συγκεκριμένη μέθοδος στηρίζεται στην επόμενη απλή

Πρόταση

Αν δυο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], τότε ισχύει:

$$\min f(x)+\min g(x)\le \min\big(f(x)+g(x)\big)$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα [α, β], τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Επειδή η $f+g$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] θα παίρνει μια ελάχιστη τιμή στο $x_o\in[\alpha,\beta]$

Αν τώρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1\in[\alpha,\beta]$ και η g στο $x_2\in[\alpha,\beta]$ τότε ισχύουν:

$$f(x_1)\le f(x_o) \text{ και } g(x_2)\le g(x_o)$$

οπότε: $f(x_1)+g(x_2)\le f(x_o)+g(x_o)$ ή

$$\min f(x)+\min g(x)\le \min\big(f(x)+g(x)\big)$$

δηλαδή το άθροισμα των ελαχίστων των συναρτήσεων f και g είναι μικρότερο ή ίσο από το ελάχιστο του αθροίσματος τους.

Η παραπάνω πρόταση εύκολα γενικεύεται δηλ. αν $\nu\ge 2$, $\nu\in\mathbb{N}$ το πλήθος συνεχείς στο [α, β] συναρτήσεις $f_1, f_2, ..., f_\nu$ τότε ισχύει:

$$\min f_1(x)+\min f_2(x)+...\min f_\nu(x)\le \min\big(f(x_1)+f(x_2)+...f(x_\nu)\big)$$

Σχόλιο

Με ανάλογους συλλογισμούς μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\max f_1(x)+\max f_2(x)+...\max f_\nu(x)\le \max\big(f(x_1)+f(x_2)+...f(x_\nu)\big)$$

όπου οι συναρτήσεις $f_1, f_2, ..., f_\nu$ είναι συνεχείς σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Εφαρμογές – Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f_o(x)=\alpha x^2+2\beta x,\ \alpha>0$.

Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ με } f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\frac{\beta^2}{\alpha}$$

Έστω τώρα οι συναρτήσεις

$$f_1(x)=\alpha_1x^2+2\beta_1x,\ \alpha_1>0$$

$$f_2(x)=\alpha_2x^2+2\beta_2x,\ \alpha_2>0$$

.....

$$f_\nu(x)=\alpha_\nu x^2+2\beta_\nu x,\ \alpha_\nu>0$$

Το άθροισμα των ν αυτών συναρτήσεων είναι η συνάρτηση

$$f(x)=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu)x^2+2(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)x$$

Το ελάχιστο της f πραγματοποιείται για

$$x=-\frac{\beta_1+\beta_2+...\beta_\nu}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}$$

και είναι ίσο με $-\dfrac{(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}$

Έτσι, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση θα είναι: $-\dfrac{\beta_1^2}{\alpha_1}-\dfrac{\beta_2^2}{\alpha_2}-...-\dfrac{\beta_\nu^2}{\alpha_\nu}\le-\dfrac{(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}$ ή

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2}+...+\frac{\beta_\nu^2}{\alpha_\nu}\ge\frac{(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu},\quad (1)$$

Από την (1) μπορούν να προκύψουν μερικές γνωστές ανισότητες.

- Αν στην (1) θέσουμε:

$$\beta_i=\gamma_i\delta_i,\ i\in\{1,2,...,\nu\} \text{ και } \alpha_i=\gamma_i^2$$

παίρνουμε:

$$\frac{\gamma_1^2\delta_1^2}{\gamma_1^2}+\frac{\gamma_2^2\delta_2^2}{\gamma_2^2}+...+\frac{\gamma_\nu^2\delta_\nu^2}{\gamma_\nu^2}\ge\frac{(\gamma_1\delta_1+...+\gamma_\nu\delta_\nu)^2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2+...+\gamma_\nu^2} \text{ ή}$$

$$\left(\delta_1^2+\delta_1^2+...+\delta_\nu^2\right)\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2+...+\gamma_\nu^2\right)\ge(\delta_1\gamma_1+\delta_2\gamma_2+...+\delta_\nu\gamma_\nu)^2$$

δηλαδή αποδείξαμε την γνωστή ανισότητα

Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz

- Αν στην (1) θέσουμε:

$$\beta_1=\beta_2=...=\beta_\nu=1$$

Παίρνουμε:

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}\ge\frac{\nu^2}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu} \text{ ή}$$

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\ge\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}}$$

δηλαδή καταλήξαμε στην ανισότητα Α.Μ ≥ Η.Μ όπου Α.Μ, Η.Μ είναι ο αριθμητικός και ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ αντίστοιχα.

- Αν στην (1) θέσουμε

$$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu=1$$

Παίρνουμε $\beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_\nu^2\geq\frac{(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)^2}{\nu}$

απ' όπου λαμβάνουμε την

$$\frac{\beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_\nu^2}{\nu}\geq\frac{(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)^2}{\nu^2}$$ ή

$$\sqrt{\frac{\beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_\nu^2}{\nu}}\geq\frac{|\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu|}{\nu}\geq\frac{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}{\nu}$$

δηλαδή καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο τετραγωνικός μέσος των $\beta_1,\beta_2...\beta_\nu$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμητικού μέσου των αριθμών αυτών.

2. Έστω η συνάρτηση $f_o(x)=\alpha\ln x-\beta x+\alpha$ με $x,\alpha,\beta>0$. Είναι: $f_o'(x)=\frac{\alpha-\beta x}{x}$

οπότε από τον πίνακα μεταβολών της $f_o(x)$ προκύπτει ότι η f_o παρουσιάζει μέγιστο για $x=\frac{\alpha}{\beta}$ με $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\alpha\ln\frac{\alpha}{\beta}$

Έστω τώρα ν συναρτήσεις

$$f_1(x)=\alpha_1\ln x-\beta_1 x+\alpha_1,\ \ \alpha_1,\beta_1>0$$
$$f_2(x)=\alpha_2\ln x-\beta_2 x+\alpha_2,\ \ \alpha_2,\beta_2>0$$
$$.....$$
$$f_\nu(x)=\alpha_\nu\ln x-\beta_\nu x+\alpha_\nu,\ \ \alpha_\nu,\beta_\nu>0$$

με άθροισμα τη συνάρτηση

$$f(x)=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu)\ln x-(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)x+\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu$$

Το μέγιστο της f πραγματοποιείται για

$$x=\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}$$

και είναι

$$f_{max}=f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\right)=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu)\ln\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\max f_1(x)+\max f_2(x)+...\max f_\nu(x)\leq\max\left(f(x_1)+f(x_2)+...f(x_\nu)\right)$$

οπότε έχουμε:

$$(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu)\ln\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\leq\alpha_1\ln\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\alpha_2\ln\frac{\alpha_2}{\beta_2}+...+\alpha_\nu\ln\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$$

ή

$$\ln\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}\leq\ln\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}+\ln\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}+...+\ln\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

ή

$$\ln\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}\leq\ln\left[\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\cdot....\cdot\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)^{\alpha_\nu}\right]$$

ή

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}\leq\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\cdot....\cdot\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

δηλαδή καταλήξαμε στην ανισότητα

Αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu,\beta_1,\beta_2,...,\beta_\nu$ είναι θετικοί τότε ισχύει

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}\leq\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\cdot....\cdot\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

Συνέπειες της παραπάνω

- Αν θέσουμε $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu=1$ τότε παίρνουμε:

$$\left(\frac{\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\right)^\nu\leq\frac{1}{\beta_1}\cdot\frac{1}{\beta_2}\cdot...\cdot\frac{1}{\beta_\nu}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}\leq\frac{1}{\sqrt[\nu]{\beta_1\cdot\beta_2\cdot....\cdot\beta_\nu}}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{\beta_1\cdot\beta_2\cdot....\cdot\beta_\nu}$$

δηλαδή την γνωστή ανισότητα $AM\geq GM$

- Αν θέσουμε $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=1$ και $\gamma_1=\frac{\beta_1}{\alpha_1},\gamma_2=\frac{\beta_2}{\alpha_2},...,\gamma_\nu=\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}$ τότε παίρνουμε

$$\frac{1}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+...+\alpha_\nu\gamma_\nu}\leq\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)^{\alpha_2}\cdot....\cdot\left(\frac{1}{\gamma_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$
$$\Leftrightarrow\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+...+\alpha_\nu\gamma_\nu\geq\gamma_1^{\alpha_1}\cdot\gamma_2^{\alpha_2}\cdot....\cdot\gamma_\nu^{\alpha_\nu}$$

δηλαδή καταλήξαμε στην λεγόμενη ανισότητα των βαρών, που διατυπώνεται ως εξής:

Αν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu>0$ με $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=1$ και $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_\nu>0$ τότε ισχύει:

$$\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+...+\alpha_\nu\gamma_\nu\geq\gamma_1^{\alpha_1}\cdot\gamma_2^{\alpha_2}\cdot....\cdot\gamma_\nu^{\alpha_\nu}$$

- Αν θέσουμε $\beta_1=\beta_2=...=\beta_\nu=\frac{1}{\nu}$ τότε παίρνουμε:

$$\nu^{\alpha_1}\cdot\alpha_1^{\alpha_1}\cdot\nu^{\alpha_2}\cdot\alpha_2^{\alpha_2}\cdot....\cdot\nu^{\alpha_\nu}\cdot\alpha_\nu^{\alpha_\nu}\geq(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}$$
$$\Leftrightarrow\alpha_1^{\alpha_1}\cdot\alpha_2^{\alpha_2}\cdot....\cdot\alpha_\nu^{\alpha_\nu}\geq\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}$$

δηλαδή έχουμε:

Αν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu>0$, τότε ισχύει:

$$\alpha_1^{\alpha_1}\cdot\alpha_2^{\alpha_2}\cdot....\cdot\alpha_\nu^{\alpha_\nu}\geq\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}$$

Σχόλιο

Στα ίδια ακριβώς συμπεράσματα θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε ως βάση τη συνάρτηση $g(x)=\alpha e^x-\beta x-\beta,\ \alpha,\beta>0$

- Αν θέσουμε $\alpha_1=1, \alpha_2=2, \ldots, \alpha_\nu=\nu$ τότε παίρνουμε την ανισότητα

$$1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot\nu^\nu\geq\left(\frac{1+2+\ldots+\nu}{\nu}\right)^{1+2+\ldots+\nu} \quad \text{ή}$$

$$1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot\nu^\nu>\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}$$

Στην τελευταία δεν έχουμε ισότητα επειδή οι παράγοντες είναι άνισοι.

3. Έστω η συνάρτηση

$$f_o(x)=\beta\ln x+\frac{\alpha}{x},\ x,\alpha,\beta>0$$

Είναι: $f_o'(x)=\dfrac{\beta x-\alpha}{x^2}$.

Η f_o παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\dfrac{\alpha}{\beta}$ και ισχύει

$$f_o\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\beta\ln\frac{\alpha}{\beta}+\beta=\beta\left(1+\ln\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Θεωρούμε τις ν συναρτήσεις

$$f_1(x)=\beta_1\ln x+\frac{\alpha_1}{x}$$

$$f_2(x)=\beta_2\ln x+\frac{\alpha_2}{x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_\nu(x)=\beta_\nu\ln x+\frac{\alpha_\nu}{x}$$

με $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu>0,\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu>0,\ x>0$

Το άθροισμα αυτών είναι η συνάρτηση

$$f(x)=(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)\ln x+\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{x}$$

Το ελάχιστο της f πραγματοποιείται για

$$x=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}$$

και είναι ίσο με

$$(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)\left[1+\ln\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}\right]$$

Επομένως μετά τις πράξεις έχουμε:

$$(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)\cdot\ln\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}$$

$$\geq\beta_1\ln\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\beta_2\ln\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\ldots+\beta_\nu\ln\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}\right)^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}\geq\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)^{\beta_\nu}$$

δηλαδή έχουμε:

Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu>0,\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu>0$, τότε ισχύει η

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}\right)^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}$$

$$\geq\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)^{\beta_\nu}$$

Σχόλιο

Από την παραπάνω ανισότητα με κατάλληλες τιμές των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ και $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu$ καταλήγουμε σε γνωστές ανισότητες. Για παράδειγμα με $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_\nu=1$ καταλήγουμε στην A.M –G. M. κλπ.

4. Έστω η συνάρτηση

$$f_o(x)=\alpha\cdot x\ln x-(\alpha+\beta)x,\ \alpha,\beta,\ x>0$$

η οποία παρουσιάζει ελάχιστο για $x=e^{\frac{\beta}{\alpha}}$ και η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με $-\alpha e^{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Θεωρούμε τις ν συναρτήσεις

$$f_1(x)=\alpha_1 x\ln x-(\alpha_1+\beta_1)x$$

$$f_2(x)=\alpha_2 x\ln x-(\alpha_2+\beta_2)x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_\nu(x)=\alpha_\nu x\ln x-(\alpha_\nu+\beta_\nu)x$$

με $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu>0,\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu>0,\ x>0$

Το άθροισμα αυτών είναι η συνάρτηση

$$f(x)=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)x\ln x-[(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\ldots+(\alpha_\nu+\beta_\nu)]x$$

Με ανάλογη πορεία όπως στα προηγούμενα παραδείγματα καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\alpha_1 e^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}+\alpha_2 e^{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}+\ldots+\alpha_\nu e^{\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}}\geq(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)e^{\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}}$$

από την οποία προκύπτει ότι

Αν $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=1=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu$

τότε

$$\alpha_1 e^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}+\alpha_2 e^{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}+\ldots+\alpha_\nu e^{\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}}\geq e$$

Βιβλιογραφία

1. Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου
2. περιοδικό ΚΒΑΗΤ
3. περιοδικό Gazeta Matematica



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ο άνθρωπος που έλυσε τον πιο δύσκολο γρίφο

Ένας σπουδαίος μαθηματικός, που όμως η προσφορά του αναγνωρίστηκε μετά τον θάνατό του, ήταν ο ***Alan Matheson Turing*, [1912 – 1954]**. Ο **Turing** έλυσε ένα δύσκολο γρίφο και βοήθησε αποτελεσματικά στη διάρκεια του Β΄ Παγκοσμίου πολέμου ώστε να ηττηθεί ο Χίτλερ και να απαλλαγή η Ευρώπη από τους Ναζί. Αποκρυπτογράφησε τη Γερμανική **κρυπτογραφική** συσκευή Enigma, την οποία χρησιμοποιούσαν οι Γερμανοί στις στρατιωτικές επικοινωνίες τους. Έτσι μπορούσαν οι Σύμμαχοι να παρακολουθούν τις κινήσεις των Γερμανικών στρατευμάτων και να τους νικήσουν. Ο Άλαν Τούρινγκ (*Alan Matheson Turing)*, θεωρείται ο **«πατέρας της επιστήμης υπολογιστών»**, χάρη στην πολύ μεγάλη συνεισφορά του στο γνωστικό πεδίο της **θεωρίας υπολογισμού** κατά τη **δεκαετία του 1930**, αλλά και της **τεχνητής νοημοσύνης,** χάρη στο λεγόμενο τεστ **Turing**, που πρότεινε το 1950, δηλαδή έναν τρόπο για να διαπιστωθεί πειραματικά αν μία μηχανή έχει **αυθεντικές** γνωστικές **ικανότητες** και μπορεί να σκεφτεί. Οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν τη μεγαλοφυΐα του όταν ήταν **έξι ετών**. Μετά τον Πόλεμο, σχεδίασε έναν από τους πρώτους ηλεκτρονικούς ψηφιακούς υπολογιστές και κατασκεύασε μια υπολογιστική μηχανή στο Πανεπιστήμιο του Μάντσεστερ. Όμως η καταδίκη του για προσβολή της δημοσίας αιδούς, του κατέστρεψε τη σταδιοδρομία αλλά και τη ζωή του. Τον φυλάκισαν και τον υπέβαλαν σε ορμονοθεραπεία με αποτέλεσμα να χάσει τη ζωή του. Προς τιμήν του από το 1966 έχουμε το **Βραβείο Turing**, που είναι η ύψιστη επιστημονική διάκριση στον χώρο της πληροφορικής.



Γρίφοι

Πάντα το ίδιο: Γράψτε έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. Μετρήστε τον αριθμό πρώτα των άρτιων και μετά των περιττών ψηφίων και γράψτε τους αριθμούς που βρίσκετε διαδοχικά καθώς και τον αριθμό όλων των ψηφίων. Συνεχίστε μέχρι να έχετε ένα 3ψήφιο αριθμό που δεν μεταβάλλεται. Τι παρατηρείτε;

Το Βαρέλι: *Το πετρέλαιο το μετράμε σε βαρέλια γιατί στα μέσα του 19ου αιώνα για τη μεταφορά του πετρελαίου χρησιμοποιήθηκαν τα παλιά ξύλινα βαρέλια από ουίσκι. Αυτή η μονάδα της μέτρησης έχει παραμείνει αμετάβλητη παρά την αντικατάσταση των ξύλινων βαρελιών από τα μεγαλύτερα βαρέλια χάλυβα ή την αντικατάσταση των τελευταίων από τις σωληνώσεις. Τα βαρέλια πετρελαίου ανά ημέρα (bpd) είναι μια τυποποιημένη μονάδα της παραγωγής πετρελαίου. Ένα βαρέλι πετρελαίου είναι 42 αμερικανικά γαλόνια ή 159 λίτρα.*



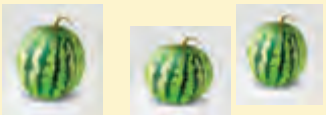
Αν οι παγκόσμιες ανάγκες σε πετρέλαιο είναι 10 εκατομμύρια βαρέλια ημερησίως, πόσα βαρέλια μπορεί να μειωθεί η κατανάλωση αν τοποθετήσουμε 20 εκατομμύρια ηλιακούς συλλέκτες που ο καθένας καλύπτει ημερησίως το 40% της ενέργειας που δίνουν 100 λίτρα πετρελαίου;



Μαθητές φίλοι: Ποια είναι η πιθανότητα δύο μαθητές ενός σχολείου να έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων από τους μαθητές του ίδιου σχολείου;

Τρείς μανάβηδες : Τρείς μανάβηδες στη λαϊκή αγορά πούλησαν καρπούζια ο Α 20, ο Β 30 και ο Γ 40 όλα του ίδιου βάρους και της ίδιας αξίας. Μέχρι το μεσημέρι και οι τρείς πούλησαν στην ίδια τιμή. Μετά το μεσημέρι ο καθένας πούλησε με διαφορετική τιμή. Οι τιμές είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί. Στο τέλος είχαν πουλήσει όλα τα καρπούζια που είχαν και είχαν εισπράξει το ίδιο ποσό (π.χ. 100€). Πως έγινε αυτό;

Να σημειωθεί ότι αυτό το πρόβλημα προέρχεται Ιστορικά, από την Αρχαία Ελλάδα





αφορμές ... και στιγμιότυπα



Γιατρός λύνει άλυτο μαθηματικό πρόβλημα με τη βοήθεια της AI

Η OpenAI βοήθησε πρόσφατα, στη λύση ενός άλυτου μαθηματικού γρίφου **22 ετών**. Μια σημαντική επιστημονική εξέλιξη σημειώθηκε στον τομέα των εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Τεχνητής Νοημοσύνης (AI). Ο **Κινέζος** νευροχειρουργός **Jin Shanmu** από το **Πεκίνο**, χρησιμοποιώντας ένα εξειδικευμένο μοντέλο της OpenAI, καταφέρνει να φτάσει στην απόδειξη της εικασίας του **Crouzeix**-ενός προβλήματος της γραμμικής άλγεβρας που παρέμενε ανοιχτό πρόβλημα από το **2004**.

Το χρονικό της ανακάλυψης: Η εμπλοκή του **Jin Shanmu** με το πρόβλημα δεν προήλθε από ακαδημαϊκή ενασχόληση με τα καθαρά Μαθηματικά. Στο πλαίσιο της ιατρικής του έρευνας, για τους **διακρανιακούς υπερήχους εγκεφάλου**, ο γιατρός μελέτησε την ανάλυση πινάκων. Εκεί συνάντησε την εικασία του **Crouzeix**:

Ο **Jin Shanmu** διαμόρφωσε μια σειρά αυστηρών οδηγιών προς το μοντέλο AI, ζητώντας του να αναλύσει το πρόβλημα από τις πρώτες αρχές και να αποφύγει παλαιότερες αποτυχημένες προσεγγίσεις. Το συγκεκριμένο μοντέλο της OpenAI εκτέλεσε υπολογισμούς και δοκιμές στρατηγικών απόδειξης σε μια συνεχή αυτόνομη συνεδρία περίπου 16 ωρών. Η AI εντόπισε μια απροσδόκητη προσέγγιση (μεθοδολογία δειγματοληψίας), απλοποιώντας τον υπολογισμό και προσδιόρισε μια πλήρη απόδειξη.



Τι είναι όμως η εικασία του Crouzeix; Η εικασία διατυπώθηκε το 2004 από τον Γάλλο μαθηματικό Michel Crouzeix. Αφορά τη **συμπεριφορά συναρτήσεων** όταν εφαρμόζονται σε πίνακες (πλέγματα αριθμών). **Η βασική ιδέα:** Η εικασία υποστηρίζει ότι η νόρμα μιας συνάρτησης ενός πίνακα δεν μπορεί να υπερβεί το διπλάσιο (σταθερά 2) της μέγιστης τιμής της συνάρτησης πάνω στο «αριθμητικό πεδίο» (numerical range) του πίνακα. Η επιβεβαίωση αυτής της ισότητας θεωρείται σημαντική για την αριθμητική ανάλυση, τη θεωρία τελεστών, την ευστάθεια αλγορίθμων υπολογιστών και τη μοντελοποίηση συστημάτων απεικόνισης.

Το περιστατικό αυτό αποτελεί **πλέον νέο σημείο** αναφοράς για τη χρήση **προηγμένων γλωσσικών μοντέλων** στην επιστημονική έρευνα αναδεικνύοντας δύο επίπεδα:

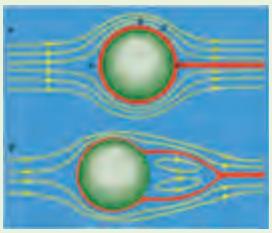
- Τον **Ερευνητικό** συνεργάτη: Αποδεικνύει ότι τα μοντέλα AI μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία παραγωγής νέων επιστημονικών συλλογισμών και όχι μόνο ως μηχανές αναζήτησης.
- Την **Διεπιστημονική** προσβασιμότητα: Επιτρέπει σε επιστήμονες εκτός του εκάστοτε εξειδικευμένου πεδίου να συμβάλουν στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων.

[**Πηγές:** Alfavita.gr, Newsbomb, Almopia24, Kathimerini.gr]

Οι εξισώσεις Navier-Stokes και η λύση της OpenAI στο πρόβλημα της χιλιετίας

Λύθηκε μέσα σε 88 ώρες, ένα από τα 7 "Μαθηματικά Προβλήματα της Χιλιετίας"

Πρόκειται για το πρόβλημα **Navier-Stokes** ένα από τα επτά περίφημα «Προβλήματα της Χιλιετίας» του Clay Mathematics Institute, που θεωρούνται μεταξύ των δυσκολότερων ανοιχτών προβλημάτων στα Μαθηματικά. Η πρόσφατη ανακοίνωση (**Σεπτ. 2026**) αυτή δεν ήταν αναίμακτη, αφού συνοδεύτηκε από αντιδράσεις, αλλά και πλήθος ερωτημάτων για το πώς φτάσαμε στη λύση[1]. Ο Tristan Buckmaster, καθηγητής **Μαθηματικών** στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης, ανέφερε ότι η OpenAI **επιτάχυνε** τις δικές της προσπάθειες όταν πληροφορήθηκε πως ο ίδιος και ένας ακόμη ερευνητής, ο οποίος εργάζεται στην ανταγωνίστρια **Anthropic**, βρίσκονταν κοντά στο να ανακοινώσουν δική τους σημαντική πρόοδο πάνω στο ίδιο πρόβλημα[2].

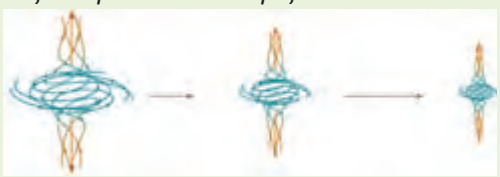


Πώς λύθηκε το πρόβλημα από το AI: Σύμφωνα με την OpenAI, το πρόβλημα Navier-Stokes αντιμετωπίστηκε με ένα ισχυρό εσωτερικό σύστημα τεχνητής νοημοσύνης.

Περίπου 10.000 αυτόνομα συστήματα τεχνητής νοημοσύνης εργάστηκαν **ταυτόχρονα** πάνω στο πρόβλημα και, όπως ανακοίνωσε η εταιρεία, κατέληξαν σε λύση μέσα σε **88** ώρες. Στη συνέχεια, το σύστημα αυτό χρειάστηκε περίπου **17** ώρες για να επαληθεύσει την απόδειξη. Η OpenAI χαρακτήρισε το αποτέλεσμα ένδειξη της ταχύτητας με την οποία εξελίσσονται τα νέα μοντέλα τεχνητής νοημοσύνης. «Ένας βασικός στόχος της δουλειάς μας είναι να δώσουμε στους επιστήμονες εργαλεία για να προωθήσουν την έρευνα και την τεχνολογία προς όφελος ολόκληρης της ανθρωπότητας», ανέφεραν ερευνητές της εταιρείας.

Τι είναι το μαθηματικό πρόβλημα Navier-Stokes: Οι εξισώσεις Navier-Stokes χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κίνηση **των ρευστών,** όπως το **νερό και ο αέρας**. Το μεγάλο μαθηματικό ερώτημα αφορά το αν οι λύσεις αυτών των εξισώσεων παραμένουν πάντοτε ομαλές ή αν, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, μπορούν να παρουσιάσουν ένα είδος μαθηματικής «κατάρρευσης». Η απόδειξη της OpenAI, σύμφωνα με την εταιρεία, δείχνει ότι μπορεί πράγματι να υπάρξει τέτοια συμπεριφορά, με τις εξισώσεις να οδηγούνται σε σημείο όπου οι ταχύτητες των ρευστών γίνονται θεωρητικά άπειρες.

Ο **Δημήτριος Χριστοδούλου (Βραβείο Shaw 2011)**[3], είχε αναφερθεί στις μελέτες του σε θέματα ρευστών και συγκεκριμένα στην απόδειξή του σχετικά με τις εξισώσεις Euler για συμπιεστά ρευστά ως εξής: *αν σε ένα ρευστό, που αρχικά είναι απόλυτα ήρεμο και ομαλό, προκαλέσουμε μια μικρή διαταραχή οι ίδιες οι εξισώσεις της φύσης θα το οδηγήσουν αναπόφευκτα, σε πεπερασμένο χρόνο, σε μια κατάσταση όπου ο ρυθμός αλλαγής της θερμοκρασίας, της πίεσης και της ταχύτητας του ρευστού απειρίζονται. Όταν αυτοί οι ρυθμοί απειρίζονται, σχηματίζονται «κύματα κρούσεως».*



Σε εκείνο το σημείο οι εξισώσεις δεν περιγράφουν πλέον μια συνεχή, ομαλή κατάσταση. Μόλις περάσει αυτό το κύμα κρούσεως, ο **Χριστοδούλου** έδειξε ότι το ρευστό αποκτά **ακαριαία στροβιλισμό**. Στο πρόβλημα του Χριστοδούλου, των εξισώσεων Euler, για συμπιεστά ρευστά, η απόδειξη σχηματισμού ανωμαλιών είναι ένα μνημειώδες μαθηματικό επίτευγμα διότι απαιτεί βαθιά **κατανόηση της γεωμετρίας** του χωροχρόνου, αλλά η φύση των εξισώσεων «επιτρέπει» πιο εύκολα τις ασυνέχειες.

Η απόδειξη (ή διάψευση) της ομαλότητας των εξισώσεων Navier-Stokes βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στη συναρτησιακή ανάλυση. Απαιτεί τον συνδυασμό αμέτρητων εκτιμήσεων, ανισοτήτων και οριακών συνθηκών. Είναι μια εξαιρετικά πολύπλοκη, αλλά ως έναν βαθμό «μηχανική» διαδικασία. Ένα πλήθος 10.000 συστημάτων **ΤΝ** μπορεί να εξερευνήσει ένα τέτοιο πρόβλημα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Σύμφωνα με την OpenAI χρειάστηκαν μόνο 88 ώρες!

---

[1] 25 κάτοχοι Fields Medal στα Μαθηματικά (μεταξύ αυτών **Tao, Scholze, Villani, Peligne**) μιλούν για μια «σοβαρή απόκλιση» ανάμεσα στους στόχους των εταιρειών AI και της μαθηματικής κοινότητας. Δεν ζητούν να σταματήσει η AI, αλλά δεν φτάνει μόνο, να έχουμε τη σωστή απάντηση, αλλά να καταλαβαίνουμε πως φτάσαμε σ' αυτήν.

[2] Η αντιπαράθεση ανάμεσα στις εταιρικές επιδιώξεις και στην επιστημονική διαδικασία, φαίνεται να διαμορφώνεται η άποψη ότι ο ρόλος των μαθηματικών θα περιορίζεται **στον έλεγχο** των αποτελεσμάτων.

[3] **Ευκλείδης Β΄** τεύχος 84 [2011].

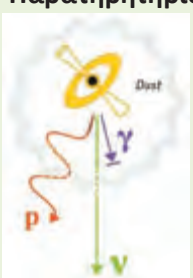
Όμως υπάρχουν κάποια άλλα μαθηματικά προβλήματα, όπως π.χ. η **Υπόθεση Riemann** (που αφορά την κατανομή των πρώτων αριθμών) από την θεωρία αριθμών και την μιγαδική ανάλυση στα οποία προς το παρόν τα σημερινά συστήματα Τεχνητής Νοημοσύνης δεν έχουν ακόμη δώσει κάποια λύση. Αυτά τα προβλήματα δεν λύνονται με μηχανικές διαδικασίες, αλλά απαιτούν την **δημιουργία νέων μαθηματικών δομών** και θεωριών, όπως έκανε ο **Andrew Wiles** για το Τελευταίο Θεώρημα του **Fermat**). Τα σημερινά γλωσσικά μοντέλα είναι εξαιρετικά στο να συνθέτουν υπάρχουσα γνώση, αλλά το ερώτημα **αν μπορούν να παράγουν** πραγματικά **πρωτότυπες** μαθηματικές ιδέες παραμένει ανοιχτό (προς το παρόν).
[**Πηγές:** Economist, Lemonde.fr, Newsroom, iEidiseis, eistoapeiron.blogspot.com, Dnews, News24/7]

Τα Nobel του 2026

Νόμπελ Ιατρικής: Οι K. Deisseroth, P. Hegemann και G. Nagel τιμήθηκαν για την **οπτογενετική** , την ανακάλυψη που επέτρεψε στους επιστήμονες να ελέγχουν **νευρικά κύτταρα με φως** και να βλέπουν, με πρωτοφανή ακρίβεια, πώς ο εγκέφαλος δημιουργεί μνήμες, συναισθήματα και συμπεριφορές. Μπορεί μια **ακτίνα φωτός** να μας βοηθήσει να καταλάβουμε πώς γεννιέται μια ανάμνηση; Πώς ο εγκέφαλος μετατρέπει τη δραστηριότητα δισεκατομμυρίων νευρικών κυττάρων σε φόβο, χαρά, κίνηση ή συμπεριφορά; Για πολλά χρόνια αυτά τα ερωτήματα βρίσκονταν στην καρδιά ενός από τα μεγαλύτερα μυστήρια της επιστήμης: του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος.



Νόμπελ Φυσικής: **Α**πονεμήθηκε στον στον **F. Halzen** «για την καθοριστική συμβολή του στο **Παρατηρητήριο Νετρίνων IceCube** και την ανακάλυψη **νετρίνων** υψηλής ενέργειας αστροφυσικής προέλευσης». Τα νετρίνα βρίσκονται παντού, αλλά **δεν κάνουν αισθητή την παρουσία τους**. Διαπερνούν ολόκληρη τη Γη και τα σώματά μας χωρίς να το αντιλαμβανόμαστε. Πολύ σπάνια, ένα και μόνο νετρίνο αλληλεπιδρά με έναν ατομικό πυρήνα, γεγονός που επιτρέπει σε κάποιον με τον κατάλληλο εξοπλισμό να τα εντοπίσει. Τα εξαιρετικά **υψηλής ενέργειας νετρίνα** δημιουργούνται στα ίδια περιβάλλοντα με άλλους τύπους σωματιδίων. Όμως, σε αντίθεση με άλλα σωματίδια, τα νετρίνα **φτάνουν σε εμάς** χωρίς να αλλάξουν κατεύθυνση ή να χάσουν ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να προσφέρουν πληροφορίες που δεν είναι διαθέσιμες με κανέναν άλλον τρόπο.



Νόμπελ Χημείας: Οι **H. B. Kagan** και **K. Soai** τιμώνται «*για την ανακάλυψη* ***των μη γραμμικών φαινομένων*** *και της αυτοκατάλυσης στην* ***ασύμμετρη οργανική σύνθεση****»*, έχοντας συμβάλει καθοριστικά στην επίλυση ενός από τα πλέον επίμονα προβλήματα της Χημείας: το πώς μπορεί να προκύψει αυθόρμητα, η λεγόμενη **ομοχειρομορφία**. Πρόκειται για ένα φαινόμενο που αφορά μόρια, όπως τα **αμινοξέα**, τα οποία μπορούν να υπάρχουν σε δύο διαφορετικές μορφές που είναι κατοπτρικά είδωλα η μία της άλλης, όπως ακριβώς το δεξί και το αριστερό χέρι. Στη φύση, όμως, και ειδικά στους ζωντανούς οργανισμούς, κυριαρχεί σχεδόν αποκλειστικά η μία από τις δύο μορφές. «Οι ανακαλύψεις τους, διαδραμάτισαν **καθοριστικό ρόλο** για τους χημικούς που επινοούν αντιδράσεις οι οποίες προορίζονται για την παρασκευή **φαρμακευτικών προϊόντων**».

Νόμπελ Λογοτεχνίας: Απονέμεται στην Καναδή συγγραφέα **A. Carson**, «για το τολμηρό και **εφευρετικό έργο της**, το οποίο, μέσα από έναν παιχνιδιάρικο διάλογο με την **κλασική παράδοση**, έχει δημιουργήσει νέες μορφές για τη σύγχρονη λογοτεχνία». Το έργο της, ξεχωρίζει για τον υβριδικό του χαρακτήρα, καθώς κινείται με άνεση ανάμεσα σε πολλά είδη. Σε πολλά από τα βιβλία της συνυπάρχουν, σε διαφορετικό βαθμό, η ποίηση, το δοκίμιο, η πεζογραφία, η κριτική και η θεατρική πρόζα. Παράλληλα, έχει μεταφράσει στα αγγλικά έργα της **αρχαιοελληνικής γραμματείας** και ποιητές όπως ο Σοφοκλής, ο Ευριπίδης, ο Όμηρος, η Σαπφώ και ο Αισχύλος. Η σχέση της με την αρχαιότητα παραμένει **σταθερός άξονας της γραφής** της, **όχι όμως ως μια απλή** αναδρομή στους κλασικούς. Αντίθετα, η **Carson** χρησιμοποιεί την αρχαία ποίηση ως υλικό για να συνομιλήσει **με το σήμερα**. Το πιο πρόσφατο βιβλίο της, **Wrong Norma** (2024), είναι μια συλλογή πεζών κειμένων, ποιημάτων και προσωπικών σημειώσεων, που συνοδεύονται από δική της εικονογράφηση.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Προσφορές



Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



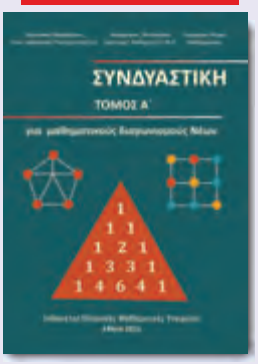
Τιμή βιβλίου: 20€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 15€

Νέο Βιβλίο

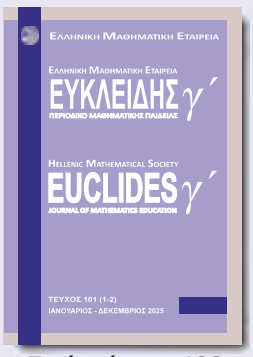


Τιμή βιβλίου: 15€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr